

**DISKRITISASI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL TAK
LINIER PADA POLA PEMBENTUKAN SEL**

SKRIPSI

Oleh:
MARYAM AFIANA
NIM. 09610046



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**DISKRITISASI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL TAK
LINIER PADA POLA PEMBENTUKAN SEL**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MARYAM AFIANA
NIM. 09610046

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**DISKRITISASI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL TAK
LINIER PADA POLA PEMBENTUKAN SEL**

SKRIPSI

Oleh:
MARYAM AFIANA
NIM. 09610046

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 27 Mei 2013

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**DISKRITISASI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL TAK
LINIER PADA POLA PEMBENTUKAN SEL**

SKRIPSI

Oleh:
MARYAM AFIANA
NIM. 09610046

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 15 Juni 2013

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd _____
NIP. 19770521 200501 2 004

Ketua Penguji : Abdussakir, M.Pd _____
NIP. 19751006 200312 1 001

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si _____
NIP. 19650414 200312 1 001

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si _____
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Maryam Afiana

NIM : 09610046

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Mei 2013

Yang membuat pernyataan,

Maryam Afiana
NIM. 09610046

MOTTO

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ

“Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah nasib satu kaum sehingga mereka sendiri mengubahnya.”

[QS. ar-Ra'd (13) : 11]

“Yang Terpenting Bukanlah Seberapa Berat Masalah, Tetapi Bagaimana Menyikapi Masalah Itu Sendiri.”

PERSEMBAHAN

*Dengan rasa syukur seraya mengharap ridho Ilahi
penulis persembahkan karya ini kepada :*

Ayahanda dan Ibunda tercinta

Kusnari dan Zulaiha Andawati

*Terimakasih atas do'a, dukungan, dan kasih sayang
senantiasa sebagai penyemangat di setiap langkah*

Adik tersayang

Hanafi

*Raihlah mimpi dan jadilah anak yang dapat
dibanggakan oleh orang tua*

Semoga Allah SWT melindungi mereka

KATA PENGANTAR



Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta karuniaNya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Diskritisasi Sistem Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier pada Pola Pembentukan Sel” dengan baik. Shalawat serta salam semoga tercurah kepada Nabi Agung Muhammad SAW yang telah membimbing umatnya dari gelapnya kekufuran menuju cahaya Islam yang terang benderang.

Penulis menyadari keterbatasan pengetahuan yang penulis miliki, karena itu tanpa keterlibatan dan sumbangsih dari berbagai pihak, sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Maka dari itu dengan segenap kerendahan hati patutlah penulis ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi bidang matematika.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi bidang keagamaan.
6. Seluruh dosen dan staf administrasi di Jurusan Matematika.

7. Bapak Kusnari dan Ibu Zulaiha Andawati, selaku orang tua yang senantiasa memberikan dukungan moril, spirituil, dan materiil.
8. Hanafi, selaku saudara tercinta.
9. Segenap keluarga besar di Kanigaran, Probolinggo.
10. Muhammad Aliyuddin, Musyarofah, Misbakhul Mustofin, S.Si, Muhammad Syafi'i, S.Si, Nur Azizah, selaku orang terdekat dan rekan diskusi yang memperlancar penelitian untuk skripsi ini.
11. Keluarga besar Majalah Suara Akademika.
12. Keluarga besar LPM Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
13. Seluruh teman seperjuangan di Jurusan Matematika angkatan 2009.
14. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu-persatu, atas segala yang telah diberikan kepada penulis dan dapat menjadi pelajaran.

Semoga karya ini bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Malang, Mei 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR ISTILAH	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Model Matematika Pola Pembentukan Sel	9
2.2 Mekanisme <i>Chemotactic</i> Pola Pembentukan Sel	12
2.3 Persamaan Diferensial Parsial Pola Pembentukan Sel	15
2.4 Metode Beda Hingga Pola Pembentukan Sel	20
2.5 Skema Eksplisit Pola Pembentukan Sel	21
2.6 Kajian Agama Pola Pembentukan Sel	23
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Konstruksi Bentuk Diskrit Sistem PDP Tak Linier pada Pola Pembentukan Sel	26
3.2 Solusi Numerik Model Matematika pada Pola Pembentukan Sel	31
3.3 Simulasi Numerik	41
3.4 Pola Pembentukan Sel pada Tulang Lengan dalam Pandangan Islam	44

BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	47
4.2 Saran	48
DAFTAR PUSTAKA	49
LAMPIRAN 1	51
LAMPIRAN 2	55
LAMPIRAN 3	59



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Perbedaan Konsep Dasar antara Difusi dan Dispersi	13
Gambar 2.2	Jaringan Titik Hitungan dalam Bidang $r - t$	20
Gambar 2.3	Skema Eksplisit	22
Gambar 3.1	Jaringan Titik Hitung Skema Beda Hingga Eksplisit untuk Sistem Pola Pembentukan Sel	33
Gambar 3.2	Grafik Diskrit 3 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.01$	38
Gambar 3.3	Grafik Diskrit 2 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.01$	40
Gambar 3.4(a)	Grafik Diskrit 3 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.02$	42
Gambar 3.4(b)	Grafik Diskrit 3 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.04$	42
Gambar 3.5(a)	Grafik Diskrit 2 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.02$	43
Gambar 3.5(b)	Grafik Diskrit 2 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.04$	43

DAFTAR ISTILAH

Biokimia	: Ilmu yang mempelajari tentang peranan berbagai molekul dalam reaksi kimia
Chemoattractant	: Senyawa kimia yang dikeluarkan oleh chemotactic
Chemotactic	: Gerakan dari sel tubuh, bakteri, atau organisme sebagai respon akibat terpapar zat kimiawi tertentu dalam lingkungannya
Degradasi	: Penurunan sel
Diferensiasi	: Proses berkembangnya organ dalam waktu yang tidak bersamaan, sehingga menimbulkan situasi antara selesai di bagian lain namun belum selesai di bagian lainnya
Difusi	: Peristiwa mengalirnya / berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi ke bagian yang berkonsentrasi rendah
Embrio	: Tahapan awal dari pertumbuhan <i>vertebrata</i> (hewan bertulang punggung)
Fluktuasi	: Gejala yang menunjukkan turun-naik
Kepadatan sel	: Jumlah kandungan mineral tulang dalam setiap cm tulang
Produksi	: Pertambahan sel
Organisme	: Kumpulan molekul-molekul yang saling mempengaruhi sedemikian sehingga berfungsi secara stabil dan memiliki sifat hidup
Osilasi	: Gerakan (goyangan) ke kiri dan ke kanan atau ke atas atau ke bawah atau ke depan dan ke belakang; ayunan
Osteoblast	: Sel-sel tulang yang membentuk lapisan tulang baru selama tahap pembentukan dalam proses remodeling tulang
Osteoclast	: Sel-sel penghilang tulang yang melarutkan dan mengikis tulang selama tahap-tahap dari proses resorpsi remodeling tulang
Osteocyte	: Sel khas tulang dewasa (bukan tulang rawan)
Osteopenia	: Keropos tulang
Osteoporosis	: Tulang rapuh
Remodeling	: Sebuah proses seumur hidup di mana sel-sel tulang tua dihapus dari tulang dan diganti dengan sel-sel tulang yang baru (peremajaan tulang)
Resorpsi	: Penyerapan tulang
Steady-state	: Tunak / tidak bergantung waktu
Sel motil	: Sel yang bergerak

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Program Matlab Diskritisasi Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.01$51
Lampiran 2	Program Matlab Diskritisasi Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.02$55
Lampiran 3	Program Matlab Diskritisasi Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.04$59



DAFTAR SIMBOL

- n = Variabel untuk kepadatan sel
 c = Variabel untuk *chemoattractant*
 D = Konstanta positif pada proses difusi
 α = Koefisien *chemotactic* darisel motil
 r = Konstanta yang mengatur tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel
 γ = Konstanta yang mengatur tingkat produksi *chemoattractant*
 s = Parameter yang mengontrol pola spasial dan skala temporal
 L_0 = Batas bawah untuk interval r
 L = Batas atas untuk interval r
 T_0 = Batas bawah untuk interval t
 T = Batas atas untuk interval t
 l = Banyak titik *grid* untuk r
 k = Banyak titik *grid* untuk t
 Δr = Selisih jarak terhadap ruang
 Δt = Selisih jarak terhadap waktu

ABSTRAK

Afiana, Maryam. 2013. **Diskritisasi Sistem Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier pada Pola Pembentukan Sel**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si (II) Abdul Aziz, M.Si

Kata kunci: diskritisasi, persamaan diferensial parsial tak linier

Diskritisasi model merupakan prosedur transformasi model kontinu ke model diskrit. Diskritisasi dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit, yaitu dengan menurunkan persamaan diferensial parsial menjadi persamaan beda hingga. Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n + 1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui. Model yang digunakan dalam skripsi ini adalah model matematika sistem persamaan diferensial parsial tak linier pada pola pembentukan sel.

Inti dari penelitian ini adalah melakukan konstruksi model diskrit pola pembentukan sel dan didapatkan solusi numerik model matematika pada pola pembentukan sel. Metode yang dilakukan terdiri dari 3 tahap, yaitu tahap penjabaran model, tahap diskritisasi masing-masing persamaan, dan tahap solusi numerik model diskrit.

Hasil dari penelitian ini didapatkan model diskrit sistem persamaan diferensial parsial tak linier pada pola pembentukan sel dalam bentuk umum:

$$n_i^{j+1} = A_1 n_{i-1}^j + (1 - 2A_1)n_i^j + A_1 n_{i+1}^j - A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2A_3 n_i^j \cdot c_i^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i+1}^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j)$$

$$\text{dengan } A_1 = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}, A_2 = \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2}, A_3 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$$

$$c_i^{j+1} = B c_{i-1}^j + (1 - 2B)c_i^j + B c_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right)$$

$$\text{dengan } B = \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$$

Dalam selang $0 \leq r \leq 1$, model diskrit yang diamati saat $\Delta r = 0.01$ dengan parameter $D = 0.25$, $r = 0.04$, $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, $s = 600$, kondisi awal $n = 1$ dan $c = 0.5$ dan kondisi batas $\nabla n = 0$ dan $\Delta c = 0$. Kondisi awal $n = 1$, menunjukkan adanya gangguan terhadap pergerakan sel yang terjadi saat awal pembentukan. Perilaku n berhenti pada kondisi $n = 1$, yang mengartikan bahwa jumlah sel yang menghuni di suatu jaringan sudah penuh (padat). Kondisi awal $c = 0.5$, menunjukkan bahwa pergerakan sel berjalan mulus dan berhenti pada kondisi $c < 0.5$ untuk membentuk suatu kepadatan pada sel.

ABSTRACT

Afiana, Maryam. 2013. **Discretization System Non Linear Partial Differential Equations on the Pattern Formation of Cell.** Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si (II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: discretization, non linear of partial differential equations

Discretization model is transformation a model in continuous form to be a discrete one. It can be done by using an explicit finite difference scheme, is reduce partial differential equation become finite difference equation. In the explicit scheme, variable at time $n + 1$ is calculated based on the time variable n is already known. The model in this research is mathematical model of the system non linear partial differential equations on the pattern formation of cells.

The purpose of the research is show construction the discrete model on the pattern formation of cells and obtained numerical solutions of mathematical models on the pattern formation of cells. This research was done by three steps, is elaboration step of the models, discretization step each of equations, and numerical solution step discrete models.

The results of this research obtain a discrete model system of partial differential equations non linear on the pattern formation of cells in general form:

$$n_i^{j+1} = A_1 n_{i-1}^j + (1 - 2A_1)n_i^j + A_1 n_{i+1}^j - A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2A_3 n_i^j \cdot c_i^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i+1}^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j)$$

$$\text{with } A_1 = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}, A_2 = \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2}, A_3 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$$

$$c_i^{j+1} = B c_{i-1}^j + (1 - 2B)c_i^j + B c_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right)$$

$$\text{with } B = \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$$

In the interval $0 \leq r \leq 1$, the observed discrete models when $\Delta r = 0.01$ with parameter $D = 0.25$, $r = 0.04$, $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, $s = 600$, the initial conditions $n = 1$ and $c = 0.5$ and conditions limit $\nabla n = 0$ and $\nabla c = 0$. Initial conditions $n = 1$, indicating a disruption of the cell movements that occur during early formation. Behavior n stops on the condition $n = 1$, which means that the number of cells in a tissue inhabit is full (solid). Initial condition $c = 0.5$, indicating that the movement of cells running smoothly and stop on condition $c < 0.5$ to form a density in the cells.

مستخلص البحث

مريم أفيانا. ٢٠١٣. **متقطعية المنهج معادلة تفاضلية جزئية لاخطى على تشكيل الخلية**. بحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم وتكنولوجية جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانق. المشرف: (١) الدكتور. عثمان بغلي الماجستير (٢) عبد العزيز الماجستير.

الكلمات المفتاحية : متقطعية، منهج معادلة تفاضلية جزئية لاخطى

متقطعية هي فعالية التحول طريقة المستمرة إلى طريقة متقطعة. يفعل هذا الطريقة بطريقة فرق حتى خطة الخارجي وهي بأهبط معادلة تفاضلية يجعلها معادلة الفرق المعدود. في خطة الخارجي، متغير في $n + 1$ حُسب على متغير عندما n الذي يُعرف. طريقة الذي يستخدم في البحث هي طريقة الرياضية منهج معادلة تفاضلية جزئية لاخطى على تشكيل الخلية.

نواة هذا البحث هي بفعل إنشاء طريقة متقطعة في شكل الخلية ووجدت الحل العددي طريقة الرياضية في تصميم الشكل الخلية. يتكون من ثلاث درجة، وهو درجة شرح الطريقة، درجة متقطعية في كل معادلة، وطريقة الحل العددي طريقة متقطعة.

ونتيجة هذا البحث، يحصل طريقة منهج معادلة تفاضلية جزئية لاخطى على تشكيل الخلية في شكل العام كمايلي:

$$n_i^{j+1} = A_1 n_{i-1}^j + (1 - 2A_1) n_i^j + A_1 n_{i+1}^j - A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2A_3 n_i^j \cdot c_i^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i+1}^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j)$$

$$A_1 = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}, A_2 = \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2}, A_3 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$$

$$c_i^{j+1} = B c_{i-1}^j + (1 - 2B) c_i^j + B c_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right)$$

$$B = \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$$

منذ $0 \leq r \leq 1$ ، طريقة التي يرقبُ عندما $\Delta r = 0.01$ بمعلمة $D = 0.25$ ، $\alpha = 2$ ، $r = 0.04$ ، $s = 600$ ، $\gamma = 1$ ، حال الأول $n = 1$ ، يدل هناك أذية إلى حركة الخلية في أول شكلها. وسلوك n وقف في $n = 1$ ، ومعناها عدد الخلة في نسيج صلبا. حال الأول $c = 0.5$ ، يدل على حركة الخلة طلاقة ووفق في حال $c < 0.5$ لشكل الصلب الخلة.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dewasa ini seringkali dihadapkan pada permasalahan-permasalahan dari yang sederhana hingga permasalahan yang kompleks. Manusia dituntut untuk selalu berusaha dalam menyelesaikan permasalahan tersebut. Oleh karena itu, dibutuhkan sebuah analisis yang dapat diterima secara ilmiah dan masuk akal terhadap setiap permasalahan yang terjadi. Matematika dapat digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan tersebut.

Salah satu pengembangan matematika adalah pemodelan matematika. Penggunaan model matematika memiliki peranan yang penting dalam mengaplikasikan beberapa bidang ilmu. Permasalahan yang ada dalam kehidupan ditransformasikan ke dalam model matematika menjadi bentuk asumsi-asumsi. Salah satu contoh yang dapat dimodelkan dalam matematika adalah pola pembentukan sel.

Pola dan bentuk biologis suatu generasi merupakan bagian penting pada awal suatu perkembangan embrio. Sel embrionik dapat bermigrasi kemudian berdiferensiasi membentuk organ yang bervariasi. Banyak struktur yang mengikuti pola umum yang sudah ditentukan, seperti pola pada bulu dan sisik, sementara yang lain memiliki pola khusus tersendiri seperti garis-garis pada aligator dan belang-belang pada macan tutul. Tanda-tanda tersebut umumnya terbentuk pada awal suatu perkembangan (Winters, dkk., 1990:356).

Hal serupa juga terjadi pada perkembangan tulang lengan *vertebrata*. Pembentukan pola-pola adalah proses di mana sel embrionik berkoordinasi secara spasial membentuk jaringan yang terdiferensiasi. Kemampuan untuk melakukan proses tersebut merupakan suatu tahap yang dramatis pada perkembangan organisme. Embrio tidak hanya dapat membentuk sel-sel dengan tipe yang berbeda-beda pada tubuhnya tetapi juga menentukan jaringan yang fungsional. Mekanisme itu terjadi melalui serangkaian aktifitas biokimia yang melibatkan berbagai molekul-molekul tertentu yang pada akhirnya berperan dalam mengkoordinasi suatu pola biologis.

Dalam firman Allah QS. Al Mu'minuun ayat 12-14 dijelaskan:

وَلَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ مِنْ سُلَالَةٍ مِّنْ طِينٍ ﴿١٢﴾ ثُمَّ جَعَلْنَاهُ نُطْفَةً فِي قَرَارٍ مَّكِينٍ ﴿١٣﴾
ثُمَّ خَلَقْنَا النُّطْفَةَ عَلَقَةً فَخَلَقْنَا الْعَلَقَةَ مُضْغَةً فَخَلَقْنَا الْمُضْغَةَ عِظْمًا فَكَسَوْنَا
الْعِظْمَ لَحْمًا ثُمَّ أَنْشَأْنَاهُ خَلْقًا آخَرَ فَتَبَارَكَ اللَّهُ أَحْسَنُ الْخَالِقِينَ ﴿١٤﴾

Artinya: “Dan sesungguhnya, kami telah menciptakan manusia dari sari pati (berasal) dari tanah. Kemudian kami menjadikannya air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kukuh (rahim). Kemudian, air mani itu kami jadikan sesuatu yang melekat, lalu sesuatu yang melekat itu kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu kami jadikan tulang belulang, lalu tulang belulang itu kami bungkus dengan daging, kemudian, kami menjadikannya makhluk yang (berbentuk) lain. Maha Suci Allah, pencipta yang paling baik.”

Dalam perspektif ilmu biologi, ayat di atas menjelaskan bahwasanya manusia berasal dari sel tunggal dalam rahim sang ibu, yang berukuran lebih kecil daripada sebutir garam. Sel mengalami pembelahan mitosis yakni terbentuknya benang-benang kromosom dalam inti. Kemudian sel ini membelah menjadi 2, kemudian menjadi 4, membelah lagi menjadi 8, membelah lagi menjadi 16, dan

seterusnya (Yatim, 1982:19). Juga disebutkan dari ayat di atas bahwa manusia diciptakan menjadi segumpal daging yang akan menjadi tulang belulang, lalu tulang belulang itu di bungkus dengan daging, kemudian menjadi makhluk yang (berbentuk) lain. Sehingga mulai membentuk lengan, kaki, dan mata. Inilah proses diferensiasi oleh sel, di mana banyak organ yang berkembang dalam waktu yang tidak bersamaan. Sehingga menimbulkan situasi antara selesai di bagian lain namun belum selesai di bagian lainnya.

Dalam penelitian Myerscough, dkk. (1998) memberikan solusi numerik untuk menyelidiki peran syarat batas dan efek skala pada pola pembentukan sel. Dengan perbedaan kondisi batas menyebabkan grafik yang dihasilkan juga berbeda dan dengan peningkatan skala yaitu nilai s mengakibatkan peningkatan pada ukuran domain. Pola pembentukan sel yang digunakan adalah model *chemotactic* yang berupa sistem Persamaan Diferensial Parsial (PDP) tak linier bentuk kontinu. Dalam penelitian tersebut ditunjukkan bahwa hasil satu dimensi dengan domain $0 \leq x \leq 1$ akan memberikan wawasan penting mengenai perilaku model dua dimensi. Pola pembentukan sel dapat diaplikasikan pada pembentukan tulang lengan *vertebrata*. Sebelumnya Keller dan Segel (1970), menggunakan model *chemotactic* untuk pola pembentukan di antara sekumpulan amoeba *Dictyostelium*. Murray dan Myerscough (1991), juga menggunakan model *chemotactic* untuk pola pigmentasi kulit reptil dan garis-garis khusus pada buaya.

Secara matematis, Myerscough, dkk. (1998) menyebutkan bahwa model *chemotactic* pola pembentukan sel akan dirumuskan ke dalam sistem persamaan sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \nabla \cdot (D\nabla n) - \nabla \cdot (n\alpha\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \cdot (\nabla c) + s\left(\frac{n}{n+\gamma} - c\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

dari model di atas, akan melibatkan 2 variabel yang bergantung yaitu n kepadatan sel dan c konsentrasi *chemoattractant*. *Chemoattractant* merupakan senyawa kimia yang dikeluarkan dari model *chemotactic*. *Chemotactic* merupakan perpindahan sel dari sebuah konsentrasi. D adalah konstanta positif pada proses difusi. Parameter α adalah koefisien *chemotactic* dari sel motil, r menunjukkan tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel, konstanta yang mengatur tingkat produksi *chemoattractant* dilambangkan γ , dan s adalah parameter yang mengontrol pola spasial dan skala temporal. Adapun parameter yang digunakan adalah $D = 0.25, r = 0.04, \alpha = 2, \gamma = 1, s = 600$.

Menurut Liu dan Hussain (2012:2), diskritisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Kuantisasi diartikan sebagai proses pengelompokan sifat-sifat kontinu pada selang-selang tertentu (*step size*). Kegunaan diskritisasi adalah untuk mereduksi dan menyederhanakan data, sehingga didapatkan data diskrit yang lebih mudah dipahami, digunakan, dan dijelaskan.

Berdasarkan uraian di atas, melihat model pembentukan sel yang cukup kompleks yaitu berbentuk sistem PDP tak linier, maka penulis pada penelitian ini akan mengubah model pembentukan sel dari bentuk kontinu menjadi bentuk diskrit. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh solusi numerik model diskrit pola pembentukan sel. Dalam penelitian ini, hanya terfokus dalam proses mendiskritkan model pola pembentukan sel untuk mendapatkan solusi numerik. Karena penelitian diskritisasi yang berupa sistem PDP tak linier belum banyak

dikembangkan dewasa ini, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian tersebut dan menyajikannya dalam judul “*Diskritisasi Sistem Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier pada Pola Pembentukan Sel*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk diskrit sistem PDP tak linier pada pola pembentukan sel?
2. Bagaimana solusi numerik model matematika pada pola pembentukan sel?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Mengetahui bentuk diskrit dari sistem PDP tak linier pola pembentukan sel.
2. Memperoleh solusi numerik untuk model matematika pola pembentukan sel.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Proses diskritisasi menggunakan metode beda hingga maju t dan metode beda hingga pusat r .
2. Model yang digunakan adalah pola pembentukan sel yang tak berdimensi yang dirumuskan oleh Myerscough, dkk. (1998) yang berjudul *Pattern Formation in a Generalized Chemotactic Model*.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan bermanfaat bagi penelitian-penelitian diskrit di lapangan yang menggunakan model diskrit. Model diskrit pembelahan sel yang dihasilkan dalam penelitian ini diharapkan dapat menjadi sumbangan bagi penelitian selanjutnya seperti pada amoeba *Dictyostelium*, pola pigmentasi kulit reptil, garis-garis khusus pada buaya, dan lainnya yang menggunakan model *chemotactic*.

1.6 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah jenis penelitian kepustakaan (*Library Research*) atau studi literatur. Hal ini dilakukan dengan cara membaca, memahami, menelaah kemudian mengidentifikasi pengetahuan yang diperoleh dari literatur tersebut. Literatur utama yang digunakan adalah jurnal yang berjudul *Pattern Formation in a Generalized Chemotactic Model* oleh Myerscough, dkk. (1998) dan beberapa literatur pendukung yang lain.

Dalam memudahkan proses penelitian maka digunakan suatu pendekatan penelitian yaitu pendekatan kualitatif dan kuantitatif. Pendekatan kualitatif berupa deskripsi mengenai model pola pembentukan sel sedangkan pendekatan kuantitatif berupa proses pendiskritisasian dari model pola pembentukan sel.

Teknik yang digunakan untuk menyelesaikan sistem PDP tak linier adalah dengan menggunakan metode beda hingga. Secara rinci, langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Menjabarkan Model.
2. Mendiskritkan $\frac{\partial n}{\partial t}$, $\frac{\partial c}{\partial t}$, ∇n , ∇c , $\nabla^2 n$, dan $\nabla^2 c$.
3. Menyelesaikan model dengan menggunakan skema eksplisit.
4. Mendapatkan solusi numerik dengan Matlab R2008b.
5. Menginterpretasi model diskrit.
6. Melakukan simulasi pada model diskrit.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk lebih mudah memahami penulisan ini secara keseluruhan isinya, maka penulis memberikan gambaran umum tentang sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi model matematika pola pembentukan sel, mekanisme *chemotactic* pola pembentukan sel, persamaan diferensial parsial pola pembentukan sel, metode beda hingga pola pembentukan sel, skema eksplisit pola pembentukan sel, dan kajian agama pola pembentukan sel.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini akan memaparkan kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika Pola Pembentukan Sel

Model yang dipresentasikan untuk pergerakan lokal dan hambatan sel disebut *chemotactic*. *Chemotactic* merupakan kunci utama dalam berbagai macam kondisi pembentukan. Perpindahan dari sel yang menghasilkan *gradient* pada konsentrasi kimia. Dalam mekanisme model *chemotactic* melibatkan 2 variabel bergantung, yaitu kepadatan sel $n(r, t)$ dan konsentrasi *chemoattractant* $c(r, t)$, di mana r dan t adalah koordinat ruang dan waktu. Secara umum bentuk persamaannya adalah:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot J_n + R(n) \quad (2.1)$$

di mana J_n adalah kondisi *flux* pada sel dan $R(n)$ adalah produksi sel. Diasumsikan bahwa ada 2 kontribusi untuk istilah *flux*, namanya random *Difusi Fickian* dengan $J_{difusi} = -D_n \nabla n$ di mana D_n adalah koefisien difusi dan $J_{chemotactic} = \alpha n \nabla c$ di mana α koefisien *chemotactic*. Produksi sel dideskripsikan dengan pertumbuhan logistik dari bentuk $R(n) = r n (N - n)$, di mana r dan N merupakan pertumbuhan linier secara mitosis dan r dan N adalah konstanta positif. N adalah ukuran jumlah total sel yang hadir. Parameter r, N, α, D_n adalah konstanta positif. Pertumbuhan logistik adalah jalan sederhana untuk menjelaskan karakteristik pertumbuhan dari beberapa jenis sel (Maini, dkk., 1991:704).

Persamaan untuk kepadatan sel adalah:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \nabla^2 n - \alpha \nabla \cdot (n \nabla c) + r \cdot n(N - n) \quad (2.2)$$

difusi *chemotactic* pertumbuhan sel

Sel diasumsikan mengeluarkan senyawa kimia (*chemoattractant*) dirumuskan dalam model *Michaelis-Menten*. Terdapat koefisien difusi D_c , produksi, dan degradasi *chemoattractant*. Di mana S, β, γ dan D_c adalah konstanta positif. Persamaan konsentrasi *chemotactic* c adalah:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_c \nabla^2 c + \frac{Sn}{\beta + n} - \gamma c \quad (2.3)$$

difusi produksi degradasi

Pola pembentukan domain 2 dimensi yang terbatas yaitu model perkembangan kulit *vertebrata* dengan mempertimbangkan domain D yaitu *zero flux* sebagai kondisi batas sebagai berikut:

$$n \cdot \nabla c(r) = n \cdot \nabla n(r) = 0, \text{ untuk setiap } r \in \partial D \quad (2.4)$$

di mana n adalah bagian luar pada batas ∂D .

Model matematika pola pembentukan sel terdiri dari persamaan (2.2), (2.3), dan kondisi batas (2.4).

Menuliskan model tak berdimensi dengan mereduksi jumlah parameternya:

$$\begin{aligned} r^* &= \left[\frac{\gamma}{D_c S} \right]^{\frac{1}{2}} r, & t^* &= \frac{\gamma t}{S}, & n^* &= \frac{n}{\beta}, & c^* &= \frac{\gamma c}{S}, \\ N^* &= \frac{N}{\beta}, & D^* &= \frac{D_n}{D_c}, & \alpha^* &= \frac{\alpha S}{\gamma D_c}, & r^* &= \frac{r \beta}{\gamma}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

di mana s adalah faktor skala. Dengan mempertahankan s kedalam *scaling* baru dari t dan r , tetapi menahan itu sejak berpikir bahwa $s = 1$ bagian domain.

Dengan program komputer akan mudah menentukan ukuran domain dan penambahan s untuk mensimulasikan a pada domain yang lebih besar

(Maini, dkk., 1991:705).

Persamaan (2.5) menjadi:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \alpha \nabla \cdot (n \nabla c) + s \cdot r \cdot n(N - n) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla^2 c + s \left(\frac{n}{1+n} - c \right) \quad (2.7)$$

$$n \cdot \nabla c(r) = n \cdot \nabla n(r) = 0, r \in \partial D \quad (2.8)$$

di mana ∂D sekarang adalah batas dari skala domain. Akan menjadi spesifik dengan mempertimbangkan domain D menjadi persegi panjang dengan lebar L_x dan panjang L_y yang menggunakan koordinat Cartesius (x, y) .

Persamaan (2.6) – (2.8), mempunyai kondisi dua seragam *steady-state* (tunak), yaitu $n = 0, c = 0, n = N, c = \frac{N}{1+N}$. Sebuah analisis linier tentang seragam *state* menunjukkan bahwa $(0,0)$ selalu tidak stabil. Sistem linier mempunyai solusi dari bentuk $\cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) * \cos\left(\frac{l\pi y}{L_y}\right)$ untuk bilangan bulat m dan l , di mana L_x dan L_y adalah panjang dan lebar persegi panjang dari domain. Dipilih (m, l) persegi panjang domain sebagai berikut:

$$\frac{rNS^2}{D} = \pi^4 \left\{ \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{l^2}{L_y^2} \right\}^2 \quad (2.9)$$

$$\left[rN + D - \frac{N\alpha}{(1+N)} \right]^2 = 4rDN \quad (2.10)$$

(Maini, dkk., 1991:706).

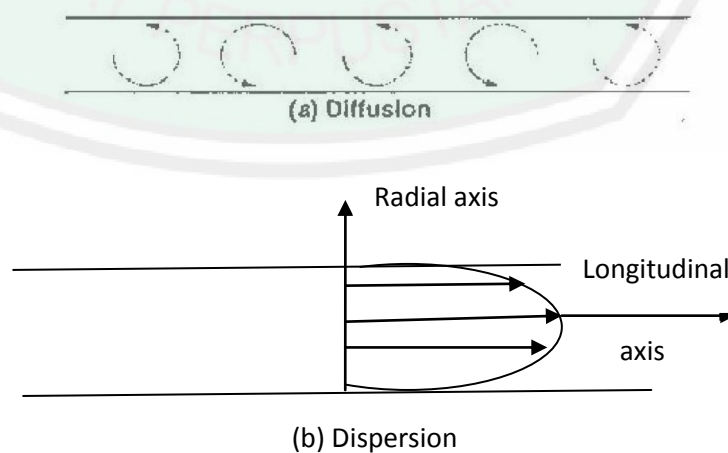
2.2 Mekanisme *Chemotactic* Pola Pembentukan Sel

Trinkaus (1984), menyebutkan bahwa *chemotactic* adalah gerakan dari sel tubuh sebagai respon akibat terpapar zat kimiawi tertentu dalam lingkungannya. *Chemotactic* merupakan proses awal yang sangat penting pada fase perkembangan. Karena dalam penelitian ini adalah proses pembelahan sel pada tulang lengan, maka *chemotactic* diartikan sebagai proses awal pada fase perkembangan pada tulang lengan. Adapun variabel untuk *chemotactic* yaitu kepadatan sel (n) dan senyawa kimia (*chemoattractant*)(c).

Kepadatan sel (n) pada tulang adalah jumlah kandungan mineral tulang dalam setiap cm tulang yang diukur dengan alat *bone densitometer*. Kepadatan tulang ditentukan oleh besarnya kandungan mineral pada matriks tulang yang tersusun oleh kalsium. Kepadatan dan tebal tulang menentukan kekuatan tulang. Mader (1998), mengatakan bahwa dengan menambahkan jumlah kalsium sebagai upaya untuk mencegah penurunan kepadatan tulang. Kepadatan tulang yang rendah akan mengakibatkan *osteopenia* (keropos tulang) dan *osteoporosis* (tulang rapuh). Paulo, dkk. (2007) menyebutkan bahwa komposisi tulang terdiri dari 30% bahan organik (hidup) dan 70% deposit garam. Bahan organik disebut dengan matriks tulang, yang terdiri dari serat kolagen dan proteoglikan (protein ditambah sakarida). Deposit garam terdiri dari kalsium dan fosfat, dengan sedikit natrium kalium karbonat dan ion magnesium. Sedangkan *chemoattractant* (c) adalah senyawa kimia yang dikeluarkan oleh *chemotactic*. *Chemoattractant* dalam tulang yaitu bahan organik dan deposit garam yang berfungsi untuk menghasilkan kepadatan tulang. *Osteoblast*, *osteocyte*, dan *osteoclast* adalah sel yang

mempengaruhi tingkat produksi dan degradasi *chemoattractant*. Dalam proses kepadatan tulang sel mengalami kondisi *flux* (J_n) dan produksi sel $R(n)$.

Kondisi *flux* (J_n) pada pola pembentukan sel dinamakan dengan random *Difusi Fickian* atau yang umum dikenal dengan Hukum *Fick* pertama. Hukum *Fick* pertama dikemukakan oleh Ilmuwan Jerman yaitu Adolph Fick, yang menyatakan bahwa *mass flux* sebanding dengan *gradient* konsentrasi (Atkins, 1999:288). Seperti yang terlihat pada gambar 2.1. Sebagai ilustrasi, molekul *chemoattractant* di dekat dinding tulang akan berjalan lebih lambat dibandingkan dengan molekul *chemoattractant* yang berada tepat di tengah pusat aliran darah dalam tulang. Dikarenakan profil kecepatan aliran darah yang berbentuk parabolik atau akibat gaya geser pada dinding tulang. Efek perbedaan kecepatan aliran terhadap dimensi ruang akan menyebabkan *chemoattractant* tersebar atau tercampur di sepanjang sumbu sejajar arah aliran. Fenomena ini dikenal dengan dispersi yang diinterpretasikan dalam bentuk proses *Difusi Fickian*.



Gambar 2.1 Perbedaan Konsep Dasar antara Difusi dan Dispersi

Difusi Fickian dapat dituliskan secara matematis dalam bentuk yang tertulis berikut:

$$J = -D \frac{dc}{dx} \quad (2.11)$$

di mana:

J = *mass flux* dalam arah x ($ML^{-2}T^{-1}$)

D = koefisien difusi (L^2T^{-1})

Persamaan (2.11) merupakan perumusan Hukum *Fick* pertama yang menyatakan bahwa *mass flux* akibat difusi berbanding lurus atau proporsional terhadap *gradient* konsentrasi yaitu turunan konsentrasi terhadap jarak. Seperti yang tertulis pada persamaan di atas, tanda negatif dimasukkan untuk memastikan bahwa *mass flux* berpindah dalam arah yang benar yaitu dari daerah dengan konsentrasi tinggi menuju daerah dengan konsentrasi lebih rendah (Atkins, 1999:288).

Paulo, dkk. (2007) mendeskripsikan produksi sel sebagai pertumbuhan logistik dari beberapa jenis sel. Produksi sel $R(n)$ untuk pembentukan tulang lengan adalah jumlah total sel yang hadir pada tulang. Ada 3 jenis dasar sel pada tulang yaitu *osteoblast*, *osteocyte*, *osteoclast*. Ketiga sel tersebut sebanyak 2% dan *osteosit* (tulang muda yang mengandung sedikit mineral) sebanyak 98% dari bahan organik. *Osteoblast* berfungsi dalam pembentukan tulang dan mensekresikan matriks tulang. *Osteoblast* dijumpai di permukaan luar dan dalam tulang. *Osteoblast* berespon terhadap berbagai sinyal kimiawi untuk menghasilkan matriks tulang. Matriks tulang pertama kali dibentuk disebut dengan *osteocyte*. Dalam beberapa hari garam-garam kalsium mulai mengendap pada *osteocyte* dan

mengeras selama beberapa minggu atau bulan berikutnya. Sebagian *osteoblast* yang tetap menjadi *osteocyte* disebut dengan tulang sejati. Sedangkan *osteoclast* merupakan penyerapan tulang (*resorpsi*) karena aktifitas sel. *Osteoclast* terdapat pada sebagian kecil dari potongan tulang dan *memfagosit* tulang sedikit demi sedikit. Proses ini menggantikan tulang tua yang telah melemah dengan tulang baru yang kuat yang disebut dengan siklus *remodeling*. Seluruh siklus membutuhkan 4 hingga 8 bulan atau setidaknya 3 bulan. Proses *resorpsi* hanya membutuhkan 4 hingga 6 minggu dan pembentukan tulang baru membutuhkan 2 bulan untuk setiap siklus *remodeling*.

2.3 Persamaan Diferensial Parsial Pola Pembentukan Sel

Definisi 1.

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah persamaan diferensial parsial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas (Pamuntjak dan Santoso, 1990:1).

Contoh: pandang pada model pembentukan sel tak berdimensi di mana $n(r, t)$ dan $c(r, t)$ sebagai berikut:

Contoh 1:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla n) - \nabla \cdot (n\alpha\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \quad (2.12)$$

Contoh 2:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla c) + s\left(\frac{n}{n + \gamma} - c\right) \quad (2.13)$$

kedua contoh di atas termasuk Persamaan Diferensial Parsial dengan variabel bebas r dan t baik terhadap n dan c .

Definisi 2.

Orde atau tingkat suatu PDP adalah orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan diferensial dengan tingkatan yang paling tinggi (Ault dan Ayres, 1992:1).

Pandang model pembelahan sel tak berdimensi sebagai berikut:

Contoh 1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= \nabla \cdot (D\nabla n) - \nabla \cdot (n\alpha\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= D\nabla^2 n - \alpha\nabla \cdot (n\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= D\nabla^2 n - (\alpha\nabla n\nabla c + \alpha n\nabla^2 c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \left(\alpha \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} + \alpha n \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \right) + s \cdot r \cdot n(1 - n)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Contoh 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \cdot (\nabla c) + s\left(\frac{n}{n + \gamma} - c\right) \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla^2 c + s\left(\frac{n}{n + \gamma} - c\right) \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + s\left(\frac{n}{n + \gamma} - c\right)\end{aligned}\tag{2.15}$$

Dalam hal ini *grad* adalah singkatan daripada *gradient* yaitu laju variasi terhadap tempat atau koordinat. Sedangkan ∇ adalah notasi singkat bagi *grad* dan dinamakan operator diferensial *nabla Laplace*. Sehingga, kedua contoh di atas

termasuk orde 2 dengan alasan ∇^2 sebagai operator *Laplace* dengan variabel bebas r dan t yang dilambangkan dengan $\nabla^2 n = \frac{\partial^2 n}{\partial r^2}$ dan $\nabla^2 c = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}$.

Berdasarkan pada definisi 1, dapat dijelaskan ketika ada sebuah fungsi $n(r, t)$ dan $c(r, t)$ yang bergantung pada dua variable bebas r dan t , jika diturunkan terhadap r maka t bernilai konstan dan jika diturunkan terhadap t maka r bernilai konstan.

Adapun notasi pelambangannya secara berturut-turut adalah $\frac{\partial n}{\partial r}$, $\frac{\partial n}{\partial t}$ dan $\frac{\partial c}{\partial r}$, $\frac{\partial c}{\partial t}$. Simbol ∂ yang menunjukkan turunan parsialnya. Notasi itu dapat dipakai untuk pengerjaan turunan orde dua. Sebagai contoh, turunan kedua r dari $\frac{\partial n}{\partial r}$ dan $\frac{\partial c}{\partial r}$ dilambangkan dengan $\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}$ dan $\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}$.

Zauderer (2006), menyebutkan bahwa Persamaan Diferensial Parsial diklasifikasikan menjadi 2 yaitu PDP linier dan PDP tak linier.

$$G(x, y) = A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y)$$

Linieritas dari PDP ditentukan oleh fungsional dari koefisien $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y), E(x, y), f(x, y),$ dan $G(x, Y)$. Dapat dikatakan PDP linier atau tak linier apabila memenuhi syarat:

1. Jika koefisien-koefisien tersebut hanya bergantung pada variabel bebas, $[F(x, y) = 0]$ atau variabel bergantung dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara linier (bukan perkalian atau bukan pembagian), maka disebut PDP linier.

2. Jika koefisien-koefisien merupakan fungsi dari turunan pertama dan turunan kedua $[F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0]$ atau variabel bergantung dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara tidak linier (berupa perkalian atau berupa pembagian), maka disebut PDP tak linier.

Contoh 1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= \nabla \cdot (D\nabla n) - \nabla \cdot (n\alpha\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= D\nabla^2 n - \alpha\nabla \cdot (n\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= D\nabla^2 n - (\alpha\nabla n\nabla c + \alpha n\nabla^2 c) + s \cdot r \cdot n(1 - n)\end{aligned}\quad (2.16)$$

Contoh 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \cdot (\nabla c) + s\left(\frac{n}{n+\gamma} - c\right) \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla^2 c + s\left(\frac{n}{n+\gamma} - c\right)\end{aligned}\quad (2.17)$$

kedua contoh di atas termasuk PDP tak linier. Pada contoh 1, terdapat perkalian antara variabel bergantung n dan c yaitu $(\alpha\nabla n\nabla c + \alpha n\nabla^2 c) + s \cdot r \cdot n(1 - n)$.

Pada contoh 2, terdapat fungsi pecahan pada variabel bergantung n yaitu

$$s\left(\frac{n}{n+\gamma} - c\right).$$

Adapun tipe Persamaan Persamaan Diferensial Parsial orde 2 terdiri dari tipe eliptik, parabolik, dan hiperbolik. Persamaan Diferensial Parsial tak linier diklasifikasikan sebagai berikut:

1. Persamaan *Ellips*, jika $B^2 - 4AC < 0$

Persamaan yang termasuk tipe ini adalah persamaan *Poisson*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g = 0 \quad (2.18)$$

dan persamaan *Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.19)$$

persamaan *Ellips* berhubungan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak bergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas disekeliling daerah tinjauan.

2. Persamaan *Parabola*, jika $B^2 - 4AC = 0$

Persamaan *Parabola* biasanya merupakan persamaan yang bergantung pada waktu (tidak permanen). Penyelesaian tersebut memerlukan kondisi awal dan kondisi batas. Persamaan *Parabola* yang paling sederhana adalah perambatan panas dan difusi polutan yang mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.20)$$

T adalah temperatur, K adalah koefisien konduktifitas, t adalah waktu, dan x adalah jarak. Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah mencari temperatur T atau konsentrasi polutan di lokasi (titik) x dan setiap waktu.

3. Persamaan *Hiperbola*, jika $B^2 - 4AC > 0$

Persamaan *Hiperbola* yang paling sederhana adalah persamaan gelombang yang mempunyai bentuk berikut:

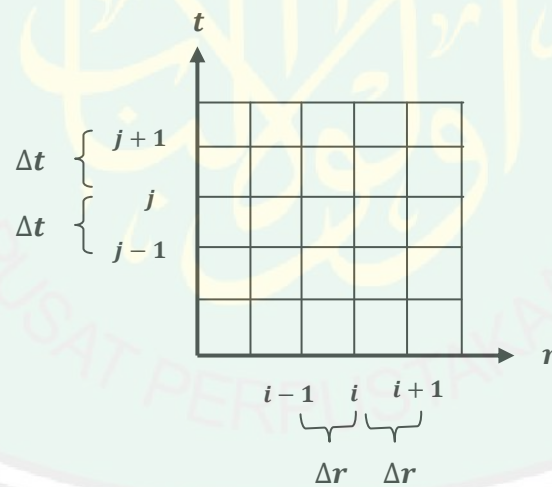
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.21)$$

dengan y adalah perpindahan vertikal, pada jarak x dari ujung tali yang bergetar yang mempunyai panjang L sesudah waktu t . Karena nilai y pada

ujung-ujung tali biasanya diketahui untuk semua waktu (kondisi batas) dan bentuk serta kecepatan tali diketahui pada waktu nol (kondisi awal), maka penyelesaian pada persamaan *Parabola*, yaitu menghitung y pada x dan t tertentu (Triatmodjo, 2002:201).

2.4 Metode Beda Hingga Pola Pembentukan Sel

Model pembentukan sel mengandung variabel r dan t , perkiraan beda hingga dilakukan dengan membuat jaringan titik hitungan pada bidang $r - t$ (Gambar 2.2), yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang dan waktu adalah Δr dan Δt (Triatmodjo, 2002:203-204).



Gambar 2.2 Jaringan Titik Hitungan dalam Bidang $r - t$

Berikut merupakan metode beda hingga yang digunakan untuk mendiskritkan PDP tak linier pada pola pembentukan sel adalah:

a. Beda Hingga Maju t

Contoh: pandang pada model pembentukan sel di mana $n(r_i, t_j)$ dan $c(r_i, t_j)$, sehingga,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\Delta t} \quad (2.22)$$

b. Beda Hingga Pusat r

Contoh: pandang pada model pembentukan sel di mana $n(r_i, t_j)$ dan $c(r_i, t_j)$, sehingga,

$$\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{n_{i+1}^j - n_{i-1}^j}{2\Delta r}$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{c_{i+1}^j - c_{i-1}^j}{2\Delta r} \quad (2.23)$$

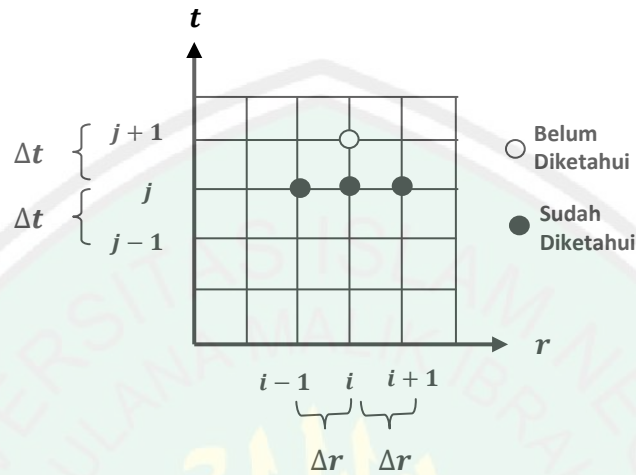
$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} = \frac{n_{i-1}^j - 2n_i^j + n_{i+1}^j}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta r^2} \quad (2.24)$$

2.5 Skema Eksplisit Pola Pembentukan Sel

Metode beda hingga skema eksplisit banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial. Skema ini sangat sederhana dan mudah untuk memahaminya. Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n + 1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui (Gambar 2.3). Dengan metode ini, penurunan persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk beda hingga adalah mudah. Namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya ketidakstabilan hitungan, apabila digunakan langkah waktu yang besar (Triatmodjo, 2002:206).

Triatmodjo (2002:207), menyebutkan bahwa langkah iterasi skema eksplisit sebagaimana berikut:



Gambar 2.3 Skema Eksplisit

Contoh: pandang model pembentukan sel tak berdimensi dengan variabel bebas r dan t . Dengan menuliskan kembali persamaan (2.14) dan (2.15) sebagai berikut:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \left(\alpha \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} + \alpha n \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \right) + s \cdot r \cdot n(1 - n)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + s \left(\frac{n}{n + \gamma} - c \right)$$

Dengan menggunakan skema (2.22) – (2.24), bentuk skema eksplisit model pola pembentukan sel dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\Delta t} = D \frac{n_{i-1}^j - 2n_i^j + n_{i+1}^j}{\Delta r^2} - \left(\alpha \frac{n_{i+1}^j - n_{i-1}^j}{2\Delta r} \cdot \frac{c_{i+1}^j - c_{i-1}^j}{2\Delta r} + \alpha \cdot n_i^j \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta r^2} \right) + s \cdot$$

$$r \cdot n_i^j (1 - n_i^j)$$

$$\frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\Delta t} = \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta r^2} + s \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right) \quad (2.26)$$

atau

$$\begin{aligned}
n_i^{j+1} = & D \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_{i-1}^j + \left(1 - 2D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}\right) n_i^j + D \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_{i+1}^j - \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + \\
& \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - \\
& \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_i^j - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_{i+1}^j + s \cdot \\
& r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$c_i^{j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta r^2} c_{i-1}^j + \left(1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta r^2}\right) c_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta r^2} c_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j\right) \tag{2.28}$$

dengan $A = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$.

2.6 Kajian Agama Pola Pembentukan Sel

Dalam Al-Qur'an, pola pembentukan sel sudah diatur di dalamnya. Seperti pada proses penciptaan manusia, Allah menyebutkan pada firman-Nya dalam QS. Al-Hajj ayat 5:

يَتَأْتِيهَا النَّاسُ إِنْ كُنْتُمْ فِي رَيْبٍ مِّنَ الْبَعْثِ فَإِنَّا خَلَقْنٰكُمْ مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِّن نُّطْفَةٍ ثُمَّ مِّن عُلُقَةٍ ثُمَّ مِّن مُّضْغَةٍ مُّخَلَّقَةٍ وَغَيْرِ مُخَلَّقَةٍ لِّنُبَيِّنَ لَكُمْ وَنُقَرُّ فِي الْأَرْحَامِ مَا نَشَاءُ إِلَىٰ أَجَلٍ مُّسَمًّى ثُمَّ نُخْرِجُكُمْ طِفْلًا ثُمَّ لِتَبْلُغُوا أَشَدَّكُمْ وَمِنْكُمْ مَّن يُّتَوَفَّىٰ وَمِنْكُمْ مَّن يُرَدُّ إِلَىٰ أَرْدَلِ الْعُمْرِ لِكَيْلَا يَعْلَمَ مِن بَعْدِ عِلْمٍ شَيْئًا وَتَرَىٰ الْأَرْضَ هَامِدَةً فَإِذَا أَنزَلْنَا عَلَيْهَا الْمَاءَ اهْتَزَّتْ وَرَبَتْ وَأَنْبَتَتْ مِن كُلِّ زَوْجٍ

بِهَيْجِ

Artinya: “Hai manusia, jika kamu dalam keraguan tentang kebangkitan (dari kubur), maka (ketahuilah) sesungguhnya Kami telah menjadikan kamu dari tanah, kemudian dari setetes mani, kemudian dari segumpal darah, kemudian dari segumpal daging yang sempurna kejadiannya dan yang tidak sempurna, agar Kami jelaskan kepada kamu dan Kami tetapkan dalam rahim, apa yang Kami kehendaki sampai waktu yang sudah ditentukan, kemudian Kami keluarkan

kamu sebagai bayi, kemudian (dengan berangsur-angsur) kamu sampailah kepada kedewasaan, dan di antara kamu ada yang diwafatkan dan (adapula) di antara kamu yang dipanjangkan umurnya sampai pikun, supaya dia tidak mengetahui lagi sesuatupun yang dahulunya telah diketahuinya. Dan kamu lihat bumi ini kering, kemudian apabila telah Kami turunkan air di atasnya, hiduplah bumi itu dan suburlah dan menumbuhkan berbagai macam tumbuh-tumbuhan yang indah.”

Menurut tafsir Ibnu Katsir menyebutkan bahwa awal penciptaan dimulai dari penciptaan Adam yang berasal dari tanah. “Kemudian dari setetes mani,” kemudian Dia menjadikan keturunannya dari setetes air yang jijik. “Kemudian dari segumpal darah, kemudian dari segumpal daging.” Hal itu adalah ketika air mani telah bersarang di dalam rahim seorang wanita selama 40 hari, demikian pula bersandarnya segala sesuatu yang bergabung kepada air tersebut. Kemudian, air itu berubah menjadi segumpal darah merah dengan izin Allah Ta’ala dan tinggal di dalamnya selama 40 hari. Kemudian, darah itu berkembang hingga menjadi *mudghah* yaitu segumpal daging yang belum memiliki bentuk dan garis-garis. Kemudian, Dia mulai membentuk dan menggarisnya dan dibentuklah kepala, dua tangan, dada, perut, dua paha, dua kaki, dan seluruh anggota badan.

Dalam perspektif ilmu biologi, proses penciptaan manusia berasal dari sel tunggal. Pembelahan sel dilakukan secara mitosis, yang mana sel membelah menjadi 2, kemudian menjadi 4, membelah lagi menjadi 8, 16, dan seterusnya (Yatim, 1982:19). Kemudian, terjadi adanya proses diferensiasi oleh sel. Di mana banyak organ yang berkembang dalam waktu yang tidak bersamaan, seperti terbentuknya kepala, dua kaki, dua tangan, dan lain-lain. Hingga pada akhirnya terbentuklah seorang bayi dari waktu yang sudah ditentukan.

Dalam penciptaan manusia, tersusun kerangka-kerangka yang sangat kuat sehingga mereka dapat melakukan aktifitas sehari-harinya dengan sangat baik. Salah satu rangka pada manusia adalah rangka lengan. Adanya tulang pada rangka lengan mengakibatkan manusia bisa makan, minum, dan lain-lain. Hal tersebut sebagaimana disebutkan pada firman Allah dalam QS. Al-Insaan ayat 28 sebagai berikut:

نَحْنُ خَلَقْنَاهُمْ وَشَدَدْنَا أَسْرَهُمْ^ط وَإِذَا شِئْنَا بَدَّلْنَا أَمْثَلَهُمْ تَبْدِيلًا

Artinya: “Kami telah menciptakan mereka dan menguatkan persendian tubuh mereka, apabila Kami menghendaki, Kami sungguh-sungguh mengganti (mereka) dengan orang-orang yang serupa dengan mereka.”

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Bentuk Diskrit Sistem PDP Tak Linier pada Pola Pembentukan Sel

Myerscough, dkk. (1998) mengusulkan model *chemotactic* kontinu pola pembentukan sel tak berdimensi sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} f_1: \frac{\partial n}{\partial t} &= \nabla \cdot (D\nabla n) - \nabla \cdot (n\alpha\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \\ f_2: \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \cdot (\nabla c) + s\left(\frac{n}{n+\gamma} - c\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Konstruksi bentuk diskrit (diskritisasi) dari model *chemotactic* yang berbentuk sistem persamaan satu dimensi dilakukan dengan mentransformasikan satu-persatu persamaannya. Proses diskritisasi dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga maju t dan metode beda hingga pusat r .

Adapun variabel-variabel yang digunakan pada model adalah:

$\frac{\partial n}{\partial t}$ = perubahan kepadatan sel terhadap waktu

$\frac{\partial c}{\partial t}$ = perubahan *chemoattractant* terhadap waktu

D = konstanta positif pada proses difusi

α = koefisien *chemotactic* dari sel motil

s = parameter yang mengontrol pola spasial dan skala temporal

r = konstanta yang mengatur tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel

γ = konstanta yang mengatur tingkat produksi *chemoattractant*

3.1.1 Diskritisasi f_1

Langkah awal adalah dilakukan penjabaran model pada f_1 ,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla n) - \nabla \cdot (n\alpha\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \quad (3.2)$$

Dengan menggunakan operasi perkalian, maka diperoleh:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \alpha\nabla \cdot (n\nabla c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \quad (3.3)$$

Dengan menggunakan operasi perkalian dari $\alpha\nabla \cdot (n\nabla c)$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - (\alpha\nabla n\nabla c + \alpha n\nabla^2 c) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \quad (3.4)$$

Lambang ∇ adalah notasi singkat bagi grad dan dinamakan operator *Laplace*.

Karena grad atau *gradient* merupakan laju variasi terhadap tempat atau koordinat,

sehingga ∇ dalam model pola pembentukan sel pada f_1 dilambangkan dengan

$$\nabla n = \frac{\partial n}{\partial r}, \nabla c = \frac{\partial c}{\partial r}, \nabla^2 n = \frac{\partial^2 n}{\partial r^2}, \nabla^2 c = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}.$$

Dengan mengubah bentuk ∇ pada persamaan (3.4), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \left(\alpha \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} + \alpha \cdot n \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \right) + s \cdot r \cdot n(1 - n) \quad (3.5)$$

Kemudian, dilakukan diskritisasi f_1 dengan metode beda hingga maju untuk

turunan pertama fungsi n terhadap t sebagaimana berikut:

$$\frac{\partial n(r_i, t_j)}{\partial t} = \frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\Delta t} \quad (3.6)$$

Dengan proses yang sama, menggunakan metode beda hingga pusat untuk turunan

pertama dan turunan kedua fungsi n dan fungsi c terhadap r , dapat dinyatakan

sebagai berikut:

$$\nabla^2 n(r_i, t_j) = \frac{\partial^2 n(r_i, t_j)}{\partial r^2} = \frac{n_{i-1}^j - 2n_i^j + n_{i+1}^j}{\Delta r^2}$$

$$\begin{aligned}
\nabla n(r_i, t_j) &= \frac{\partial n(r_i, t_j)}{\partial r} = \frac{n_{i+1}^j - n_{i-1}^j}{2\Delta r} \\
\nabla c(r_i, t_j) &= \frac{\partial c(r_i, t_j)}{\partial r} = \frac{c_{i+1}^j - c_{i-1}^j}{2\Delta r} \\
\nabla^2 c(r_i, t_j) &= \frac{\partial^2 c(r_i, t_j)}{\partial r^2} = \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta r^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Selanjutnya, persamaan (3.5) ditransformasi ke dalam fungsi diskrit yang diberikan pada persamaan (3.6) dan (3.7). Sehingga menjadi:

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\Delta t} = D \frac{n_{i-1}^j - 2n_i^j + n_{i+1}^j}{\Delta r^2} - \left(\alpha \frac{n_{i+1}^j - n_{i-1}^j}{2\Delta r} \cdot \frac{c_{i+1}^j - c_{i-1}^j}{2\Delta r} + \alpha \cdot n_i^j \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta r^2} \right) + s \cdot r \cdot n_i^j (1 - n_i^j) \tag{3.8}$$

Penyederhanaan persamaan (3.8) dengan mengalikan Δt di ruas kiri adalah:

$$\begin{aligned}
n_i^{j+1} - n_i^j &= \frac{D\Delta t}{\Delta r^2} (n_{i-1}^j - 2n_i^j + n_{i+1}^j) - \left(\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta r} (n_{i+1}^j - n_{i-1}^j) \cdot \frac{1}{2\Delta r} (c_{i+1}^j - c_{i-1}^j) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\alpha\Delta t}{\Delta r^2} \cdot n_i^j (c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j) \right) + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dengan pemindahan tempat n_i^j di ruas kiri pada persamaan (3.9) adalah:

$$\begin{aligned}
n_i^{j+1} &= n_i^j + \frac{D\Delta t}{\Delta r^2} (n_{i-1}^j - 2n_i^j + n_{i+1}^j) - \left(\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta r} (n_{i+1}^j - n_{i-1}^j) \cdot \frac{1}{2\Delta r} (c_{i+1}^j - c_{i-1}^j) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\alpha\Delta t}{\Delta r^2} \cdot n_i^j (c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j) \right) + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Selanjutnya, dilakukan pemisahan antara persamaan linier dan persamaan tak linier. Adapun bentuk sederhana persamaan (3.10) untuk persamaan linier adalah:

$$n_i^{j+1} = n_i^j + \frac{D\Delta t}{\Delta r^2} (n_{i-1}^j - 2n_i^j + n_{i+1}^j)$$

atau

$$n_i^{j+1} = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_{i-1}^j + \left(1 - 2D \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \right) n_i^j + D \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_{i+1}^j \tag{3.11}$$

Bentuk sederhana persamaan (3.10) untuk persamaan tak linier adalah:

$$n_i^{j+1} = -\left(\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta r}(n_{i+1}^j - n_{i-1}^j) \cdot \frac{1}{2\Delta r}(c_{i+1}^j - c_{i-1}^j) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta r^2} \cdot n_i^j(c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j)\right) + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j(1 - n_i^j)$$

atau

$$n_i^{j+1} = -\alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2}(n_{i+1}^j - n_{i-1}^j) \cdot (c_{i+1}^j - c_{i-1}^j) - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \cdot n_i^j(c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j) + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j(1 - n_i^j)$$

atau

$$n_i^{j+1} = -\alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_i^j - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_{i+1}^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j(1 - n_i^j) \quad (3.12)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) dan (3.12) ke persamaan (3.10), sehingga diperoleh:

$$n_i^{j+1} = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_{i-1}^j + \left(1 - 2D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}\right) n_i^j + D \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_{i+1}^j - \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2} n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_i^j - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2} n_i^j \cdot c_{i+1}^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j(1 - n_i^j) \quad (3.13)$$

dimisalkan $A_1 = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$, $A_2 = \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2}$, $A_3 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$

Dari uraian di atas, maka diperoleh bentuk diskrit model pola pembentukan sel pada f_1 adalah:

$$n_i^{j+1} = A_1 n_{i-1}^j + (1 - 2A_1) n_i^j + A_1 n_{i+1}^j - A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2A_3 n_i^j \cdot c_i^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i+1}^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j(1 - n_i^j) \quad (3.14)$$

3.1.2 Diskritisasi f_2

Dengan cara yang sama seperti diskritisasi f_1 yaitu penjabaran model.

Sehingga f_2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla c) + s\left(\frac{n}{n+\gamma} - c\right) \quad (3.15)$$

Dengan menggunakan operasi perkalian, maka diperoleh:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla^2 c + s\left(\frac{n}{n+\gamma} - c\right) \quad (3.16)$$

Lambang ∇ adalah notasi singkat bagi grad dan dinamakan operator *Laplace*.

Karena grad atau *gradient* merupakan laju variasi terhadap tempat atau koordinat,

sehingga ∇ dalam model pola pembentukan sel pada f_2 dilambangkan dengan

$\nabla^2 c = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}$. Dengan mengubah bentuk ∇ pada persamaan (3.16), sehingga

diperoleh:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + s\left(\frac{n}{n+\gamma} - c\right) \quad (3.17)$$

Kemudian, dilakukan diskritisasi f_2 dengan metode beda hingga maju untuk

turunan pertama fungsi c terhadap t sebagaimana berikut:

$$\frac{\partial c(r_i, t_j)}{\partial t} = \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\Delta t} \quad (3.18)$$

Dengan proses yang sama, menggunakan metode beda hingga pusat untuk turunan

kedua fungsi c terhadap r dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\nabla^2 c(r_i, t_j) = \frac{\partial^2 c(r_i, t_j)}{\partial r^2} = \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta r^2} \quad (3.19)$$

Selanjutnya, persamaan (3.17) ditransformasi ke dalam fungsi diskrit yang

diberikan pada persamaan (3.18) dan (3.19). Sehingga menjadi:

$$\frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\Delta t} = \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta r^2} + s \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right) \quad (3.20)$$

Penyederhanaan persamaan (3.20) dengan mengalikan Δt di ruas kiri adalah:

$$c_i^{j+1} - c_i^j = \frac{\Delta t}{\Delta r^2} (c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j) + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right) \quad (3.21)$$

Dengan pemindahan tempat c_i^j di ruas kiri pada persamaan (3.21) adalah:

$$c_i^{j+1} = c_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta r^2} (c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j) + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right) \quad (3.22)$$

Bentuk sederhana persamaan (3.22) menjadi:

$$c_i^{j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta r^2} c_{i-1}^j + \left(1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \right) c_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta r^2} c_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right) \quad (3.23)$$

dimisalkan $B = \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$

Dari uraian di atas, maka diperoleh bentuk diskrit model pola pembentukan sel pada f_2 adalah:

$$c_i^{j+1} = B c_{i-1}^j + (1 - 2B) c_i^j + B c_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right) \quad (3.24)$$

1.2 Solusi Numerik Model Matematika pada Pola Pembentukan Sel

Setelah dilakukan diskritisasi model, maka langkah selanjutnya adalah dicari solusi numerik model diskrit pola pembentukan sel. Model matematika pola pembentukan sel pada daerah batas $0 \leq r \leq 1$ dan $0 \leq t \leq 0.1$. Adapun parameter yang diberikan berdasarkan jurnal yang berjudul *Pattern Formation in a Generalized Chemotactic Model* adalah $\alpha = 2, r = 0.04, \gamma = 1, s = 600$. Difusifitas pola pembentukan pada sel $D = 0.25$. Model matematika pola

pembentukan sel pada persamaan (3.4) dan (3.16) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0.25\nabla^2 n - (2\nabla n \nabla c + 2n \nabla^2 c) + 600 \cdot 0.04n(1 - n)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla^2 c + 600\left(\frac{n}{n+1} - c\right)$$

Dipilih nilai $\Delta r = 0.01$ dan $\Delta t = 0.00002$. Kemudian substitusikan nilai Δr , Δt , dan parameter yang diketahui pada hasil diskrit persamaan (3.14) dan (3.24).

pada persamaan (3.14) adalah:

$$\begin{aligned} n_i^{j+1} = & A_1 n_{i-1}^j + (1 - 2A_1)n_i^j + A_1 n_{i+1}^j - A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + \\ & A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2A_3 n_i^j \cdot c_i^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i+1}^j + \\ & s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j) \end{aligned}$$

Dengan $A_1 = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$, $A_2 = \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2}$, $A_3 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$, dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} n_i^{j+1} = & 0.05n_{i-1}^j + (1 - 2 \cdot 0.05)n_i^j + 0.05n_{i+1}^j - 0.1n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + 0.1n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + \\ & 0.1n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - 0.1n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - 0.4n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2 \cdot 0.4n_i^j \cdot c_i^j - 0.4n_i^j \cdot c_{i+1}^j + \\ & 600 \cdot 0.04 \cdot 0.00002n_i^j (1 - n_i^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_i^{j+1} = & 0.05n_{i-1}^j + 0.9n_i^j + 0.05n_{i+1}^j - 0.1n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + 0.1n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + 0.1n_{i-1}^j \cdot \\ & c_{i+1}^j - 0.1n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - 0.4n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 0.8n_i^j \cdot c_i^j - 0.4n_i^j \cdot c_{i+1}^j + \\ & 0.00048n_i^j (1 - n_i^j) \end{aligned}$$

dan untuk persamaan (3.24) adalah:

$$c_i^{j+1} = Bc_{i-1}^j + (1 - 2B)c_i^j + Bc_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right)$$

Dengan $B = \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$, dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$c_i^{j+1} = 0.2c_{i-1}^j + (1 - 2 \cdot 0.2)c_i^j + 0.2c_{i+1}^j + 600 \cdot 0.00002 \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + 1} - c_i^j \right)$$

$$c_i^{j+1} = 0.2c_{i-1}^j + 0.6c_i^j + 0.2c_{i+1}^j + 0.012 \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + 1} - c_i^j \right)$$

Jika iterasi j dimulai dari $j - 1$ maka persamaan (3.14) dan (3.24) menjadi bentuk sebagai berikut:

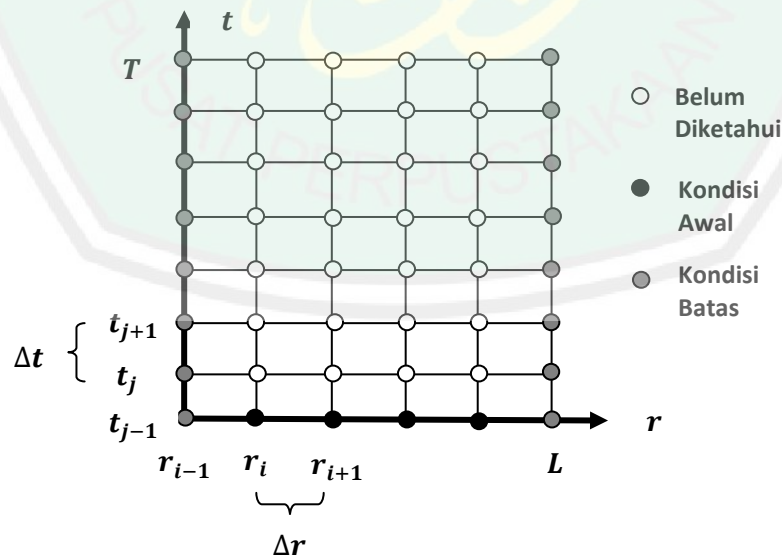
Persamaan (3.14):

$$\begin{aligned} n_i^j = & A_1 n_{i-1}^{j-1} + (1 - 2A_1)n_i^{j-1} + A_1 n_{i+1}^{j-1} - A_2 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} + A_2 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_{i-1}^{j-1} + \\ & A_2 n_{i-1}^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} - A_2 n_{i-1}^{j-1} \cdot c_{i-1}^{j-1} - A_3 n_i^{j-1} \cdot c_{i-1}^{j-1} + 2A_3 n_i^{j-1} \cdot c_i^{j-1} - \\ & A_3 n_i^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^{j-1} (1 - n_i^{j-1}) \end{aligned}$$

Persamaan (3.24):

$$c_i^j = Bc_{i-1}^{j-1} + (1 - 2B)c_i^{j-1} + Bc_{i+1}^{j-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^{j-1}}{n_i^{j-1} + \gamma} - c_i^{j-1} \right)$$

Stensil skema beda hingga eksplisit sistem pola pembentukan sel adalah:



Gambar 3.1 Jaringan Titik Hitung Skema Beda Hingga Eksplisit untuk Sistem Pola Pembentukan Sel

Didefinisikan $l = \frac{L}{\Delta r}$ sehingga banyak titik *grid* untuk r adalah $l + 1$ dan $k = \frac{T}{\Delta t}$

sehingga banyak titik *grid* untuk t adalah $k + 1$.

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu r adalah $l + 1$ dengan nilai l sebagai berikut:

$$l = \frac{L - r_0}{\Delta r} = \frac{1 - 0}{0.01} = 100$$

secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k + 1$ dengan nilai k sebagai berikut :

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{0.1 - 0}{0.00002} = 5000$$

Berdasarkan jurnal yang berjudul *Pattern Formation in a Generalized Chemotactic Model*, adapun kondisi awal dan kondisi batas yang diberikan untuk kepadatan sel (n) dan *chemoattractant* (c) sebagaimana berikut:

1. Kondisi awal yang diberikan secara acak adalah $n = 1$ dan $c = 0.5$.
2. Kondisi batas yang diberikan adalah $\nabla c = 0$ dan $\nabla n = 0$.

Selanjutnya akan dilakukan iterasi pada persamaan (3.14) dan (3.24) sesuai jaringan titik hitung gambar 3.1. Deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu dapat dinyatakan sebagai berikut :

Persamaan (3.14):

untuk $i = 1$ dan $j = 1$

$$\begin{aligned} n_i^j = & A_1 n_{i-1}^{j-1} + (1 - 2A_1) n_i^{j-1} + A_1 n_{i+1}^{j-1} - A_2 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} + A_2 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_{i-1}^{j-1} + \\ & A_2 n_{i-1}^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} - A_2 n_{i-1}^{j-1} \cdot c_{i-1}^{j-1} - A_3 n_i^{j-1} \cdot c_{i-1}^{j-1} + 2A_3 n_i^{j-1} \cdot c_i^{j-1} - \\ & A_3 n_i^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^{j-1} (1 - n_i^{j-1}) \end{aligned}$$

$$n_{i+1}^j = A_1 n_i^{j-1} + (1 - 2A_1)n_{i+1}^{j-1} + A_1 n_{i+2}^{j-1} - A_2 n_{i+2}^{j-1} \cdot c_{i+2}^{j-1} + A_2 n_{i+2}^{j-1} \cdot c_i^{j-1} +$$

$$A_2 n_i^{j-1} \cdot c_{i+2}^{j-1} - A_2 n_i^{j-1} \cdot c_i^{j-1} - A_3 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_i^{j-1} + 2A_3 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} -$$

$$A_3 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_{i+2}^{j-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_{i+1}^{j-1} (1 - n_{i+1}^{j-1})$$

$$n_{i+2}^j = A_1 n_{i+1}^{j-1} + (1 - 2A_1)n_{i+2}^{j-1} + A_1 n_{i+3}^{j-1} - A_2 n_{i+3}^{j-1} \cdot c_{i+3}^{j-1} + A_2 n_{i+3}^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} +$$

$$A_2 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_{i+3}^{j-1} - A_2 n_{i+1}^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} - A_3 n_{i+2}^{j-1} \cdot c_{i+1}^{j-1} + 2A_3 n_{i+2}^{j-1} \cdot c_{i+2}^{j-1} -$$

$$A_3 n_{i+2}^{j-1} \cdot c_{i+3}^{j-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_{i+2}^{j-1} (1 - n_{i+2}^{j-1})$$

:

$$n_{i-1}^j = A_1 n_{i-2}^{j-1} + (1 - 2A_1)n_{i-1}^{j-1} + A_1 n_i^{j-1} - A_2 n_i^{j-1} \cdot c_i^{j-1} + A_2 n_i^{j-1} \cdot c_{i-2}^{j-1} +$$

$$A_2 n_{i-2}^{j-1} \cdot c_i^{j-1} - A_2 n_{i-2}^{j-1} \cdot c_{i-2}^{j-1} - A_3 n_{i-1}^{j-1} \cdot c_{i-2}^{j-1} + 2A_3 n_{i-1}^{j-1} \cdot c_{i-1}^{j-1} -$$

$$A_3 n_{i-1}^{j-1} \cdot c_i^{j-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_{i-1}^{j-1} (1 - n_{i-1}^{j-1})$$

untuk $i = 1$ dan $j + 1 = 2$

$$n_i^{j+1} = A_1 n_{i-1}^j + (1 - 2A_1)n_i^j + A_1 n_{i+1}^j - A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j +$$

$$A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2A_3 n_i^j \cdot c_i^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i+1}^j +$$

$$s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j)$$

$$n_{i+1}^{j+1} = A_1 n_i^j + (1 - 2A_1)n_{i+1}^j + A_1 n_{i+2}^j - A_2 n_{i+2}^j \cdot c_{i+2}^j + A_2 n_{i+2}^j \cdot c_i^j + A_2 n_i^j \cdot$$

$$c_{i+2}^j - A_2 n_i^j \cdot c_i^j - A_3 n_{i+1}^j \cdot c_i^j + 2A_3 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_3 n_{i+1}^j \cdot c_{i+2}^j + s \cdot$$

$$r \cdot \Delta t \cdot n_{i+1}^j (1 - n_{i+1}^j)$$

$$n_{i+2}^{j+1} = A_1 n_{i+1}^j + (1 - 2A_1)n_{i+2}^j + A_1 n_{i+3}^j - A_2 n_{i+3}^j \cdot c_{i+3}^j + A_2 n_{i+3}^j \cdot c_{i+1}^j +$$

$$A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+3}^j - A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_3 n_{i+2}^j \cdot c_{i+1}^j + 2A_3 n_{i+2}^j \cdot c_{i+2}^j -$$

$$A_3 n_{i+2}^j \cdot c_{i+3}^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_{i+2}^j (1 - n_{i+2}^j)$$

:

$$n_{i-1}^{j+1} = A_1 n_{i-2}^j + (1 - 2A_1) n_{i-1}^j + A_1 n_i^j - A_2 n_i^j \cdot c_i^j + A_2 n_i^j \cdot c_{i-2}^j + A_2 n_{i-2}^j \cdot c_i^j - \\ A_2 n_{i-2}^j \cdot c_{i-2}^j - A_3 n_{i-1}^j \cdot c_{i-2}^j + 2A_3 n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - A_3 n_{i-1}^j \cdot c_i^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot \\ n_{i-1}^j (1 - n_{i-1}^j)$$

untuk $i = 1$ dan $j = k$

$$n_i^k = A_1 n_{i-1}^{k-1} + (1 - 2A_1) n_i^{k-1} + A_1 n_{i+1}^{k-1} - A_2 n_{i+1}^{k-1} \cdot c_{i+1}^{k-1} + A_2 n_{i+1}^{k-1} \cdot c_{i-1}^{k-1} + \\ A_2 n_{i-1}^{k-1} \cdot c_{i+1}^{k-1} - A_2 n_{i-1}^{k-1} \cdot c_{i-1}^{k-1} - A_3 n_i^{k-1} \cdot c_{i-1}^{k-1} + 2A_3 n_i^{k-1} \cdot c_i^{k-1} - \\ A_3 n_i^{k-1} \cdot c_{i+1}^{k-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^{k-1} (1 - n_i^{k-1})$$

$$n_{i+1}^k = A_1 n_i^{k-1} + (1 - 2A_1) n_{i+1}^{k-1} + A_1 n_{i+2}^{k-1} - A_2 n_{i+2}^{k-1} \cdot c_{i+2}^{k-1} + A_2 n_{i+2}^{k-1} \cdot c_i^{k-1} + \\ A_2 n_i^{k-1} \cdot c_{i+2}^{k-1} - A_2 n_i^{k-1} \cdot c_i^{k-1} - A_3 n_{i+1}^{k-1} \cdot c_i^{k-1} + 2A_3 n_{i+1}^{k-1} \cdot c_{i+1}^{k-1} - \\ A_3 n_{i+1}^{k-1} \cdot c_{i+2}^{k-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_{i+1}^{k-1} (1 - n_{i+1}^{k-1})$$

$$n_{i+2}^k = A_1 n_{i+1}^{k-1} + (1 - 2A_1) n_{i+2}^{k-1} + A_1 n_{i+3}^{k-1} - A_2 n_{i+3}^{k-1} \cdot c_{i+3}^{k-1} + A_2 n_{i+3}^{k-1} \cdot c_{i+1}^{k-1} + \\ A_2 n_{i+1}^{k-1} \cdot c_{i+3}^{k-1} - A_2 n_{i+1}^{k-1} \cdot c_{i+1}^{k-1} - A_3 n_{i+2}^{k-1} \cdot c_{i+1}^{k-1} + 2A_3 n_{i+2}^{k-1} \cdot c_{i+2}^{k-1} - \\ A_3 n_{i+2}^{k-1} \cdot c_{i+3}^{k-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_{i+2}^{k-1} (1 - n_{i+2}^{k-1})$$

⋮

$$n_{i-1}^k = A_1 n_{i-2}^{k-1} + (1 - 2A_1) n_{i-1}^{k-1} + A_1 n_i^{k-1} - A_2 n_i^{k-1} \cdot c_i^{k-1} + A_2 n_i^{k-1} \cdot c_{i-2}^{k-1} + \\ A_2 n_{i-2}^{k-1} \cdot c_i^{k-1} - A_2 n_{i-2}^{k-1} \cdot c_{i-2}^{k-1} - A_3 n_{i-1}^{k-1} \cdot c_{i-2}^{k-1} + 2A_3 n_{i-1}^{k-1} \cdot c_{i-1}^{k-1} - \\ A_3 n_{i-1}^{k-1} \cdot c_i^{k-1} + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_{i-1}^{k-1} (1 - n_{i-1}^{k-1})$$

Persamaan (3.24):

untuk $i = 1$ dan $j = 1$

$$c_i^j = Bc_{i-1}^{j-1} + (1 - 2B)c_i^{j-1} + Bc_{i+1}^{j-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^{j-1}}{n_i^{j-1} + \gamma} - c_i^{j-1} \right)$$

$$c_{i+1}^j = Bc_i^{j-1} + (1 - 2B)c_{i+1}^{j-1} + Bc_{i+2}^{j-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i+1}^{j-1}}{n_{i+1}^{j-1} + \gamma} - c_{i+1}^{j-1} \right)$$

$$c_{i+2}^j = Bc_{i+1}^{j-1} + (1 - 2B)c_{i+2}^{j-1} + Bc_{i+3}^{j-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i+2}^{j-1}}{n_{i+2}^{j-1} + \gamma} - c_{i+2}^{j-1} \right)$$

⋮

$$c_{i-1}^j = Bc_{i-2}^{j-1} + (1 - 2B)c_{i-1}^{j-1} + Bc_i^{j-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i-1}^{j-1}}{n_{i-1}^{j-1} + \gamma} - c_{i-1}^{j-1} \right)$$

untuk $i = 1$ dan $j + 1 = 2$

$$c_i^{j+1} = Bc_{i-1}^j + (1 - 2B)c_i^j + Bc_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + 1} - c_i^j \right)$$

$$c_{i+1}^{j+1} = Bc_i^j + (1 - 2B)c_{i+1}^j + Bc_{i+2}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i+1}^j}{n_{i+1}^j + 1} - c_{i+1}^j \right)$$

$$c_{i+2}^{j+1} = Bc_{i+1}^j + (1 - 2B)c_{i+2}^j + Bc_{i+3}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i+2}^j}{n_{i+2}^j + 1} - c_{i+2}^j \right)$$

⋮

$$c_{i-1}^{j+1} = Bc_{i-2}^j + (1 - 2B)c_{i-1}^j + Bc_i^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i-1}^j}{n_{i-1}^j + 1} - c_{i-1}^j \right)$$

untuk $i = 1$ dan $j = k$

$$c_i^k = Bc_{i-1}^{k-1} + (1 - 2B)c_i^{k-1} + Bc_{i+1}^{k-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^{k-1}}{n_i^{k-1} + \gamma} - c_i^{k-1} \right)$$

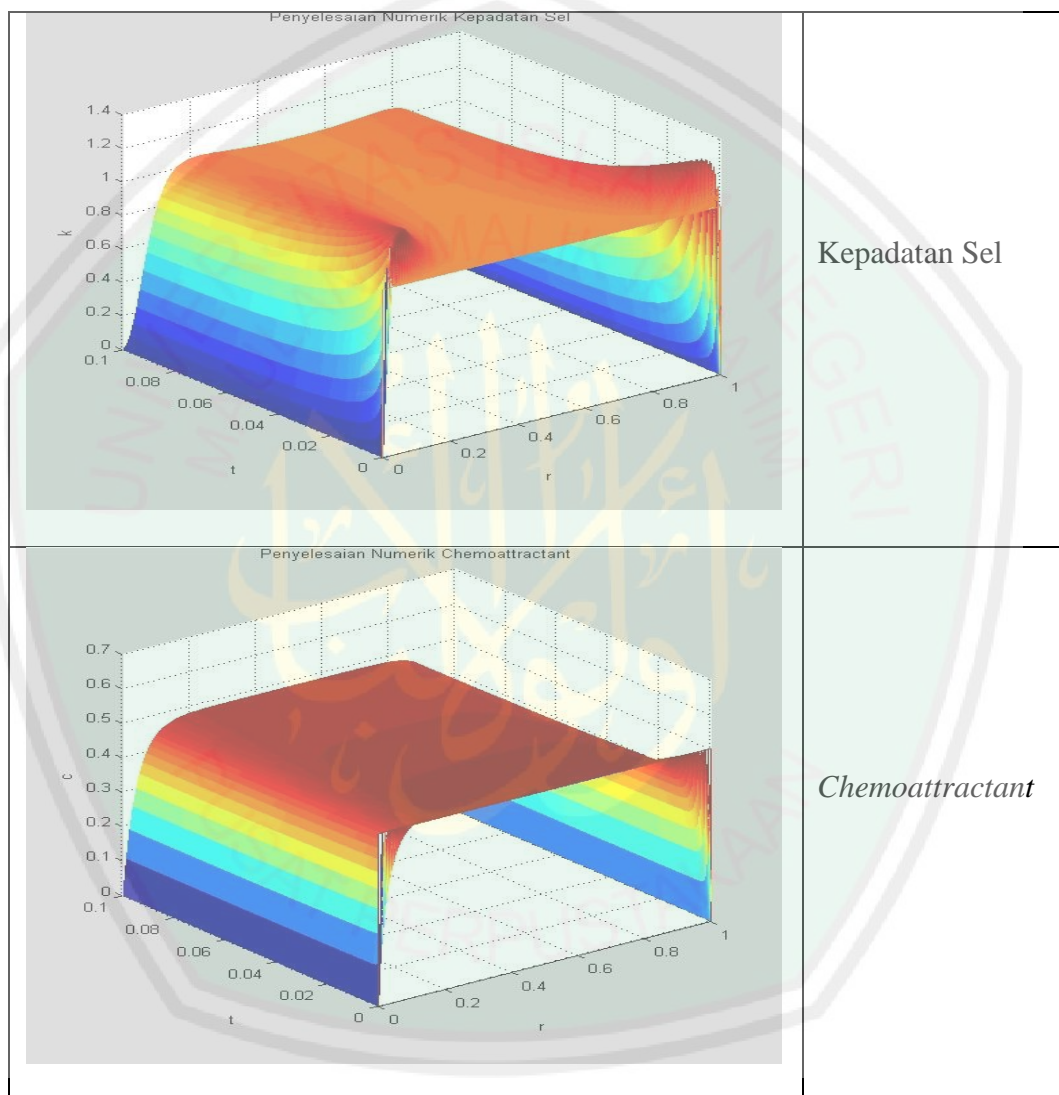
$$c_{i+1}^k = Bc_i^{k-1} + (1 - 2B)c_{i+1}^{k-1} + Bc_{i+2}^{k-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i+1}^{k-1}}{n_{i+1}^{k-1} + \gamma} - c_{i+1}^{k-1} \right)$$

$$c_{i+2}^k = Bc_{i+1}^{k-1} + (1 - 2B)c_{i+2}^{k-1} + Bc_{i+3}^{k-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i+2}^{k-1}}{n_{i+2}^{k-1} + \gamma} - c_{i+2}^{k-1} \right)$$

⋮

$$c_{i-1}^k = Bc_{i-2}^{k-1} + (1 - 2B)c_{i-1}^{k-1} + Bc_i^{k-1} + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_{i-1}^{k-1}}{n_{i-1}^{k-1} + \gamma} - c_{i-1}^{k-1} \right)$$

Setelah proses iterasi dilakukan, maka akan ditunjukkan grafik diskrit dengan bantuan program MATLAB R2008b. Grafik diskrit 3 dimensi yang diperoleh sebagai berikut:



Gambar 3.2 Grafik Diskrit 3 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.01$

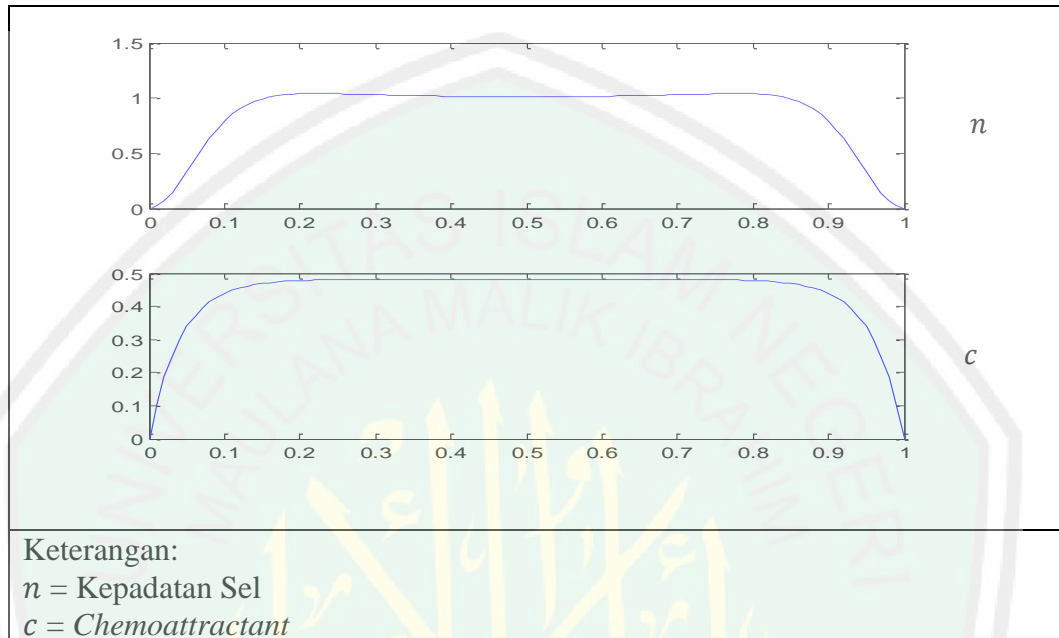
Pada kondisi ini akan ditunjukkan intensitas pergerakan sel. Karena sistem pola pembentukan sel berada pada keadaan *steady state* (tidak berubah terhadap waktu), maka pergerakan sel yang akan diamati yaitu kepadatan sel (n) terhadap ruang dan *chemoattractant* (c) terhadap ruang. Domain terhadap ruang adalah $0 \leq r \leq 1$ yang ditunjukkan oleh sumbu X koordinat Cartesius. Sumbu Y

koordinat Cartesius menunjukkan kondisi untuk n dan c . Sumbu Z koordinat Cartesius menunjukkan domain waktu.

Dari grafik di atas, terdapat beberapa pola perilaku dari setiap variabel yang ditunjukkan. Dari kedua perilaku yaitu n dan c menunjukkan bahwa dalam selang $0 \leq r \leq 1$, membutuhkan waktu 1.53 jam untuk mencapai grafik seperti di atas. Pola pembentukan sel pada kedua perilaku dalam pengamatan menunjukkan bahwa grafik mengalami osilasi. Kondisi awal $n = 1$, menunjukkan adanya gangguan terhadap pergerakan sel. Gangguan terjadi saat awal pembentukan. Sel terus meningkat dan membentuk tanjakan yang berada di sebelah kanan dan sebelah kiri grafik. Hingga pada akhirnya perilaku n tetap akan berhenti pada kondisi $n = 1$. Suatu kepadatan berada pada kondisi 1 diartikan bahwa jumlah sel yang menghuni di suatu jaringan sudah penuh dengan sel tersebut. Sedangkan perilaku c dengan kondisi awal $c = 0.5$, pergerakan sel berjalan secara mulus. Seiring pergerakan sel, perilaku c akan berhenti pada kondisi $c < 0.5$ untuk membentuk suatu kepadatan pada sel.

Selanjutnya akan ditunjukkan kestabilan pada model. Turing (1952), menyatakan bahwa kesetimbangan yang tidak stabil merupakan kondisi yang terjadi secara natural dan biasanya memerlukan sedikit gangguan. Grafik yang dihasilkan dari gambar 3.2 menunjukkan bahwa pola pembentukan sel dengan $\Delta r = 0.01$ berada dalam keadaan tidak stabil. Hal ini dikarenakan salah satu persamaan dari sistem pola pembentukan sel terdapat gangguan berupa tanjakan yang terjadi pada perilaku n .

Selain itu juga disajikan grafik diskrit 2 dimensi pola pembentukan sel sebagai berikut:



Gambar 3.3 Grafik Diskrit 2 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.01$

Grafik 2 dimensi di atas ditunjukkan oleh sumbu X dan sumbu Y koordinat Cartesius. Sumbu X menunjukkan domain terhadap ruang dengan batas $0 \leq r \leq 1$ sedangkan sumbu Y menunjukkan suatu kondisi untuk n dan c .

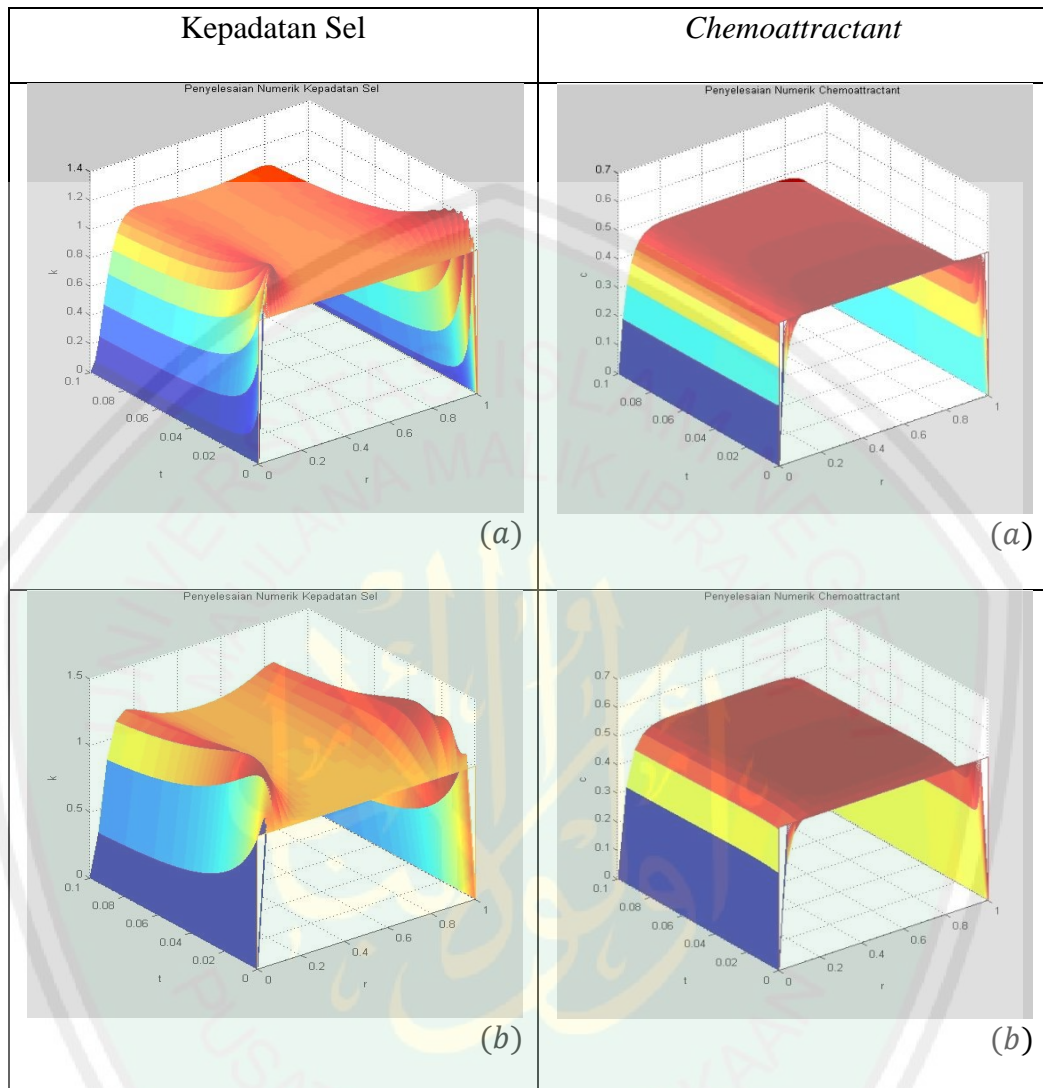
Pergerakan sel yang terjadi dari kedua perilaku yaitu n dan c pada grafik diskrit 2 dimensi pola pembentukan sel menunjukkan bahwa pergerakan sel cenderung tidak berbeda dengan grafik diskrit 3 dimensi. Dari kedua perilaku yaitu n dan c menunjukkan bahwa dalam selang $0 \leq r \leq 1$, pergerakan sel terjadi dengan sangat cepat. Pergerakan sel hingga mencapai grafik di atas memerlukan kurun waktu 1.52 menit. Pada perilaku n menunjukkan terjadinya tanjakan kecil di sebelah kanan dan sebelah kiri grafik. Kedua tanjakan tersebut bergerak mengalami penurunan yang cepat. Penurunan terlihat jelas hingga pada 59 detik pertama. Sebaliknya, pada perilaku c tidak menunjukkan terjadinya tanjakan.

Perilaku c bergerak dalam kondisi 0.5 dan mengalami penurunan pada saat 33 detik pertama.

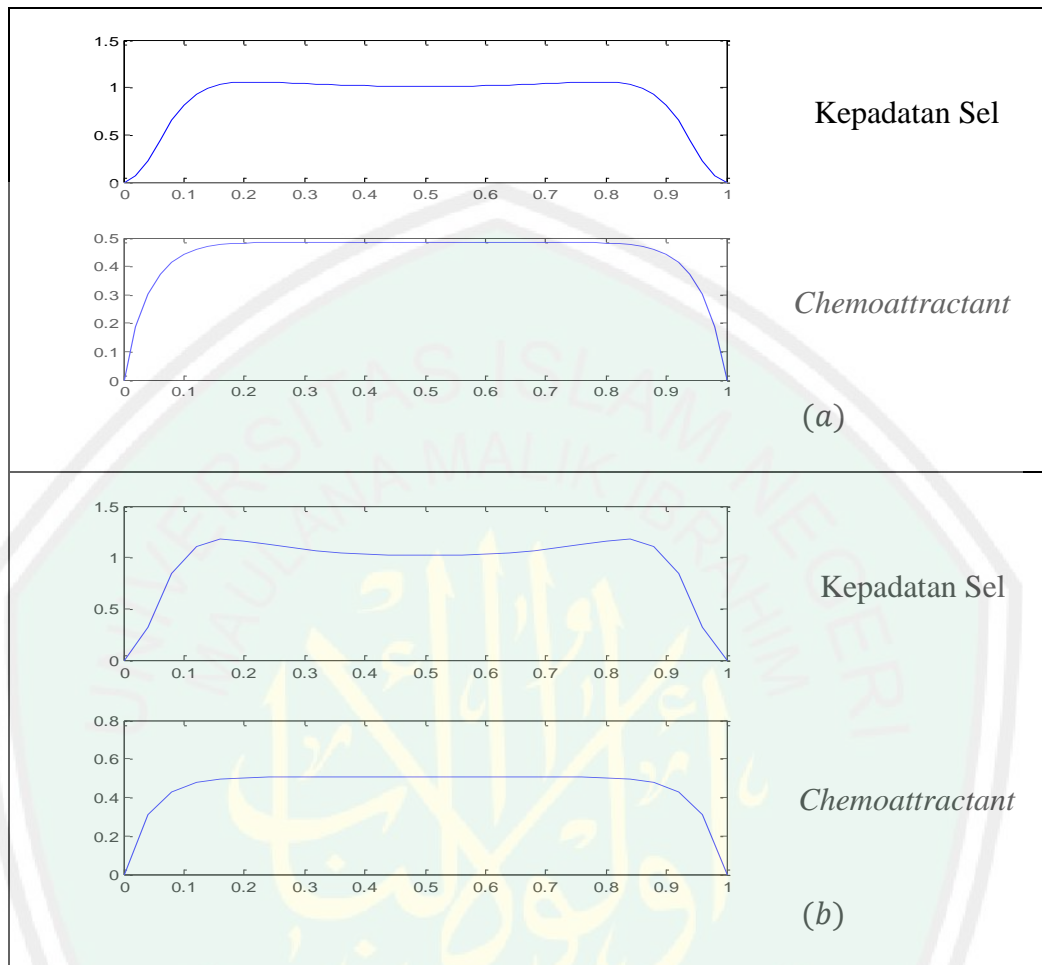
Selanjutnya akan ditunjukkan kestabilan pada model. Dari gambar 3.3 menunjukkan bahwa pola pembentukan sel dengan $\Delta r = 0.01$ berada dalam keadaan tidak stabil. Hal ini dikarenakan salah satu persamaan dari sistem pola pembentukan sel yaitu pada perilaku n mengalami kesetimbangan model yang tidak stabil dengan kondisi di mana perilaku n mengalami gangguan dalam pergerakan sel.

3.3 Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan ditampilkan grafik solusi numerik dari sistem persamaan (3.1) dengan parameter yang diberikan berdasarkan jurnal yang berjudul *Pattern Formation in a Generalized Chemotactic Model* adalah $D = 0.25, \alpha = 2, r = 0.04, \gamma = 1, s = 600$. Sebagai perbandingan dari perilaku grafik pada gambar 3.2 dan 3.3, akan diberikan beberapa perubahan kondisi untuk perbesaran Δr .



Gambar 3.4 (a) Grafik Diskrit 3 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.02$
 (b) Grafik Diskrit 3 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.04$



Gambar 3.5 (a) Grafik Diskrit 2 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.02$
 (b) Grafik Diskrit 2 Dimensi pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.04$

Berdasarkan gambar 3.4 (a) dan 3.4 (b) di atas, diketahui bahwa penambahan besar Δr menyebabkan perubahan yang signifikan terhadap model pola pembentukan sel. Fakta ini menunjukkan bahwa sistem sensitif terhadap pemberian Δr akan menghasilkan keluaran grafik yang berbeda. Tetapi untuk kestabilan model tetap menunjukkan bahwa sistem berada dalam keadaan tidak stabil. Hal ini dikarenakan salah satu persamaan pada sistem yaitu perilaku n masih terdapat gangguan.

Dari gambar 3.4 (a) dengan $\Delta r = 0.02$, dengan kurun waktu 1.03 jam menunjukkan bahwa perilaku n tetap berhenti pada kondisi $n = 1$ dan begitu juga

dengan perilaku c tetap berhenti pada kondisi $c < 0.5$. Akan tetapi, grafik yang dihasilkan dengan $\Delta r = 0.02$ mulai tampak berbeda dibandingkan dengan grafik yang dihasilkan dengan $\Delta r = 0.01$. Perbedaan terlihat jelas pada tanjakan yang ditunjukkan dari perilaku n . Sedangkan gambar 3.4 (b) dengan $\Delta r = 0.04$, menunjukkan grafik yang berbeda. Dalam kurun waktu 33 menit menunjukkan bahwa perilaku n sudah menunjukkan kondisi $n > 1$ dan perilaku c berada pada kondisi $c = 0.5$.

Hal serupa juga ditunjukkan pada gambar 3.5 (a) dan 3.5 (b). Penambahan Δr menyebabkan keluaran grafik yang berbeda. Pada gambar 3.5 (a) dalam kurun waktu 1.52 menit menunjukkan bahwa keadaan diskrit pola pembentukan sel cenderung tidak berbeda dengan perilaku saat diuji dengan $\Delta r = 0.01$. Sedangkan dari gambar 3.5 (b) mulai menghasilkan grafik yang berbeda. Terlihat dari grafik yang dihasilkan dari kedua perilaku yaitu n dan c mulai tampak kasar. Dalam kurun waktu 1.52 menit pengamatan menunjukkan bahwa grafik pada perilaku n mengalami fluktuasi dan osilasi. Pemberian $\Delta r = 0.04$ menunjukkan bahwa perilaku n berada pada kondisi $n > 1$ dan perilaku c berada pada kondisi $c = 0.5$. Gambar yang dihasilkan dari 3.5 (a) dan 3.5 (b) tetap menunjukkan bahwa sistem berada dalam keadaan tidak stabil.

3.4 Pola Pembentukan Sel pada Tulang Lengan dalam Pandangan Islam

Allah berfirman dalam QS. Al-Insaan ayat 28 sebagai berikut:

﴿نَحْنُ خَلَقْنَاهُمْ وَشَدَدْنَا أَسْرَهُمْ وَإِذَا شِئْنَا بَدَّلْنَا أَمْثَلَهُمْ تَبْدِيلًا﴾

Artinya: “Kami telah menciptakan mereka dan menguatkan persendian tubuh mereka, apabila Kami menghendaki, Kami sungguh-sungguh mengganti (mereka) dengan orang-orang yang serupa dengan mereka.”

Berdasarkan ayat di atas penulis berpendapat bahwa dalam proses penciptaan manusia, Allah memberikan rangka (tulang) dengan susunan yang kuat. Menjadikan manusia dapat bergerak dan melakukan aktifitas dengan sangat baik, seperti berjalan, berlari, menari, dan lain-lain. Disebutkan dari ayat di atas bahwa Allah menciptakan dan menguatkan persendian tubuh manusia jika Allah menghendakinya. Salah satu rangka manusia adalah rangka lengan.

Rangka atau tulang pada tubuh manusia termasuk salah satu alat gerak pasif karena tulang baru akan bergerak bila digerakkan oleh otot. Unsur pembentuk tulang pada manusia adalah kalsium.

Penulis menginterpretasikan dalam konteks penelitian ini bahwa suatu kepadatan sel sangat dipengaruhi oleh kehadiran *chemoattractant*. *Chemoattractant* adalah senyawa kimia berupa kalsium yang berfungsi untuk menghasilkan kepadatan tulang. Kepadatan tulang ditentukan oleh besarnya kandungan mineral pada matriks tulang yang tersusun oleh kalsium.

Kepadatan tulang yang berada pada kondisi 0 diartikan bahwa tidak ada jumlah kalsium yang masuk dalam matriks tulang, sehingga menyebabkan tidak terbentuknya kepadatan tulang. Sedangkan kepadatan tulang yang berada pada kondisi 1 diartikan bahwa jumlah kalsium yang masuk ke dalam matriks tulang sudah penuh, sehingga menyebabkan terbentuknya kepadatan tulang. Berdasarkan grafik yang ditunjukkan dari gambar (3.2), (3.3), (3.4(a)), dan (3.5(a)) menunjukkan bahwa grafik kepadatan sel berada pada kondisi 1 dan

chemoattractant berada pada kondisi kurang dari 0.5, maka dapat dinyatakan bahwa kalsium yang masuk pada matriks tulang sudah penuh sehingga terbentuk kepadatan tulang.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang dilaksanakan, maka dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut:

1. Konstruksi bentuk diskrit sistem PDP tak linier pada pola pembentukan sel dilakukan dengan tiga tahap, tahap pertama adalah penjabaran model, tahap kedua adalah diskritisasi masing-masing persamaan penyusun sistem pola pembentukan sel menggunakan metode beda hingga, dan tahap ketiga adalah menyelesaikan model menggunakan skema eksplisit. Bentuk diskrit sistem PDP tak linier pola pembentukan sel adalah:

$$n_i^{j+1} = A_1 n_{i-1}^j + (1 - 2A_1)n_i^j + A_1 n_{i+1}^j - A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i+1}^j + A_2 n_{i+1}^j \cdot c_{i-1}^j + A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i+1}^j - A_2 n_{i-1}^j \cdot c_{i-1}^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i-1}^j + 2A_3 n_i^j \cdot c_i^j - A_3 n_i^j \cdot c_{i+1}^j + s \cdot r \cdot \Delta t \cdot n_i^j (1 - n_i^j)$$

dengan $A_1 = D \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$, $A_2 = \alpha \frac{\Delta t}{4\Delta r^2}$, $A_3 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$

$$c_i^{j+1} = B c_{i-1}^j + (1 - 2B)c_i^j + B c_{i+1}^j + s \cdot \Delta t \left(\frac{n_i^j}{n_i^j + \gamma} - c_i^j \right)$$

dengan $B = \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$

2. Sistem PDP tak linier pada pola pembentukan sel dalam satu dimensi dengan parameter $D = 0.25$, $r = 0.04$, $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, $s = 600$. Kondisi awal secara acak untuk $n = 1$ dan $c = 0.5$ sedangkan kondisi batas adalah $\nabla c = 0$ dan $\nabla n = 0$. Solusi numerik model matematika pada pola pembentukan sel adalah

dalam keadaan *steady state* dan $\Delta r = 0.01$ menunjukkan bahwa kedua perilaku n dan c dalam selang $0 \leq r \leq 1$ mengalami osilasi. Kondisi awal $n = 1$, menunjukkan adanya gangguan terhadap pergerakan sel. Gangguan terjadi saat awal pembentukan. Perilaku n berhenti pada kondisi $n = 1$, yang mengartikan bahwa jumlah sel yang menghuni di suatu jaringan sudah penuh (padat). Kondisi awal $c = 0.5$, menunjukkan bahwa pergerakan sel berjalan mulus. Perilaku c berhenti pada kondisi $c < 0.5$ untuk membentuk suatu kepadatan pada sel.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi diskritisasi model matematika pola pembentukan sel dengan menggunakan metode penyelesaian numerik lainnya. Dikarenakan skema eksplisit mengandung sensitifitas terhadap kestabilan, maka bagi peneliti selanjutnya disarankan menggunakan skema yang lain seperti skema crank nicholson. Penelitian selanjutnya juga dapat mengembangkan metode yang sama terhadap model matematika lainnya seperti, pigmentasi kulit reptil, garis-garis khusus pada buaya, dan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Atkins, P.W.. 1999. *Kimia Fisika: Jilid II Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.
- Ault, J.C. and Ayres, J.R.. 1992. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Ghoffar, M.A.. 1994. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 5*. Bogor: Pustaka Imam-Syafi'i.
- Keller, E.F. and Segel, L.A.. 1970. Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *J. Theor. Biol*, Volume 26 Halaman 399-415.
- Liu dan Hussain, T.T.. 2012. *Discretization: An Enabling Technique*. Arizona: Departement of Computer Science and Engineering-Arizona State University.
- Mader S.S.. 1998. *Human Biology. 5th edition*. New York: McGraw-Hill.
- Maini, P.K., Myerscough, M.R., Winters, K.H., dan Murray, J.D.. 1991. Spatially Heterogeneous Solution In A Chemotaxis Model For Biological Pattern Generation. *Bulletin of Mathematical Biology*, Volume 53 Halaman 701-719.
- Murray, J.D. dan Myerscough, M.R.. 1991. Pigmentation Pattern Formation on Snakes. *J. Theor. Biol*, Volume 149 Halaman 339-360.
- Myerscough, M.R., Maini, P.K., dan Painter, K.J.. 1998. Pattern Formation in a Generalized Chemotactic Model. *Bulletin of Mathematical Biology*, Volume 60 Halaman 1-26.
- Pamuntjak dan Santoso. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*, Fakultas MIPA. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Paulo, A.A., Marinilce, F.S., dan Telma, M.T.Z.. 2007. *Basic Histologi: Text & Atlas 11 Edition*. McGraw-Hill's: Access Medicine.
- Turing, A.M.. 1952. The Chemical Basis of Morphogenesis. *Series B. Biological Sciences*, Volume 237 Halaman 37-72.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Trinkaus, J.P.. 1984. *Cells into Organs: The Forces that Shape the Embryo*. Englewood Cliffs: Prentice – Hall.

Winters, K.H., Myerscough, M.R., Maini, P.K., dan Murray, J.D.. 1990. Tracking Bifurcating Solution of A Model Biological Pattern Generator. *Impact of Computing in Science and Engineering*, Volume 2 Halaman 355-371.

Yatim, W.. 1982. *Reproduksi dan Embryologi*. Bandung: Tarsito.

Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New Jersey: Willey Interscience





**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Maryam Afiana
NIM : 09610046
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Diskritisasi Sistem Persamaan Diferensial Parsial Tak
Linier pada Pola Pembentukan Sel
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Oktober 2012	Konsultasi Bab I	1.
2.	19 November 2012	Konsultasi Agama	2.
3.	23 November 2012	Revisi Bab I dan Konsultasi Bab II	3.
4.	7 Januari 2013	ACC Bab I dan Revisi Bab II	4.
5.	21 Januari 2013	Revisi Bab II	5.
6.	28 Januari 2013	Revisi Bab II	6.
7.	31 Januari 2013	ACC Bab II	7.
8.	4 Februari 2013	Konsultasi Bab III	8.
9.	7 Februari 2013	Revisi Bab III dan Konsultasi Program	9.
10.	11 Februari 2013	Konsultasi Agama	10.
11.	7 Maret 2013	Revisi Program	11.
12.	13 Maret 2013	Revisi Agama	12.
13.	20 Maret 2013	Revisi Program	13.
14.	21 Maret 2013	ACC Agama	14.
15.	21 Maret 2013	ACC Bab III dan ACC Program	15.
16.	6 Mei 2013	ACC Keseluruhan	16.

Malang, 27 Mei 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 2003121001

LAMPIRAN 1

Program Matlab Diskritisasi Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier

pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.01$

➤ Grafik 3 dimensi

```
%Program penyelesaian sistem PDP tak Linier pola pembentukan sel
untuk L0<=x<=L dan T0<t<T
% k=Kepadatan Sel
% D=proses difusi untuk kepadatan sel
% alpha=koefisien chemotactic dari sel motil
% r_R=tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel
% c=Chemoattractant
% gamma=tingkat produksi dan degradasi chemoattractant
% s=parameter kontrol
clc,clear;
%Kondisi batas k(0,t)=g1(t); k(L,t)=g2(t)
%Kondisi awal k(r,0)=f1(r)
%Kondisi batas c(0,t)=h1(t); c(L,t)=h2(t)
%Kondisi awal c(r,0)=f2(r)
%parameter
D=0.25;
alpha=2;
r_R=0.04;
s=600;
gamma=1;
%Domain
L0=0;%Batas interval r
L=1; %Batas interval r
T0=0; %Batas interval t
T=0.1; %Batas interval t,
m=100;%banyak subinterval untuk r
n=5000;%banyak subinterval untuk t
f1=inline('1','r'); %kondisi awal kepadatan sel
f2=inline('0.5','r'); %kondisi awal chemoattractant
dr = L/m;
dt = T/n;
A_1=D*dt/dr^2;
AA_1= 1 - 2*A_1;
A_2=alpha*dt/(4*dr^2);
A_3=alpha*dt/(dr^2);
AA_3= 2*A_3;
B=dt/(dr^2);
BB= 1 - 2*B;
r = linspace(0,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
k= zeros(n+1,m+1);
c = zeros(n+1,m+1);
```

```

format long e
% kepadatan sel
k(1,:) = f1(r);
%Chemoattractant
c(1,:) = f2(r);

for j = 1:n ;
% Model Kepadatan sel
k(j+1,2:m)=A_1*k(j,1:m-1)+AA_1*k(j,2:m)+A_1*k(j,3:m+1) -
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,3:m+1)+...
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,1:m-1)+A_2.*k(j,1:m-1).* c(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,1:m-1).*c(j,1:m-1)-A_3.*k(j,2:m).*c(j,1:m-1)+...
AA_3.*k(j,2:m).*c(j,2:m) -
A_3.*k(j,2:m).*c(j,3:m+1)+s.*r_R.*dt.*k(j,2:m).*(1-k(j,2:m));
% Model Chemoattractant
c(j+1,2:m)=B*c(j,1:m-
1)+BB*c(j,2:m)+B*c(j,3:m+1)+s*dt*((k(j,2:m)/(k(j,2:m)+gamma)) -
c(j,2:m));
drawnow;
figure (1)
mesh(r,t,k),title('Penyelesaian Numerik Kepadatan
Sel');xlabel('r');ylabel('t');zlabel('k')
figure (2)
mesh(r,t,c),title('Penyelesaian Numerik
Chemoattractant');xlabel('r');ylabel('t');zlabel('c')
end

```

➤ **Grafik 2 dimensi**

```

%Program penyelesaian sistem PDP tak Linier pola pembentukan sel
untuk  $L_0 \leq x \leq L$  dan  $T_0 < t < T$ 
% k=Kepadatan Sel
% D=proses difusi untuk kepadatan sel
% alpha=koefisien chemotactic dari sel motil
% r_R=tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel
% c=Chemoattractant
% gamma=tingkat produksi dan degradasi chemoattractant
% s=parameter kontrol
clc,clear;
%Kondisi batas  $k(0,t)=g_1(t)$ ;  $k(L,t)=g_2(t)$ 
%Kondisi awal  $k(r,0)=f_1(r)$ 
%Kondisi batas  $c(0,t)=h_1(t)$ ;  $c(L,t)=h_2(t)$ 
%Kondisi awal  $c(r,0)=f_2(r)$ 
%parameter
D=0.25;
alpha=2;
r_R=0.04;
s=600;
gamma=1;
%Domain
L0=0;%Batas interval r
L=1; %Batas interval r
T0=0; %Batas interval t
T=0.1; %Batas interval t,
m=100;%banyak subinterval untuk r
n=5000;%banyak subinterval untuk t
f1=inline('1','r'); %kondisi awal kepadatan sel
f2=inline('0.5','r'); %kondisi awal chemoattractant
dr = L/m;
dt = T/n;
A_1=D*dt/dr^2;
AA_1= 1 - 2*A_1;
A_2=alpha*dt/(4*dr^2);
A_3=alpha*dt/(dr^2);
AA_3= 2*A_3;
B=dt/(dr^2);
BB= 1 - 2*B;
r = linspace(0,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
k= zeros(n+1,m+1);
c = zeros(n+1,m+1);
format long e
% kepadatan sel
k(1,:) = f1(r);
%Chemoattractant
c(1,:) = f2(r);

```

```

for j = 1:n ;
% Model Kepadatan sel
k(j+1,2:m)=A_1*k(j,1:m-1)+AA_1*k(j,2:m)+A_1*k(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,3:m+1)+...
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,1:m-1)+A_2.*k(j,1:m-1).*c(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,1:m-1).*c(j,1:m-1)-A_3.*k(j,2:m).*c(j,1:m-1)+...
AA_3.*k(j,2:m).*c(j,2:m)-
A_3.*k(j,2:m).*c(j,3:m+1)+s.*r_R.*dt.*k(j,2:m).*(1-k(j,2:m));
% Model Chemoattractant
c(j+1,2:m)=B*c(j,1:m-
1)+BB*c(j,2:m)+B*c(j,3:m+1)+s*dt*((k(j,2:m)/(k(j,2:m)+gamma))-
c(j,2:m));
drawnow;

figure(1)
subplot(2,1,1);
plot(r,k(j+1,:));
subplot(2,1,2); plot(r,c(j+1,:));
drawnow;
end;

```

LAMPIRAN 2

Program Matlab Diskritisasi Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier
pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.02$

➤ Grafik 3 dimensi

```
%Program penyelesaian sistem PDP tak Linier pola pembentukan sel
untuk L0<=x<=L dan T0<t<T
% k=Kepadatan Sel
% D=proses difusi untuk kepadatan sel
% alpha=koefisien chemotactic dari sel motil
% r_R=tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel
% c=Chemoattractant
% gamma=tingkat produksi dan degradasi chemoattractant
% s=parameter kontrol
clc,clear;
%Kondisi batas k(0,t)=g1(t); k(L,t)=g2(t)
%Kondisi awal k(r,0)=f1(r)
%Kondisi batas c(0,t)=h1(t); c(L,t)=h2(t)
%Kondisi awal c(r,0)=f2(r)
%parameter
D=0.25;
alpha=2;
r_R=0.04;
s=600;
gamma=1;
%Domain
L0=0;%Batas interval r
L=1; %Batas interval r
T0=0; %Batas interval t
T=0.1; %Batas interval t,
m=50;%banyak subinterval untuk r
n=5000;%banyak subinterval untuk t
f1=inline('1','r'); %kondisi awal kepadatan sel
f2=inline('0.5','r'); %kondisi awal chemoattractant
dr = L/m;
dt = T/n;
A_1=D*dt/dr^2;
AA_1= 1 - 2*A_1;
A_2=alpha*dt/(4*dr^2);
A_3=alpha*dt/(dr^2);
AA_3= 2*A_3;
B=dt/(dr^2);
BB= 1 - 2*B;
r = linspace(0,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
k= zeros(n+1,m+1);
c = zeros(n+1,m+1);
```

```

format long e
% kepadatan sel
k(1,:) = f1(r);
%Chemoattractant
c(1,:) = f2(r);

for j = 1:n ;
% Model Kepadatan sel
k(j+1,2:m)=A_1*k(j,1:m-1)+AA_1*k(j,2:m)+A_1*k(j,3:m+1) -
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,3:m+1)+...
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,1:m-1)+A_2.*k(j,1:m-1).* c(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,1:m-1).*c(j,1:m-1)-A_3.*k(j,2:m).*c(j,1:m-1)+...
AA_3.*k(j,2:m).*c(j,2:m) -
A_3.*k(j,2:m).*c(j,3:m+1)+s.*r_R.*dt.*k(j,2:m).*(1-k(j,2:m));
% Model Chemoattractant
c(j+1,2:m)=B*c(j,1:m-
1)+BB*c(j,2:m)+B*c(j,3:m+1)+s*dt*((k(j,2:m)/(k(j,2:m)+gamma)) -
c(j,2:m));
drawnow;
figure (1)
mesh(r,t,k),title('Penyelesaian Numerik Kepadatan
Sel');xlabel('r');ylabel('t');zlabel('k')
figure (2)
mesh(r,t,c),title('Penyelesaian Numerik
Chemoattractant');xlabel('r');ylabel('t');zlabel('c')
end;
disp (k)

```

➤ Grafik 2 dimensi

```
%Program penyelesaian sistem PDP tak Linier pola pembentukan sel
untuk  $L_0 \leq x \leq L$  dan  $T_0 < t < T$ 
% k=Kepadatan Sel
% D=proses difusi untuk kepadatan sel
% alpha=koefisien chemotactic dari sel motil
% r_R=tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel
% c=Chemoattractant
% gamma=tingkat produksi dan degradasi chemoattractant
% s=parameter kontrol
clc,clear;
%Kondisi batas  $k(0,t)=g_1(t)$ ;  $k(L,t)=g_2(t)$ 
%Kondisi awal  $k(r,0)=f_1(r)$ 
%Kondisi batas  $c(0,t)=h_1(t)$ ;  $c(L,t)=h_2(t)$ 
%Kondisi awal  $c(r,0)=f_2(r)$ 
%parameter
D=0.25;
alpha=2;
r_R=0.04;
s=600;
gamma=1;
%Domain
L0=0;%Batas interval r
L=1; %Batas interval r
T0=0; %Batas interval t
T=0.1; %Batas interval t,
m=50;%banyak subinterval untuk r
n=5000;%banyak subinterval untuk t
f1=inline('1','r'); %kondisi awal kepadatan sel
f2=inline('0.5','r'); %kondisi awal chemoattractant
dr = L/m;
dt = T/n;
A_1=D*dt/dr^2;
AA_1= 1 - 2*A_1;
A_2=alpha*dt/(4*dr^2);
A_3=alpha*dt/(dr^2);
AA_3= 2*A_3;
B=dt/(dr^2);
BB= 1 - 2*B;
r = linspace(0,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
k= zeros(n+1,m+1);
c = zeros(n+1,m+1);
format long e
% kepadatan sel
k(1,:) = f1(r);
%Chemoattractant
c(1,:) = f2(r);
```

```

for j = 1:n ;
% Model Kepadatan sel
k(j+1,2:m)=A_1*k(j,1:m-1)+AA_1*k(j,2:m)+A_1*k(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,3:m+1)+...
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,1:m-1)+A_2.*k(j,1:m-1).* c(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,1:m-1).*c(j,1:m-1)-A_3.*k(j,2:m).*c(j,1:m-1)+...
AA_3.*k(j,2:m).*c(j,2:m)-
A_3.*k(j,2:m).*c(j,3:m+1)+s.*r_R.*dt.*k(j,2:m).*(1-k(j,2:m));
% Model Chemoattractant
c(j+1,2:m)=B*c(j,1:m-
1)+BB*c(j,2:m)+B*c(j,3:m+1)+s*dt*((k(j,2:m)/(k(j,2:m)+gamma))-
c(j,2:m));
drawnow;

figure(1)
subplot(2,1,1);
plot(r,k(j+1,:));
subplot(2,1,2); plot(r,c(j+1,:));
drawnow;
end;

```

LAMPIRAN 3

Program Matlab Diskritisasi Persamaan Diferensial Parsial Tak Linier

pada Pola Pembentukan Sel dengan $\Delta r = 0.04$

➤ Grafik 3 dimensi

```
%Program penyelesaian sistem PDP tak Linier pola pembentukan sel
untuk  $L_0 \leq x \leq L$  dan  $T_0 < t < T$ 
% k=Kepadatan Sel
% D=proses difusi untuk kepadatan sel
% alpha=koefisien chemotactic dari sel motil
% r_R=tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel
% c=Chemoattractant
% gamma=tingkat produksi dan degradasi chemoattractant
% s=parameter kontrol
clc,clear;
%Kondisi batas  $k(0,t)=g_1(t)$ ;  $k(L,t)=g_2(t)$ 
%Kondisi awal  $k(r,0)=f_1(r)$ 
%Kondisi batas  $c(0,t)=h_1(t)$ ;  $c(L,t)=h_2(t)$ 
%Kondisi awal  $c(r,0)=f_2(r)$ 
%parameter
D=0.25;
alpha=2;
r_R=0.04;
s=600;
gamma=1;
%Domain
L0=0;%Batas interval r
L=1; %Batas interval r
T0=0; %Batas interval t
T=0.1; %Batas interval t,
m=25;%banyak subinterval untuk r
n=5000;%banyak subinterval untuk t
f1=inline('1','r'); %kondisi awal kepadatan sel
f2=inline('0.5','r'); %kondisi awal chemoattractant
dr = L/m;
dt = T/n;
A_1=D*dt/dr^2;
AA_1= 1 - 2*A_1;
A_2=alpha*dt/(4*dr^2);
A_3=alpha*dt/(dr^2);
AA_3= 2*A_3;
B=dt/(dr^2);
BB= 1 - 2*B;
r = linspace(0,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
k= zeros(n+1,m+1);
c = zeros(n+1,m+1);
```

```

format long e
% kepadatan sel
k(1,:) = f1(r);
%Chemoattractant
c(1,:) = f2(r);

for j = 1:n ;
% Model Kepadatan sel
k(j+1,2:m)=A_1*k(j,1:m-1)+AA_1*k(j,2:m)+A_1*k(j,3:m+1) -
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,3:m+1)+...
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,1:m-1)+A_2.*k(j,1:m-1).* c(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,1:m-1).*c(j,1:m-1)-A_3.*k(j,2:m).*c(j,1:m-1)+...
AA_3.*k(j,2:m).*c(j,2:m) -
A_3.*k(j,2:m).*c(j,3:m+1)+s.*r_R.*dt.*k(j,2:m).*(1-k(j,2:m));
% Model Chemoattractant
c(j+1,2:m)=B*c(j,1:m-
1)+BB*c(j,2:m)+B*c(j,3:m+1)+s*dt*((k(j,2:m)/(k(j,2:m)+gamma)) -
c(j,2:m));
drawnow;
figure (1)
mesh(r,t,k),title('Penyelesaian Numerik Kepadatan
Sel');xlabel('r');ylabel('t');zlabel('k')
figure (2)
mesh(r,t,c),title('Penyelesaian Numerik
Chemoattractant');xlabel('r');ylabel('t');zlabel('c')
end;

```

➤ **Grafik 2 dimensi**

```
%Program penyelesaian sistem PDP tak Linier pola pembentukan sel
untuk  $L_0 \leq x \leq L$  dan  $T_0 < t < T$ 
% k=Kepadatan Sel
% D=proses difusi untuk kepadatan sel
% alpha=koefisien chemotactic dari sel motil
% r_R=tingkat pertumbuhan linier dari populasi sel
% c=Chemoattractant
% gamma=tingkat produksi dan degradasi chemoattractant
% s=parameter kontrol
clc,clear;
%Kondisi batas  $k(0,t)=g_1(t)$ ;  $k(L,t)=g_2(t)$ 
%Kondisi awal  $k(r,0)=f_1(r)$ 
%Kondisi batas  $c(0,t)=h_1(t)$ ;  $c(L,t)=h_2(t)$ 
%Kondisi awal  $c(r,0)=f_2(r)$ 
%parameter
D=0.25;
alpha=2;
r_R=0.04;
s=600;
gamma=1;
%Domain
L0=0;%Batas interval r
L=1; %Batas interval r
T0=0; %Batas interval t
T=0.1; %Batas interval t,
m=25;%banyak subinterval untuk r
n=5000;%banyak subinterval untuk t
f1=inline('1','r'); %kondisi awal kepadatan sel
f2=inline('0.5','r'); %kondisi awal chemoattractant
dr = L/m;
dt = T/n;
A_1=D*dt/dr^2;
AA_1= 1 - 2*A_1;
A_2=alpha*dt/(4*dr^2);
A_3=alpha*dt/(dr^2);
AA_3= 2*A_3;
B=dt/(dr^2);
BB= 1 - 2*B;
r = linspace(0,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
k= zeros(n+1,m+1);
c = zeros(n+1,m+1);
format long e
% kepadatan sel
k(1,:) = f1(r);
%Chemoattractant
c(1,:) = f2(r);
```

```

for j = 1:n ;
% Model Kepadatan sel
k(j+1,2:m)=A_1*k(j,1:m-1)+AA_1*k(j,2:m)+A_1*k(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,3:m+1)+...
A_2.*k(j,3:m+1).*c(j,1:m-1)+A_2.*k(j,1:m-1).*c(j,3:m+1)-
A_2.*k(j,1:m-1).*c(j,1:m-1)-A_3.*k(j,2:m).*c(j,1:m-1)+...
AA_3.*k(j,2:m).*c(j,2:m)-
A_3.*k(j,2:m).*c(j,3:m+1)+s.*r_R.*dt.*k(j,2:m).*(1-k(j,2:m));
% Model Chemoattractant
c(j+1,2:m)=B*c(j,1:m-
1)+BB*c(j,2:m)+B*c(j,3:m+1)+s*dt*((k(j,2:m)/(k(j,2:m)+gamma))-
c(j,2:m));
drawnow;

figure(1)
subplot(2,1,1);
plot(r,k(j+1,:));
subplot(2,1,2); plot(r,c(j+1,:));
drawnow;
end;

```