

**ENERGI DETOUR PADA GRAF INVERS DARI GRUP
QUATERNION DIPERUMUM**

SKRIPSI

**OLEH:
IFTITAHUR ROHMAH
NIM. 200601110023**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

**ENERGI DETOUR PADA GRAF INVERS DARI GRUP
QUATERNION DIPERUMUM**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
IFTITAHUR ROHMAH
NIM. 200601110023**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

ENERGI DETOUR PADA GRAF INVERS DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Iftitahur Rohmah
NIM. 200601110023

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 13 November 2024

Dosen Pembimbing I



M. Nafie Jauhari, M.Si.
NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Dosen Pembimbing II



Erna Herawati, M.Pd.
NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



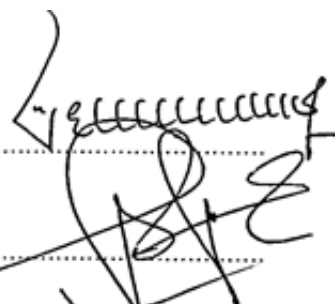

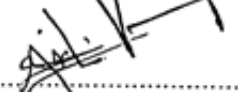


Dr. Ily Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

ENERGI DETOUR PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Iftitahur Rohmah
NIM. 200601110023

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 28 November 2024

Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd.	
Anggota Penguji 1	: Dr. Abdussakir, M.Pd.	
Anggota Penguji 2	: M. Nafie Jauhari, M.Si.	
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd.	

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005



PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Iftitahur Rohmah

NIM : 200601110023

Program Studi: Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Energi Detour pada Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 28 November 2024

Yang membuat pernyataan,



Iftitahur Rohmah

NIM. 200601110023

MOTO

(Ingatlah) ketika Tuhanmu memaklumkan, “Sesungguhnya jika kamu bersyukur, niscaya aku akan menambah (nikmat) kepadamu, tetapi jika kamu mengingkari (nikmat-ku), sesungguhnya azab-ku benar-benar sangat keras.” (Q.S Ibrahim:7).

PERSEMBAHAN

Peneliti mempersembahkan skripsi ini untuk:

Bapak Ali Mansur dan Ibu Siti Hindun yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi dukungan, motivasi, dan selalu memberi semangat atas terselesainya skripsi ini, tak lupa restunya kepada peneliti dalam menuntut ilmu serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk Adik-adik, Khoirul Azhar dan Ushoyyim Ali yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada peneliti.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warohmatullahi Wabarokatuh

Puji syukur peneliti panjatkan ke hadirat Allah SWT karena dengan rahmat dan hidayah-Nya, peneliti dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Energi Detour pada Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum". Tidak ada kata yang pantas diucapkan selain ucapan syukur dan terima kasih kepada Allah SWT.

Sholawat dan salam semoga senantiasa dilimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing umat manusia dari kegelapan menuju cahaya kebenaran agama Islam.

Peneliti menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa bimbingan, bantuan, dorongan, saran dan do'a dari berbagai pihak. Peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. M. Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing peneliti dalam menyusun skripsi dari awal hingga akhir.
5. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing peneliti dalam menyusun kajian integrasi topik dengan Al-Quran.
6. Evawati Alisah, M.Pd., selaku ketua penguji yang telah bersedia menguji dan memberikan banyak ilmu dan saran kepada peneliti.
7. Dr. Abdussakir, M.Pd., selaku anggota penguji 1 yang telah bersedia menguji dan memberikan banyak ilmu dan saran kepada peneliti.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika atas ilmu yang telah diajarkan kepada peneliti.
9. Bapak Ali Mansur, Ibu Siti Hindun, dan kedua adik kandung Khoirul Azhar dan Ushoyyim Ali serta seluruh keluarga atas do'a, dukungan dan semangat yang diberikan kepada peneliti.

10. KH. Marzuki Mustamar dan Hj. Saidah Mustaghfiroh yang telah memberikan kesempatan kepada peneliti untuk menuntut ilmu dan mendapat banyak pengalaman di PP. Sabilurrasyad Gasek.
11. Seluruh teman-teman PP. Sabilurrasyad Gasek yang telah berjuang bersama dalam menuntut ilmu.
12. Seluruh teman-teman mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2020 yang telah berjuang bersama-sama dalam menuntut ilmu.
13. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Peneliti menyampaikan rasa terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini. Peneliti berharap skripsi yang telah disusun ini dapat memberi manfaat bagi peneliti sendiri dan juga pembaca.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Malang, 28 November 2024

Peneliti

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
PERYTAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO.....	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL.....	xiv
ABSTRAK.....	xv
ABSTRACT.....	xvi
مستخلص البحث.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat penelitian.....	5
1.5 Definisi Istilah.....	5
BAB II KAJIAN TEORI.....	6
2.1 Grup.....	6
2.1.1 Grup Non-Abelian	7
2.1.2 Grup Quaternion.....	7
2.1.3 Grup Quaternion Diperumum.....	8
2.2 Graf.....	9
2.2.1 Lintasan.....	11
2.2.2 Graf Terhubung	13
2.2.3 Graf Invers.....	14
2.3 Matriks.....	16
2.3.1 Matriks Persegi.....	16
2.3.2 Matriks Identitas	17
2.3.3 Matriks Keterhubungan Titik	17
2.3.4 Matriks Detour	18
2.3.5 Determinan Matriks.....	19
2.4 Polinomial Karakteristik	22
2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	22
2.6 Energi Detour.....	24
2.7 Kajian Integrasi Topik dengan al-Quran.....	26
BAB III METODE PENELITIAN.....	34
3.1 Jenis Penelitian.....	34
3.2 Pra Penelitian	34
3.3 Tahapan Penelitian	34
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	36

4.1 Energi Detour pada Graf Invers dari Grup Quaternion	
Diperumum Q_{4n}	36
4.1.1 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4.2}$	37
4.1.2 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4.3}$	40
4.1.3 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4.4}$	43
4.1.4 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4.5}$	47
4.2 Integrasi Hasil Penelitian dengan Kajian Keislaman.....	63
BAB V PENUTUP	65
5.1 Kesimpulan.....	65
5.2 Saran.....	65
DAFTAR RUJUKAN	66
RIWAYAT HIDUP	68

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Tabel Cayley pada Q_8	8
Tabel 2.2	Tabel Cayley Q_8	9
Tabel 2.3	Tabel Cayley dari Q_8	14
Tabel 4.1	Tabel Cayley dari Q_8	37
Tabel 4.2	Tabel Cayley Q_{12}	40
Tabel 4.3	Tabel Cayley Q_{16}	44
Tabel 4.4	Tabel Cayley Q_{20}	48
Tabel 4.5	Tabel Energi Detour.....	52

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh Graf.....	10
Gambar 2.2 Contoh Graf Terhubung dan Terkait Langsung.....	10
Gambar 2.3 Contoh Lintasan	12
Gambar 2.4 Lintasan Hamilton	12
Gambar 2.5 Contoh Graf Terhubung	13
Gambar 2.6 Graf Invers G_8	15
Gambar 2.7 Graf G	18
Gambar 2.8 Graf Invers G_8	19
Gambar 2.9 Graf Invers Q_8	24
Gambar 4.1 $\Gamma_S(Q_8)$	38
Gambar 4.2 $\Gamma_S(Q_{12})$	41
Gambar 4.3 $\Gamma_S(Q_{16})$	45
Gambar 4.4 $\Gamma_S(Q_{20})$	50
Gambar 4.5 Graf $u \in s$ dan $v \in t$	57
Gambar 4.6 Graf $u, v \in s$	58
Gambar 4.7 Graf $u, v \in t$	59

DAFTAR SIMBOL

Q_{4n}	: Grup Quaternion Diperumum
\mathbb{N}	: Bilangan Asli
e	: Identitas
$V(G)$: Himpunan Titik pada Graf
$E(G)$: Himpunan Sisi pada Graf
$n(G)$: Order dari G
$m(G)$: Ukuran dari G
W	: Jalan
$a - b$: Lintasan a ke b
Γ_S	: Graf Invers
S	: Himpunan <i>Self Invertible</i>
$A(G)$: Matriks Keterhubungan Titik
I	: Matriks Identitas
$DD(G)$: Matriks Detour
$p(\lambda)$: Polinomial Karakteristik
λ_i	: Nilai Eigen
$m(\lambda_i)$: Multiplitas dari nilai Eigen
$E(G)$: Energi Graf
$E_{DD}(G)$: Energi Detour

ABSTRAK

Rohmah, Iftitahur. 2024. **Energi Detour pada Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) M. Nafie Jauhari, M.Si. (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Grup Quaternion Diperumum, Graf Invers, Energi Detour

Grup quaternion diperumum (Q_{4n}) adalah grup non abelian dengan orde $4n$ yang dibangun oleh dua elemen a, b yang dinotasikan $\{a, b\}$ didefinisikan sebagai $Q_{4n} = \{a, b \mid a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\}$ untuk e identitas, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Graf invers dari suatu grup adalah graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota grup berhingga sedemikian sehingga dua titik berbeda u dan v terhubung langsung jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$. Energi graf, khususnya energi detour, merupakan aspek penting dalam teori graf yang menggambarkan stabilitas dan ketahanan jaringan. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui formula dari energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum dengan $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Melalui metode analisis aljabar dan teori graf, ditemukan bahwa energi detour dapat dihitung dengan menggunakan matriks detour dan nilai eigen yang dihasilkan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa formula energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum adalah $E_{DD}(\Gamma_S(Q_{4n})) = 32n^2 - 16n + 2$ untuk setiap $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

ABSTRACT

Rohmah, Iftitahur. 2024. **Detour Energy on the Inverse Graph of a Generalized Quaternion Group**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Saince and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) M. Nafie Jauhari, M.Si. (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Generalized Quaternion Group, Inverse Graph, Detour Energy

A generalized quaternion group (Q_{4n}) is a non-abelian group with a $4n$ order constructed from the two elements a, b that is denoted by $\{a, b\}$ defined as $Q_{4n} = \{a, b \mid a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\}$ where the e is the identity, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. The inverse graph of a group is a graph which the vertices set are all elements of a finite group and two distinct vertices u and v are adjacent if and only if either $u \cdot v \in S$ or $v \cdot u \in S$. Graph energy, especially detour energy, is an important aspect in graph theory that describes network stability and resistance. This study aims to determine the formula of the detour energy in the inverse graph of the quaternion group is announced with $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Through algebra analysis methods and graph theory, it is found that detour energy can be calculated using the detour matrix and the resulting eigen value. The results showed that the detour energy formula in the inverse graph from the quenthernion group was founded was $E_{DD}(\Gamma_S(Q_{4n})) = 32n^2 - 16n + 2$ for each $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

مستخلص البحث

الرحمة، افتتاح ٢٠٢٤. طاقة الالتفاف على الرسم البياني العكسي من مجموعة *Quaternion* المعممة. البحث العلمي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا ملك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف (١) محمد نافع جوهرى، الماجستير (٢) إيرنا هيراواتي، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: مجموعة *Quaternion* المعممة، للمخطاط العكسي، طاقة الالتفاف

مجموعة *Quaternion* المعممة Q_{4n} هي مجموعة غير أبيلية من الرتبة $4n$ التي تبني باستخدام عنصرين a و b وترمز بـ $\{a, b\}$ ، وتعرف كما يلي: $Q_{4n} = \{a, b | a^{2n} = e, b^2 = a^{-1}\}$ حيث $a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}$ هو العنصر المحايد، و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. الرسم البياني العكسي لمجموعة هو الرسم البياني الذي يكون مجموعة رؤوس رؤوسه جميع أعضاء المجموعة بحيث يكون رأسان مختلفان u و v متصلين مباشرة إذا كان $u \cdot v \in S$ أو $v \cdot u \in S$. تعد طاقة الرسم البياني التي تصف استقرار الشبكة ومتانتها. يهدف هذا البحث إلى معرفة معادلة طاقة الالتفاف علي الرسم البياني العكسي للمجموعة الرباعية المعممة مع $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. من خلال التحليل الجبري وأساليب نظرية الرسم البياني، وحد أنه يمكن حساب طاقة استخدام مصفوفة الالتفات والقيم الذاتية الناتجة. تظهر النتائج أن صيغة طاقة الالتفاف. علي الرسم العكسي لمجموعة الرباعيات المعممة هي $E_{DD}(\Gamma_S(Q_{4n})) = 32n^2 - 16n + 2$ لكل $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan bidang ilmu yang mempelajari penalaran logis dan sistematis. Matematika memiliki banyak macam cabang ilmu di antaranya aljabar abstrak dan matematika diskrit. Aljabar abstrak mempelajari struktur-struktur matematika seperti ring, grup, lapangan beserta sifat-sifatnya. Sedangkan matematika diskrit mengkaji topik-topik seperti graf, aljabar *boole*, relasi, dan lain-lain (Jannah dkk., 2023). Dua topik menarik dalam aljabar abstrak dan matematika diskrit adalah graf dan grup.

Grup adalah salah satu topik penting dalam aljabar abstrak. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner tertutup dan asosiatif. Himpunan tak kosong tersebut juga harus mempunyai elemen identitas dan setiap elemennya mengandung invers. Grup yang operasinya bersifat komutatif disebut grup abelian. Jika jumlah elemen dalam grup tersebut berhingga maka grup itu disebut grup hingga. Sebaliknya, jika elemennya tak hingga disebut grup tak hingga (Dummit & Foote, 2004).

Grup yang dibahas pada penelitian ini adalah grup quaternion diperumum. Grup Quaternion pertama kali diperkenalkan oleh William Rowan Hamilton pada tahun 1843 sebagai sistem bilangan hiperkompleks yang memperluas bilangan kompleks ke dalam empat dimensi. Grup quaternion merupakan grup non-abelian dengan orde 8, yang dinotasikan dengan Q_8 . Perkembangan lebih lanjut dalam teori grup mengarah pada *generalisasi Group quaternion*, atau yang dikenal sebagai grup

quaternion diperumum yang dinotasikan dengan Q_{4n} . Grup quaternion diperumum merupakan grup non-komutatif dengan orde $4n$, $n \geq 2$, dengan n adalah bilangan bulat dengan operasi perkalian (Maddock, 2013). Grup quaternion tersebut dapat diterapkan pada bentuk graf. Dengan kata lain, graf tersebut terbentuk dari grup quaternion diperumum.

Graf G merupakan pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyak unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$ (Chartrand dkk., 2010).

Salah satu graf yang dapat dibentuk dengan menggabungkan struktur graf dan grup adalah graf invers. Graf invers diperkenalkan oleh Alfuraidan dan Zakariya, dua ilmuwan matematika, pada tahun 2017. Misalkan Γ adalah grup berhingga dan S adalah suatu himpunan yang beranggotakan unsur dari Γ yang inversnya bukan dirinya sendiri yaitu $S = \{u \in \Gamma: u \neq u^{-1}\}$. Graf invers dari Γ dinotasikan dengan $G_S(\Gamma)$ dan didefinisikan dengan graf yang himpunan titiknya adalah himpunan Γ dan dua elemen berbeda u dan v terhubung langsung di $G_S(\Gamma)$ jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$ (Alfuraidan & Zakariya, 2017).

Energi graf merupakan salah satu topik utama dalam studi teori graf, analisis jaringan kompleks, dan bioinformatika. Energi graf menggambarkan karakteristik penting pada sebuah jaringan seperti kestabilan, ketahanan, modularitas, maupun kecenderungan evolusi. Jaringan dengan energi tinggi cenderung lebih mudah terganggu dan tidak stabil. Sedangkan jaringan dengan energi rendah memiliki alur

informasi yang optimal (Erciyas, 2023). Salah satu konsep turunan dari energi graf adalah energi detour yang memfokuskan pada ketahanan. Pemahaman energi graf telah berdampak luas pada berbagai bidang seperti biologi, kimia, fisika, transportasi, dan ilmu sosial .

Dalam ayat al-Quran, Allah SWT membuat perumpamaan kalimat yang baik bagaikan pohon yang baik dengan akar yang teguh dan cabang yang menjulang tinggi ke langit. Graf atau jaringan bisa diibaratkan seperti pohon. Titik-titik pada graf bagaikan cabang dan ranting pohon. Sedangkan sisi-sisi yang menghubungkan titik bagaikan batang pohon. Konsep energi pada graf salah satunya terkait dengan ketahanan atau kestabilan jaringan. Semakin banyak sisi atau titik cadangan yang menghubungkan satu bagian graf dengan bagian lain, maka energi graf-Nya semakin kecil yang berarti jaringan tersebut semakin tahan terhadap gangguan. Dalam hal ini, prinsip ketahanan dan kestabilan menjadi keterkaitan antara konsep energi pada graf atau jaringan dengan perumpamaan pohon yang baik dalam QS. Ibrahim ayat 24-25.

أَلَمْ تَرَ كَيْفَ ضَرَبَ اللَّهُ مَثَلًا كَلِمَةً طَيِّبَةً كَشَجَرَةٍ طَيِّبَةٍ أَصْلُهَا ثَابِتٌ وَفَرْعُهَا فِي السَّمَاءِ ﴿٢٤﴾ تُوْتِيَ

أُكْلَهَا كُلُّ بَادِنٍ رَّهْمًا وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ لِلنَّاسِ لَعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُونَ ﴿٢٥﴾

Artinya: tidakkah kamu memperhatikan bagaimana Allah SWT telah membuat perumpamaan kalimat yang baik seperti pohon yang baik, akarnya kuat dan cabangnya (menjulang) ke langit (24) (pohon) itu menghasilkan buahnya pada setiap waktu dengan seizin tuhan-Nya. Dan Allah SWT membuat perumpamaan itu untuk manusia agar mereka selalu ingat. (25) (Q.S. Ibrahim: 24-25) (Kemenag, 2022).

Dalam tafsir al-Jalalain disebutkan bahwa pohon yang baik itu seperti pohon skurma yang akarnya kuat yang dapat menjadi fondasi dan menopang keseluruhan strukturnya, batang dan cabangnya yang menjulang tinggi, serta buahnya selalu ada

setiap masa. Jika fondasinya kokoh, komponen-komponennya saling terhubung, dan jalur alirannya lancar, maka struktur pohon menjadi kuat dan terhubung secara produktif (Hikmah, 2022).

Adapun penelitian terdahulu tentang energi graf dilakukan oleh Balakrishnan (2004) tentang konsep energi dari sebuah graf sederhana. Penelitian lain juga dilakukan oleh Das & Mojallal (2014) tentang energi laplacian dari graf. Selain itu, penelitian juga dilakukan oleh Ayyaswamy & Balachandran (2010) tentang spektrum detour dari beberapa jenis graf.

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti akan mengkaji topik energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum. Topik ini menarik untuk diteliti karena menggabungkan dua bidang matematika, yaitu aljabar melalui struktur grup quaternion diperumum dan teori graf. Pertama berproses pada struktur aljabar dalam grup, kemudian berproses pada teori graf, dan selanjutnya menggabungkan antara grup dan graf. Hasil akhir yang akan ditunjukkan dalam penelitian ini adalah energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana formula energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui formula dari energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum.

1.4 Manfaat penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dengan menyajikan informasi mengenai formula dari energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum.

1.5 Definisi Istilah

Istilah yang perlu didefinisikan adalah:

1. Grup quaternion diperumum merupakan grup non-abelian orde $4n$ (Ma dkk., 2013).
2. Energi graf adalah jumlah dari nilai mutlak seluruh nilai eigen dari graf tersebut (Balakrishnan, 2004).
3. Energi detour didefinisikan sebagai jumlah dari nilai mutlak semua nilai eigen dari matriks detour dari graf tersebut (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Grup

Definisi 2.1

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dan $*$ adalah suatu operasi pada G .

$(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma berikut:

1. Operasi $*$ bersifat tertutup, artinya untuk setiap $a, b \in G$, maka $a * b \in G$.
2. Operasi $*$ bersifat asosiatif, yaitu jika $a, b, c \in G$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Grup mempunyai elemen identitas, artinya terdapat elemen identitas $e \in G$ sehingga untuk setiap $a \in G$, $a * e = e * a = a$.
4. Setiap elemen mempunyai invers, artinya untuk setiap $a \in G$ terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$, dengan e adalah elemen identitas (Dummit & Foote, 2004).

Contoh 2.1

Misalkan \mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat dan $+$ operasi penjumlahan di \mathbb{Z} , maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup sehingga berlaku sifat

1. Operasi $+$ tertutup, karena jika di ambil a dan b di \mathbb{Z} , maka $a + b$ juga merupakan elemen \mathbb{Z} .
2. Operasi $+$ asosiatif berlaku, karena dengan mengambil tiga elemen di \mathbb{Z} , misalkan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka pasti berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. \mathbb{Z} mempunyai elemen identitas yaitu 0 karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $a + 0 = 0 + a = a$.

4. Setiap $a \in \mathbb{Z}$ mempunyai invers $-a$, sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$

2.1.1 Grup Non-Abelian

Definisi 2.2

Grup non-Abelian (atau gruptak komutatif) adalah grup yang operasi antara dua elemen tidak selalu menghasilkan hasil yang sama jika urutan elemen tersebut diubah. Secara lebih sederhana, suatu grup G disebut non-Abelian jika ada dua elemen a dan b di dalam G sedemikian sehingga $ab \neq ba$ (Dummit & Foote, 2004).

Contoh 2.2

Salah satu contoh grup non-Abelian adalah grup simetri pada suatu himpunan, seperti grup permutasi S_n untuk $n \geq 3$.

2.1.2 Grup Quaternion

Definisi 2.3

Grup quaternion, Q_8 , adalah himpunan yang terdiri atas elemen-elemen berikut:

$$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\},$$

dengan aturan perkalian sebagai berikut:

1. Elemen identitas, yang berarti $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ untuk semua $a \in Q_8$.
2. $(-1) \cdot (-1) = 1$, $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$, untuk semua $a \in Q_8$
3. $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1$
4. $i \cdot j = k$, $j \cdot i = -k$
 $j \cdot k = i$, $k \cdot j = -i$

$$k \cdot i = j, \quad i \cdot k = -j \text{ (Dummit \& Foote, 2004).}$$

Contoh 2.3

Pada Tabel 2.1 dapat dilihat perkalian dari Q_8 sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley pada Q_8

·	1	-1	<i>i</i>	- <i>i</i>	<i>j</i>	- <i>j</i>	<i>k</i>	- <i>k</i>
1	1	-1	<i>i</i>	- <i>i</i>	<i>j</i>	- <i>j</i>	<i>k</i>	- <i>k</i>
-1	-1	1	- <i>i</i>	<i>i</i>	- <i>j</i>	<i>j</i>	- <i>k</i>	<i>k</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	- <i>j</i>	-1	1	<i>k</i>	- <i>k</i>	- <i>j</i>	<i>j</i>
- <i>i</i>	- <i>i</i>	<i>i</i>	1	-1	- <i>k</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	- <i>j</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	- <i>j</i>	- <i>k</i>	<i>k</i>	-1	1	<i>i</i>	- <i>i</i>
- <i>j</i>	- <i>j</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	- <i>k</i>	1	-1	- <i>i</i>	<i>i</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	- <i>k</i>	<i>j</i>	- <i>j</i>	- <i>i</i>	<i>i</i>	-1	1
- <i>k</i>	- <i>k</i>	<i>k</i>	- <i>j</i>	<i>j</i>	<i>i</i>	- <i>i</i>	1	-1

Karena $ij \neq ji$, maka Q_8 merupakan grup non-abelian dengan orde 8.

2.1.3 Grup Quaternion Diperumum

Definisi 2.4

Grup quaternion Q_8 didefinisikan oleh

$$Q_8 = \{-1, i, j, k : (-1)^2 = 1, \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Sebagai generalisasi dari Q_8 , grup quaternion diperumum Q_{4n} di definisikan sebagai

$$Q_{4n} = \{a, b | a^{2n} = e, \quad b^2 = a^n, \quad b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\},$$

dengan titik e adalah elemen identitas dan $n \geq 2$. Jika $n = 2$, maka Q_{4n} kembali

menjadi Q_8 . Grup Q_{4n} memiliki ordo $4n$ dan elemen-elemennya dapat dinyatakan

sebagai

$$Q_{4n} = \{a, a^2, \dots, a^{2n-1}, e, b, ab, \dots, a^{2n-1}b\}$$

(Ma dkk., 2013).

Contoh 2.4

Untuk $n = 2$, grup Q_8 dapat dideskripsikan sebagai berikut:

$$Q_8 = \{a, b \mid a^4 = 1, \quad b^2 = a^2, \quad b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\}$$

Berikut tabel Cayley dari Q_8 :

Tabel 2.2 Tabel Cayley Q_8

◦	1	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
1	1	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
a	a	a ²	a ³	1	ab	a ² b	a ³ b	b
a ²	a ²	a ³	1	a	a ² b	a ³ b	b	ab
a ³	a ³	1	a	a ²	a ³ b	b	ab	a ² b
b	b	a ³ b	a ² b	ab	a ²	a	1	a ³
ab	ab	b	a ³ b	a ² b	a ³	a ²	a	1
a ² b	a ² b	ab	b	a ³ b	1	a ³	a ²	a
a ³ b	a ³ b	a ² b	ab	b	a	1	a ³	a ²

2.2 Graf

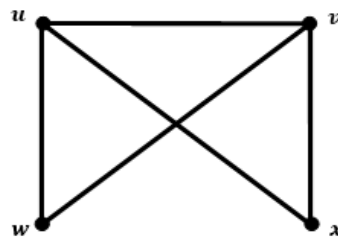
Definisi 2.5

Graf G adalah himpunan tak kosong dan berhingga V dari objek-objek yang disebut titik dan setiap elemen dalam himpunan E yang merupakan pasangan dua titik berbeda $\{u, v\}$ dari himpunan V disebut sisi. Graf G dinyatakan sebagai pasangan terurut dari himpunan titik V dan himpunan sisi E dan dapat ditulis $G =$

(V, E) . Untuk menegaskan bahwa V dan E merupakan himpunan titik dan sisi dari graf G , maka dapat dituliskan sebagai $V(G)$ dan $E(G)$. Suatu sisi $\{u, v\}$ dari G dapat dituliskan sebagai uv atau vu (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.5

Graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{\{u, v\}, \{u, x\}, \{u, w\}, \{v, x\}, \{v, w\}\}$ ditunjukkan pada Gambar 2.1 sebagai berikut:

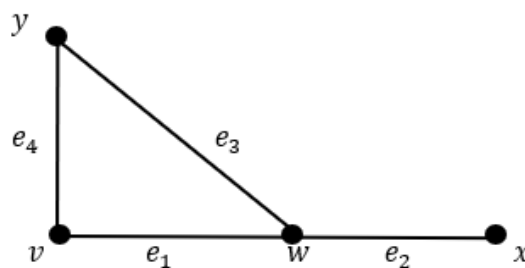


Gambar 2.1 Contoh Graf

Definisi 2.6

Misalkan u dan v adalah dua titik pada graf G , $e = \{u, v\}$ adalah sisi dari graf G , maka titik u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e (Abdussakir dkk., 2009).

Contoh 2.6



Gambar 2.2 Contoh Graf Terhubung dan Terkait Langsung

Dari gambar tersebut diketahui bahwa titik yang terhubung langsung adalah v dan w , w dan x , v dan y . Sisi e_1 terkait langsung dengan titik v dan w , serta sisi e_2 terkait langsung dengan titik w dan x .

Definisi 2.7

Banyaknya titik pada graf G disebut order dari G dan dinotasikan dengan $n(G)$, sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut ukuran (*size*) dari G dan dinotasikan dengan $m(G)$ (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.7

$n(G)$ pada Gambar 2.2 adalah 4.

$m(G)$ pada Gambar 2.2 adalah 4.

2.2.1 Lintasan

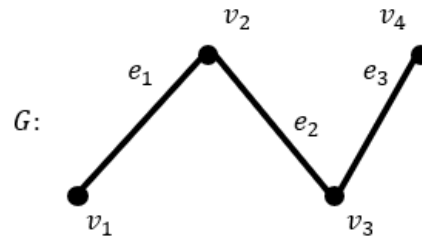
Definisi 2.8

Misalkan u dan v adalah titik-titik dari graf G . Jalan $u - v$ pada graf G adalah barisan titik-titik di G yang dimulai dari titik u dan diakhiri di titik v sedemikian sehingga titik-titik yang berurutan di W terhubung langsung di G . Jalan W di G dapat dituliskan sebagai

$$W = u = v_0, v_1, \dots, v_k = v,$$

dengan v_i dan v_{i+1} adalah sisi pada G untuk $0 \leq i \leq k - 1$. Panjang jalan dari W adalah banyaknya sisi yang dilalui. Jalan yang tidak mengulang titik disebut lintasan. Banyak sisi yang dilalui dalam lintasan disebut panjang lintasan (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.8



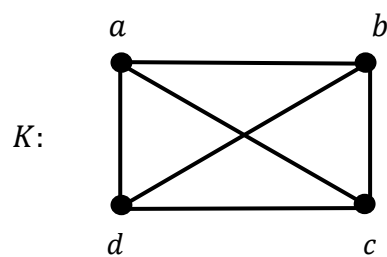
Gambar 2.3 Contoh Lintasan

Misalkan $W: v_1 - v_4$ dengan $W = v_1, v_2, v_3, v_4$ maka W termasuk contoh dari jalan dan panjang dari jalan $W = 3$. Sedangkan contoh dari lintasan adalah $L = v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ dengan panjang lintasan adalah 3.

Definisi 2.9

Lintasan Hamilton adalah lintasan yang melalui setiap titik dalam graf tepat satu kali. Siklus Hamilton adalah siklus yang melalui setiap titik tepat satu kali. Graf yang memuat siklus Hamilton disebut sebagai graf Hamilton (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.9



Gambar 2.4 Lintasan Hamilton

Graf K pada Gambar 2.4 ini memiliki empat titik yaitu a, b, c, d dan enam sisi yaitu $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, c\}$. Lintasan Hamiltonnya adalah $a - b -$

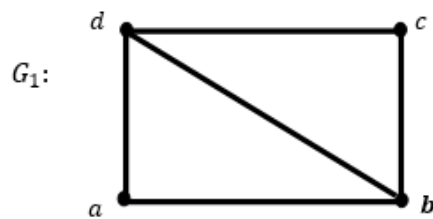
$c - d$. Panjang lintasan ini adalah 3 karena ada tiga sisi yang dilalui. Sedangkan siklus Hamiltonnya adalah $a - b - c - d - a$.

2.2.2 Graf Terhubung

Definisi 2.10

Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)$. Dua titik berbeda u dan v di $V(G)$ dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari u ke v di G . Suatu graf G disebut graf terhubung jika setiap pasang titik u dan v yang berbeda di G terhubung (Abdussakir dkk., 2009). Dengan kata lain, graf G terhubung jika untuk sebarang titik u dan v di $V(G)$ terdapat lintasan dari u ke v di G . Sebaliknya, jika ada dua titik di G yang tidak terhubung oleh lintasan, maka G disebut graf tak terhubung (Abdussakir dkk., 2009).

Contoh 2.10



Gambar 2.5 Contoh Graf Terhubung

Graf pada Gambar 2.5 merupakan graf terhubung, karena setiap dua titik yang berbeda di G_1 dihubungkan oleh suatu lintasan.

2.2.3 Graf Invers

Definisi 2.11

Misalkan $(\Gamma, *)$ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in \Gamma \mid u \neq u^{-1}\}$. Graf invers dari Γ atas S , dinotasikan $G_S(\Gamma)$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik Γ dan dua titik yang berbeda u dan v terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$. Dengan $*$ adalah operasi pada grup Γ , dan S adalah himpunan yang berisi elemen-elemen *non-self-invertible*, yaitu elemen selain identitas e yang tidak mempunyai invers terhadap dirinya sendiri pada grup tersebut. Karena $e^{-1} = e$ maka $e \notin S$. Sehingga kardinalitas dari S kurang dari kardinalitas dari Γ (Alfuraidan & Zakariya, 2017).

Contoh 2.11

Perhatikan Tabel Cayley dari Q_8 berikut:

Tabel 2.3 Tabel Cayley dari Q_8

\circ	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

Berdasarkan Tabel 2.3 dapat diketahui invers dari setiap elemen dari grup quaternion Q_8 adalah sebagai berikut:

$$1^{-1} = 1 \text{ karena } 1 \circ 1 = 1$$

$$a^{-1} = a^3 \text{ karena } a \circ a^3 = a^3 \circ a = 1$$

$$(a^2)^{-1} = a^2 \text{ karena } a^2 \circ a^2 = 1$$

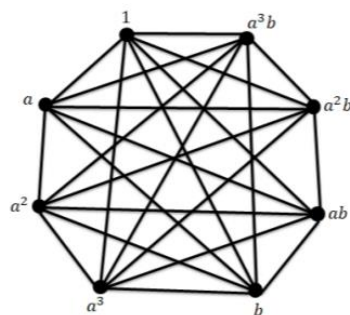
$$(a^3)^{-1} = a \text{ karena } a^3 \circ a = a \circ a^3 = 1$$

$$b^{-1} = a^2b \text{ karena } b \circ a^2b = a^2b \circ b = 1$$

$$(a^2b)^{-1} = b \text{ karena } a^2b \circ b = b \circ a^2b = 1$$

$$(a^3b)^{-1} = ab \text{ karena } a^3b \circ ab = ab \circ a^3b = 1$$

Berdasarkan uraian di atas, diketahui bahwa anggota Q_8 yang inversnya adalah dirinya sendiri adalah $\{1, a^2\}$, sehingga $S = \{a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Himpunan titik pada $\Gamma_S(Q_8)$ adalah $V(\Gamma_S(Q_8)) = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Dua titik yang berbeda u dan v pada $V(\Gamma_S(Q_8))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Dengan demikian dapat dibentuk $\Gamma_S(Q_8)$ yang ditunjukkan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf Invers Q_8

2.3 Matriks

Definisi 2.12

Matriks berukuran $m \times n$ atas himpunan S adalah suatu susunan elemen-elemen dari S dalam bentuk persegi panjang, yang disusun dalam m baris dan n kolom. Matriks berukuran $m \times n$, ditulis menggunakan notasi seperti berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan A menunjukkan matriks dan a_{ij} menunjukkan elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks A . Matriks A disebut sebagai matriks berdimensi $m \times n$ (Gilbert & Gilbert, 2013) .

2.3.1 Matriks Persegi

Definisi 2.13

Suatu matriks berukuran $n \times n$ disebut sebagai matriks persegi berordo n . Matriks persegi adalah matriks yang memiliki banyak baris dan kolom yang sama. Jika matriks persegi $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ memiliki elemen $a_{ij} = 0$ setiap $i \neq j$ (yaitu, elemen-elemen yang berada di luar diagonal utama adalah nol), maka matriks tersebut disebut matriks diagonal (Gilbert & Gilbert, 2013).

Contoh 2.12

Beberapa contoh matriks persegi dan matriks diagonal sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Matriks Identitas

Definisi 2.14

Matriks identitas adalah matriks persegi dengan angka 1 pada diagonal utama dan angka 0 untuk yang lain. Matriks identitas dinotasikan dengan I atau I_n untuk matriks identitas berukuran $n \times n$ (Anton & Rorres, 2020).

Contoh 2.13

Beberapa contoh matriks identitas adalah sebagai berikut:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Matriks Keterhubungan Titik

Definisi 2.15

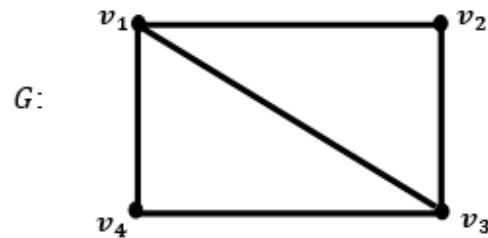
Misalkan G adalah graf dengan order $p \geq 1$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik (atau matriks keterhubungan) dari graf G dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks berukuran $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke- i dan kolom ke- j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j . Dengan kata lain, matriks keterhubungan dari graf G dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0, & \text{jika } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \end{cases}$$

(Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.14

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$. Maka dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 2.7 Graf G

Matriks keterhubungan dari G adalah

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

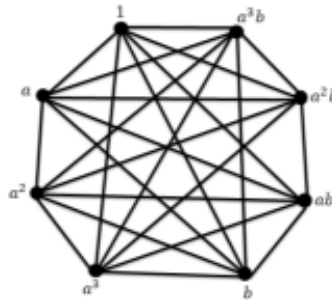
2.3.4 Matriks Detour

Definisi 2.16

Matriks detour dari graf G berorde p didefinisikan sebagai matriks berukuran $p \times p$, dinotasikan dengan $DD(G)$, yang unsur ke- ij -nya adalah bilangan yang menyatakan panjang lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

Contoh 2.15

Graf invers dari Q_8 adalah dapat di gambar sebagai berikut:



Gambar 2.8 Graf Invers Q_8

Matriks detour dari graf pada Gambar 2.8 adalah sebagai berikut:

$$DD(Q_8) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.5 Determinan Matriks

Definisi 2.17

Jika A adalah matriks $n \times n$:

1. Minor dari entri a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} , didefinisikan sebagai determinan dari sub matriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j dari A .

$$M_{ij} = \det(A_{ij})$$

2. Kofaktor dari entri a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}$ kali minor tersebut.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

3. Determinan dari A dapat dihitung dengan menggunakan ekspansi kofaktor, yaitu dengan menjumlahkan hasil kali entri-entri dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor yang bersesuaian.

Untuk kolom ke- j :

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Untuk baris ke- i :

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(Anton & Rorres, 2020).

Definisi 2.18

Matriks blok adalah matriks yang terdiri dari sub matriks atau blok-blok kecil yang dihasilkan dengan membagi baris dan kolomnya secara berurutan (Hom & Johnson, 1985).

Contoh 2.16

Pertimbangkan matriks blok 2×2 berikut:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

dengan A, B, C dan D adalah sub-matriks. Dalam kasus ini, A dan D harus merupakan matriks persegi agar determinan M dapat dihitung menggunakan teknik matriks blok.

Teorema 1

Jika $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ dengan $C = 0$ atau $B = 0$, matriks nol $n \times n$, sehingga $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$, sebuah matriks blok-diagonal, maka determinan M dapat dihitung sebagai $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$ (Sothanaphan, 2017).

Teorema 2

Jika M merupakan matriks $n \times n$ dan $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ maka determinan dari M

adalah

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) & \text{jika } A \text{ memiliki invers} \\ \det(D) \cdot \det(A - BD^{-1}C) & \text{jika } D \text{ memiliki invers} \end{cases}$$

(Novia Rahma dkk., 2019).

Teorema 3

Determinan matriks blok simetris dengan struktur $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ dengan A dan B

adalah sub-matriks persegi dengan ukuran yang sama dan dapat dinyatakan sebagai

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A + B) \cdot \det(A - B) \text{ (Horn \& Johnson, 1985).}$$

Teorema 4

Jika matriks $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ maka A dan B komutatif ($AB = BA$), maka

determinannya dapat disederhanakan menjadi $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A^2 - B^2)$ (Horn

& Johnson, 1985).

Contoh 2.17

Misalkan A dan B adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks blok M adalah:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan determinan blok matriks M , maka dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \det(M) &= \det(A + B) \cdot \det(A - B) \\
 &= \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \det \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= (4 \cdot 4 - 6 \cdot 6) \cdot ((-2) \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)) \\
 &= -20 \cdot 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Sehingga determinan dari blok matriks M adalah

$$\det(M) = \det(A + B) \cdot \det(A - B) = -20 \cdot 0 = 0.$$

2.4 Polinomial Karakteristik

Definisi 2.19

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$. Misal $p(\lambda)$ adalah suatu polinom berorde n . $p(\lambda)$ adalah polinomial karakteristik dari A jika dan hanya jika

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n$$

(Anton & Rorres, 2020).

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.20

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka suatu vektor x tidak nol di \mathbb{R}^n disebut sebagai vektor eigen dari A , jika Ax adalah kelipatan skalar dari x yaitu

$Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ . λ disebut nilai eigen dari A dan x disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton & Rorres, 2020).

Contoh 2.18

Diketahui matriks $\Gamma_S(Q_8)$ adalah sebagai berikut:

$$\Gamma_S(Q_8) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $\Gamma_S(Q_8)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \det(\Gamma_S(Q_8) - \lambda I) = 0 \\ \Leftrightarrow & \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh polinomial karakteristik dan nilai eigen sebagai berikut:

$$\det(DD(\Gamma_S(Q_{4n})) = \lambda^8 - 1372 \lambda^6 - 38416 \lambda^5 - 504210 \lambda^4 - 3764768 \lambda^3 - 16470860 \lambda^2 - 39530064 \lambda - 40353607$$

$$\text{atau } p(\lambda) = (\lambda - 49)(\lambda + 7)^7$$

dan nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_S(Q_8))$ adalah $\lambda_1 = 49$ dan $\lambda_2 = -7$ dengan masing-masing memiliki multiplitas $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 7$.

2.6 Energi Detour

Definisi 2.21

Energi dari suatu graf G , dinotasikan dengan $E(G)$, didefinisikan sebagai jumlah dari mutlak semua nilai eigen dari matriks ketetanggaan G atau

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

dengan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks ketetanggaan G (Bapat, 2010).

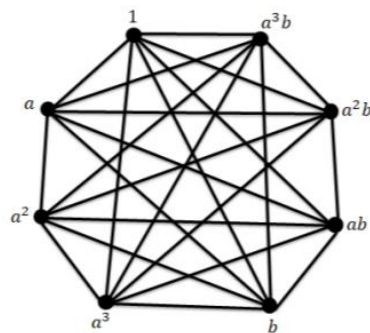
Energi detour diperoleh dari matriks detour G , dinotasikan $E_{DD}(G)$ adalah energi yang didefinisikan sebagai

$$E_{DD}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

(Abdussakir dkk., 2018).

Contoh 2.19

Berikut adalah $\Gamma_S(Q_8)$.



Gambar 2.9 Graf Invers Q_8

Berdasarkan Gambar 2.9, diperoleh matriks detour dari $\Gamma_S(Q_8)$ sebagai berikut:

$$DD(\Gamma_5(Q_8)) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks detour tersebut, maka dapat dicari polinomial karakteristik dan

nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_5(Q_8))$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \det(DD(\Gamma_5(Q_8)) - \lambda I) = 0 \\ \Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} DD(\Gamma_5(Q_8)) &= \lambda^8 - 1372 \lambda^6 - 38416 \lambda^5 - 504210 \lambda^4 - 3764768 \lambda^3 \\ &\quad - 16470860 \lambda^2 - 39530064 \lambda - 40353607 \end{aligned}$$

$$\text{atau } p(\lambda) = (\lambda - 49)(\lambda + 7)^7$$

Dengan demikian, maka diperoleh bahwa nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_5(Q_8))$ adalah $\lambda_1 = 49$ dan $\lambda_2 = -7$ dengan masing-masing memiliki

multiplitas $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 7$. Setelah diketahui nilai eigen dari $DD(\Gamma_S(Q_8))$, dapat dihitung energi detour dari $\Gamma_S(Q_8)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_{DD}(\Gamma_S(Q_8)) &= ((1 \times |49|) + (7 \times |-7|)) \\ &= 49 + 49 \\ &= 98 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi detour dari $\Gamma_S(Q_8)$ adalah 98.

2.7 Kajian Integrasi Topik dengan al-Quran

Prinsip keseimbangan dalam fisika memiliki kesamaan dengan firman Allah SWT dalam Q.S ar-Rahman ayat 7 yang berbunyi:

وَالسَّمَاءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ الْمِيزَانَ ﴿٧﴾

Artinya: langit telah dia tinggalkan dan dia telah menciptakan neraca (keadilan dan keseimbangan). (QS. ar-Rahman:7) (Kemenag, 2022).

Kata “neraca” dapat dimaknai keseimbangan dan keadilan dalam penciptaan langit dan bumi serta semesta alam raya oleh Allah SWT. Dalam tafsir Ibnu Katsir, disebutkan bahwa Allah SWT telah menciptakan langit dengan ketinggian yang luar biasa, dilengkapi bintang-bintang dan planet-planet yang tersusun rapi. Kemudian Allah SWT juga menciptakan bumi dengan segala isinya dalam keadaan seimbang, tidak ada yang timpang sedikit pun. Hal ini menunjukkan kesempurnaan ilmu dan keadilan Allah SWT dalam menciptakan alam semesta (Ishag, 2004).

Pada energi graf, stabilitas struktur graf sangat bergantung pada keseimbangan distribusi titik dan sisi serta interaksinya. Graf dengan energi rendah menunjukkan sistem yang seimbang, di mana transformasi atau perpindahan informasi antar

komponen graf berjalan optimal dan lancar tanpa banyak hambatan. Sedangkan graf dengan energi tinggi mengindikasikan sistem yang tidak seimbang, distribusi komponennya tidak merata sehingga menyebabkan terjadinya *bottleneck* atau penumpukan aliran informasi yang memicu ketidakstabilan.

Prinsip kestabilan dan keseimbangan juga diperkuat dalam Hadits Arbain yang diriwayatkan oleh Imam Muslim, yaitu:

عَنْ أَبِي يَعْلَى شَدَّادِ بْنِ أَوْسٍ رَضِيَ اللَّهُ تَعَالَى عَنْهُ عَنْ رَسُولِ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ: (إِنَّ اللَّهَ كَتَبَ الْإِحْسَانَ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ. فَإِذَا قَتَلْتُمْ فَأَحْسِنُوا الْقِتْلَةَ، وَإِذَا ذَبَحْتُمْ فَأَحْسِنُوا الذَّبْحَةَ، وَلِیُجِدَّ أَحَدُكُمْ شَفْرَتَهُ، وَلِیُرِخَ ذَبِيحَتَهُ)

Artinya: dari Abu Ya'la Syaddad bin Aus radhiyallahu 'anhu dari Rasulullah shallahu 'alaihi wa sallam, beliau bersabda: "Sesungguhnya Allah subhanahu wa ta'ala telah menetapkan perbuatan ihsan (baik) pada tiap-tiap sesuatu. Jika kalian membunuh, maka sembelihlah dengan cara yang baik, hendaklah salah seorang di antara kalian menajamkan pisaunya dan menenangkan sembelihannya." (HR. Muslim) (Yahya, 2007).

Maksud dari hadits di atas adalah anjuran untuk selalu berbuat secara ihsan dan sempurna dalam segala hal, salah satunya dengan cara seimbang dan rasional, tidak berlebih-lebihan (Yahya, 2007). Hal ini sesuai dengan konsep energi graf yang menganggap graf dengan distribusi yang optimal dan seimbang (energi rendah) mencerminkan sistem yang stabil.

Allah SWT berfirman dalam QS. Ali Imron ayat 191-192 yang berbunyi:

الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ خُنُوعِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾ رَبَّنَا إِنَّكَ مَن تَدْخِلِ النَّارَ فَقَدْ أَخْرَجْتَهُ وَمَا لِلظَّالِمِينَ مِن

أَنْصَارٍ ﴿١٩٢﴾

Artinya: (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah SWT sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), “Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia. Maha Suci Engkau. Lindungilah kami dari azab neraka (191). Ya Tuhan kami, sesungguhnya orang yang engkau masukkan ke dalam neraka, maka engkau benar-benar telah menghinakannya dan tidak ada seorang penolong pun bagi orang yang zalim (192). (QS. Ali-Imron: 191-192) (Kemenag, 2022).

Dalam ayat tersebut Allah SWT mengkaji tanda-tanda kebesaran Allah SWT pada ciptaan-Nya, termasuk hukum-hukum dan pola yang ada di alam semesta, salah satunya berupa graf yang merupakan model jaringan kompleks. Salah satu contohnya adalah adanya pergantian siang dan malam sebagai tanda kebesaran-Nya menciptakan planet bumi beserta sistem yang bekerja secara keteraturan dan hukum-hukum tertentu.

Pola siang dan malam merupakan salah satu pola alami yang terjadi di alam semesta atas kehendak Allah SWT kemudian Allah SWT menekankan pentingnya manusia yang diberikan akal untuk memikirkan dan mengkaji pola-pola dan hukum alam tersebut agar dapat mengenal dan mendekati diri kepada penciptanya. Salah satu cara untuk mengkaji pola dalam sistem alam adalah dengan menggunakan metode pemodelan berupa graf atau jaringan kompleks di mana suatu sistem alam diwakilkan oleh simpul-simpul atau titik dan hubungan yang terjadi. Dengan mengkaji pola graf ini akan mengungkapkan karakteristik unik sistem tersebut sehingga makin memahami hukum Allah SWT yang bekerja di alam termasuk prinsip keseimbangan, keadilan, dan lainnya.

Dalam merancang suatu jaringan infrastruktur seperti jalan raya, rel kereta api, jaringan pipa air, dan sebagainya, salah satu persoalan penting yang harus diselesaikan adalah bagaimana menentukan rute terpendek yang menghubungkan

berbagai simpul/titik penting. Prinsip dasarnya adalah efisiensi, yaitu mencari jalur yang paling minimal jaraknya sehingga biaya dan waktu tempuh juga optimal.

Dalam ilmu komputer dan matematika, masalah ini dikaji dalam teori graf, yaitu representasi abstrak dari jaringan, yang terdiri dari sejumlah titik/simpul (*vertex*) serta sisi/penghubung (*edge*) di antara titik-titik itu. Untuk menemukan rute terpendek antar dua titik tertentu, dikembangkanlah algoritma khusus seperti Algoritma Dijkstra, Algoritma *Floyd-Warshall*, dll. Dengan menerapkan metode ini pada sebuah graf/jaringan, maka jalur terpendek yang efisien dapat diidentifikasi. Ayat al-Quran yang berkaitan dengan efisiensi dalam menentukan jalur terpendek berdasarkan semangat profesionalisme terdapat dalam Q.S at-Taubah ayat 105. Allah SWT berfirman:

وَقُلْ اَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللّٰهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ اِلٰى عِلْمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴿١٠٥﴾

Artinya: Katakanlah (Nabi Muhammad), “Bekerjalah! Maka, Allah, rasul-Nya, dan orang-orang mukmin akan melihat pekerjaanmu. Kamu akan dikembalikan kepada (Zat) yang mengetahui yang gaib dan yang nyata. Lalu, Dia akan memberitakan kepada kamu apa yang selama ini kamu kerjakan.” (QS. at-Taubah: 105) (Kemenag, 2022).

Maksud dari ayat ini adalah anjuran profesionalisme dan optimalisasi amal dalam Islam. Artinya, ketika Muslim ditugaskan mengerjakan suatu pekerjaan, ia wajib menunaikannya dengan sungguh-sungguh dan sebaik mungkin kualitasnya. Tidak boleh mengerjakan dengan seenaknya dan tanpa standar profesionalitas. Oleh karena itu, semangat inilah yang sejalan dengan upaya mencari solusi rute/jalur terpendek dalam sebuah jaringan infrastruktur tadi. Si Muslim berkewajiban mendalami ilmu tentang graf dan algoritmanya, lalu menerapkannya secara optimal

untuk bisa menemukan rute paling efisien. Dengan demikian dia telah mengimplementasikan semangat ayat al-Quran di atas dalam kontribusi nyata di bidang keilmuan dan teknologi.

Efisiensi dan optimalisasi yang diajarkan al-Quran mencakup pula optimalisasi teknis seperti penentuan jalur terpendek. Keduanya saling melengkapi dan membentuk kerangka kerja Islam dalam riset dan aplikasi teknologi yang bermanfaat luas bagi umat manusia.

Rasulullah SAW bersabda,

عَنْ عَائِشَةَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهَا قَالَتْ: قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: إِنَّ اللَّهَ تَعَالَى يُحِبُّ إِذَا عَمِلَ أَحَدُكُمْ عَمَلًا أَنْ يُتَّقِنَهُ (رواه الطبرني والبيهقي)

Artinya: "Sesungguhnya Allah SWT menyukai seorang mukmin yang berkarya profesional." (HR. Thabrani) (Mubarak, 2015).

Hadits ini menegaskan bahwa Allah SWT mencintai orang mukmin yang menjalankan pekerjaannya secara profesional. Profesionalitas dalam bekerja mencakup sikap disiplin, bertanggung jawab, teliti, serta mampu bekerja secara efektif dan efisien (Mubarak, 2015).

Bekerja secara efisien berarti mampu menyelesaikan pekerjaan dengan tepat dan cepat tanpa membuang sumber daya. Efisiensi juga berkaitan dengan optimalisasi, yaitu mencapai hasil terbaik dengan sumber daya seminimal mungkin. Konsep ini sesuai dengan energi detour pada graf yang bertujuan mencari lintasan terpendek tanpa memutar atau melenggang jauh dari jalur optimum, sehingga diperoleh rute paling efisien tanpa pemborosan jarak tempuh (Afandi dkk., 2019).

Dengan demikian, hadits tentang anjuran profesionalitas dalam bekerja memiliki relevansi dengan implementasi konsep optimalisasi seperti energi detour.

Keduanya sama-sama mendorong efisiensi dan efektivitas guna mencapai hasil terbaik tanpa pemborosan sumber daya.

Allah SWT berfirman dalam al-Quran Surat al-Kahfi ayat 104-105.

الَّذِينَ ضَلَّ سَعِيَّهُمْ فِي الْحَيَاةِ الدُّنْيَا وَهُمْ يَحْسَبُونَ أَنَّهُمْ يُحْسِنُونَ صُنْعًا ﴿١٠٤﴾ أُولَٰئِكَ الَّذِينَ كَفَرُوا
بِآيَاتِ رَبِّهِمْ وَلِقَاءِهِ فَحَبِطَتْ أَعْمَارُهُمْ فَلَا تُقِيمُ لَهُمْ يَوْمَ الْقِيَامَةِ وَزَنًا ﴿١٠٥﴾

Artinya: (Yaitu) orang-orang yang sia-sia usahanya dalam kehidupan dunia, sedangkan mereka mengira bahwa mereka berbuat sebaik-baiknya (104). Mereka itu adalah orang-orang yang kafur terhadap ayat-ayat Tuhannya dan (kufur pula terhadap) pertemuan dengan-Nya. Maka, amal mereka sia-sia dan Kami tidak memberikan penimbangan terhadap (amal) mereka pada hari Kiamat (105). (QS. al-Kahfi: 104-105) (Kemenag, 2022).

Maksud dari ayat di atas mengisyaratkan bahwa iman yang benar kepada Allah SWT, ayat-ayat-Nya, dan hari akhir merupakan kunci utama diterimanya setiap amal ibadah oleh-Nya. Tanpa keimanan yang lurus, maka semua amal ibadah yang dilakukan akan menjadi sia-sia belaka, meski disangka sebagai perbuatan yang baik.

Pada ayat 104, al-Quran menggambarkan orang-orang yang usaha dan jerih payahnya di dunia ini menjadi sia-sia dan tidak bermanfaat, karena mereka menyangka bahwa apa yang mereka lakukan adalah perbuatan yang baik, padahal sebenarnya perbuatan mereka sesat dan menyimpang dari kebenaran. Kemudian pada ayat 105, ayat tersebut menerangkan lebih detail tentang ciri-ciri orang yang dimaksud, yaitu mereka adalah orang-orang yang mengingkari ayat-ayat Allah SWT dan meragukan adanya hari kebangkitan atau kiamat serta kehidupan akhirat.

Karena keingkaran dan keraguannya itu, maka semua amal dan usaha mereka di dunia menjadi sia-sia dan tidak akan mendapat pahala sedikit pun di

akhirat nanti. Allah SWT tidak akan memberikan timbangan kebaikan sedikit pun bagi mereka di Hari Pembalasan kelak. Hal ini menunjukkan bahwa iman yang benar kepada Allah SWT, ayat-ayat-Nya, dan hari akhir adalah kunci diterimanya amal ibadah seseorang. Tanpa iman yang benar, semua amal akan menjadi sia-sia belaka.

Dengan demikian, ayat 104-105 surah al-Kahfi menjadi peringatan agar selalu meluruskan niat dan memurnikan keimanan dalam setiap amal dan ibadah yang dilakukan. Sebab hanya dengan keimanan yang benar, amal baru bisa bernilai dan diterima di sisi Allah SWT. Inilah esensi penting yang dapat diambil dari firman Allah SWT tersebut.

Allah SWT berfirman dalam Q.S. al-Isra' ayat 26-27.

وَأْتِ ذَٰلِقُرْبَىٰ حَقَّهُ وَالْمِسْكِينَ وَابْنَ السَّبِيلِ وَلَا تُبَذِّرْ تَبْذِيرًا ﴿٢٦﴾ إِنَّ الْمُبَذِّرِينَ كَانُوا إِخْوَانَ الشَّيْطَانِ
وَكَانَ الشَّيْطَانُ لِرَبِّهِ كَفُورًا ﴿٢٧﴾

Artinya: Berikanlah kepada kerabat dekat haknya, (juga kepada) orang miskin, dan orang yang dalam perjalanan. Janganlah kamu menghambur-hamburkan (hartamu) secara boros (26). Sesungguhnya para pemboros itu adalah saudara-saudara setan dan setan itu sangat ingkar kepada Tuhannya (27). (QS. Al-Isra': 26-27) (Kemenag, 2022).

Dalam QS. al-Isra' ayat 26-27 memerintahkan untuk tidak berlaku boros dan tidak pula terlalu kikir dalam menafkahkan harta. Ayat ini memiliki relevansi yang kuat dengan prinsip efisiensi dan efektivitas waktu, khususnya dalam konteks jarak yang ditempuh. Ayat ini menekankan pentingnya menjaga keseimbangan dalam pengeluaran harta, baik untuk keluarga, mustahik zakat, maupun dalam perjalanan atau mobilitas. Dalam konteks perjalanan atau mobilitas, prinsip efisiensi dan efektivitas waktu sangat relevan untuk di perhatikan.

Boros atau menghambur-hamburkan harta dalam perjalanan dapat menyebabkan pemborosan waktu dan sumber daya. Misalnya, memilih rute transportasi yang tidak efisien, atau berlebihan dalam konsumsi selama perjalanan. Di sisi lain, perilaku terlalu kikir atau tidak memadai dalam memfasilitasi perjalanan juga dapat menghambat pencapaian tujuan secara efektif dan tepat waktu. Oleh karena itu, ayat ini mengajarkan untuk mengalokasikan sumber daya secara bijak dan terukur dalam perjalanan, agar tujuan dapat dicapai dengan efisien dan efektif tanpa mengorbankan kebutuhan yang esensial.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini termasuk penelitian kualitatif, yaitu meneliti dalam kondisi objek yang alami. Metode penelitian yang digunakan adalah studi pustaka, yaitu mengumpulkan data dan informasi relevan dengan topik penelitian dari berbagai sumber literatur seperti jurnal, buku, dan lain-lain (Handayani, 2016). Khususnya dipelajari berbagai literatur yang membahas mengenai energi detour pada graf dari grup, secara spesifik pada graf invers dan grup quaternion diperumum.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum memulai penelitian, peneliti mengambil langkah awal dengan menentukan energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum $\Gamma_S(Q_{4n})$ dengan $n = \{2,3,4,5\}$. Tujuannya adalah untuk memunculkan dugaan atau konjektur awal mengenai pola umum energi detour tersebut.

3.3 Tahapan Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini meliputi Langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan invers dari semua unsur Q_{4n} ,
2. Menentukan himpunan bagian $S \subseteq Q_{4n}$ dengan $S := \{x \in Q_{4n} : x^{-1} \neq x\}$,
3. Menentukan keterhubungan titik di $\Gamma_S(Q_{4n})$,
4. Menentukan matriks detour dari $\Gamma_S(Q_{4n})$,

5. Menentukan polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks detour pada

$$\Gamma_S(Q_{4n}),$$

6. Menentukan energi detour pada $\Gamma_S(Q_{4n})$,

untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas cara menentukan formula pada graf invers dari grup quaternion diperumum. Dalam menentukan formula, pada bagian pertama akan ditentukan invers dari setiap elemen grup quaternion diperumum Q_{4n} terlebih dahulu agar dapat menggambarkan graf invers dari grup tersebut. Setelah menggambarkan graf invers dari grup quaternion diperumum, maka dapat menentukan formula energi detour graf invers dari grup quaternion diperumum dengan Q_{4n} dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

4.1 Energi Detour pada Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum Q_{4n}

Penelitian ini akan menentukan energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum dengan $n \in \{2,3,4,5\}$. Melalui perhitungan dan analisis sistematis untuk berbagai nilai n bertujuan untuk mengidentifikasi pola atau keteraturan yang mungkin muncul. Pendekatan ini diharapkan dapat memunculkan dugaan-dugaan antara struktur grup quaternion, graf inversnya, dan konsep energi detour. Dugaan-dugaan ini dapat menjadi dasar untuk pengembangan teori lebih lanjut dalam bidang teori graf dan aljabar abstrak.

4.1.1 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4,2}$

Grup quaternion diperumum Q_8 adalah $Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = e, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$. Elemen-elemen dari grup quaternion diperumum Q_8 adalah $Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Berikut merupakan tabel Cayley dari Q_8

Tabel 4.1 Tabel Cayley dari Q_8

\circ	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

Invers dari setiap elemen dari grup quaternion diperumum adalah sebagai berikut:

$$1^{-1} = 1 \text{ karena } 1 \circ 1 = 1$$

$$a^{-1} = a^3 \text{ karena } a \circ a^3 = a^3 \circ a = 1$$

$$(a^2)^{-1} = a^2 \text{ karena } a^2 \circ a^2 = 1$$

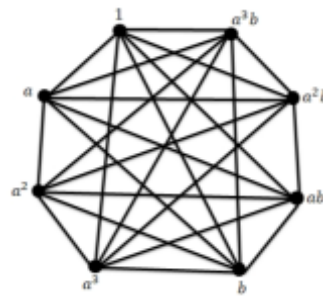
$$(a^3)^{-1} = a \text{ karena } a^3 \circ a = a \circ a^3 = 1$$

$$b^{-1} = a^2b \text{ karena } b \circ a^2b = a^2b \circ b = 1$$

$$(a^2b)^{-1} = b \text{ karena } a^2b \circ b = b \circ a^2b = 1$$

$$(a^3b)^{-1} = ab \text{ karena } a^3b \circ ab = ab \circ a^3b = 1$$

Berdasarkan uraian di atas, diketahui bahwa anggota Q_8 yang inversnya adalah dirinya sendiri adalah $\{1, a^2\}$, sehingga $S = \{a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Himpunan titik pada $\Gamma_S(Q_8)$ adalah $V(\Gamma_S(Q_8)) = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Dua titik yang berbeda u dan v pada $V(\Gamma_S(Q_8))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Dengan demikian dapat dibentuk $\Gamma_S(Q_8)$ yang ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 4.1 $\Gamma_S(Q_8)$

Berdasarkan Gambar 4.1, dapat diperoleh matriks detour dari $\Gamma_S(Q_8)$ sebagai berikut:

$$DD(\Gamma_S(Q_8)) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks detour tersebut, maka dapat dicari polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_S(Q_8))$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \det(DD(\Gamma_5(Q_8)) - \lambda I) = 0 \\
\Leftrightarrow & \det \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow & \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \det(DD(\Gamma_5(Q_{4n})) - \lambda I) \\
& = \lambda^8 - 1372 \lambda^6 - 38416 \lambda^5 - 504210 \lambda^4 - 3764768 \lambda^3 - 16470860 \lambda^2 \\
& \quad - 39530064 \lambda - 40353607
\end{aligned}$$

$$\text{atau } p(\lambda) = (\lambda - 49)(\lambda + 7)^7$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_5(Q_8))$ adalah $\lambda_1 = 49$ dan $\lambda_2 = -7$ dengan masing-masing memiliki multiplitas $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 7$. Setelah diketahui nilai eigen dari $DD(\Gamma_5(Q_8))$ dapat dihitung energi detour dari $\Gamma_5(Q_8)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E_{DD}(\Gamma_5(Q_8)) & = ((1 \times |49|) + (7 \times |-7|)) \\
& = 49 + 49 \\
& = 98
\end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi detour dari $\Gamma_5(Q_8)$ adalah 98.

4.1.2 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4,3}$

Grup quaternion diperumum Q_{12} adalah $Q_{12} = \langle a, b | a^6 = e, b^2 = a^3, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$. Elemen-elemen dari grup quaternion diperumum Q_{12} adalah $Q_{12} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$. Berikut merupakan tabel Cayley dari Q_{12} .

Tabel 4.2 Tabel Cayley Q_{12}

\circ	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	b	ab	a^2b
a^4	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
b	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^3	a^2	a	1	a^5	a^4
ab	ab	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^4	a^3	a^2	a	1	a^5
a^2b	a^2b	ab	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a^4b	1	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a	1	a^5	a^4	a^3	a^2
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^2	a	1	a^5	a^4	a^3

Invers dari setiap elemen dari grup quaternion diperumum adalah sebagai berikut:

$$1^{-1} = 1 \text{ karena } 1 \circ 1 = 1$$

$$a^{-1} = a^5 \text{ karena } a \circ a^5 = a^5 \circ a = 1$$

$$(a^2)^{-1} = a^4 \text{ karena } a^2 \circ a^4 = a^4 \circ a^2 = 1$$

$$(a^3)^{-1} = a^3 \text{ karena } a^3 \circ a^3 = 1$$

$$(a^4)^{-1} = a^2 \text{ karena } a^4 \circ a^2 = a^2 \circ a^4 = 1$$

$$(a^5)^{-1} = a \text{ karena } a^5 \circ a = a \circ a^5 = 1$$

$$b^{-1} = a^3b \text{ karena } b \circ a^3b = a^3b \circ b = 1$$

$$ab^{-1} = a^4b \text{ karena } ab \circ a^4b = a^4b \circ ab = 1$$

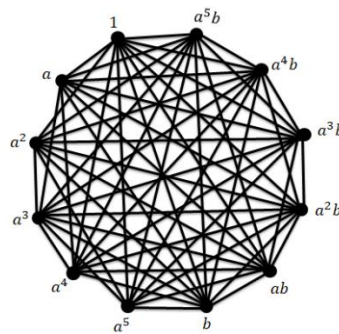
$$(a^2b)^{-1} = a^5b \text{ karena } a^2b \circ a^5b = a^5b \circ a^2b = 1$$

$$(a^3b)^{-1} = b \text{ karena } a^3b \circ b = b \circ a^3b = 1$$

$$(a^4b)^{-1} = b \text{ karena } a^4b \circ ab = ab \circ a^4b = 1$$

$$(a^5b)^{-1} = a^2b \text{ karena } a^5b \circ a^2b = a^2b \circ a^5b = 1$$

Berdasarkan uraian di atas, diketahui bahwa anggota Q_{12} yang inversnya adalah dirinya sendiri adalah $\{1, a^3\}$, sehingga $S = \{a, a^2, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$. Himpunan titik pada graf invers $\Gamma_S(Q_{12})$ adalah $V(\Gamma_S(Q_{12})) = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$. Dua titik yang berbeda u dan v pada $V(\Gamma_S(Q_{12}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Dengan demikian dapat dibentuk $\Gamma_S(Q_{12})$ yang ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 4.2 $\Gamma_S(Q_{12})$

Sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(DD(\Gamma_S(Q_{12})) - \lambda I) &= \lambda^{12} - 7986 \lambda^{10} - 585640 \lambda^9 - 21741885 \lambda^8 \\ &\quad - 51020968 \lambda^7 - 8184611820 \lambda^6 - 92603036592 \lambda^5 \\ &\quad - 742753522665 \lambda^4 - 4149987936160 \lambda^3 \\ &\quad - 154068330212994 \lambda^2 - 34237400473320 \lambda \\ &\quad - 34522712143931 \end{aligned}$$

$$\text{atau } p(\lambda) = (\lambda - 121)(\lambda + 11)^{11}$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_S(Q_{12}))$ adalah $\lambda_1 = 121$ dan $\lambda_2 = -11$ dengan masing-masing memiliki multiplitas $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 11$. Setelah diketahui nilai eigen dari $DD(\Gamma_S(Q_{12}))$, dapat dihitung energi detour dari $\Gamma_S(Q_{12})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_{DD}(\Gamma_S(Q_{12})) &= ((1 \times |121|) + (11 \times |-11|)) \\ &= 121 + 121 \\ &= 242 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi detour dari $\Gamma_S(Q_{12})$ adalah 242.

4.1.3 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4.4}$

Grup quaternion diperumum Q_{16} adalah $Q_{16} = \langle a, b | a^6 = e, b^2 = a^4, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$. Elemen-elemen dari grup quaternion diperumum Q_{16} adalah $\{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}$. Berikut merupakan tabel Cayley dari Q_{16} .

Tabel 4.3 Tabel Cayley Q_{16}

\circ	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b
a^4	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
a^6	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
a^7	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b
b	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5
ab	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6
a^2b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2
a^6b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3
a^7b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4

Invers dari setiap elemen dari grup quaternion diperumum adalah sebagai berikut:

$$1^{-1} = 1 \text{ karena } 1 \circ 1 = 1$$

$$a^{-1} = a^7 \text{ karena } a \circ a^7 = a^7 \circ a = 1$$

$$(a^2)^{-1} = a^4 \text{ karena } a^2 \circ a^6 = a^6 \circ a^2 = 1$$

$$(a^3)^{-1} = a^5 \text{ karena } a^3 \circ a^5 = a^5 \circ a^3 = 1$$

$$(a^4)^{-1} = a^4 \text{ karena } a^4 \circ a^4 = 1$$

$$(a^5)^{-1} = a^3 \text{ karena } a^5 \circ a^3 = a^3 \circ a^5 = 1$$

$$(a^6)^{-1} = a^2 \text{ karena } a^6 \circ a^2 = a^2 \circ a^6 = 1$$

$$(a^7)^{-1} = a \text{ karena } a^7 \circ a = a \circ a^7 = 1$$

$$b^{-1} = a^4b \text{ karena } b \circ a^4b = a^4b \circ b = 1$$

$$(a^2b)^{-1} = a^6b \text{ karena } a^2b \circ a^6b = a^6b \circ a^2b = 1$$

$$(a^3b)^{-1} = a^7b \text{ karena } a^3b \circ a^7b = a^7b \circ a^3b = 1$$

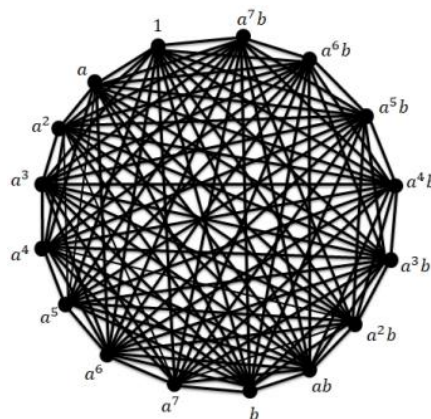
$$(a^4b)^{-1} = b \text{ karena } a^4b \circ b = b \circ a^4b = 1$$

$$(a^5b)^{-1} = ab \text{ karena } a^5b \circ ab = ab \circ a^5b = 1$$

$$(a^6b)^{-1} = a^2b \text{ karena } a^6b \circ a^2b = a^2b \circ a^6b = 1$$

$$(a^7b)^{-1} = a^3b \text{ karena } a^7b \circ a^3b = a^3b \circ a^7b = 1$$

Berdasarkan uraian di atas, diketahui bahwa anggota Q_{16} yang inversnya adalah dirinya sendiri adalah $\{1, a^4\}$, sehingga $S = \{a, a^2, a^3, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}$. Himpunan titik pada graf invers $\Gamma_S(Q_{16})$ adalah $V(\Gamma_S(Q_{16})) = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}$. Dua titik yang berbeda u dan v pada $V(\Gamma_S(Q_{16}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Dengan demikian dapat dibentuk $\Gamma_S(Q_{16})$ yang ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 4.3 $\Gamma_S(Q_{16})$

Sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \det(DD(\Gamma_S(Q_{16})) - \lambda I) &= \lambda^{16} - 27000 \lambda^{14} - 3780000 \lambda^{13} - 276412500 \lambda^{12} \\
 &- 13267800000 \lambda^{11} - 456080625000 \lambda^{10} - 11727787500000 \lambda^9 \\
 &- 230890816406250 \lambda^8 - 3518336250000000 \lambda^7 \\
 &- 41560346953125000 \lambda^6 - 377821335937500000 \lambda^5 \\
 &- 2597521684570312500 \lambda^4 - 13078430859375000000 \lambda^3 \\
 &- 45540964599609375000 \lambda^2 - 98088231445312500000 \lambda \\
 &- 98526125335693359375
 \end{aligned}$$

$$\text{atau } p(\lambda) = (\lambda - 225)(\lambda + 15)^{15}$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_S(Q_{16}))$ adalah $\lambda_1 = 225$ dan $\lambda_2 = -15$ dengan masing-masing memiliki multiplitas $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 15$. Setelah diketahui nilai eigen dari $DD(\Gamma_S(Q_{16}))$, dapat dihitung energi detour dari $\Gamma_S(Q_{16})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 E_{DD}(\Gamma_S(Q_{16})) &= ((1 \times |225|) + (15 \times |-15|)) \\
 &= 225 + 225 \\
 &= 450
 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi detour dari $\Gamma_S(Q_{16})$ adalah 450.

4.1.4 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4.5}$

Grup quaternion diperumum Q_{20} adalah $Q_{20} = \langle a, b | a^{10} = e, b^2 = a^5, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$. Elemen-elemen dari grup quaternion diperumum Q_{20} adalah

$\{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b, a^8b, a^9b\}$.

Berikut merupakan tabel Cayley dari Q_{20} .

Tabel 4.4 Tabel Cayley Q_{20}

\circ	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b
a^4	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
a^6	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
a^7	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b
a^8	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
a^9	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b
b	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6
ab	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7
a^2b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^6b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2
a^7b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3
a^8b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4
a^9b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5

Invers dari setiap elemen dari grup quaternion dipermum adalah sebagai

berikut:

$$1^{-1} = 1 \text{ karena } 1 \circ 1 = 1$$

$$a^{-1} = a^9 \text{ karena } a \circ a^9 = a^9 \circ a = 1$$

$$(a^2)^{-1} = a^8 \text{ karena } a^2 \circ a^8 = a^8 \circ a^2 = 1$$

$$(a^3)^{-1} = a^7 \text{ karena } a^3 \circ a^7 = a^7 \circ a^3 = 1$$

$$(a^4)^{-1} = a^6 \text{ karena } a^4 \circ a^6 = a^6 \circ a^4 = 1$$

$$(a^5)^{-1} = a^5 \text{ karena } a^5 \circ a^5 = 1$$

$$(a^6)^{-1} = a^4 \text{ karena } a^6 \circ a^4 = a^4 \circ a^6 = 1$$

$$(a^7)^{-1} = a^3 \text{ karena } a^7 \circ a^3 = a^3 \circ a^7 = 1$$

$$(a^8)^{-1} = a^2 \text{ karena } a^8 \circ a^2 = a^2 \circ a^8 = 1$$

$$(a^9)^{-1} = a \text{ karena } a^9 \circ a = a \circ a^9 = 1$$

$$b^{-1} = a^5b \text{ karena } b \circ a^5b = a^5b \circ b = 1$$

$$(ab)^{-1} = a^6b \text{ karena } ab \circ a^6b = a^6b \circ ab = 1$$

$$(a^2b)^{-1} = a^7b \text{ karena } a^2b \circ a^7b = a^7b \circ a^2b = 1$$

$$(a^3b)^{-1} = a^8b \text{ karena } a^3b \circ a^8b = a^8b \circ a^3b = 1$$

$$(a^4b)^{-1} = a^9b \text{ karena } a^4b \circ a^9b = a^9b \circ a^4b = 1$$

$$(a^5b)^{-1} = b \text{ karena } a^5b \circ b = b \circ a^5b = 1$$

$$(a^6b)^{-1} = ab \text{ karena } a^6b \circ ab = ab \circ a^6b = 1$$

$$(a^7b)^{-1} = a^2b \text{ karena } a^7b \circ a^2b = a^2b \circ a^7b = 1$$

$$(a^8b)^{-1} = a^3b \text{ karena } a^8b \circ a^3b = a^3b \circ a^8b = 1$$

$$(a^9b)^{-1} = a^4b \text{ karena } a^9 \circ a^4b = a^4 \circ a^9b = 1$$

Berdasarkan uraian di atas, diketahui bahwa anggota Q_{20} yang inversnya adalah dirinya sendiri adalah $\{1, a^5\}$, sehingga S adalah $\{a, a^2, a^3, a^4, a^6, a^7, a^8, a^9, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b, a^8b, a^9b\}$.

Himpunan titik pada graf invers $\Gamma_S(Q_{20})$ adalah $V(\Gamma_S(Q_{20})) = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b, a^8b, a^9b\}$.

Dua titik yang berbeda u dan v pada $V(\Gamma_S(Q_{20}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Dengan demikian dapat dibentuk $\Gamma_S(Q_{20})$ yang ditunjukkan pada gambar berikut:

$$336331341462253310151076430 \lambda^2 -$$

$$712231076037712892084632440 \lambda - 7142095693373205673756410$$

$$\text{atau } p(\lambda) = (\lambda - 361)(\lambda + 19)^{19}$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_S(Q_{20}))$ adalah $\lambda_1 = 361$ dan $\lambda_2 = -19$ dengan masing-masing memiliki multiplitas $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 19$. Setelah diketahui nilai eigen dari $DD(\Gamma_S(Q_{20}))$, dapat dihitung energi detour dari $\Gamma_S(Q_{20})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_{DD}(\Gamma_S(Q_{20})) &= ((1 \times |361|) + (19 \times |-19|)) \\ &= 361 + 361 \\ &= 722 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi detour dari $\Gamma_S(Q_{20})$ adalah 722.

Dari proses percobaan perhitungan masing-masing energi detour dari grup quaternion diperumum. Maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4.5 Tabel Energi Detour

n	Q_{4n}	S	E_{DD}
2	Q_8	$Q_8 \setminus \{1, a^2\}$	$98 = (32 \times 2^2) - (16 \times 2) + 2$
3	Q_{12}	$Q_{12} \setminus \{1, a^3\}$	$242 = (32 \times 3^2) - (16 \times 3) + 2$
4	Q_{16}	$Q_{16} \setminus \{1, a^4\}$	$450 = (32 \times 4^2) - (16 \times 4) + 2$
5	Q_{20}	$Q_{20} \setminus \{1, a^5\}$	$722 = (32 \times 5^2) - (16 \times 5) + 2$

Dari penjelasan pada Tabel 4.5 diperoleh $E_{DD}(\Gamma_S(Q_{4n})) = 32n^2 - 16n + 2$ untuk $n \in \{2,3,4,5\}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$E_{DD}(\Gamma_S(Q_{4n})) = 32n^2 - 16n + 2,$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lemma 1

Misalkan $S \subseteq Q_{4n}$ dan $S = \{x \in Q_{4n} | x^{-1} \neq x\}$. Maka $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Bukti:

$$1^{-1} = 1 \text{ karena } 1 \cdot 1 = 1.$$

$$(a^n)^{-1} = a^n \text{ karena } a^n \cdot a^n = a^{2n} = 1.$$

Misalkan $v \in Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$

Kasus 1: $v = a^i$ untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}, i \neq n$.

Andaikan $v \notin S$ maka $v \cdot v = a^i \cdot a^i = a^{2i} = 1$. Solusi dari permasalahan tersebut adalah $2i = 0 \Leftrightarrow i = 0$ atau $i = n$. Kontradiksi bahwa $v \notin \{1, a^n\}$. Dengan demikian $a^i \in S$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}, i \neq n$.

Kasus 2: $v = a^i b$ untuk suatu $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$.

Jika $v = a^i b$ untuk suatu $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$, maka

$$\begin{aligned} v \cdot v &= a^i b \cdot a^i b \\ &= a^i b a^i b^{-1} b b \\ &= a^i a^{-i} b^2 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

Sehingga $(a^i b)^{-1} \neq a^i b$ untuk setiap $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$. Dengan demikian $a^i b \in S$ untuk setiap $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$.

Jadi, terbukti bahwa $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Selanjutnya akan ditentukan titik di $\Gamma_S(Q_{4n})$ yang terhubung langsung dengan $\{1, a^n\}$ sebagai berikut:

Lemma 2

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, berlaku:

1. $\{1, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{1, a^n\}$.
2. $\{b, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{b, a^n b\}$.

Bukti

1. $\{1, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{1, a^n\}$.

Misalkan $v \in S$, artinya $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ dan $v \neq 1$.

Andaikan $b \cdot v \notin S$ maka $b \cdot v = 1$ atau $b \cdot v = a^n$.

Kasus 1: Jika $b \cdot v = 1$, maka $v = a^n b$ karena

$$b \cdot a^n b = b \cdot b \cdot a^n = b^2 \cdot a^n = a^n \cdot a^n = a^{2n} = 1$$

Kontradiksi karena $v \notin \{b, a^n b\}$.

Kasus 2: Jika $b \cdot v = a^n$, maka $v = b$ karena

$$b \cdot v = a^n \Rightarrow b^2 \cdot v = a^n \Rightarrow v = b \cdot a^n \cdot a^n = b \cdot a^{2n} = b$$

Kontradiksi karena $v \notin \{b, a^n b\}$.

Dengan demikian, $b \cdot v \in S$, sehingga $v \notin \{b, a^n b\}$. Oleh karena itu,

$\{1, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{1, a^n\}$.

2. $\{b, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{b, a^n b\}$.

Misalkan $v \in S$, berarti $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ dan $v \neq b$.

Andaikan $b \cdot v \notin S$, maka $b \cdot v = 1$ atau $b \cdot v = a^n$.

Kasus 1: Jika $b \cdot v = 1$, maka $v = a^n b$ karena

$$b \cdot a^n b = b \cdot b^2 \cdot b = b^2 \cdot b^2 = a^n \cdot a^n = a^{2n} = 1$$

Kontradiksi karena $v \notin \{b, a^n b\}$.

Kasus 2: Jika $b \cdot v = a^n$, maka $v = b$ karena

$$b \cdot v = a^n \implies b^2 \cdot v = a^n \implies v = b \cdot a^n \cdot a^n = b \cdot a^{2n} = b$$

Kontradiksi karena $v \notin \{b, a^n b\}$.

Dengan demikian, $b \cdot v \in S$, sehingga $v \notin \{b, a^n b\}$. Oleh karena itu,

$$\{b, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n})) \text{ untuk setiap } v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{b, a^n b\}.$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\{1, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{1, a^n\}$, dan $\{b, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$, untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{b, a^n b\}$.

Lemma 3

Misal $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dan $S = V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{1, a^n\}$. a^i terhubung langsung dengan $a^j b$ di $\Gamma_S(Q_{4n})$ untuk setiap $0 \leq i, j \leq 2n - 1$.

Bukti

Misalkan $v \in S$, artinya $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ dan $v \neq 1$.

Andaikan $a^i \cdot a^j b \notin S$ maka $a^i \cdot a^j b = a^0$ atau $a^i \cdot a^j b = a^n$.

Kasus 1: $a^i \cdot a^j b = a^0$

$$a^i \cdot a^j b = 1$$

$$\Leftrightarrow a^i \cdot a^j \cdot b = 1$$

$$\Leftrightarrow a^{i+j} \cdot b = 1$$

Sehingga tidak ada i, j yang memenuhi persamaan tersebut. Dengan demikian $a^i \cdot a^j b \in S$.

Kasus 2: $a^i \cdot a^j b = a^n$

$$a^i \cdot a^j b = a^n$$

$$\Leftrightarrow a^i \cdot a^j \cdot b = a^n$$

$$\Leftrightarrow a^{i+j} \cdot b = a^n$$

Sehingga tidak ada i, j yang memenuhi persamaan tersebut. Dengan demikian $a^i \cdot a^j b \in S$.

Kedua kasus di atas telah menunjukkan bahwa asumsi $a^i \cdot a^j b \notin S$ kontradiksi karena $1 \notin S$ dan $a^n \notin S$. Dengan demikian, terbukti bahwa a^i terhubung langsung dengan $a^j b$ di $\Gamma_S(Q_{4n})$ untuk setiap $0 \leq i, j \leq 2n - 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ada lintasan Hamilton yang digunakan untuk mencari matriks detour dari graf invers.

Lemma 4

Terdapat lintasan Hamilton $u - v$, untuk setiap $u, v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ $u \neq v$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

Misalkan $s = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ dan $t = \{b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. Untuk membuktikan bahwa terdapat lintasan Hamilton antara dua titik u dan v di graf $\Gamma_S(Q_{4n})$, akan dibuktikan dengan tiga kasus yang berbeda yaitu

1. $u \in s$ dan $v \in t$ atau $u \in t$ dan $v \in s$
2. $u, v \in s$
3. $u, v \in t$

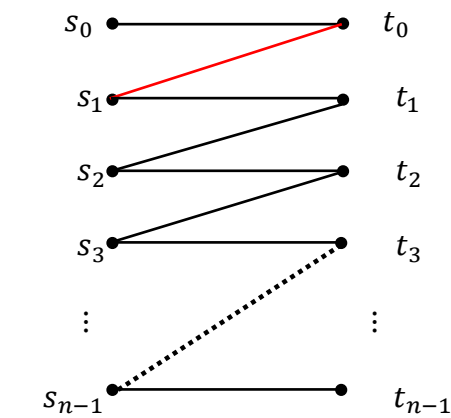
Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $u, v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$, $u \neq v$, terdapat lintasan Hamilton $u - v$. Berikut ini adalah tiga kasus yang akan dibuktikan:

Kasus 1: $u \in s$ dan $v \in t$ atau $u \in t$ dan $v \in s$

Misalkan $u \in s$ dan $v \in t$. Titik-titik s dinyatakan sebagai $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ dan titik t dinyatakan sebagai $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Dengan asumsi $s_0 = u$ dan $t_{n-1} = v$ (atau sebaliknya), berikut adalah langkah-langkah untuk menentukan lintasan Hamiltonnya.

1. Mulai dari titik s_0 .
2. Pilih titik berikutnya dari himpunan t secara acak dan tambahkan ke lintasan.
3. Secara bergantian, pilih titik berikutnya dari himpunan s atau t sampai mencapai titik t_{n-1} . Hal ini mungkin karena setiap titik di s terhubung langsung di setiap titik di t .

Berikut merupakan contoh graf $u \in s$ dan $v \in t$.



Gambar 4.5 Graf $u \in s$ dan $v \in t$

Untuk unsur $u \in t$ dan $v \in s$ analog dengan pembuktian tersebut.

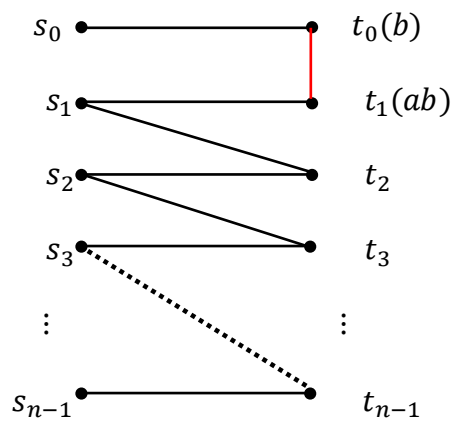
Kasus 2: $u \in s$ dan $v \in s$

Misalkan urutan titik s dinyatakan sebagai $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$.

Dengan asumsi awal $s_0 = u$ dan $s_{n-1} = v$, berikut adalah langkah-langkah pembuktiannya:

1. Mulai dari titik awal $s_0 = u$
2. Kemudian tambahkan titik b dan ab kedalam lintasan sehingga diperoleh lintasan $u - b - ab$
3. Secara bergantian, pilih titik berikutnya dari himpunan s dan t sampai mencapai titik s_{n-1} . Hal ini mungkin karena setiap titik di s terhubung langsung di setiap titik di t .

Berikut merupakan contoh graf $u \in s$ dan $v \in s$.



Gambar 4.6 Graf $u, v \in s$

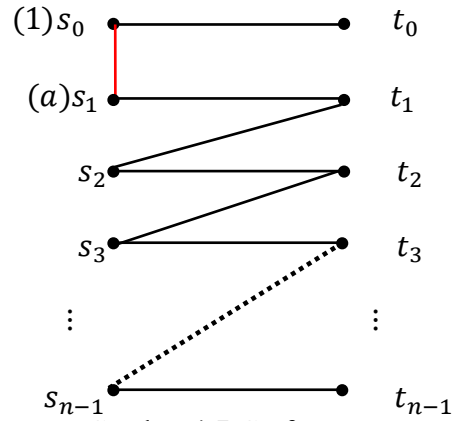
Kasus 3: $u \in t$ dan $v \in t$

Misalkan urutan titik t dinyatakan sebagai $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$.

Dengan asumsi awal $t_0 = u$ dan $t_{n-1} = t_{n-1}$, berikut adalah langkah-langkah pembuktiannya:

1. Mulai dari titik $t_0 = u$
2. Kemudian tambahkan titik 1 dan a ke dalam lintasan sehingga diperoleh lintasan $u - 1 - a$.
3. Secara bergantian, pilih titik berikutnya dari himpunan s dan t sampai mencapai titik t_{n-1} . Hal ini mungkin karena setiap titik di s terhubung langsung di setiap titik di t .

Berikut adalah contoh graf $u \in t$ dan $v \in t$.



Gambar 4.7 Graf $u, v \in t$

Berdasarkan setiap kasus di atas, telah ditunjukkan bahwa ada lintasan Hamilton antara u dan v untuk setiap $u, v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ dengan $u \neq v$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$. Energi detour di graf invers dari grup quaternion diperumum adalah

$$Q_{4n} = 32n^2 - 16n + 2.$$

Bukti:

Menurut lemma 1 sampai 4 diketahui bahwa terdapat lintasan Hamilton $u - v$ untuk setiap $u, v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ dan $u \neq v$. Dengan demikian matriks $u, v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum adalah

$$DD(\Gamma_S(Q_{4n})) = \begin{bmatrix} 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks detour tersebut, maka dapat diperoleh polinomial karakteristik dan nilai eigen sebagai berikut:

$$\det(DD(\Gamma_5(Q_{4n})) - \lambda I)$$

$$= \det \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

$$- \left(\begin{array}{cccccccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{array} \right)$$

$$= \det \left(\begin{array}{cccccccc} -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda \end{array} \right)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -\lambda + (4n - 1) & (4n - 1) + (4n - 1) & \cdots & (4n - 1) + (4n - 1) \\ (4n - 1) + (4n - 1) & -\lambda + (4n - 1) & \cdots & (4n - 1) + (4n - 1) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ (4n - 1) + (4n - 1) & (4n - 1) + (4n - 1) & \cdots & -\lambda + (4n - 1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\lambda + (4n - 1) & 2(4n - 1) & \cdots & 2(4n - 1) \\ 2(4n - 1) & -\lambda + (4n - 1) & \cdots & 2(4n - 1) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 2(4n - 1) & 2(4n - 1) & \cdots & -\lambda + (4n - 1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Untuk menghitung determinan dari matriks ini, kita bisa menggunakan hasil khusus untuk matriks simetris dengan elemen diagonal d dan elemen off-diagonal c . Jika $A + B$ adalah matriks $2n \times 2n$ dengan elemendiagonal d dan elemennon-diagonal c , maka determinan $A + B$ dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$\det(A + B) = (d - c)^{n-1}(d + (n - 1)c)$$

dengan $d = -\lambda + 4n - 1$, $c = 8n - 2$ maka

$$d - c = -\lambda + 4n - 1 - (8n - 2) = -\lambda - 4n + 1$$

$$\begin{aligned}
d(n - 1)c &= (-\lambda + 4n - 1 + (2n - 1)(8n - 2)) \\
&= -\lambda + 4n - 1 + 16n^2 - 4n - 8n + 2 \\
&= -\lambda + 16n^2 - 8n + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(A + B) &= (d - c)^{n-1}(d + (n - 1)c) \\
&= (-\lambda - 4n + 1)^{2n-1}(-\lambda + 16n^2 - 8n + 1) \\
&= (-\lambda - 4n + 1)^{2n-1}(-\lambda + (4n - 1)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A - B &= \begin{bmatrix} -\lambda & 4n - 1 & \cdots & 4n - 1 \\ 4n - 1 & -\lambda & \cdots & 4n - 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n - 1 & 4n - 1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4n - 1 & 4n - 1 & \cdots & 4n - 1 \\ 4n - 1 & 4n - 1 & \cdots & 4n - 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n - 1 & 4n - 1 & \cdots & 4n - 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\lambda - (4n - 1) & (4n - 1) - (4n - 1) & \cdots & (4n - 1) - (4n - 1) \\ (4n - 1) - (4n - 1) & -\lambda - (4n - 1) & \cdots & (4n - 1) - (4n - 1) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ (4n - 1) - (4n - 1) & (4n - 1) - (4n - 1) & \cdots & -\lambda - (4n - 1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -\lambda - (4n - 1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda - (4n - 1) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda - (4n - 1) \end{bmatrix}$$

Ini adalah matriks diagonal dengan elemen diagonalnya $-\lambda - (4n - 1)$.

Determinannya dapat dihitung dengan mengalikan elemen-elemen diagonalnya

$$\begin{aligned} \det(A - B) &= (-\lambda - (4n - 1))^{2n} \\ &= (-\lambda - 4n + 1)^{2n} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(DD(\Gamma_S(Q_{4n})) - \lambda I) &= \det(A + B) \cdot \det(A - B) = 0 \\ &= (-\lambda - 4n + 1)^{2n-1}(-\lambda + (4n - 1)^2) \cdot (-\lambda - 4n + 1)^{2n} = 0 \\ &= (-\lambda - 4n + 1)^{4n-1}(-\lambda + (4n - 1)^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{atau } p(\lambda) = (-\lambda - 4n + 1)^{4n-1}(-\lambda + (4n - 1)^2)$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa nilai eigen dari matriks $DD(\Gamma_S(Q_{4n}))$ adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -4n + 1 \text{ dengan multiplisitas } 4n - 1$$

$$\lambda_2 = (4n - 1)^2 \text{ dengan multiplisitas } 1$$

Jadi, energi detour dari $\Gamma_S(Q_{4n})$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_{DD}(\Gamma_S(Q_{4n})) &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \\ &= 4n - 1 \cdot |(-4n + 1)| + 1 \cdot |(4n - 1)^2| \\ &= 4n - 1 \cdot (4n - 1) + (4n - 1)^2 \\ &= (4n - 1)^2 + (4n - 1)^2 \\ &= 2(4n - 1)^2 \\ &= 2(16n^2 - 8n + 1) \\ &= 32n^2 - 16n + 2 \end{aligned}$$

4.2 Integrasi Hasil Penelitian dengan Kajian Keislaman

Dalam Surah Al-Kahfi (18:49), Allah berfirman:

وَوُضِعَ الْكِتَابُ فَتَرَى الْمُجْرِمِينَ مُشْفِقِينَ مِمَّا فِيهِ وَيَقُولُونَ يَا وَيْلَتَنَا مَا لِي هَذَا الْكِتَابِ لَا يُغَادِرُ صَغِيرَةً

وَلَا كَبِيرَةً إِلَّا أَحْصَاهَا وَوَجَدُوا مَا عَمِلُوا حَاضِرًا وَلَا يَظْلِمُ رَبُّكَ أَحَدًا ﴿٤٩﴾

Artinya: "Dan diletakkanlah kitab, lalu kamu akan melihat orang-orang yang bersalah ketakutan terhadap apa yang tertulis di dalamnya, dan mereka berkata: 'Aduhai celaka kami, kitab apakah ini yang tidak meninggalkan yang kecil dan tidak (pula) yang besar, melainkan ia mencatat semuanya; dan mereka dapati apa yang telah mereka kerjakan ada (tertulis). Dan Tuhanmu tidak menganiaya seorang jua pun!'" (Al Kahfi:49)(Kemenag, 2022).

Ayat ini menggaris bawahi konsep pencatatan yang sangat rinci dan akurat dari setiap perbuatan manusia, baik kecil maupun besar, yang semuanya dihitung dan dicatat tanpa ada yang terlewatkan. Prinsip perhitungan yang teliti ini memiliki analogi yang menarik dengan konsep energi detour dalam graf invers dalam teori graf. Graf invers adalah graf yang dibentuk dengan cara membalik arah semua tepi (*edges*) dari graf asli. Energi detour dalam graf invers mengukur efisiensi atau biaya yang diperlukan untuk menempuh jalur alternatif dalam graf tersebut setelah inversi. Sama seperti ayat tersebut menunjukkan akumulasi dari semua perbuatan manusia untuk diperhitungkan di hari akhir, energi detour dalam graf invers melibatkan penjumlahan panjang lintasan atau biaya perjalanan dari satu titik ke titik lainnya setelah arah tepinya dibalik. Setiap jalur alternatif dihitung dengan teliti untuk menentukan total energi.

Prinsip perhitungan ini memastikan bahwa tidak ada detail yang diabaikan, mencerminkan keadilan dan keseimbangan dalam penilaian. Oleh karena itu, baik dalam konteks pencatatan amal perbuatan manusia dalam Al-Qur'an maupun dalam perhitungan energi detour dalam graf invers, terdapat prinsip akumulasi nilai dan

pentingnya perhitungan yang akurat dalam menentukan hasil akhir, baik dalam konteks spiritual maupun matematis.

Tafsir Ibnu Katsir menjelaskan bahwa pada hari kiamat, setiap individu akan disodorkan catatan amal yang berisi seluruh perbuatan mereka selama hidup di dunia, baik yang kecil maupun besar. Orang-orang berdosa akan merasa ketakutan dan menyesal ketika melihat catatan tersebut, karena menyadari bahwa semua perbuatan mereka telah dicatat dengan teliti dan akan dipertanggungjawabkan. Ayat ini menekankan keadilan Allah, yang tidak akan menzalimi siapa pun, karena setiap amal akan mendapatkan balasan yang setimpal (Muhammad, 2024).

Penjelasan ini dapat dihubungkan dengan prinsip energi detour dalam graf, di mana setiap pilihan jalur dalam hidup diibaratkan sebagai jalan dalam graf yang memiliki nilai energi tertentu. Setiap perbuatan manusia, baik itu kebaikan atau keburukan, akan memiliki konsekuensi yang tercatat dengan tepat dalam kitab amal, mirip dengan bagaimana energi detour dihitung dalam sebuah graf. Prinsip ini menegaskan bahwa semua tindakan manusia memiliki dampak yang pasti dan akan dipertanggungjawabkan dengan sangat teliti di hadapan Allah SWT pada hari kiamat. Hal ini mengajarkan bahwa setiap keputusan dalam hidup harus diambil dengan penuh kesadaran akan akibatnya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil dan pembahasan pada penelitian ini adalah formula energi detour di graf invers dari grup quaternion diperumum dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, sebagai berikut

$$E_{DD}(\Gamma_S(Q_{4n})) = 32n^2 - 16n + 2.$$

5.2 Saran

Penelitian ini membahas mengenai energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum. Penulis berharap kepada peneliti selanjutnya untuk meneliti mengenai energi yang berbeda yang diperoleh dari graf dan grup yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). Teori Graf: Topik dasar untuk tugas akhir/skripsi. In *UIN-Maliki Press, Malang. ISBN 979-24-3104-7*.
- Abdussakir, Muzakir, & Marzuki, C. C. (2018). Detour spectrum and detour energy of conjugate graph complement of dihedral group. *Journal of Physics: Conference Series*, 1028(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1028/1/012111>
- Afandi, A. N., Saputra, R., & Laksono, D. J. (2019). Rancang Bangun Aplikasi Pencarian Rute Terpendek Guna Mengatasi Kemacetan di Kota Semarang Menggunakan Algoritma Dijkstra. *Jurnal Informatika: Jurnal Pengembangan IT*, 4.
- Alfuraidan, M. R., & Zakariya, Y. F. (2017). Inverse graphs associated with finite groups. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 5(1), 142–154. <https://doi.org/10.5614/ejgta.2017.5.1.14>
- Anton, H., & Rorres, C. (2020). elementary linear algebra. In *Essential MATLAB and Octave* (11 th edit). <https://doi.org/10.1201/b17671-9>
- Ayyaswamy, S. K., & Balachandran, S. (2010). On detour spectra of some graphs. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 67(7), 529–531.
- Balakrishnan, R. (2004). The energy of a graph. *Linear Algebra and Its Applications*, 387(1-3 SUPPL.), 287–295. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.02.038>
- Bapat, R. B. (2010). Graphs and matrices. In *Structural Models in Anthropology*. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511659843.006>
- Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). Graphs & digraphs. In *Graphs and Digraphs*. <https://doi.org/10.1201/b19731>
- Das, K. C., & Mojallal, S. A. (2014). On Laplacian energy of graphs. *Discrete Mathematics*, 325(1), 52–64. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.02.017>
- Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract_algebra_Third_Edition_Foote_Dum.pdf* (third edit). John wiley & Sons, Inc.
- Erciyes, K. (2023). *Graph-Theoretical Analysis of Biological Networks: A Survey*. <https://doi.org/10.20944/preprints202307.1012.v1>
- Gilbert, L., & Gilbert, J. (2013). *Elements of Modern Algebra Eighth edition* (eighth edi). Cengage Learning 200 First Stamford Place, 4th Floor Stamford, CT 06902 USA.
- Handayani, S. T. (2016). *Spektrum laplace graf konjugasi dari grup dihedral*. etheses.uin-malang.ac.id. <http://etheses.uin-malang.ac.id/3574/>
- Hikmah, A. (2022). *terjemah kitab Tafsir Jalalain*. <https://Alhikmah-My-Id.Github.Io/Jalalain/Index.Html>. <https://alhikmah-my->

id.github.io/jalalain/index.html

- Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1985). Matrix Analysis. In *Matrix Analysis*. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511810817>
- Ishag, A. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 7*. Pustaka Imam Asy-Syafi'i PO Box 7803/JATCC 13340 A Cetakan Pertama Sya'ban 1425/Oktober 2004 e-Mail: Pustaka@imamsyafii.Com. [https://archive.org/details/tafsir-ibnu-katsir-jilid-1/Tafsir Ibnu Katsir Jilid 7/page/620/mode/2up?view=theater](https://archive.org/details/tafsir-ibnu-katsir-jilid-1/Tafsir%20Ibnu%20Katsir%20Jilid%207/page/620/mode/2up?view=theater)
- Jannah, U., Matematika, P. S., Sains, F., Teknologi, D. A. N., Islam, U., Maulana, N., & Ibrahim, M. (2023). *Indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum*.
- Kemenag. (2022). *Al-Qur'an dan Terjemahan*. Kemenag. <https://quran.kemenag.go.id/>
- Ma, X. L., Wei, H. Q., & Zhong, G. (2013). The Cyclic Graph of a Finite Group. *Algebra, 2013*, 1–7. <https://doi.org/10.1155/2013/107265>
- Mubarak, Z. (n.d.). *Anjuran Islam tentang Etos Kerja dan Profesionalisme*. 2015. Retrieved February 22, 2024, from <https://www.nu.or.id/khutbah/anjuran-islam-tentang-etos-kerja-dan-profesionalisme-5EIUf>
- Muhammad, D. A. ibn. (2024). *Terjemah Tafsir Ibnu Katsir (Bahasa Indonesia)*. Archive.Org. <https://archive.org/details/tafsir-ibnu-katsir-terjemah-bahasa-indonesia/tafsir-ibnu-katsir-bahasa-indonesia-jilid-5/page/267/mode/2up?view=theater>
- Novia Rahma, A., Aryani, F., Anggelina, M., Rahmawati, dan, Matematika, J., Sains dan Teknologi, F., Sultan Syarif Kasim Riau Jl Soebrantas No, U. H., & Baru, S. (2019). Determinan Matriks Blok Dalam Aplikasi Matriks FLD Bentuk Khusus. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika, 5*(2), 34–42.
- Sothanaphan, N. (2017). Determinants of block matrices with noncommuting blocks. *Linear Algebra and Its Applications, 512*(501), 202–218. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.10.004>
- Yahya, M. (2007). *Hadits Arba'in Nawawiyah Muhyiddin Yahya Bin Syaraf Nawawi*. 5–188.

RIWAYAT HIDUP



Iftitahur Rohmah, lahir di Kediri pada tanggal 22 April 2002. Penulis tinggal di Dusun Surowono, RT 002/ RW 019, Desa Canggu, Kecamatan Badas, Kabupaten Kediri. Anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Ali Mansur dan Ibu Siti Hindun. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Aisyah Bustanul Athfal V Mangiran dan lulus pada tahun 2008. Setelah itu, penulis menempuh pendidikan dasar di MI Islamiyah 1 Surowono dan lulus pada tahun 2014. Selanjutnya, penulis menempuh jenjang pendidikan menengah pertama di MTs. Nidhomiyah Surowono dan lulus pada tahun 2017. Kemudian, penulis melanjutkan ke jenjang pendidikan menengah atas di MAN 3 Tambakberas Jombang dan lulus pada tahun 2020. Dan selanjutnya penulis melanjutkan ke pendidikan perguruan tinggi Strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Program Studi Matematika. Selama menempuh perkuliahan, penulis bertempat tinggal di Pondok Pesantren Sabilurrasyad Gasek. Selain itu penulis pernah menjadi bagian dari HMPS Matematika pada tahun 2021-2022.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ifitahur Rohmah
NIM : 200601110023
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Energi Detour pada Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum
Pembimbing I : M. Nafie Jauhari, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	15 Januari 2024	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	25 Januari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	5 Februari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	26 Februari 2024	ACC Bab I, II, dan III	4.
5.	6 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	14 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	18 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	25 Maret 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	1 April 2024	ACC Seminar Proposal	9.
10.	2 Mei 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	20 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	3 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	12 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	3 Juli 2024	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	15 Juli 2024	ACC Bab IV dan V	15.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341) 558933

16.	22 Juli 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.
17.	29 Juli 2024	konsultasi Kajian Agama Bab IV	17.
18.	5 Agustus 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	18.
19.	15 Agustus 2024	ACC Seminar Hasil	19.
20.	24 September 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20.
21.	1 Oktober 2024	ACC Sidang Skripsi	21.
22.	28 November 2024	ACC Keseluruhan	22.

Malang, 28 November 2024

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.

NIP. 197411292000122005