KONTRAKSI PADA GRAF TANGGA L_n DAN GRAF KINCIR $K_1 + mK_2$

SKRIPSI

Oleh:
DWI PRASETYAWATI
NIM. 09610076

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2014

KONTRAKSI PADA GRAF TANGGA L_n DAN GRAF KINCIR $K_1 + mK_2$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
DWI PRASETYAWATI
NIM. 09610076

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

KONTRAKSI PADA GRAF TANGGA L_n DAN GRAF KINCIR $K_1 + mK_2$

SKRIPSI

Oleh:
DWI PRASETYAWATI
NIM. 09610076

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 02 Desember 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdussakir, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KONTRAKSI PADA GRAF TANGGA L_n DAN GRAF KINCIR $K_1 + mK_2$

SKRIPSI

Oleh:
DWI PRASETYAWATI
NIM. 09610076

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 09 Januari 2014

Penguji Utama	:H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	________________
Ketua Penguji	:Dr. Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	________________
Sekretaris Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Anggota Penguji	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dwi Prasetyawati
NIM	: 09610076
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 02 Desember 2013
Yang membuat pernyataan,

Dwi Prasetyawati
NIM. 09610076

MOTTO

"Setiap perbuatan bergantung dari niatnya

dan sesungguhnya seseorang akan mendapatkan sesuatu

berdasarkan apa yang ia niatkan"

PERSEMBAHAN

Karya tulis sederhana ini penulis persembahkan kepada ,
Kedua orang tua tercinta,
Bapak Dahlan dan Ibu Rupiani,

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur *alhamdulillah* penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, arahan, dan bimbingan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun doa dan restu. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus pembimbing skripsi yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan mengarahkan dalam penyelesaian skripsi ini.

4. Hairur Rahman, M.Si, selaku pembimbing akademik yang telah memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingannya.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya, serta dukungan moral maupun material kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2009, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut mendukung kelancaran penyempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin *Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Desember 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Prasetyawati, Dwi. 2014. **Kontraksi pada Graf Tangga L_n dan Graf Kincir $K_1 + mK_2$**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd.
(II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci: Kontraksi Graf, Graf Tangga L_n dan Graf Kincir $K_1 + mK_2$.

Misal graf G_1 dengan himpunan titik $V(G_1)$ dan graf G_2 dengan himpunan titik $V(G_2)$. Suatu graf G_2 didefinisikan sebagai suatu kontraksi dari graf G_1 jika terdapat pemetaan korespondensi satu-satu dan *onto* antara suatu unsur dari partisi di $V(G_1)$ pada suatu unsur di $V(G_2)$.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut: (a) Menggambar graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5, (b) Menentukan semua kemungkinan kontraksi titik dan kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5, (c) Mencari pola yang terbentuk dari kontraksi graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5, (d) Merumuskan pola ke dalam teorema dan membuktikan teorema, (e) Menggambar graf kincir dimulai dari $K_1 + 1K_2$ sampai dengan $K_1 + 5K_2$, (f) Menentukan semua kemungkinan kontraksi titik dan kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf kincir dimulai dari $K_1 + 1K_2$ sampai dengan $K_1 + 5K_2$, (g) Mencari pola yang terbentuk dari kontraksi graf kincir dimulai dari $K_1 + 1K_2$ sampai dengan $K_1 + 5K_2$, (h) Merumuskan pola ke dalam teorema dan membuktikan teorema.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa:

1. Suatu graf tangga L_n (dengan $n \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2n$ dan kontraksi sisi sebanyak $2(n-1)$, maka hasil kontraksinya adalah graf lintasan P_n.
2. Suatu graf kincir $K_1 + mK_2$ (dengan $m \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2m$ dan kontraksi sisi sebanyak $2m$, maka hasil kontraksinya adalah graf bintang $K_{1,m}$.

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pokok bahasan pada masalah menentukan kontraksi pada graf tangga L_n (dengan $n \in N$) dan graf kincir $K_1 + mK_2$ (dengan $m \in N$). Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mengembangkannya dan merumuskan teorema dari kontraksi pada graf lain.

ABSTRACT

Prasetyawati, Dwi. 2014. **Contraction in Ladder Graph L_n and Wheel Graph $K_1 + mK_2$**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Abdussakir, M. Pd.
(II) Abdul Aziz, M.Si.

Keyword: Contraction Graph, Ladder graph L_n and Wheel Graph $K_1 + mK_2$.

For example graph G_1 with the set point $V(G_1)$ and graph G_2 with the set point $V(G_2)$. A graph G_2 defined as a contraction of the graph G_1 if there is one-to-one mapping between an element of the partition in $V(G_1)$ on an element $V(G_2)$.

The steps are performed in this study are discussed as follows: (a) Draw a ladder graph starting from L_1 up to L_2, (b) Determine all possible ways of contracting every the ladders graph starting from L_1 up to L_2, (c) Finding patterns formed from the contraction the ladder graph starting from L_1 up to L_2, (d) Formulate a pattern into the theorem and prove the theorem, (e) Draw a wheel graph starting from $K_1 + 1K_2$ up to $K_1 + 5K_2$, (f) Determine all the possible ways of contracting every the wheel graph starting from $K_1 + 1K_2$ up to $K_1 + 5K_2$, (g) Finding patterns formed from contraction the wheel graph starting from $K_1 + 1K_2$ up to $K_1 + 5K_2$, (h) Formulate a pattern into the theorem and prove the theorem.

Based on the result of the discussion can be obtained that:

1. A ladder graph L_n (with $n \in N$) When subjected to contraction as $2n$ points and the contraction of as $2(n-1)$ edges, then the result is a graph contraction is path P_n.
2. A wheel graph $K_1 + mK_2$ (with $m \in N$) When subjected to contraction as $2m$ points and the contraction of as $2m$ edges, then the result is a graph contraction is star graph $K_{1,m}$

In this paper, the authors focus only on the subject matter of deciding on the graph contraction ladder graph L_n (with $n \in N$) and wheel graph $K_1 + mK_2$ (with $m \in N$). Therefore, the author gives advice to readers who are interested in these issues to develop and formulate a theorem of contraction in the other graph.

الملخص

فرستياوة, دو. . 2014. **زآنقباضات فئ درج** L_n **غراف** $K_1 + mK_2$ **غراف والمطاحن** . أطروحة. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة ولاية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج
المشرف: (١) عبد الشاكر، الماجستير
(٢) عبد العزيز، ماجستير.

الكلمات الرئيسية :تقلص غراف L_n , غراف غراف $K_1 + mK_2$,سلالم والطاحونة.

على سبيل G_1 المثال الرسم البياني مع $V(G_1)$ نقطة التحديو G_2 الرسم البياني مع $V(G_2)$ نقطة التحديد رسم بياني يعرف بأنه انكماش الرسم البياني إذا كان هناك تعيين واحد الى واحد بين عنصر من القسم في على عنصر في.

وتناقش يتم تنفيذها في هذه الدراسة الخطوات على النحو التالي: (أ) رسم بياني ليبدأ سلم تصل L_1 إلى L_2 (ب) تحديد جميع السبل الممكنة للإصابة الدرج كل بدءا من الرسم البياني تصل L_1 إلى L_2 , (ت) العثور على أنماط تشكلت من الانكماش من الرسم البياني سلم بدءا من تصل L_1 إلى L_2 , (ث) صياغة نمط في نظرية واثبات نظرية، (ج) رسم بياني لبدء طاحونة تصل $K_1 + 5K_2$ إلى $K_1 + 1K_2$, (ح) تحديد كل السبل الممكنة للإصابة تصل $K_1 + 5K_2$ إلى $K_1 + 1K_2$, (خ) العثور على أنماط تشكلت من تقلصات بدءا الرسم البياني طاحونة تصل $K_1 + 5K_2$ إلى . $K_1 + 1K_2$ ، (د) صياغة نمط في نظرية ونظرية تثبت.

استنادا إلى نتائج المناقشة يمكن الحصول على ما يلي:

١. رسم بياني سلم L_n (مع $n \in N$) عندما تعرض للانكماش العديد من $2n$ النقاط وتقلص بقدر ، ثم والنتيجة هي $2(n-1)$ مسار الرسم البياني للتقلصات P_n .

٢. رسم بياني عجلة $K_1 + mK_2$ (مع $m \in N$) عندما تعرض للانكماش العديد من $2m$ النقاط وتقلص بقدر ، ثم والنتيجة هي $2m$ الرسم البياني للتقلصات $K_{1,m}$.

في هذه الورقة، والتركيز على الكتاب فقط على موضوع البت في سلم الرسم البياني الانكماش L_n (مع $n \in N$) والرسم البياني عجلة $K_1 + mK_2$ (مع $m \in N$) وبالتالي، يعطي المؤلف المشورة للقراء المهتمين في هذه القضايا لتطوير وصياغة نظرية الانكماش في الرسم البياني الأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, serta kebenarannya dapat dilihat dalam Al-Qur'an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah SWT (Rahman, 2007:1).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79). Sebagaimana Firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 dan surat Al-Furqan ayat 2:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"* (Q.S. Al-Qamar:49).

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”* (Q.S. Al-Furqan:2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah menciptakan alam beserta isinya ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusya, atau ada persamaannya. Jadi matematika telah ada sejak zaman dahulu, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan oleh manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.

Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya. Matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk dan lambang-lambang. Berkaitan dengan definisi tersebut, matematika seringkali dibagi menjadi tiga cabang, yaitu aljabar, analisis dan geometri (Kerami, 2003:156).

Dalam perkembangan selanjutnya, cabang matematika menjadi semakin banyak dan salah satunya adalah teori graf. Teori graf berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih dahulu berkembang. Di antara cabang matematika yang banyak manfaatnya untuk kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Dengan menggunakan rumusan atau model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi semakin jelas, sehingga mudah menganalisisnya.

Suatu graf G adalah suatu pasangan *triple* yang berurut $(V(G), E(G), \psi_G)$ yang terdiri dari himpunan tidak kosong $V(G)$ yang merupakan titik dan himpunan sisi $E(G)$, dan juga suatu fungsi insidensi ψ_G yang mempersatukan sisi dari graf G dengan titik-titik di G. Jika e adalah sisi dari graf G dan u dan v adalah titik-titik pada graf G sehingga $\psi_G(e) = u, v$, maka e dikatakan menghubungkan u dan v (Bondy dan Murty, 1976:2).

Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda. Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak-terurut (*unordered pairs*). Jadi menuliskan sisi (*u*, *v*) sama saja dengan (*v*, *u*). Graf sederhana dapat juga didefinisikan sebagai *G* = *(V*, *E)*, dimana *V* terdiri dari himpunan tidak kosong titik-titik dan *E* adalah himpunan pasangan tak-terurut dan berbeda dari suatu unsur di *V* yang disebut sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:16). Salah satu contoh dari graf sederhana adalah graf tangga dan graf kincir.

Graf tangga adalah graf yang dibentuk dari hasil kali kartesius graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik. Graf tangga dinotasikan dengan L_n, sehingga $L_n = P_2 \times P_n$ (Gallian, 2007:12). Selanjutnya, graf kincir adalah graf yang dibentuk dari hasil penjumlahan dari graf komplit K_r dan mK_s. Graf kincir dinotasikan dengan W_2^m. Dimana W adalah simbol dari graf kincir, sedangkan 2 menunjukkan graf komplit K_2 dan m adalah banyaknya K_2 (Miller, dkk, 2005:148).

Salah satu pembahasan dalam topik graf adalah mengenai kontraksi graf. Misal graf G_1 dengan himpunan titik $V(G_1)$ dan graf G_2 dengan himpunan titik

$V(G_2)$. Suatu graf G_2 didefinisikan sebagai suatu kontraksi dari graf G_1 jika terdapat pemetaan satu-satu dan *onto* antara suatu unsur dari partisi di $V(G_1)$ pada suatu unsur di $V(G_2)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:167). Suatu graf G_2 dihasilkan dari graf G_1 dengan serangkaian kontraksi dasar (kontraksi titik dan kontraksi sisi) yang dikenakan pada graf G_1 tersebut.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis bermaksud untuk membahas tentang kontraksi pada suatu graf. Oleh karena itu penulis tertarik untuk mengkajinya dengan judul "*Kontraksi pada Graf Tangga* L_n *dan Graf Kincir* $K_1 + mK_2$".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan pokok masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana kontraksi pada graf tangga $L_n, n \in \mathbb{N}$?
2. Bagaimana kontraksi pada graf kincir $K_1 + mK_2, m \in \mathbb{N}$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk menentukan kontraksi pada graf tangga $L_n, n \in \mathbb{N}$.
2. Untuk menentukan kontraksi pada graf kincir $K_1 + mK_2, m \in \mathbb{N}$.

1.4 Batasan Masalah

Pembatasan masalah diperlukan agar permasalahan yang ada tidak meluas. Graf yang digunakan dalam penelitian ini terbatas pada graf tangga L_n dengan

$1 \le n \le 5$, untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$, dimana $n \in \mathbb{N}$ dan graf kincir $K_1 + mK_2$ dengan $1 \le m \le 5$, untuk $m = 1, 2, 3, 4, 5$, dimana $m \in \mathbb{N}$. Kontraksi dasar yang dibahas sebatas kontraksi titik dan kontraksi sisi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adanya suatu penelitian diharapkan memberikan manfaat yang diperoleh terutama bagi bidang ilmu yang diteliti. Penulis mengharapkan penelitian ini dapat bermanfaat kepada:

1. Bagi Penulis

   Sebagai sarana untuk menambah wawasan pengetahuan tentang teori graf, khususnya tentang kontraksi pada graf tangga L_n dan graf kincir $K_1 + mK_2$.

2. Bagi Lembaga Pendidikan
   a) Untuk pengembangan keilmuan khususnya tentang mata kuliah teori graf.
   b) Hasil penelitian ini dapat dijadikan referensi dan bahan rujukan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah teori graf.

3. Bagi Pembaca

   Kontribusi berupa informasi hasil penelitian semoga dapat menambah wawasan mengenai graf, khususnya tentang kontraksi pada graf tangga L_n dan graf kincir $K_1 + mK_2$.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5.
2. Menentukan semua kemungkinan cara mengkontraksi setiap graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5.
3. Mencari pola yang terbentuk dari kontraksi graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5.
4. Merumuskan pola ke dalam teorema dan membuktikan teorema.
5. Menggambar graf kincir dimulai dari K_1+1K_2 sampai dengan K_1+5K_2.
6. Menentukan semua kemungkinan cara mengkontraksi setiap graf kincir dimulai dari K_1+1K_2 sampai dengan K_1+5K_2.
7. Mencari pola yang terbentuk dari kontraksi graf kincir dimulai dari K_1+1K_2 sampai dengan K_1+5K_2.
8. Merumuskan pola ke dalam teorema dan membuktikan teorema.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari laporan ini yang terbagi menjadi empat bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Teori

Bagian ini menjelaskan tentang dasar-dasar teori yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya seperti definisi graf, terhubung langsung dan terkait langsung, derajat suatu titik, operasi graf, jenis-jenis graf, fungsi, kontraksi graf, kajian Islam dalam teori graf dan kontraksi graf.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penulisan yang menjabarkan tentang gambaran objek penelitian dan hasil dari penelitian yaitu kontraksi pada graf tangga L_n dan graf kincir $K_1 + mK_2$, serta kajian agama berdasarkan hasil pembahasan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini diberikan kesimpulan hasil penelitian yang telah dibahas dengan dilengkapi saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf merupakan salah satu dari cabang ilmu matematika yang sudah banyak aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari, akan tetapi dalam teori graf masih banyak sekali kajian di dalamnya. Graf G terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (*vertices* atau *node*) yang dalam penulisan ini disimbolkan dengan V, sedangkan himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) disimbolkan dengan E, dan seterusnya menggunakan istilah titik dan sisi. Secara matematis graf didefinisikan sebagai berikut:

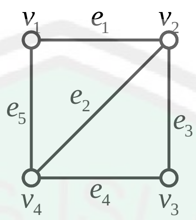
Definisi 1

Suatu graf G adalah suatu pasangan *triple* yang berurut $(V(G), E(G), \psi_G)$ yang terdiri dari himpunan tidak kosong $V(G)$ yang merupakan titik dan himpunan sisi $E(G)$, dan juga suatu fungsi insidensi ψ_G yang mempersatukan sisi dari graf G dengan titik-titik di G. Jika *e* adalah sisi dari graf G dan u dan v adalah titik-titik pada graf G sehingga $\psi_G(e) = u, v$, maka *e* dikatakan menghubungkan u dan v (Bondy dan Murty, 1976:2).

Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $v(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $e(G)$. Jika graf yang dibahas hanya graf G, maka *order* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis dengan v dan e (Bondy dan Murty, 2008:2).

Contoh 1

Perhatikan gambar graf di bawah ini.



Gambar 2.1 Graf G dengan 4 Titik dan 5 Sisi

Pada gambar 2.1 graf G memuat himpunan titik V dan sisi G yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}, E(G)=\{e_1,e,e_3,e_4,e_5\}$$

dan ψ_G didefinisikan sebagai berikut:

$\psi_G(e_1)=v_1,v_2$ $\quad$ $\psi_G(e_2)=v_2,v_4$ $\quad$ $\psi_G(e_3)=v_2,v_3$

$\psi_G(e_4)=v_3,v_4$ $\quad$ $\psi_G(e_5)=v_1,v_4$

Graf G mempunyai 4 titik sehingga $v(G)=4$, dan mempunyai 5 sisi sehingga $e(G)=5$.

2.1.2 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Suatu graf paling sedikit memiliki satu titik. Jika suatu graf memiliki titik dan sisi maka hubungan antara kedua sisi dan titik tersebut dapat dinyatakan dalam definisi berikut:

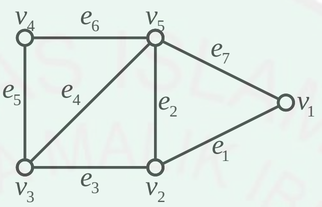
Definisi 2

Sisi e = (u,v) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika e = (u, v) adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung, u dan e serta v dan e

disebut terkait langsung. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh 2

Perhatikan gambar graf di bawah ini.



Gambar 2.2 Graf G dengan 5 Titik dan 7 Sisi

Dari gambar 2.2 titik yang terhubung langsung adalah v_1 dan v_2, v_2 dan v_5, v_2 dan v_3, v_3 dan v_4, v_3 dan v_5, v_4 dan v_5, v_5 dan v_1. Sedangkan e_1 terkait langsung dengan v_1 dan v_2, e_2 terkait langsung dengan v_2 dan v_5, e_3 terkait langsung dengan v_2 dan v_3, e_4 terkait langsung dengan v_3 dan v_5, e_5 terkait langsung dengan v_3 dan v_4, e_6 terkait langsung dengan v_4 dan v_5, e_7 terkait langsung dengan v_5 dan v_1.

2.1.3 Derajat Suatu Titik

Untuk memiliki istilah tertentu bagi banyaknya sisi yang bertemu pada suatu titik, maka digunakan definisi berikut ini:

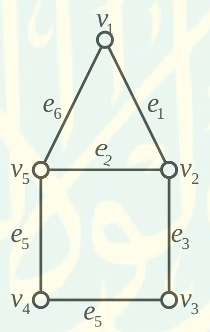
Definisi 3

Derajat suatu titik v pada graf G, ditulis dengan $\deg_G(v)$ adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Jika dalam konteks pembicaraannya hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*). Jika setiap titik dalam suatu graf mempunyai derajat yang sama maka graf tersebut disebut dengan graf beraturan (*reguler graphs*). Suatu graf G dikatakan beraturan r atau beraturan berderajat r jika setiap titik di G mempunyai derajat r (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh 3

Perhatikan gambar graf di bawah ini.



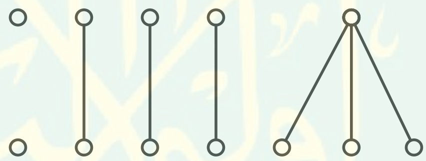
Gambar 2.3 Graf G dengan 5 Titik dan 6 Sisi

Berdasarkan gambar 2.3 di atas dapat dinyatakan sebagai berikut: $\deg(v_1)=2; \deg(v_2)=2; \deg(v_3)=2; \deg(v_4)=2; \deg(v_5)=2.$ Titik-titik v_1, v_2, v_3, dan v_4 adalah titik *titik genap*, dan titik v_5 adalah *titik ganjil*. Karena tidak ada yang berderajat 0 atau 1, maka pada graf G di atas tidak terdapat *titik terisolasi* dan *titik ujung*.

2.1.4 Operasi Graf

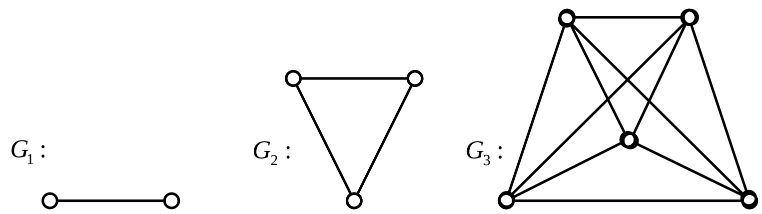
Terdapat beberapa cara untuk menghasilkan graf baru dari graf-graf lain. Pada bagian ini akan disajikan beberapa operasi biner pada graf. Pada definisi-definisi berikut, diasumsikan bahwa G_1 dan G_2 adalah graf dengan himpunan titik yang saling lepas (*disjoint*).

Gabungan (*union*) dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G terdiri dari n graf H, maka dinotasikan dengan $G = nH$, dimana $n \geq 2$. Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_{1,3}$ dapat digambarkan sebagai berikut (Abdussakir, dkk, 2009:33).



Gambar 2.4 Gabungan Graf

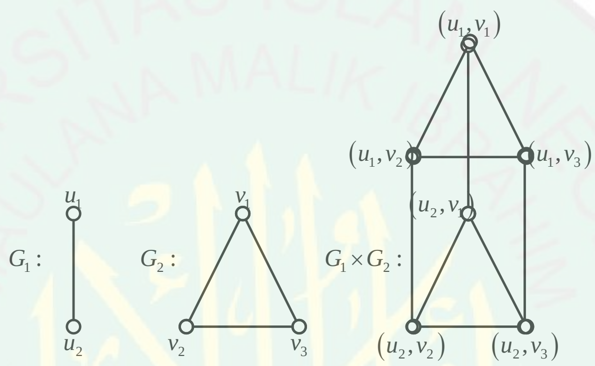
Penjumlahan (*joint*) dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ (Abdussakir, dkk, 2009:33).



Gambar 2.5 Penjumlahan Dua Graf

Menurut Abdussakir, dkk (2009:34), perkalian (*cartesius)* dua graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika

$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E(G_2) \text{ atau } u_2 = v_2 \text{ dan } u_1v_1 \in E(G_1)$$



Gambar 2.6 Perkalian Dua Graf

2.1.5 Jenis-Jenis Graf

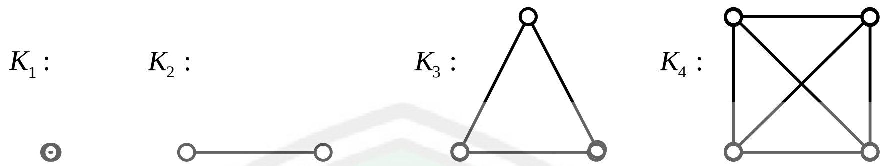
2.1.5.1 Graf Komplit

Definisi 4

Graf komplit (*complete graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Watkins dan Wilson, 1990:32).

Banyaknya sisi pada graf komplit yang terdiri dari n titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Ini berarti untuk 1 titik terdapat $(n-1)$ sisi ke $(n-1)$ titik lainnya, maka untuk n titik terdapat $n(n-1)$ sisi.

Contoh 4



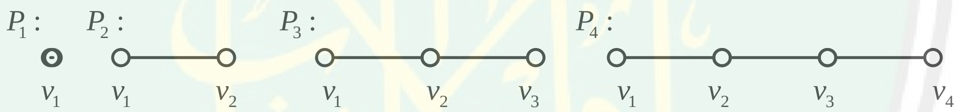
Gambar 2.7 Graf Komplit

2.1.5.2 Graf Lintasan

Definisi 5

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari suatu lintasan tunggal. Graf lintasan dengan *n* titik dilambangkan dengan P_n (Watkins dan Wilson, 1990:37).

Contoh 5



Gambar 2.8 Graf Lintasan

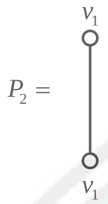
2.1.5.3 Graf Tangga

Definisi 6

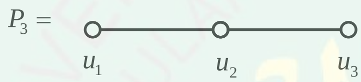
Graf tangga adalah graf yang dibentuk dari hasil kali kartesius graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik. Graf tangga dinotasikan dengan L_n , sehingga $L_n = P_2 \times P_n$ (Gallian, 2007:12).

Contoh 6

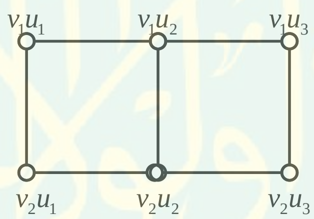
Operasi perkalian graf lintasan P_2 dengan graf lintasan P_n, secara matematis dinotasikan dengan $L_n = P_2 \times P_n$, dimana $n \geq 1$, $n \in N$. Misal untuk menggambarkan suatu graf tangga dari hasil perkalian graf lintasan P_2 dengan graf lintasan P_3, ditunjukkan seperti gambar di bawah ini:



dan



Maka graf tangga $P_2 \times P_3 = L_3$ adalah sebagaimana gambar di bawah ini,



Gambar 2.9 Graf Tangga L_3

2.1.5.4 Graf Kincir

Definisi 7

Graf kincir adalah graf yang dibentuk dari hasil penjumlahan dari graf komplit K_r dan mK_s. Graf kincir dinotasikan dengan W_2^m. Dimana W adalah simbol dari graf kincir, sedangkan 2 menunjukkan graf komplit K_2, dan m adalah banyaknya K_2 (Miller, dkk, 2005:148).

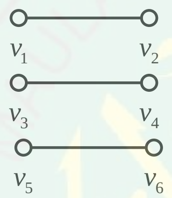
Graf kincir dibentuk dengan menghubungkan semua titik mK_2 dengan suatu titik yang disebut dengan suatu titik pusat c. Operasi penjumlahan graf komplit K_r dan mK_s , dimana $r=1, s=2, m\geq 1$, $r,s,m\in N$, secara matematis dinotasikan dengan $K_1+mK_2=W_2^m$.

Contoh 7

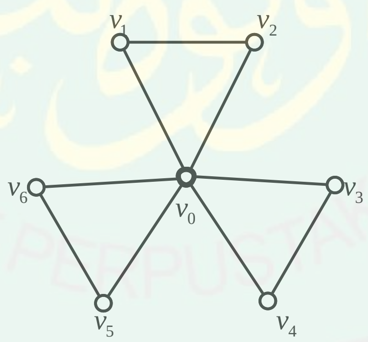
Di bawah ini operasi penjumlahan graf komplit K_1 dan $3K_2$.

$K_1 =$ 

dan

$3K_2 =$ 

Maka graf kincir $K_1+3K_2=W_2^3$ adalah sebagaimana gambar di bawah ini,

$K_1+3K_2 =$ 

Gambar 2.10 Graf Kincir K_1+3K_2

Karena operasi penjumlahan, maka semua titik di graf komplit $3K_2$ dihubungkan dengan suatu titik dari v_0. Titik v_0 untuk selanjutnya disebut dengan titik pusat c.

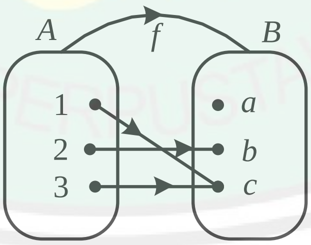
2.1.6 Fungsi

Definisi 8

Misal A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu fungsi f dari A ke B, dilambangkan $f : A \rightarrow B$, adalah aturan yang memetakan setiap elemen A tepat satu pada elemen B. Himpunan A disebut *domain* (daerah asal) dan himpunan B disebut *kodomain* (daerah kawan). Jika y adalah suatu unsur yang tepat satu di B dipetakan oleh fungsi f ke unsur x, maka y adalah peta dari x dan x adalah prapeta dari y dapat ditulis $y = f(x)$ (Bartle dan Sherbert, 2000:7).

Contoh 8

Himpunan $f = \{(1,c),(2,b),(3,c)\}$ merupakan fungsi dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{a,b,c\}$. Setiap elemen dari A dipetakan tepat satu pada B, seperti ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 2.11 Diagram Panah Fungsi

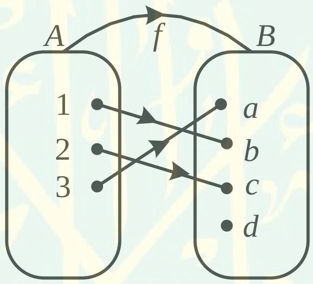
Definisi 9

Suatu fungsi f dari A ke B dikatakan fungsi satu-satu jika untuk setiap $y \in B$, terdapat paling banyak satu $x \in A$ dengan $f(x) = f(y)$. Dengan kata lain, untuk setiap $x_1, x_2 \in A$, jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$. Fungsi satu-

satu sering juga disebut fungsi injektif. Secara simbolis dapat dinyatakan sebagai $\forall x_1 \forall x_2 ((f(x_1) = f(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2))$ (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

Contoh 9

Himpunan $f = \{(1,b),(2,c),(3,a)\}$ merupakan fungsi satu-satu dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{a,b,c,d\}$. Jika fungsi dari A ke B adalah satu-satu, maka setiap unsur di A mempunyai paling banyak satu panah menunjuk ke B, seperti ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 2.12 Diagram Panah Fungsi Injektif

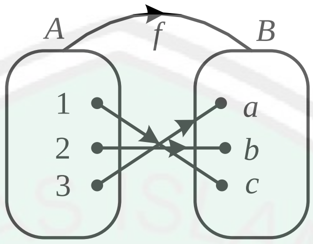
Definisi 10

Suatu fungsi f dari A ke B dikatakan fungsi *onto*, jika $R(f) = B$. Dengan kata lain, untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sedemikian hingga $f(x) = y$. Fungsi *onto* sering juga disebut fungsi surjektif. Secara simbolis dapat dinyatakan sebagai $\forall y \in B \exists x \in A (f(x) = y)$ (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

Contoh 10

Himpunan $f = \{(1,c),(2,b),(3,a)\}$ merupakan fungsi *onto* dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{a,b,c\}$. Jika fungsi dari A ke B adalah *onto*, maka setiap unsur di A

mempunyai tepat satu panah menunjuk ke B, seperti ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



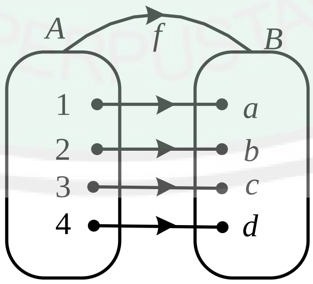
Gambar 2.13 Diagram Panah Fungsi Surjektif

Definisi 11

Suatu fungsi yang bersifat satu-satu dan *onto* disebut fungsi bijektif (Bartle dan Sherbert, 2000:9).

Contoh 11

Himpunan $f = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$ merupakan fungsi satu-satu dan *onto* dari $A = \{1,2,3,4\}$ ke $B = \{a,b,c,d\}$, sebagaimana pada gambar di bawah ini.



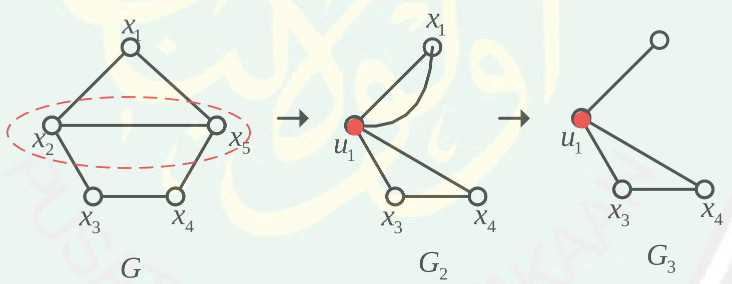
Gambar 2.14 Diagram Panah Fungsi Bijektif

2.1.7 Kontraksi Graf

Definisi 12

Misal graf G_1 dengan himpunan titik $V(G_1)$ dan graf G_2 dengan himpunan titik $V(G_2)$. Suatu graf G_2 didefinisikan sebagai suatu kontraksi dari graf G_1 jika terdapat pemetaan satu-satu dan *onto* antara suatu unsur dari partisi di $V(G_1)$ pada suatu unsur di $V(G_2)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:167).

Suatu graf G_2 dihasilkan dari graf G_1 dengan serangkaian kontraksi dasar (kontraksi titik dan kontraksi sisi) yang dikenakan pada graf G_1 tersebut. Sebagai contoh pada graf G berikut dilakukan kontraksi dasar (kontraksi titik dan kontraksi sisi) sebagai berikut.

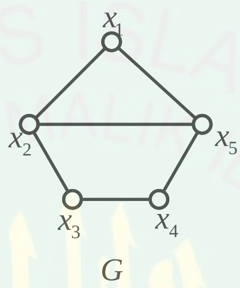


Gambar 2.15 Kontraksi Dasar dari Graf G

Kontraksi titik x_2 dan x_5 adalah penghimpitan titik x_5 ke titik x_2, sehingga membentuk satu titik (*single vertex*) dan dinotasikan dengan u_1. Kemudian hasil dari kontraksi titik x_2 dan x_5, mengakibatkan terbentuknya graf G_1. Selanjutnya kontraksi sisi adalah penghimpitan sisi ganda yang terkait dengan titik x_1 dan u_1 pada graf G_1. Sehingga terbentuklah graf G_2.

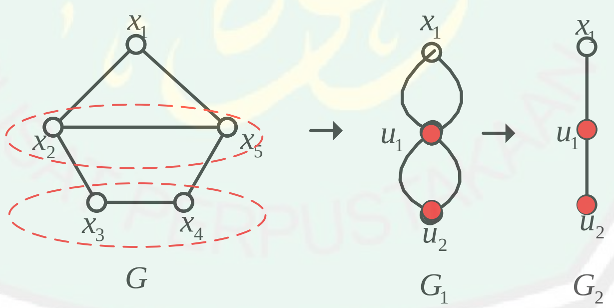
Contoh 12

Diberikan suatu graf G dengan 5 titik dan 6 sisi. Himpunan titik dari graf G adalah $V(G)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$. Gambar ditunjukkan sebagaimana di bawah ini.



Gambar 2.16 Graf G

Selanjutnya pada graf G dikenakan kontraksi titik dan kontraksi sisi. Gambar ditunjukkan sebagaimana di bawah ini.

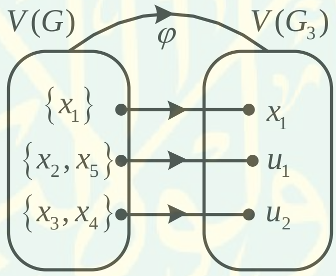


Gambar 2.17 Kontraksi Graf

Berdasarkan gambar di atas, dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf G dikenai kontraksi titik, misal titik x_2 dan x_5, x_3 dan x_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik x_2 dan x_5 dinotasikan dengan u_1 (ditandai merah), dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik x_3 dan x_4 dinotasikan dengan u_2 (ditandai merah). Maka graf yang terbentuk adalah graf G_2. Graf G_2 mempunyai 2 pasang sisi ganda yaitu sisi x_1u_1 dan u_1u_2. Jika dikenai kontraksi sisi pada 2 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik $x_1, u_1,$ dan u_2 maka graf yang terbentuk adalah graf G_3.

Berdasarkan uraian di atas, hasil kontraksi dari graf G adalah graf G_3. Sehingga jika kontraksi adalah pemetaan dengan $\varphi : V(G) \rightarrow V(G_3)$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 2.18 Pemetaan dari $V(G)$ ke $V(G_3)$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa masing-masing unsur dari $V(G_3)$ menunjukkan adanya korespondensi satu-satu dengan suatu unsur dari partisi di $V(G)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf G_3 adalah graf hasil kontraksi dari graf G.

2.2 Kajian Teori Graf dan Kontraksi Graf dalam Islam

2.2.1 Kajian Teori Graf dalam Islam

Al-Qur'an merupakan sumber segala ilmu. Tidak seorang pun dapat menyangkal bahwa di dalam Al-Qur'an tidak hanya diletakkan dasar-dasar peraturan hidup manusia dalam hubungannya dengan Tuhan Sang Pencipta, dalam interaksinya dengan sesama manusia dan dalam tindakannya terhadap alam di sekitarnya, tetapi juga dinyatakan untuk apa manusia diciptakan.

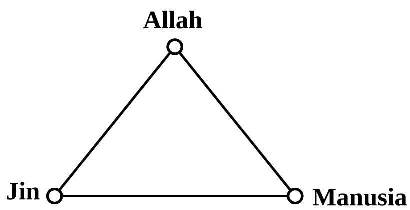
Titik dalam suatu graf dapat diasumsikan menurut keperluan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Jika dua titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan. Definisi graf dapat dipresentasikan dalam hubungan manusia dan jin dengan Sang pencipta. Di dalam ayat 56 surat Adz-Dzariyat Allah SWT berfirman:

وَمَا خَلَقۡتُ ٱلۡجِنَّ وَٱلۡإِنسَ إِلَّا لِيَعۡبُدُونِ ٥٦

Artinya: *"Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku"*(Q.S. Adz-Dzariyat:56).

Arti "menyembah" di sini adalah mengabdikan diri, bukan hanya sekedar sholat saja, tetapi melakukan semua yang diperintahkan-Nya dan disukai-Nya, termasuk pantang segala sesuatu yang dilarang-Nya dan tidak diskuai-Nya, paling tidak sebagai layaknya seorang 'abdi' atau hamba bertingkah laku terhadap pemilik-Nya (Baiquni, 1995:66).

Ayat di atas dapat dipresentasikan dalam graf, dengan ilustrasinya sebagai berikut:



Gambar 2.19 Graf yang Menggambarkan Hubungan antara Allah, Manusia, dan Jin

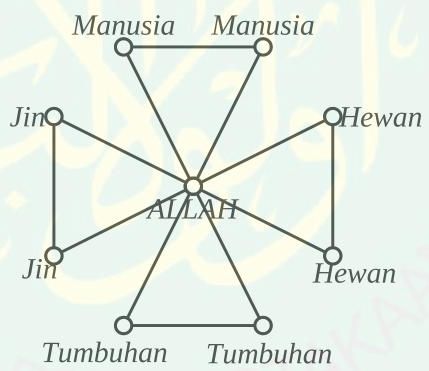
2.2.2 Kajian Kontraksi Graf dalam Islam

Dalam skripsi ini kajian tentang kontraksi graf diilhami oleh salah satu ayat dalam Al-Qur'an yaitu surat Yaasiin ayat 36 sebagai berikut:

سُبۡحَٰنَ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلۡأَزۡوَٰجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنۢبِتُ ٱلۡأَرۡضُ وَمِنۡ أَنفُسِهِمۡ وَمِمَّا لَا يَعۡلَمُونَ ﴿٣٦﴾

Artinya: *"Maha Suci Tuhan yang Telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui"* (Q.S. Yaasiin:36).

Ayat di atas dapat diambil contoh pada graf dalam konsep berpasang-pasangan. Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 2.20 Graf yang Menggambarkan Konsep Berpasang-pasangan

Titik-titik dalam suatu graf, dapat diasumsikan sesuai keperluan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Jika dikaitkan dengan dengan kehidupan sehari-hari titik pusat pada gambar graf kincir di atas diasumsikan sebagai Sang Pencipta (Allah), sedangkan titik-titik yang terletak pada daun kincirnya adalah makhluk-makhluk ciptaan-Nya. Allah SWT menciptakan semuanya itu secara berpasang-pasangan, yakni manusia berpasangan dengan manusia, hewan dengan hewan, dan makhluk-makhluk yang lain berpasangan-pasangan sesuai dengan kehendak Allah SWT.

Berikut beberapa makna ayat pada surat Yaasiin yang tertera di atas menurut beberapa *muffasir*:

1. Ibnu Katsir

Menurut Ibnu Katsir (2007:645) *"Maha Suci Rabb yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi,"* yaitu berupa tumbuh-tumbuhan, buah-buahan dan tanam-tanaman. *"Dan dari diri mereka,"* dimana Dia menjadikan laki-laki dan perempuan. *"Maupun dari apa yang tidak mereka ketahui,"* yaitu berupa makhluk-makhluk lain yang tidak mereka ketahui. Sebagaimana Allah SWT berfirman dalam surat Adz-dzariyat ayat 49, sebagai berikut ini:

وَمِن كُلِّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَا زَوۡجَيۡنِ لَعَلَّكُمۡ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Dan segala sesuatu kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah"* (Q.S. Adz-Dzariyat:49).

2. Al Maraghiy

Maha suci Allah yang telah menciptakan segala macam tumbuhan, buah-buahan, dan berbagai macam tanaman ini seluruhnya, dan telah menciptakan anak-anak mereka, ada yang laki-laki dan ada pula yang perempuan, dan yang telah menciptakan pula barang-barang yang tidak mereka ketahui, yaitu Allah belum memberitahukan barang-barang tersebut kepada mereka dan tidak memberi jalan kepada mereka untuk mengetahuinya secara rinci, tetapi memberitahukan kepada mereka hal itu secara *ijmal*, seperti firman-Nya: *"Dan Allah menciptakan* *apa yang kamu tidak mengetahuinya"* (Q.S. An-Nahl:8). Agar semua itu mereka jadikan sebagai dalil atas kebesaran Yang Maha Pencipta, dan atas betapa luas kerajaan dan betapa besar kekuasan-Nya. Jadi, Maha Suci Allah pencipta segala makhluk yang luas ini, yang terdiri dari tumbuh-tumbuhan, binatang, manusia, dan pencipta dari apa yang tidakkita ketahui hakikatnya. Halini merupakan dalil atas betapa besarkekuasaan Allah SWT dan betapa luas kerajaan-Nya. Maha Suci Allah dari segalakekurangan yang tidak sesuai dengan keagungan dan kebesaran-Nya (Al-Maraghiy, 1989:7-8).

3. Al Qurthubi

"Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya". Allah menyucikan diri-Nya dari perkataan orang-orang kafir, yang mana mereka mnyembah selain-Nya, sekalipun mereka mengetahui nikmat dan bekas-bekas dari kekuasan-Nya. Dalam hal itu, terdapat makna perintah atau sucikanlah Dia dari apa yang tidak sesuai dengan-Nya.

Ada yang mengatakan, "Dalam hal itu terdapat makna *Ta'ajjub* (keheranan), atau sungguh mengherankan mereka itu dalam kekuurannya padahal mereka menyaksikan tanda-tanda itu. Orang yang kaget akan sesuatu akan mengatakan, *Subhanallah! Al Azwaaj* artinya *Al Anwaa'* (bermacam-macam), dan *Al-Anshaaf* (berjenis-jenis). Setiap pasangan adalah berjenis-jenis karena ia berbeda-beda dalam warna, rasa bentuk, kecil, dan besarnya. Perbedaan itulah yang menunjukkan macam-macamnya". Qatadah berkata," Yakni jantan dan betina".

“Baik dari apa yang telah ditumbuhkan oleh bumi,” yakni tumbuh-tumbuhan, karena ia bermacam-macam. *“Dan dari diri mereka,”* yakni Dia menciptakan dari mereka anak-anak yang berpasang-pasang (jantan dan bertina). *“Maupun dari apa yang tidak mereka ketahui,”* maksudnya, dari jenis makhluknya di darat, laut, langit, dan bumi. Kemudian apa yang diciptakan oleh Allah, bisa jadi tidak diketahui oleh manusia dan diketahui malaikat (Al Qurthubi, 2009:65).

4. Al Jazairi

“Maha Suci Allah yang telah menciptakan semuanya berpasang-pasangan,” maksudnya yang berpasangan adalah laki-laki dan perempuan, karena memakai Al Azwaaj, hal ini sebagai bentuk pebgagungan terhadap Allah yang telah menciptakan semuanya berpasang-pasangan, *“Baik dari apa yang telah ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang mereka tidak ketahui,”* Allah mensucikan diri-Nya dari sifat lemah dalam mengembalikan makhluk menjadi hidup setelah kematian mereka. Pada konteks ini disebutkan tanda-tanda kekuasaan dan ilmu Allah. Hal ini terlihat pada penciptaan makhluk yang berapsang-pasangan, baik tumbuh-tumbuhan, binatang, manusia, serta apa-apa yang tidak diketahui mereka.tidak ada yang tunggal kecuali Allah Ta’ala. Allah juga mensucikan diri-Nya dari sifat-sifat makhluk-Nya, seperti memiliki pasangan atau istri. Ini semua merupakan dalil akal yang menunjukkan tentang adanya kehidupan kedua (akhirat) setelah kehidupan pertama yakni di dunia (Al Jazairi, 2009:168).

5. Sayyid Quthb

Ini adalah *tasbih* yang bergerak pada waktunya dan tempatnya yang tepat. Bersamanya tertuliskan hakikat yang besar dari hakikat-hakikat wujud ini. Hakikat kesatuan makhluk, kesatuan kaidah dan pembentukan. Yakni, bahwa Allah menciptakan makluk-makhluk hidup secara berpasang-pasangan. Tetumbuhan berpasangan seperti manusia juga. Demikian juga yang lainya, *"Dari apa yang tidak merekaketahui"*.

Kesatuan ini menunjukkan kesatuan tangan yang menciptakan. Yang mengadakan kaidah pencipta (bersama perbedaan bentuk, bobot, macam, jenis, karakter, dan ciri) pada makhluk-makhluk hidup ini yang hanya diketahui secara detail oleh Allah. Siapa tahu barangkali ini adalah kaidah alam semesta seluruhnya hingga benda mati juga. Sebagaimana diketahui bahwa atom (partikel materi terkecil yang diketahui manusia) terdiri dari dua pasang yang berebada dari radiasi listrik negatif dan positif yang saling bersisian dan bersatu. Demikian juga kita dapati ribuan pasang bintang, terbentuk dari dua bintang yang saling berkaitan yang saling menarik pasangannya. Selanjutnya berputar pada orbit yang sama, seakan-akan keduanya mengikuti irama musik yang teratur (Sayyid Quthb, 2004:393).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang kontraksi pada graf tangga L_n dengan $n \in \mathbb{N}$ dan graf kincir $K_1 + mK_2$ dengan $m \in \mathbb{N}$.

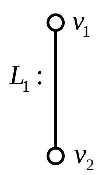
3.1 Kontraksi Graf pada Graf Tangga L_n

Pembahasan pada bab ini dimulai dari (1) menggambar graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5; (2) menentukan semua kemungkinan kontraksi titik dan kontraksi yang dapat dikenakan pada graf tangga; (3) mencari pola dari hasil kontraksi graf tangga; dan (4) membuat suatu teorema dan membuktikan teorema benar secara umum.

Pada pembahasan ini, penulis menjabarkan kontraksi dasar yang dikenakan pada graf tangga (L_1 sampai dengan L_5) yaitu dengan arah sisi yang tegak lurus (*vertical*). Hal ini dilakukan untuk lebih mudah mendapatkan pola. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi setiap graf tangga L_1 sampai dengan L_5 dilampirkan).

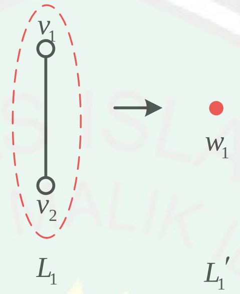
3.1.1 Graf Tangga L_n, dimana $n = 1$

Graf tangga L_1 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Tangga L_1

Graf tangga L_1 mempunyai 2 titik yaitu titik v_1 dan v_2 dan juga mempunyai 1 sisi. Jika graf L_1 dikenai kontraksi titik pada titik v_1 dan v_2, maka diperoleh graf sebagai berikut:

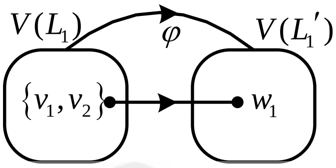


Gambar 3.2 Kontraksi 1 Pasang Titik pada Graf L_1

Graf L_1' adalah graf yang terbentuk dari kontraksi 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf L_1, yaitu titik v_1 dan v_2. Titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1. Karena graf tangga L_1 hanya mempunyai 2 titik dan 1 sisi maka cukup dikenakan satu kali kontraksi pada 1 pasang titik saja, sehingga diperoleh hasil kontraksinya yaitu graf L_1'.

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh hasil kontraksi dari graf L_1 yaitu graf L_1'. Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf L_1' adalah hasil kontraksi dari graf L_1, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(L_1) \to V(L_1')$ sebagai berikut:

$V(L_1) = \{v_1, v_2\}$ dan $V(L_1') = \{w_1\}$, dimana $\{v_1, v_2\}$ adalah partisi dari $V(L_1)$.

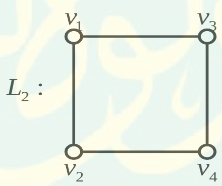


Gambar 3.3 Pemetaan dari $V(L_1)$ ke $V(L_1')$

Dari pemetaan di atas, dapat menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(L_1')$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(L_1)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf L_1' adalah graf hasil kontraksi dari graf tangga L_1. Graf L_1' yang terbentuk disebut graf lintasan P_1.

3.1.2 Graf Tangga L_n, dimana $n = 2$

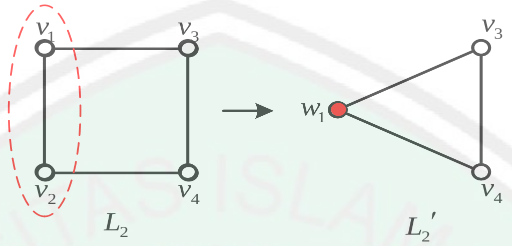
Graf tangga L_2 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Tangga L_2

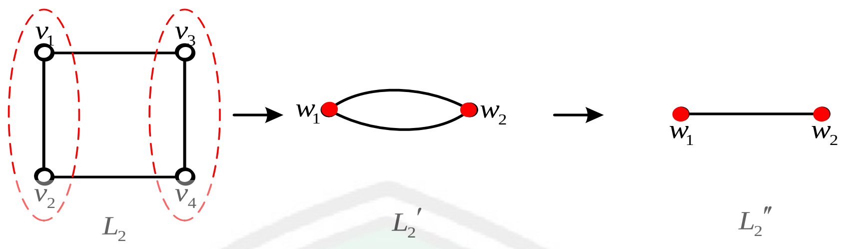
Graf tangga L_2 mempunyai 4 titik yaitu titik $v_1, v_2, v_3,$ dan v_4 dan juga mempunyai 4 sisi. Selanjutnya dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf tangga L_2. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

a) Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf tangga L_2 untuk dikenakan kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1. Maka graf yang terbentuk dinotasikan dengan L_2'. Pada graf L_2' titik w_1 terhubung langsung dengan titik v_3 dan v_4.



Gambar 3.5 Kontraksi 1 Pasang Titik pada Graf L_2

b) Misalkan dipilih 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf tangga L_2 untuk dikenakan kontraksi titik, yaitu titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2. Sehingga, graf yang terbentuk adalah graf L_2'. Graf L_2' mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu sisi w_1w_2 dan w_1w_2 yang terkait langsung pada titik w_1 dan w_2. Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf L_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1 dan w_2 maka graf yang terbentuk adalah graf L_2''. Pada graf L_2'' titik w_1 dan w_2 saling terhubung langsung. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf tangga L_2 berikutnya dilampirkan).

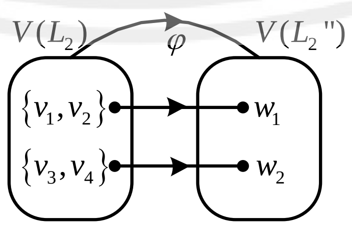


Gambar 3.6 Kontraksi 2 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf L_2

Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf tangga L_2 adalah graf L_2'' yang terbentuk dari kontraksi 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf tangga L_2, dan kontraksi 1 pasang sisi ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik yang terbentuk akibat kontraksi 2 pasang titik pada graf tangga L_2.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf L_2'' adalah hasil kontraksi dari graf L_2, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(L_2) \to V(L_2'')$ sebagai berikut:

$V(L_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $V(L_2'') = \{w_1, w_2\}$, dimana $\{v_1, v_2\}$ dan $\{v_3, v_4\}$ adalah partisi dari $V(L_2)$.

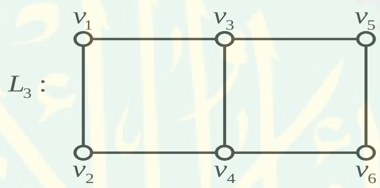


Gambar 3.7 Pemetaan dari $V(L_2)$ ke $V(L_2'')$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(L_2'')$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(L_2)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf L_2'' adalah graf hasil kontraksi dari graf tangga L_2. Graf L_2'' yang terbentuk disebut graf lintasan P_2.

3.1.3 Graf Tangga L_n, dimana $n = 3$

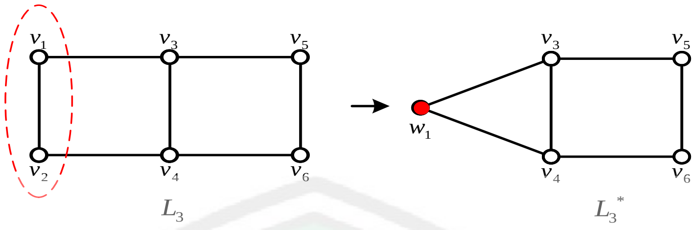
Graf tangga L_3 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf Tangga L_3

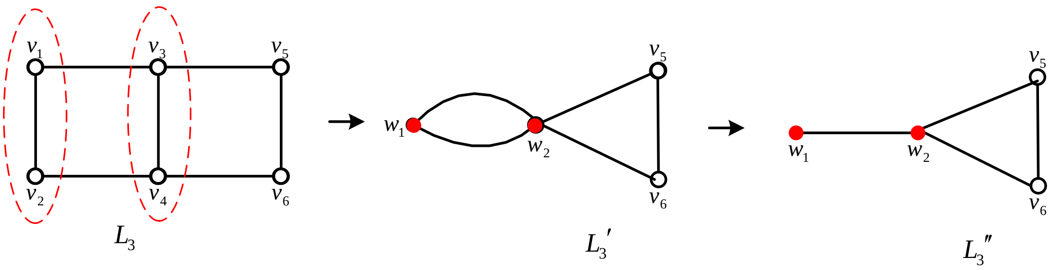
Graf tangga L_3 mempunyai 6 titik yaitu titik $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5,$ dan v_6 dan juga mempunyai 7 sisi. Selanjutnya dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf tangga L_3. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

a) Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf tangga L_3 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_3'. Pada graf L_3' titik w_1 terhubung langsung dengan titik v_3 dan v_4.



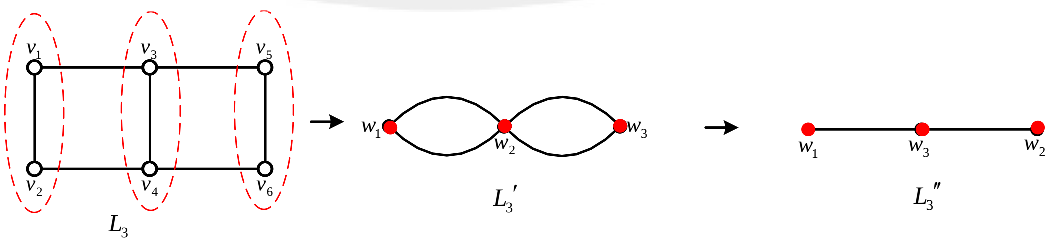
Gambar 3.9 Kontraksi 1 Pasang Titik pada Garaf Tangga L_3

b) Misalkan dipilih 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf tangga L_3 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_3'. Graf L_3' yang terbentuk mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu, sisi w_1w_2 dan w_1w_2 yang terkait langsung dengan titik w_1 dan w_2. Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf L_3 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1 dan w_2 maka graf yang terbentuk adalah graf L_3''. Pada graf L_3'' titik w_1 dan w_2 saling terhubung langsung, dan titik w_2 terhubung langsung dengan titik v_5 dan v_6.



Gambar 3.10 Kontraksi 2 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_3

c) Misalkan dipilih 3 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf L_3 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4, v_5 dan v_6. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_5 dan v_6 dinotasikan dengan w_3. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_3'. Graf L_3' yang terbentuk mempunyai 2 pasang sisi ganda yaitu, sisi w_1w_2 dan w_1w_2 yang terkait langsung dengan titik w_1 dan w_2, sisi w_2w_3 dan w_2w_3 yang terkait langsung dengan titik w_2 dan w_3. Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf L_3 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 2 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1, w_2, dan w_3 maka graf yang terbentuk adalah graf L_3''. Pada graf L_3'' titik w_1 terhubung langsung dengan titik w_2, dan titik w_2 terhubung langsung dengan titik w_3. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf tangga L_3 berikutnya dilampirkan).

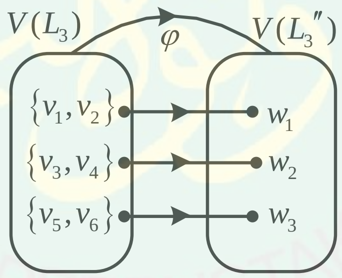


Gambar 3.11 Kontraksi 3 Pasang Titik dan 2 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_3

Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf tangga L_3 adalah graf L_3'' yang terbentuk dari kontraksi 3 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf tangga L_3, dan kontraksi 2 pasang sisi ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik yang terbentuk akibat kontraksi 3 pasang titik pada graf tangga L_3.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf L_3'' adalah hasil kontraksi dari graf L_3, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(L_3) \rightarrow V(L_3'')$ sebagai berikut:

$V(L_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $V(L_3'') = \{w_1, w_2, w_3\}$, dimana $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}$, dan $\{v_5, v_6\}$ adalah partisi dari $V(L_3)$.

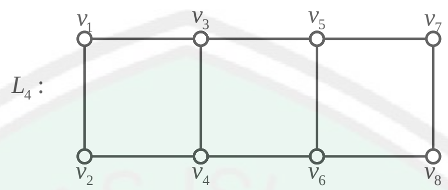


Gambar 3.12 Pemetaan dari $V(L_3)$ ke $V(L_3'')$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa masing-masing unsur pada $V(L_3'')$ menunjukkan adanya korespondensi satu-satu dengan masing-masing unsur dari partisi pada $V(L_3)$. Hal ini menujukkan bahwa graf L_3'' adalah graf hasil kontraksi dari graf tangga L_3. Graf L_3'' yang terbentuk disebut graf lintasan P_3.

3.1.4 Graf Tangga L_n, dimana $n = 4$

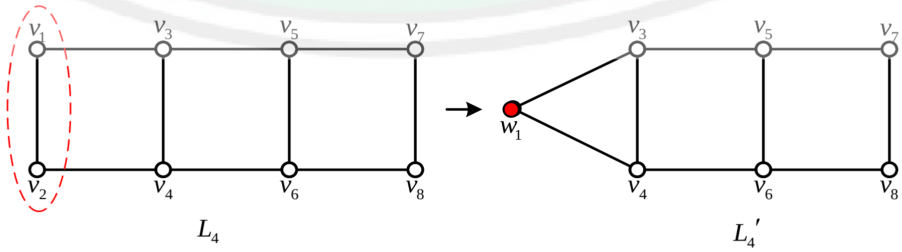
Graf tangga L_4 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.13 Graf Tangga L_3

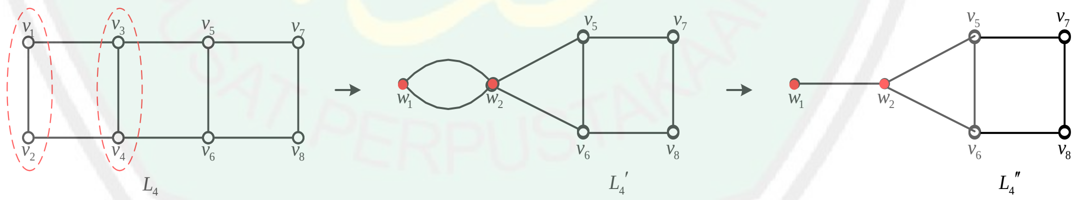
Graf tangga L_4 mempunyai 8 titik yaitu titik $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7,$ dan v_8 dan juga mempunyai 10 sisi. Selanjutnya dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf tangga L_4. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

a) Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf tangga L_4 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_4'. Pada graf L_4' titik w_1 terhubung langsung dengan titik v_3 dan v_4.



Gambar 3.14 Kontraksi 1 Pasang Titik pada Graf Tangga L_4

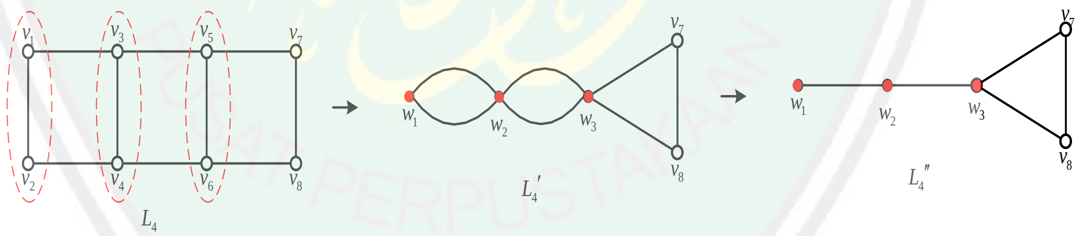
b) Misalkan dipilih 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf tangga L_4 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2. Maka graf yang terbentuk adalah graf L_4'. Graf L_4' mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu sisi w_1w_2 dan w_1w_2 yang langsung dengan titik w_1 dan w_2. Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf L_4 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1 dan w_2, maka graf yang terbentuk adalah graf L_4''. Pada graf L_4'' titik w_1 terhubung langsung dengan titik w_2, dan titik w_2 terhubung langsung dengan titik v_5 dan v_6.



Gambar 3.15 Kontraksi 2 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_4

c) Misalkan dipilih 3 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf L_4 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4, v_5 dan v_6. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4

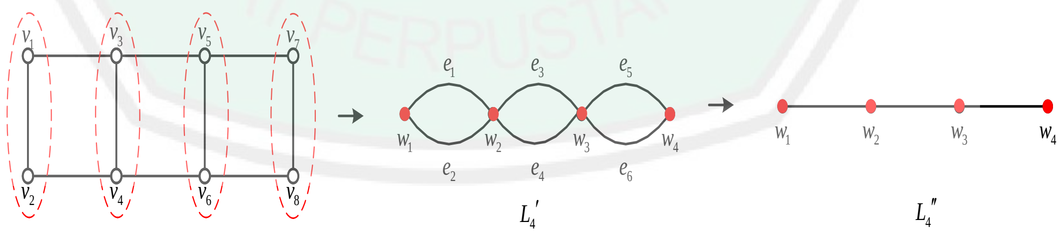
dinotasikan dengan w_2, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_5 dan v_6 dinotasikan dengan w_3 . Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_4'. Graf L_4' mempunyai 2 pasang sisi ganda yaitu sisi w_1w_2 dan w_1w_2 yang terkait langsung dengan titik w_1 dan w_2, sisi w_2w_3 dan w_2w_3 yang terkait langsung dengan titik w_2 dan w_3. Karena kontraksi 3 pasang titik pada graf L_4 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 2 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik $w_1, w_2,$ dan w_3. Maka graf yang terbentuk adalah graf L_4''. Pada graf L_4'' titik w_1 terhubung langsung dengan titik w_2, titik w_2 terhubung langsung dengan titik w_3, dan titik w_3 terhubung langsung dengan titik v_7 dan v_8.



Gambar 3.16 Kontraksi 3 Pasang Titik dan 2 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_4

d) Misalkan dipilih 4 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf L_4 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4, v_5 dan v_6, v_7 dan v_8. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2, titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_5 dan v_6

dinotasikan dengan w_3 , dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_7 dan v_8 dinotasikan dengan w_4. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_4'. Graf L_4' mempunyai 3 pasang sisi ganda yaitu sisi w_1w_2 dan w_1w_2 yang terkait langsung dengan titik w_1 dan w_2, sisi w_2w_3 dan w_2w_3 yang terkait langsung dengan titik w_2 dan w_3, sisi w_3w_4 dan w_3w_4 yang terkait langsung dengan titik w_3 dan w_4. Karena kontraksi 3 pasang titik pada graf L_4 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 3 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1, w_2, w_3 dan w_4. Maka graf yang terbentuk adalah graf L_4''. Pada graf L_4'' titik w_1 terhubung langsung dengan titik w_2, dan titik w_2 terhubung langsung dengan titik w_3, dan titik w_3 terhubung langsung dengan titik w_4. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi L_4 graf tangga berikutnya dilampirkan).



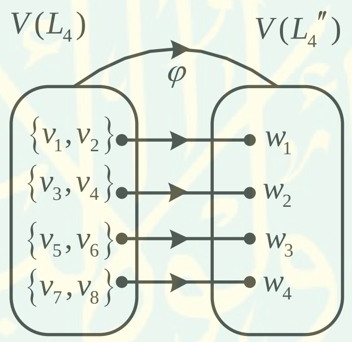
Gambar 3.17 Kontraksi 4 Pasang Titik dan 3 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_4

Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf tangga L_4 adalah graf L_4'' yang terbentuk dari kontraksi 4 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf tangga L_4, dan kontraksi 3 pasang sisi ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik yang terbentuk akibat kontraksi 4 pasang titik pada graf tangga L_4.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf L_4'' adalah hasil kontraksi dari graf L_4, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(L_4) \rightarrow V(L_4'')$ sebagai berikut:

$V(L_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan $V(L_4'') = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$,

dimana $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}$, dan $\{v_7, v_8\}$ adalah partisi dari $V(L_4)$.

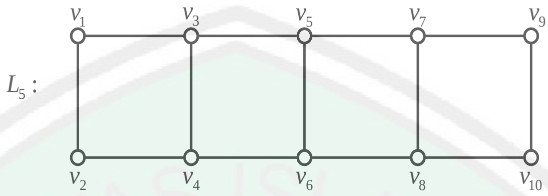


Gambar 3.18 Pemetaan dari $V(L_4)$ ke $V(L_4")$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(L_4'')$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(L_4)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf L_4'' adalah graf hasil kontraksi dari graf tangga L_4. Graf L_4'' yang terbentuk disebut graf lintasan P_4.

3.1.5 Graf Tangga L_n, dimana $n = 5$

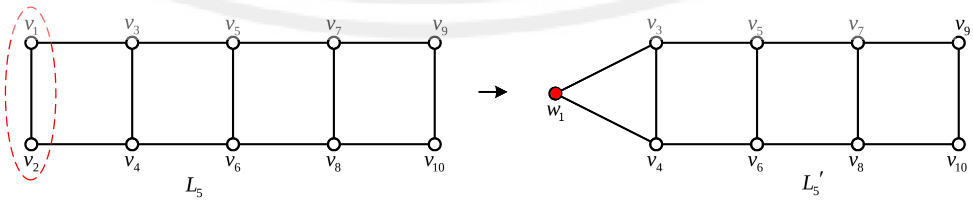
Gambar graf tangga L_5 sebagai berikut:



Gambar 3.19 Graf Tangga L_5

Graf tangga L_5 mempunyai 10 titik yaitu titik $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$, dan v_{10} dan juga mempunyai 13 sisi. Selanjutnya dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf tangga L_5. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

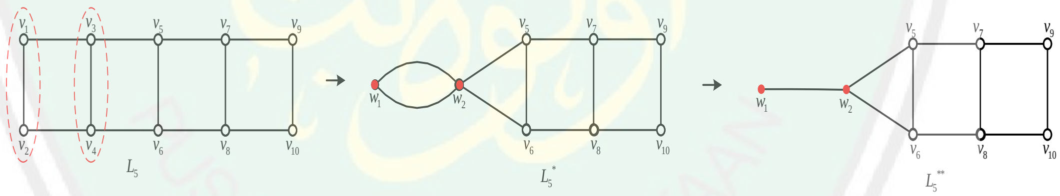
a) Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf tangga L_5 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_5'. Pada graf L_5' titik w_1 terhubung langsung dengan titik v_1 dan v_2.



Gambar 3.20 Kontraksi 1 Pasang Titik pada Graf Tangga L_5

b) Misalkan dipilih 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf tangga L_5 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3

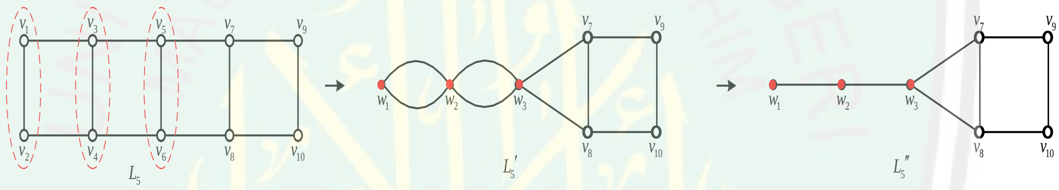
dan v_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_5'. Graf L_5' mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu sisi w_1w_2 dan w_1w_2 yang terkait langsung dengan titik w_1 dan w_2 . Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf L_5 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1 dan w_2. Maka graf yang terbentuk adalah graf L_5''. Pada graf L_5'' titik w_1 terhubung langsung dengan titik w_2, dan titik w_2 terhubung langsung dengan titik v_5 dan v_6.



Gambar 3.21 Kontraksi 2 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_5

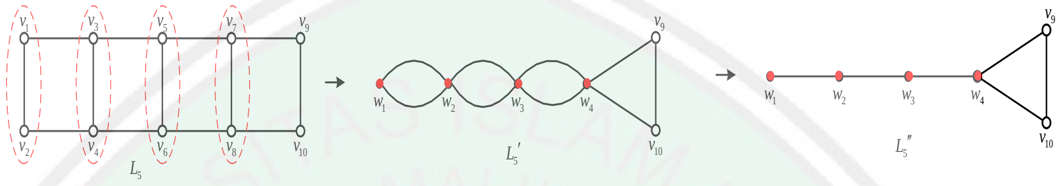
c) Misalkan dipilih 3 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf L_5 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4, v_5 dan v_6. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_5 dan v_6 dinotasikan dengan w_3. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_5'. Graf

L_5' mempunyai 2 pasang sisi ganda yaitu sisi w_1w_2 dan w_1w_2 yang terkait langsung dengan titik w_1 dan w_2, sisi w_2w_3 dan w_2w_3 yang terkait langsung dengan titik w_2 dan w_3. Karena kontraksi 3 pasang titik pada graf L_5 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 2 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1, w_2 dan w_3. Maka graf yang terbentuk adalah graf L_5''.



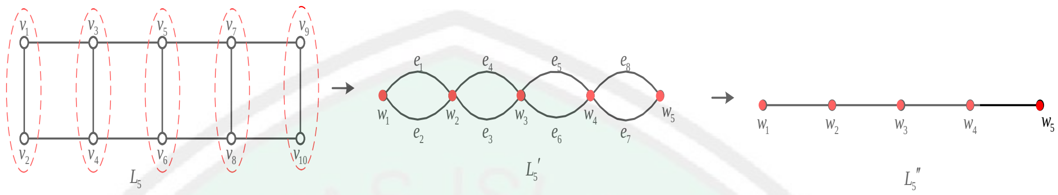
Gambar 3.22 Kontraksi 3 Pasang Titik dan 2 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_5

d) Misalkan dipilih 4 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf L_5 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4, v_5 dan v_6, v_7 dan v_8. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, titik baru kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2, titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_5 dan v_6 dinotasikan dengan w_3 , dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_7 dan v_8 dinotasikan dengan w_4. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_5'. Graf L_5' mempunyai 3 pasang sisi ganda yaitu sisi w_1w_2 dan w_1w_2, w_2w_3 dan w_2w_3, w_3w_4 dan w_3w_4. Karena kontraksi 3 pasang titik pada graf L_5 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 3 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1, w_2, w_3 dan w_4. Maka graf yang terbentuk adalah graf L_5''.



Gambar 3.23 Kontraksi 4 Pasang Titik dan 3 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_5

e) Misalkan dipilih 5 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf L_5 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik v_1 dan v_2, v_3 dan v_4, v_5 dan v_6, v_7 dan v_8, v_9 dan v_{10} . Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_1 dan v_2 dinotasikan dengan w_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_3 dan v_4 dinotasikan dengan w_2, titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_5 dan v_6 dinotasikan dengan w_3 , titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_7 dan v_8 dinotasikan dengan w_4, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik v_9 dan v_{10} dinotasikan dengan w_5. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf L_5' . Graf L_5' mempunyai 4 pasang sisi ganda yaitu sisi w_1w_2 dan w_1w_2, w_2w_3 dan w_2w_3, w_3w_4 dan w_3w_4, w_4w_5 dan w_4w_5. Karena kontraksi 5 pasang titik pada graf L_5 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 4 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik w_1, w_2, w_3, w_4, dan w_5. Maka graf yang terbentuk adalah graf L_5''. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf tangga berikutnya dilampirkan).



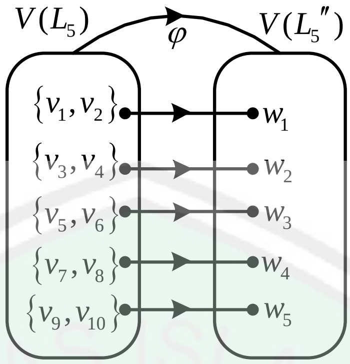
Gambar 3.24 Kontraksi 5 Pasang Titik dan 4 Pasang Sisi Ganda pada Graf Tangga L_5

Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf tangga L_5 adalah graf L_5'' yang terbentuk dari kontraksi 5 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf tangga L_5, dan kontraksi 4 pasang sisi ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik yang terbentuk akibat kontraksi 4 pasang titik pada graf tangga L_5.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf L_5'' adalah hasil kontraksi dari graf L_5, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi: V(L_5) \to V(L_5'')$ sebagai berikut:

$V(L_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ dan $V(L_5'') = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$,

dimana $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8\}$, dan $\{v_9, v_{10}\}$ adalah partisi dari $V(L_5)$.



Gambar 3.25 Pemetaan dari $V(L_5)$ ke $V(L_5'')$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(L_5'')$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(L_5)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf L_5'' adalah graf hasil kontraksi dari graf tangga L_5. Graf L_5'' yang terbentuk disebut graf lintasan P_5.

Berdasarkan beberapa pembahasan di atas maka dapat dituliskan kembali dalam tabel 3.1 berikut ini:

Tabel 3.1 Kontraksi Titik dan Sisi pada Graf Tangga L_n

Graf Awal		Kontraksi Graf		Graf Hasil Kontraksi	
Graf	(p,q)	Banyaknya Titik yang Dikontraksi	Banyaknya Sisi yang Dikontraksi	(p,q)	Graf
L_1	$(2,1)$	2	-	$(1,0)$	P_1
L_2	$(4,4)$	4	2	$(2,1)$	P_2
L_3	$(6,7)$	6	4	$(3,2)$	P_3
L_4	$(8,10)$	8	6	$(4,3)$	P_4
L_5	$(10,13)$	10	8	$(5,4)$	P_5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L_n	$(2n,3n-2)$	$2n$	$2(n-1)$	$(n,n-1)$	P_n

Berdasarkan tabel di atas, maka dapat diambil kesimpulan sementara bahwa hasil kontraksi dari graf tangga L_n (dengan $n \in N$) adalah graf lintasan P_n, dengan banyaknya kontraksi titik adalah $2n$ dan banyaknya kontraksi sisi adalah $2(n-1)$.

Teorema 1

Suatu graf tangga L_n (dengan $n \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2n$ dan kontraksi sisi sebanyak $2(n-1)$, maka hasil kontraksinya adalah graf lintasan P_n.

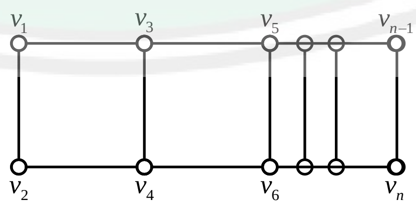
Bukti Teorema 1

Akan dibuktikan bahwa graf tangga L_n (dengan $n \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2n$ dan kontraksi sisi $2(n-1)$, maka hasil kontraksinya adalah graf lintasan P_n (dengan $n \in N$).

Misal:

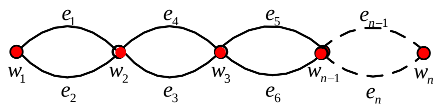
graf tangga L_n mempunyai titik $p(L_n) = 2n$ dan $q(L_n) = 3n-2$ maka, graf tangga L_n dapat digambarkan seperti di bawah ini:

L_n :



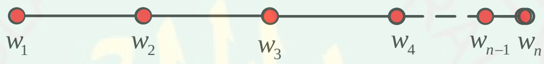
Gambar 3.26 Graf Tangga L_n

Jika dikenai kontraksi titik pada $2n$ titiknya dengan arah sisi tegak lurus, maka dapat ditunjukkan seperti gambar di bawah ini:



Gambar 3.27 Kontraksi titik

Graf yang terbentuk mempunyai titik $p(L_n) = n$ dan $q(L_n) = 2(n-1)$. Selanjutnya dilakukan kontraksi sisi pada $2(n-1)$ sisinya. Maka graf yang terbentuk adalah graf lintasan P_n seperti dibawah ini:

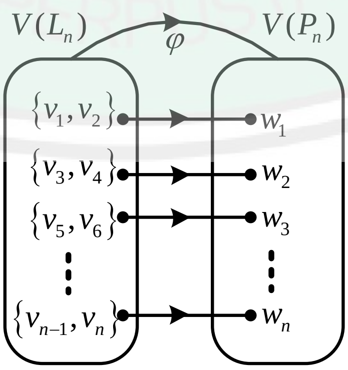


Gambar 3.28 Graf Hasil Kontraksi Titik dan Sisi pada Graf L_n

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf lintasan P_n adalah hasil dari kontraksi graf tangga L_n, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(L_n) \to V(P_n)$ sebagai berikut:

$V(L_n) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, ..., v_{n-1}, v_n\}$ dan $V(P_n) = \{w_1, w_2, w_3, .., w_n\}$,

dimana $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, ...,$ dan $\{v_{n-1}, v_n\}$ adalah partisi dari $V(L_n)$.



Gambar 3.29 Pemetaan dari $V(L_n)$ ke $V(P_n)$

Dari pemetaan di atas menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(P_n)$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(L_n)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf lintasan P_n adalah graf hasil kontraksi dari graf tangga L_n.

3.2 Kontraksi Pada Graf Kincir $K_1 + mK_2$

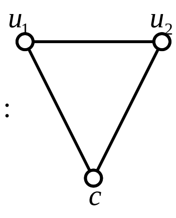
Pembahasan pada bab ini akan dimulai dari (1) menggambar graf kincir dimulai dari $K_1 + 1K_2$ sampai dengan $K_1 + 5K_2$; (2) menentukan semua kemungkinan kontraksi titik dan kontraksi yang dapat dikenakan pada graf kincir; (3) mencari pola dari hasil kontraksi graf kincir; dan (4) membuat suatu teorema dan membuktikan teorema benar secara umum.

pada pembahasan kedua ini, penulis menjabarkan kontraksi dasar yang dikenakan pada graf kincir ($K_1 + 1K_2$ sampai dengan $K_1 + 5K_2$) adalah kontraksi dikenakan pada daun kincirnya. Hal ini dilakukan untuk lebih mudah mendapatkan pola. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi setiap graf kincir $K_1 + 1K_2$ sampai dengan $K_1 + 5K_2$ dilampirkan).

3.2.1 Graf Kincir $K_1 + mK_2$, dimana $m = 1$

Graf kincir $K_1 + 1K_2$ digambarkan sebagai berikut:

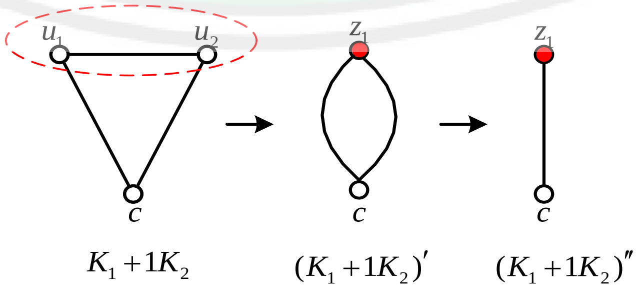
$K_1 + 1K_2$:



Gambar 3.30 Graf Kincir $K_1 + 1K_2$

Graf kincir $K_1 + 1K_2$ mempunyai 3 titik yaitu titik c, u_1, u_2 dan juga mempunyai 3 sisi. Selanjutnya dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf kincir $K_1 + 1K_2$. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 1K_2$ untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $K_1 + 1K_2'$. Graf $K_1 + 1K_2'$ mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1 yang terkait langsung dengan titik pusat c dan titik z_1. Karena kontraksi 1 pasang titik pada graf $K_1 + 1K_2$ mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik pusat c dan z_1. Maka graf yang terbentuk adalah graf $K_1 + 1K_2''$. Pada graf $K_1 + 1K_2''$ pada titik pusat c terhubung langsung dengan titik z_1. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir $K_1 + 1K_2$ berikutnya dilampirkan).

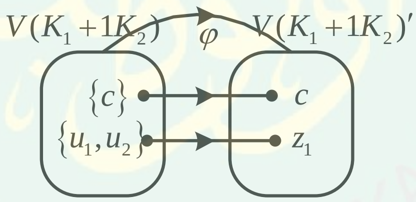


Gambar 3.31 Kontraksi 1 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 1K_2$

Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf kincir $K_1 + 1K_2$ adalah graf $(K_1 + 1K_2)''$ yang terbentuk dari kontraksi 1 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 1K_2$, dan kontraksi 1 pasang sisi ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik yang terbentuk akibat kontraksi 1 pasang titik pada graf kincir $K_1 + 1K_2$.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf $(K_1 + 1K_2)''$ adalah hasil kontraksi dari graf $K_1 + 1K_2$, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(K_1 + 1K_2) \rightarrow V(K_1 + 1K_2)''$ sebagai berikut:

$V(K_1 + 1K_2) = \{c, u_1, u_2\}$ dan $V(K_1 + 1K_2'') = \{c, z_1\}$, dimana $\{c\}$ dan $\{u_1, u_2\}$ adalah partisi dari $V(K_1 + 1K_2)$.

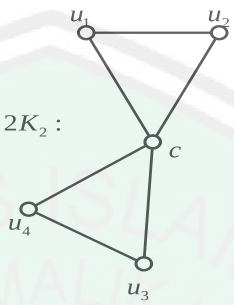


Gambar 3.32 Pemetaan dari $V(K_1 + 1K_2)$ ke $V(K_1 + 1K_2'')$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(K_1 + 1K_2)''$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(K_1 + K_2)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf $K_1 + 1K_2$ adalah graf hasil kontraksi dari graf kincir $K_1 + K_2$. Graf $(K_1 + 1K_2)''$ yang terbentuk disebut graf bintang $K_{1,1}$.

3.2.2 Graf Kincir $K_1 + mK_2$, dimana $m = 2$

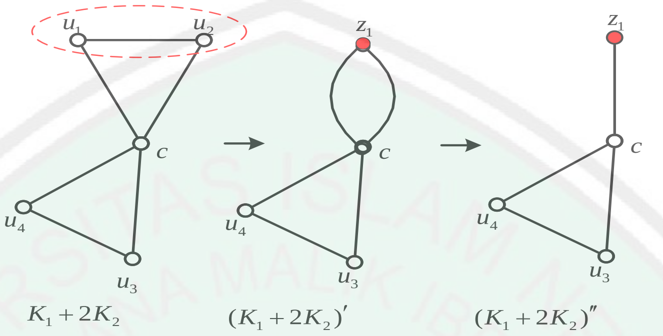
Graf kincir $K_1 + 2K_2$ digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.33 Graf Kincir $K_1 + 2K_2$

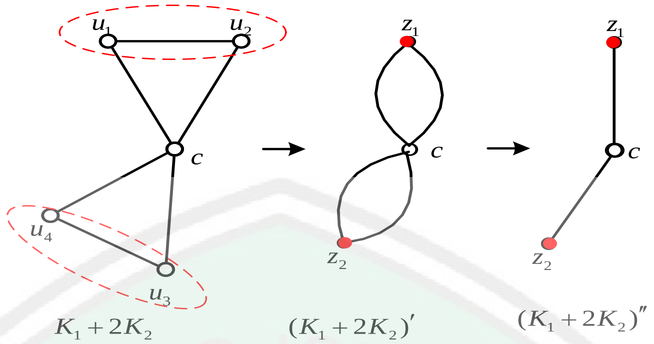
Graf kincir $K_1 + 2K_2$ mempunyai 5 titik yaitu titik c, u_1, u_2, u_3, u_4 dan juga mempunyai 6 sisi. Selanjutnya dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf kincir $K_1 + 2K_2$. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

a) Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 2K_2$ untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1 + 2K_2)'$. Graf $(K_1 + 2K_2)'$ mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1 yang terkait langsung dengan titik pusat c dan titik z_1. Karena kontraksi 1 pasang titik pada graf $K_1 + 2K_2$ mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c dan z_1. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+2K_2)''$.



Gambar 3.34 Kontraksi 1 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 2K_2$

b) Misalkan dipilih 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+2K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+2K_2)'$. Graf $(K_1+2K_2)'$ mempunyai 2 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2. Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf K_1+2K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 2 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c, z_1, dan z_2. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+2K_2)''$. Pada graf $(K_1+2K_2)''$ titik pusat c terhubung langsung dengan titik z_1 dan z_2. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir K_1+2K_2 berikutnya dilampirkan).



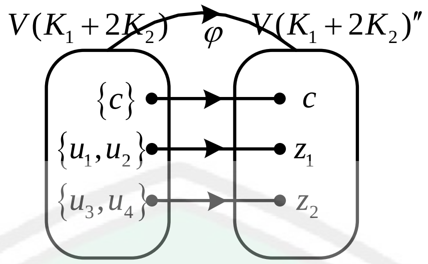
Gambar 3.35 Kontraksi 2 Pasang Titik dan 2 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 2K_2$

Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf kincir $K_1 + 2K_2$ adalah graf $(K_1 + 2K_2)''$ yang terbentuk dari kontraksi 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 2K_2$ dan kontraksi 2 pasang sisi ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik pusat dan titik yang terbentuk akibat kontraksi 2 pasang titik pada graf kincir $K_1 + 2K_2$.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf $(K_1 + 2K_2)''$ adalah hasil kontraksi dari graf $K_1 + 2K_2$, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(K_1 + 2K_2) \rightarrow V(K_1 + 2K_2)''$ sebagai berikut:

$V(K_1 + 2K_2) = \{c, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $V(K_1 + 2K_2)'' = \{c, z_1, z_2\}$,

dimana $\{c\}, \{u_1, u_2\}$, dan $\{u_3, u_4\}$ adalah partisi dari $V(K_1 + 2K_2)$.

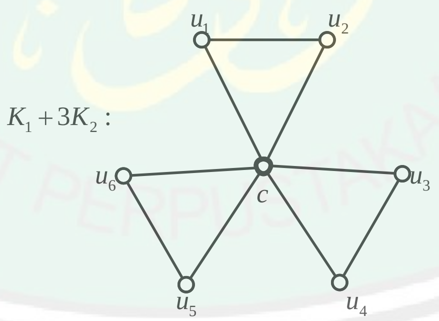


Gambar 3.36 Pemetaan dari $V(K_1 + 2K_2)$ ke $V(K_1 + 2K_2'')$

Dari pemetaan di atas menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(K_1+2K_2)''$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(K_1+2K_2)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf bintang $K_{1,2}$ adalah graf hasil kontraksi dari graf kincir K_1+2K_2. Graf $(K_1+2K_2)''$ yang terbentuk disebut graf bintang $K_{1,2}$.

3.2.3 Graf Kincir $K_1 + mK_2$, dimana $m = 3$

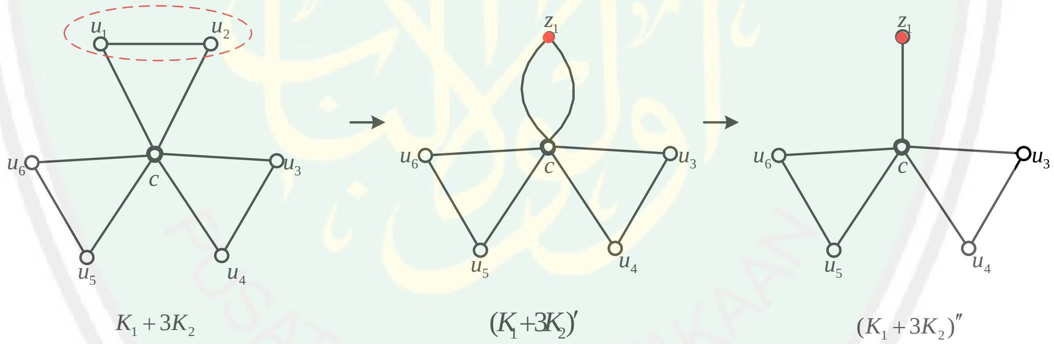
Gambar graf kincir K_1+3K_2 sebagai berikut:



Gambar 3.37 Graf Kincir $K_1 + 3K_2$

Graf kincir K_1+3K_2 mempunyai 7 titik yaitu titik $c,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6$ dan juga mempunyai 9 sisi. Selanjutnya dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf kincir K_1+3K_2. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

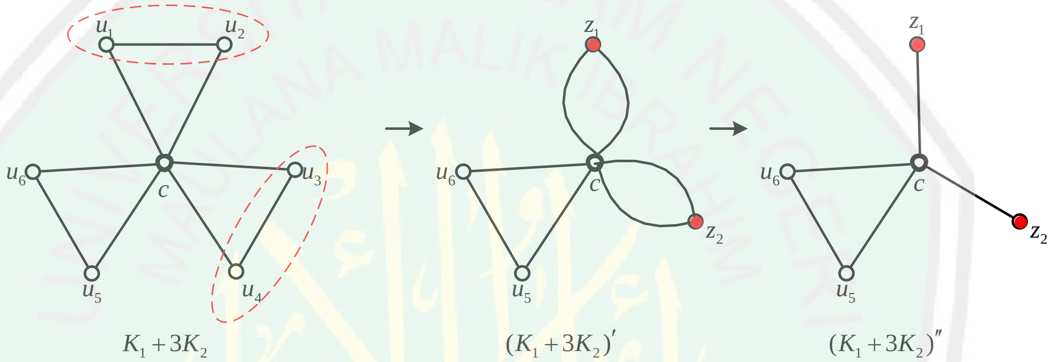
a) Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf kincir K_1+3K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+3K_2)'$. Graf $(K_1+3K_2)'$ mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1. Karena kontraksi 1 pasang titik pada graf K_1+3K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c dan z_1. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+3K_2)''$.



Gambar 3.38 Kontraksi 1 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf K_1+3K_2

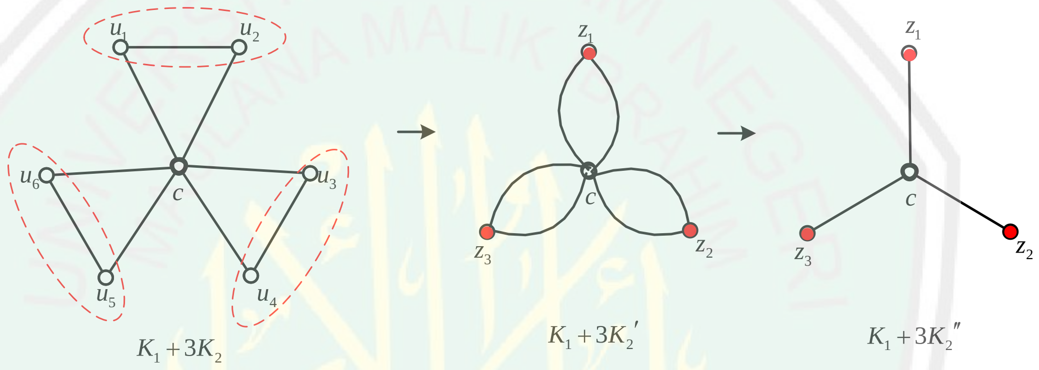
b) Misalkan dipilih 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+3K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+3K_2)'$. Graf $(K_1+3K_2)'$ mempunyai 2 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2

dan cz_2. Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf K_1+3K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 2 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c, z_1, dan z_2. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+3K_2)''$.



Gambar 3.39 Kontraksi 2 Pasang Titik dan 2 Pasang Sisi Ganda pada Graf K_1+3K_2

c) Misalkan dipilih 3 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+3K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4, u_5 dan u_6. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_5 dan u_6 dinotasikan dengan z_3 . Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+3K_2)'$. Graf $(K_1+3K_2)'$ mempunyai 3 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2, cz_3 dan cz_3. Karena kontraksi 3 pasang titik pada graf K_1+3K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 3 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c, z_1, z_2 dan z_3. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+3K_2)''$. Pada graf $(K_1+3K_2)''$ titik pusat c terhubung langsung dengan titik z_1, z_2 dan z_3. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir K_1+3K_2 berikutnya dilampirkan).

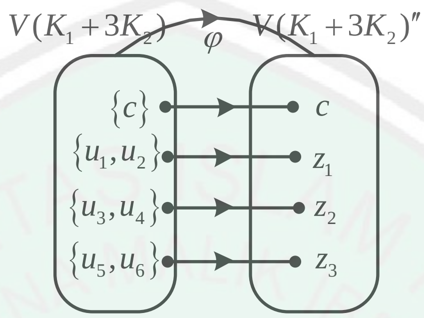


Gambar 3.40 Kontraksi 3 Pasang Titik dan 3 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 3K_2$

Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf kincir K_1+3K_2 adalah graf $(K_1+3K_2)''$ yang terbentuk dari kontraksi 3 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+3K_2, dan kontraksi 3 pasang ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik pusat dan titik yang terbentuk akibat kontraksi 3 pasang titik pada graf kincir K_1+3K_2.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf $K_1+3K_2{}''$ adalah hasil kontraksi dari graf K_1+3K_2, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(K_1+3K_2) \to V(K_1+3K_2)''$ sebagai berikut:

$V(K_1+3K_2)=\{c,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$ dan $V(K_1+3K_2)''=\{c,z_1,z_2,z_3\}$, dimana $\{c\},\{u_1,u_2\},\{u_3,u_4\}$, dan $\{u_5,u_6\}$ adalah partisi dari $V(K_1+3K_2)$.

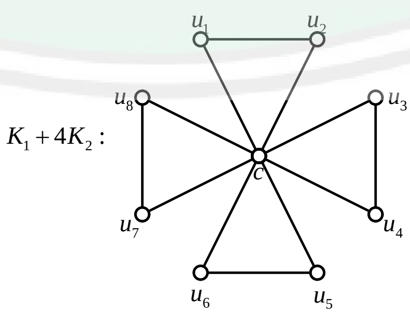


Gambar 3.41 Pemetaan dari $V(K_1+3K_2)$ ke $V(K_1+3K_2")$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(K_1+3K_2)''$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(K_1+3K_2)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf $(K_1+3K_2)''$ adalah graf hasil kontraksi dari graf kincir K_1+3K_2. Graf $(K_1+3K_2)''$ yang terbentuk disebut graf bintang $K_{1,3}$.

3.2.4 Graf Kincir K_1+mK_2, dimana $m=4$

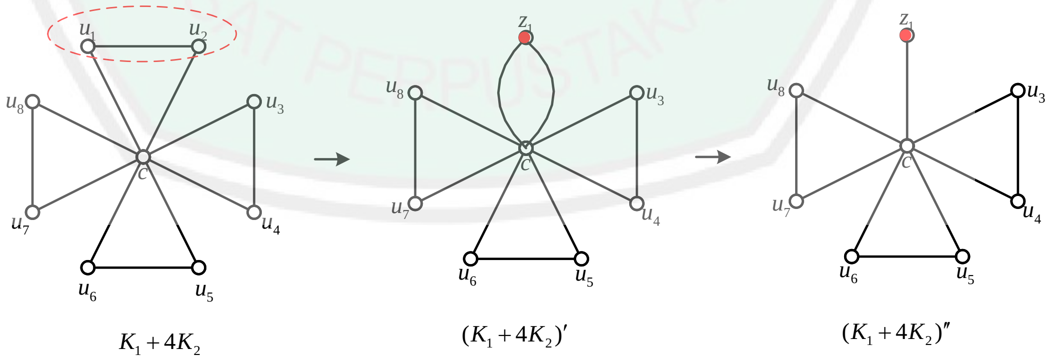
Gambar graf kincir K_1+4K_2 sebagai berikut:



Gambar 3.42 Graf Kincir K_1+4K_2

Graf kincir $K_1 + 4K_2$ mempunyai 9 titik yaitu titik $c, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$ juga mempunyai 12 sisi. Selanjutnya akan dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf kincir $K_1 + 4K_2$. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

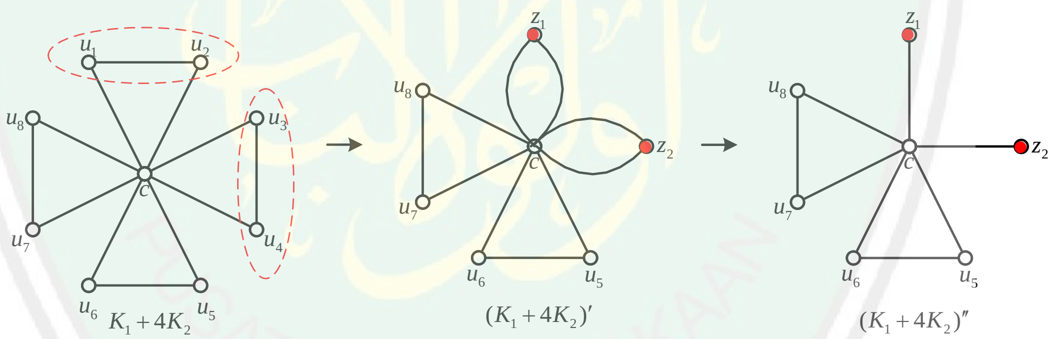
a) Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 4K_2$ untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1 + 4K_2)'$. Graf $(K_1 + 4K_2)'$ mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1. Karena kontraksi 1 pasang titik pada graf $K_1 + 4K_2$ mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c dan z_1. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1 + 4K_2)''$.



Gambar 3.43 Kontraksi 1 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 4K_2$

b) Misalkan dipilih 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 4K_2$ untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2,

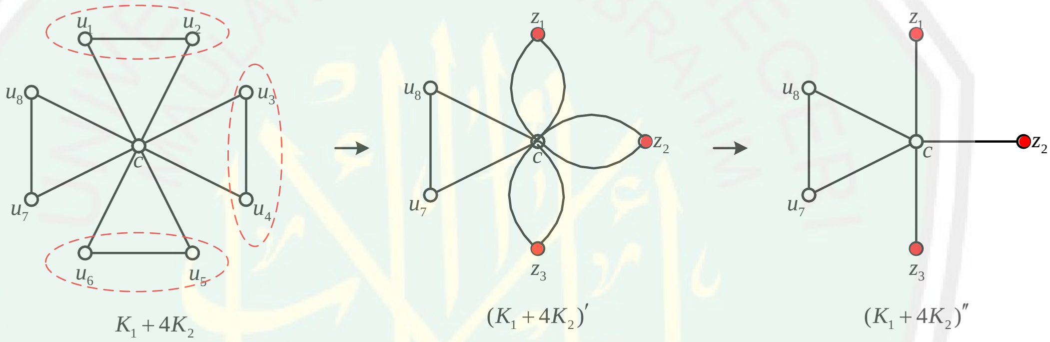
u_3 dan u_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+4K_2)'$. Graf $(K_1+4K_2)'$ mempunyai 2 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2. Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf K_1+4K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 2 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c, z_1, dan z_2. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+4K_2)''$.



Gambar 3.44 Kontraksi 2 Pasang Titik dan 2 Pasang Sisi Ganda pada Graf K_1+4K_2

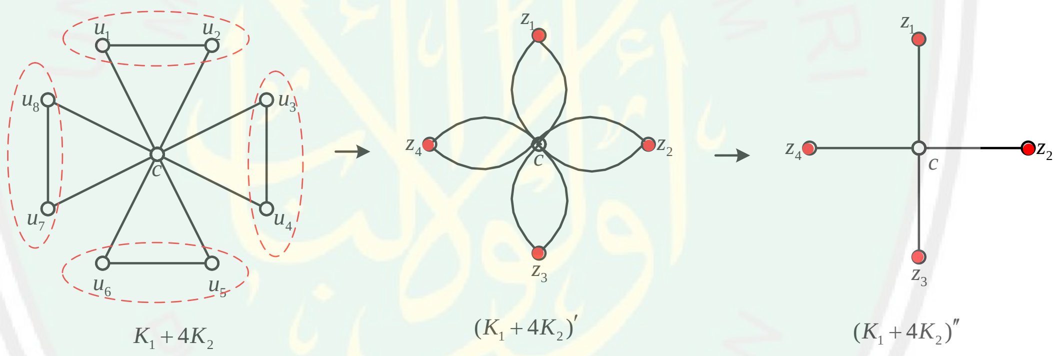
c) Misalkan dipilih 3 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+4K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4, u_5 dan u_6. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_5 dan u_6 dinotasikan dengan z_3 . Sehingga graf yang terbentuk adalah graf

$(K_1+4K_2)'$. Graf $(K_1+4K_2)'$ mempunyai 3 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2, cz_3 dan cz_3. Karena kontraksi 3 pasang titik pada graf K_1+4K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 3 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c, z_1, z_2 dan z_3. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+4K_2)''$.



Gambar 3.45 Kontraksi 3 Pasang Titik dan 3 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 4K_2$

d) Misalkan dipilih 4 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+4K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4, u_5 dan u_6, u_7 dan u_8 . Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_5 dan u_6 dinotasikan dengan z_3 , dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_7 dan u_8 dinotasikan dengan z_4 . Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+4K_2)'$. Graf $(K_1+4K_2)'$ mempunyai 4 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2, cz_3 dan cz_3, cz_4 dan cz_4. Karena kontraksi 4 pasang titik pada graf $K_1 + 4K_2$ mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 4 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c, z_1, z_2, z_3, dan z_4. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1 + 4K_2)''$. Pada graf $(K_1 + 4K_2)''$ titik pusat c terhubung langsung dengan titik z_1, z_2, z_3, dan z_4. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir $K_1 + 4K_2$ berikutnya dilampirkan).

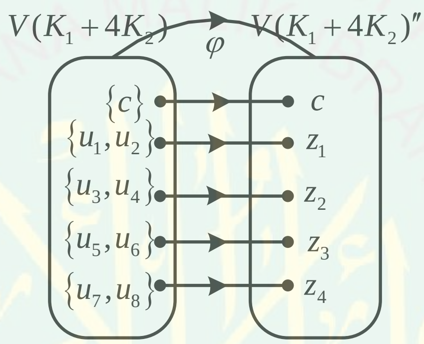


Gambar 3.46 Kontraksi 4 Pasang Titik dan 4 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 4K_2$

Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf kincir $K_1 + 4K_2$ adalah graf $(K_1 + 4K_2)''$ yang terbentuk dari kontraksi 4 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 4K_2$, dan kontraksi 4 pasang sisi ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik pusat dan titik yang terbentuk akibat kontraksi 4 pasang titik pada graf kincir $K_1 + 4K_2$.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf $(K_1+4K_2)''$ adalah hasil kontraksi dari graf K_1+4K_2, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(K_1+4K_2) \to V(K_1+4K_2)''$ sebagai berikut:

$V(K_1+4K_2)=\{c,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8\}$ dan $V(K_1+4K_2)''=\{c,z_1,z_2,z_3,z_4\}$, dimana $\{c\},\{u_1,u_2\},\{u_3,u_4\},\{u_5,u_6\}$, dan $\{u_7,u_8\}$ adalah partisi dari $V(K_1+4K_2)$.

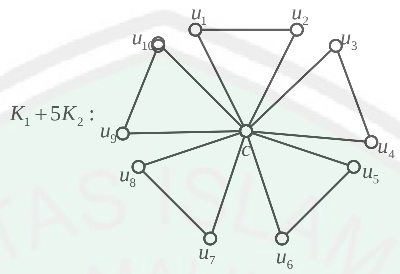


Gambar 3.47 Pemetaan dari $V(K_1+4K_2)$ ke $V(K_1+4K_2")$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(K_1+4K_2)''$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(K_1+4K_2)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf $(K_1+4K_2)''$ adalah graf hasil kontraksi dari graf kincir K_1+4K_2. Graf $(K_1+4K_2)''$ yang terbentuk disebut graf bintang $K_{1,4}$.

3.2.5 Graf Kincir $K_1 + mK_2$, dimana $m = 5$

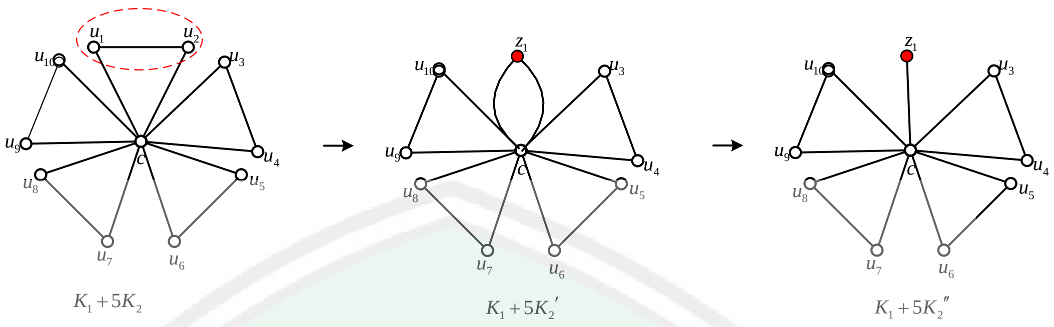
Graf kincir $K_1 + 5K_2$ digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.48 Graf Kincir $K_1 + 5K_2$

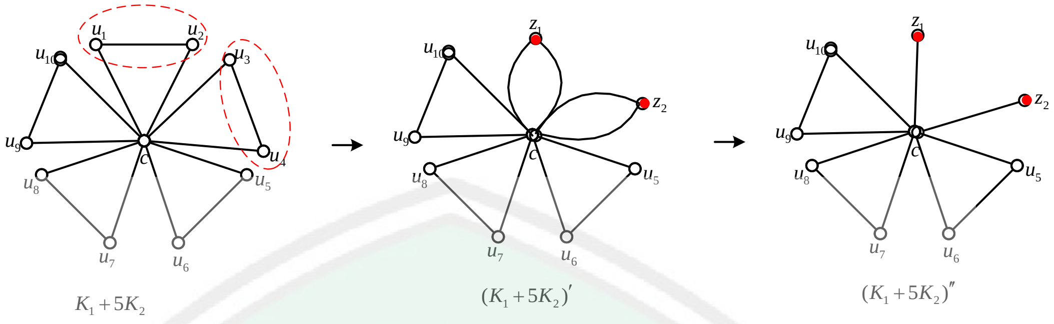
Graf kincir $K_1 + 5K_2$ mempunyai 11 titik yaitu titik $c, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$ dan juga mempunyai 15 sisi. Selanjutnya akan dilakukan kontraksi dasar yaitu, kontraksi titik maupun kontraksi sisi yang dapat dikenakan pada graf kincir $K_1 + 5K_2$. Adapun penjabarannya sebagai berikut:

a) Misalkan dipilih 1 pasang titik yang terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 5K_2$ untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1 + 5K_2)'$. Graf $(K_1 + 5K_2)'$ mempunyai 1 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1. Karena kontraksi 1 pasang titik pada graf $K_1 + 5K_2$ mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 1 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c dan z_1. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1 + 5K_2)''$.



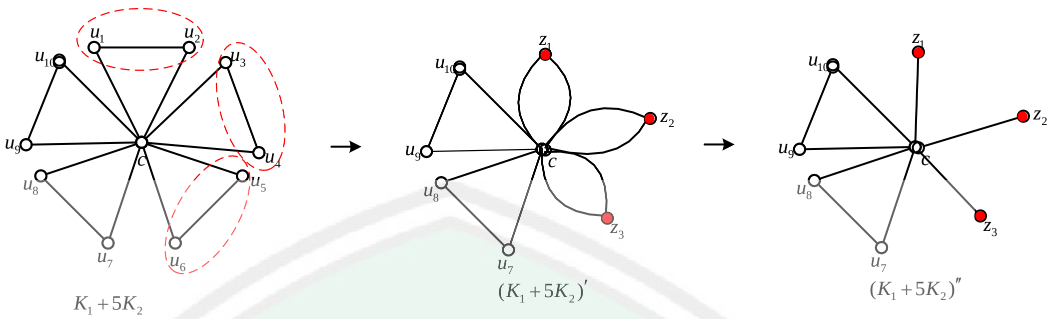
Gambar 3.49 Kontraksi 1 Pasang Titik dan 1 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 5K_2$

b) Misalkan dipilih 2 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 5K_2$ untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1 + 5K_2)'$. Graf $(K_1 + 5K_2)'$ mempunyai 2 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2. Karena kontraksi 2 pasang titik pada graf $K_1 + 5K_2$ mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 2 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik $c, z_1,$ dan z_2. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1 + 5K_2)''$.



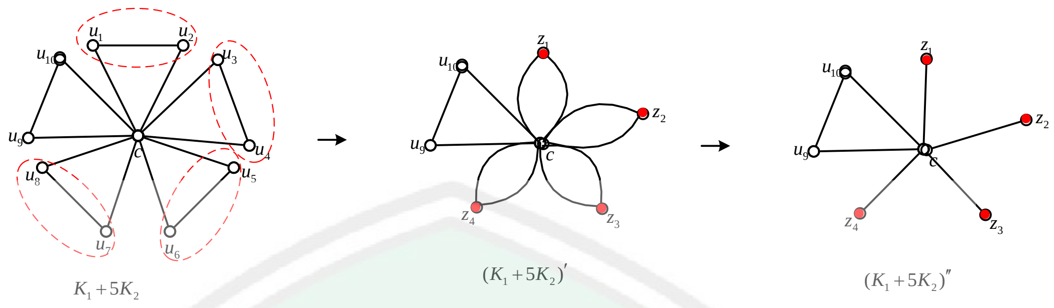
Gambar 3.50 Kontraksi 2 Pasang Titik dan 2 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 5K_2$

c) Misalkan dipilih 3 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+5K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4, u_5 dan u_6. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2, dan titik baru kontraksi titik u_5 dan u_6 dinotasikan dengan z_3 . Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+5K_2)'$. Graf $(K_1+5K_2)'$ mempunyai 3 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2, cz_3 dan cz_3. Karena kontraksi 3 pasang titik pada graf K_1+5K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 3 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c, z_1, z_2 dan z_3. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+5K_2)''$.



Gambar 3.51 Kontraksi 3 Pasang Titik dan 3 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 5K_2$

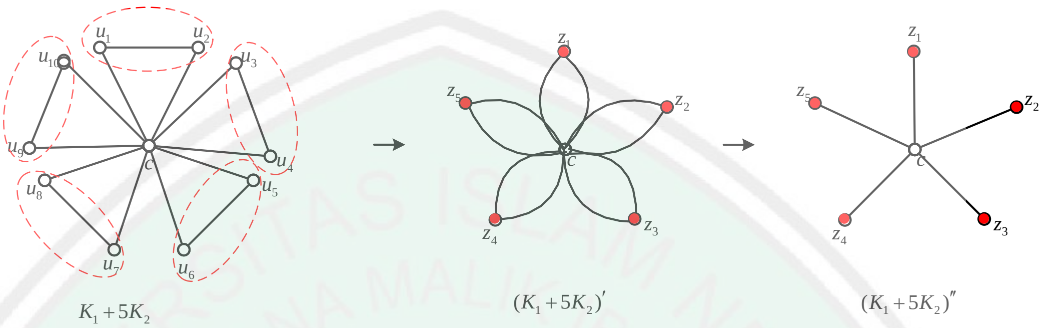
d) Misalkan dipilih 4 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+5K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4, u_5 dan u_6, u_7 dan u_8. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_5 dan u_6 dinotasikan dengan z_3, dan titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_7 dan u_8 dinotasikan dengan z_4. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+5K_2)'$. Graf $(K_1+5K_2)'$ mempunyai 4 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2, cz_3 dan cz_3, cz_4 dan cz_4. Karena kontraksi 4 pasang titik pada graf K_1+5K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 4 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik $c, z_1, z_2, z_3,$ dan z_4. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+5K_2)''$.



Gambar 3.52 Kontraksi 4 Pasang Titik dan 4 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 5K_2$

e) Misalkan dipilih 5 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir K_1+5K_2 untuk dikenai kontraksi titik, misal titik u_1 dan u_2, u_3 dan u_4, u_5 dan u_6, u_7 dan u_8 , u_9 dan u_{10}. Kemudian titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_1 dan u_2 dinotasikan dengan z_1, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_3 dan u_4 dinotasikan dengan z_2, titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_5 dan u_6 dinotasikan dengan z_3 , titik yang terbentuk dari kontraksi titik u_7 dan u_8 dinotasikan dengan z_4 , dan titik baru kontraksi titik u_9 dan u_{10} dinotasikan dengan z_5. Sehingga graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+5K_2)'$. Graf $(K_1+5K_2)'$ mempunyai 5 pasang sisi ganda yaitu sisi cz_1 dan cz_1, cz_2 dan cz_2, cz_3 dan cz_3, cz_4 dan cz_4, cz_5 dan cz_5. Karena kontraksi 5 pasang titik pada graf K_1+5K_2 mengakibatkan graf yang terbentuk mempunyai sisi ganda, maka perlu dilakukan kontraksi sisi. Jika dikenai kontraksi sisi pada 5 pasang sisi gandanya yang terkait langsung pada titik c, z_1, z_2, z_3, z_4 dan z_5. Maka graf yang terbentuk adalah graf $(K_1+5K_2)''$. Pada graf $(K_1+5K_2)''$ titik pusat c terhubung langsung dengan titik

$z_1, z_2, z_3, z_4,$ dan z_5. (Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir $K_1 + 5K_2$ berikutnya dilampirkan).



Gambar 3.53 Kontraksi 5 Pasang Titik dan 5 Pasang Sisi Ganda pada Graf $K_1 + 5K_2$

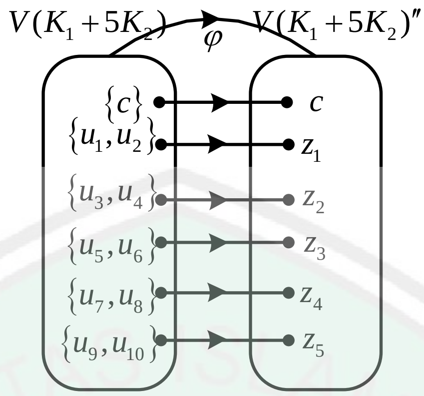
Berdasarkan pembahasan di atas, graf yang dipilih sebagai hasil kontraksi dari graf kincir $K_1 + 5K_2$ adalah graf $(K_1 + 5K_2)''$ yang terbentuk dari kontraksi 5 pasang titik yang pasangan titiknya terhubung langsung pada graf kincir $K_1 + 5K_2$, dan kontraksi 5 pasang sisi ganda yang pasangan sisinya terkait langsung pada titik pusat dan titik yang terbentuk akibat kontraksi 5 pasang titik pada graf kincir $K_1 + 5K_2$.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf $(K_1 + 5K_2)''$ adalah hasil kontraksi dari graf $K_1 + 5K_2$, maka dapat ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(K_1 + 5K_2) \to V(K_1 + 5K_2)''$ sebagai berikut:

$V(K_1 + 5K_2) = \{c, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$

$V(K_1 + 5K_2)'' = \{c, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$,

dimana $\{c\}, \{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}, \{u_5, u_6\}, \{u_7, u_8\}$, dan $\{u_9, u_{10}\}$ adalah partisi dari $V(K_1 + 5K_2)$.



Gambar 3.54 Pemetaan dari $V(K_1+5K_2)$ ke $V(K_1+5K_2'')$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(K_1+5K_2)''$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(K_1+5K_2)$. Hal ini menunjukkan bahwa graf $(K_1+5K_2)''$ adalah graf hasil kontraksi dari graf kincir K_1+5K_2. Graf K_1+5K_2'' yang terbentuk disebut graf bintang $K_{1,5}$.

Berdasarkan beberapa contoh di atas maka dapat dituliskan kembali dalam tabel 3.2 berikut ini:

Tabel 3.2 Kontraksi Titik dan Sisi pada Graf Kincir K_1+mK_2

Graf Awal		Kontraksi Graf		Graf Hasil Kontraksi	
Graf	(p,q)	Banyaknya Titik yang Dikontraksi	Banyaknya Sisi yang Dikontraksi	(p,q)	Graf
K_1+K_2	$(3,3)$	2	2	$(2,1)$	$K_{1,1}$
K_1+2K_2	$(5,6)$	4	4	$(3,2)$	$K_{1,2}$
K_1+3K_2	$(7,9)$	6	6	$(4,3)$	$K_{1,3}$
K_1+4K_2	$(9,12)$	8	8	$(5,4)$	$K_{1,4}$
K_1+5K_2	$(11,15)$	10	10	$(6,5)$	$K_{1,5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_1+mK_2	$(2m+1,3m)$	$2m$	$2m$	$(m+1,m)$	$K_{1,m}$

Berdasarkan tabel di atas, maka dapat diambil kesimpulan sementara bahwa hasil kontraksi dari graf kincir $K_1 + mK_2$ (dengan $m \in N$) adalah graf bintang $K_{1,m}$, dengan banyaknya kontraksi titik adalah $2m$ dan banyaknya kontraksi sisi adalah $2m$.

Teorema 2

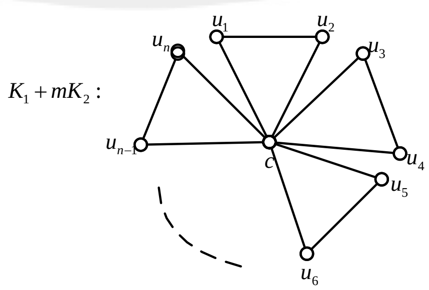
Suatu graf kincir $K_1 + mK_2$ (dengan $m \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2m$ dan kontraksi sisi sebanyak $2m$, maka hasil kontraksinya adalah graf bintang $K_{1,m}$.

Bukti Teorema 2

Akan dibuktikan bahwa graf kincir $K_1 + mK_2$ (dengan $m \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2m$ dan kontraksi sisi $2m$, maka hasil kontraksinya adalah graf bintang $K_{1,m}$.

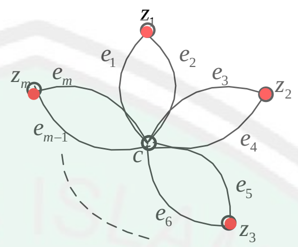
Misal:

graf kincir $K_1 + mK_2$ mempunyai titik $p(K_1 + mK_2) = 2m + 1$ dan $q(K_1 + mK_2) = 3m$. Maka, graf kincir $K_1 + mK_2$ dapat digambarkan seperti di bawah ini:



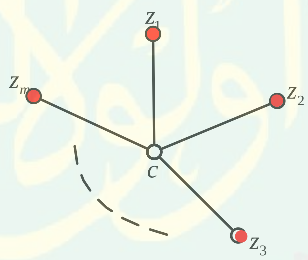
Gambar 3.55 Graf Kincir $K_1 + mK_2$

Jika dikenai kontraksi titik pada $2m$ titiknya (pada daun kincirnya), maka dapat ditunjukkan seperti gambar di bawah ini:



Gambar 3.56 Kontraksi titik

graf yang terbentuk mempunyai titik $p(K_1 + mK_2) = m-1$ dan $q(K_1 + mK_2) = 2m$. Selanjutnya dilakukan kontraksi sisi pada $2m$ sisinya. Maka, graf yang terbentuk adalah graf bintang $K_{1,m}$ seperti dibawah ini:

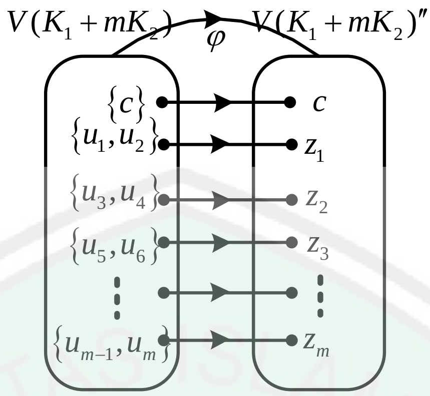


Gambar 3.57 Kontraksi $2m$ Sisinya

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf bintang $K_{1,m}$ adalah hasil dari kontraksi graf kincir $K_1 + mK_2$, maka harus ditunjukkan dengan pemetaan dari fungsi $\varphi : V(K_1 + mK_2) \to V(K_{1,m})$ sebagai berikut:

$V(K_1 + mK_2) = \{c, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, ..., u_{m-1}, u_m\}$, $V(K_{1,m}) = \{z_1, z_2, z_3, ..., z_m\}$,

dimana $\{c\}, \{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}, \{u_5, u_6\}, ...,$ dan $\{u_{m-1}, u_m\}$ adalah partisi dari $V(K_1 + mK_2)$.



Gambar 3.58 Pemetaan dari $V(K_1+mK_1)$ ke $V(K_{1,m})$

Dari pemetaan di atas, menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara unsur di $V(K_{1,m})$ dengan unsur dari suatu partisi di $V(K_1+mK_2)$. Hal ini, menunjukkan bahwa graf bintang $K_{1,m}$ adalah graf hasil kontraksi dari graf kincir K_1+mK_2.

3.3 Kajian Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan

Berdasarkan langkah-langkah yang dilakukan pada pembahasan skripsi ini, diperoleh rumus sebagai berikut:

1. Jika graf tangga L_n (dengan $n \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2n$ dan kontraksi sisi sebanyak $2(n-1)$, maka hasil kontraksinya adalah graf lintasan P_n.
2. Jika graf kincir K_1+mK_2 (dengan $m \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2m$ dan kontraksi sisi sebanyak $2m$, maka hasil kontraksinya adalah graf bintang $K_{1,m}$.

Dari hasil pembahasan di atas, jika direlevansikan dengan kajian agama hal ini sama dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT sudah ada ukurannya atau ada rumusnya dan ditata dengan sedemikian rapi dan sempurna, sebagaimana yang tetera pada surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"* (Q.S. Al-Qamar:49).

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat Al-Furqan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدًا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "*Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"* (Q.S. Al-Furqan:2).

Kedua ayat di atas, menjelaskan bahwa segala sesuatu sudah ditentukan atau sudah ada sebelumnya yang diciptakan oleh Allah SWT, manusia hanya bisa menemukannya.

Penafsiran beberapa ulama yang relevan untuk dijadikan sebagai acuan atau dasar pada skripsi ini yaitu tafsir Imam Baidhowi yang menjelaskan bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu dengan ketentuan dan aturan yang teratur agar mendatangkan kebajikan atau sudah menjadi ketentuan di *Lauhul Mahfud.*

Dari penafsiran di atas kata *qadar* dapat direlevansikan antara konsep kontraksi titik dan sisi pada graf dengan Al-Qur'an yaitu surat Al-Qamar ayat 49 dan Al-Furqaan ayat 2. Berdasarkan ayat di atas, sesuai penafsiran Alwi Shihab (*Tafsir AlMisbah*, 2002:482) yakni *ketentuan dan sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu yang ada di muka bumi ini*, sehingga dengan kekuasaanNya maka semua akan terlihat rapi, teratur, dan sempurna. Sama halnya dengan masalah kontraksi titik dan sisi yang teratur dengan rumus yang telah diperoleh dalam pembahasan skripsi ini.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Untuk mengkontraksi graf tangga L_n, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
   a) Menggambar graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5.
   b) Menentukan semua kemungkinan cara mengkontraksi setiap graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5.
   c) Mencari pola yang terbentuk dari kontraksi graf tangga dimulai dari L_1 sampai dengan L_5.
   d) Merumuskan pola ke dalam teorema dan membuktikan teorema.

   Berdasarkan langkah-langkah tersebut, diperoleh bahwa:

   Suatu graf tangga L_n (dengan $n \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2n$ dan kontraksi sisi sebanyak $2(n-1)$, maka hasil kontraksinya adalah graf lintasan P_n.

2. Untuk mengkontraksi graf kincir $K_1 + mK_n$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
   a) Menggambar graf kincir dimulai dari $K_1 + 1K_2$ sampai dengan $K_1 + 5K_2$.

b) Menentukan semua kemungkinan cara mengkontraksi setiap graf kincir dimulai dari K_1+1K_2 sampai dengan K_1+5K_2.

c) Mencari pola yang terbentuk dari kontraksi graf kincir dimulai dari K_1+1K_2 sampai dengan K_1+5K_2.

d) Merumuskan pola ke dalam teorema dan membuktikan teorema.

Berdasarkan langkah-langkah tersebut, diperoleh bahwa:

Suatu graf kincir K_1+mK_2 (dengan $m \in N$) jika dikenai kontraksi titik sebanyak $2m$ dan kontraksi sisi sebanyak $2m$, maka hasil kontraksinya adalah graf bintang $K_{1,m}$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pokok bahasan pada masalah menentukan kontraksi pada graf tangga L_n (dengan $n \in N$) dan graf kincir K_1+mK_2 (dengan $m \in N$). Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mengembangkannya dan merumuskan teorema dari kontraksi pada graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Al-Jazairi, S.A.B.J.. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 6*. Jakatra: Darus Sunnah.

Al-Jazairi, S.A.B.J.. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 7*. Jakatra: Darus Sunnah.

Al Maraghiy, A.M.. 1989. *Tafsir Al Maraghiy Juz XXIII*. Semarang: CV Tohaputra.

Al-Qurthubi, S.I.. 2009. *Tafsir Al Qurthubi Jilid 15*. Jakatra: Pustaka Azzam.

Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R.. 2000. *Introduction to Real Analysis (Third Edition)*. USA: John Wiley and Sons.

Bondy, J.A. dan Murty U.S.R.. 1976. *Graph Theory with Applications*. New York: Elsevier Science Publishing Co.,Inc.

Chartrand, G. dan Lesniak, L.. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chartrand, G. dan Lesniak, L.. 1996. *Graphs and Digraphs Thrid Edition*. California: Chapman & Hall/CRC.

Gallian, J.A.. 2007. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Journal of Combinatorial Mathematics*, 14, 12-13.

Katsir, I.. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6*. Jakatra: Pustaka Imam Syafi'i.

Kerami, D.. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Rahman, A.. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Rahman, H.. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press.

Miller, M., Ryan, J., Sugeng, K.A., Slamin, dan Tuga, M.. 2005. Exclusive Sum labeling of graph. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55, 149-216.

Quthb, S.. 2004. *Tafsir fi Zhilalil Qur'an di Bawah Naungan Al-Qur'an Jilid 9*. Jakatra: Gema Insani Press.

Quthb, S.. 2004. *Tafsir fi Zhilalil Qur'an di Bawah Naungan Al-Qur'an Jilid 11*. Jakatra: Gema Insani Press.

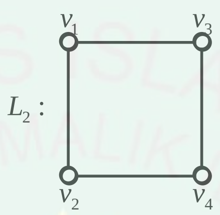
Wilson, R.J. dan Watkins.. 1990. *Graph and Introductory Approach*. Singapore: Open University Course.

LAMPIRAN

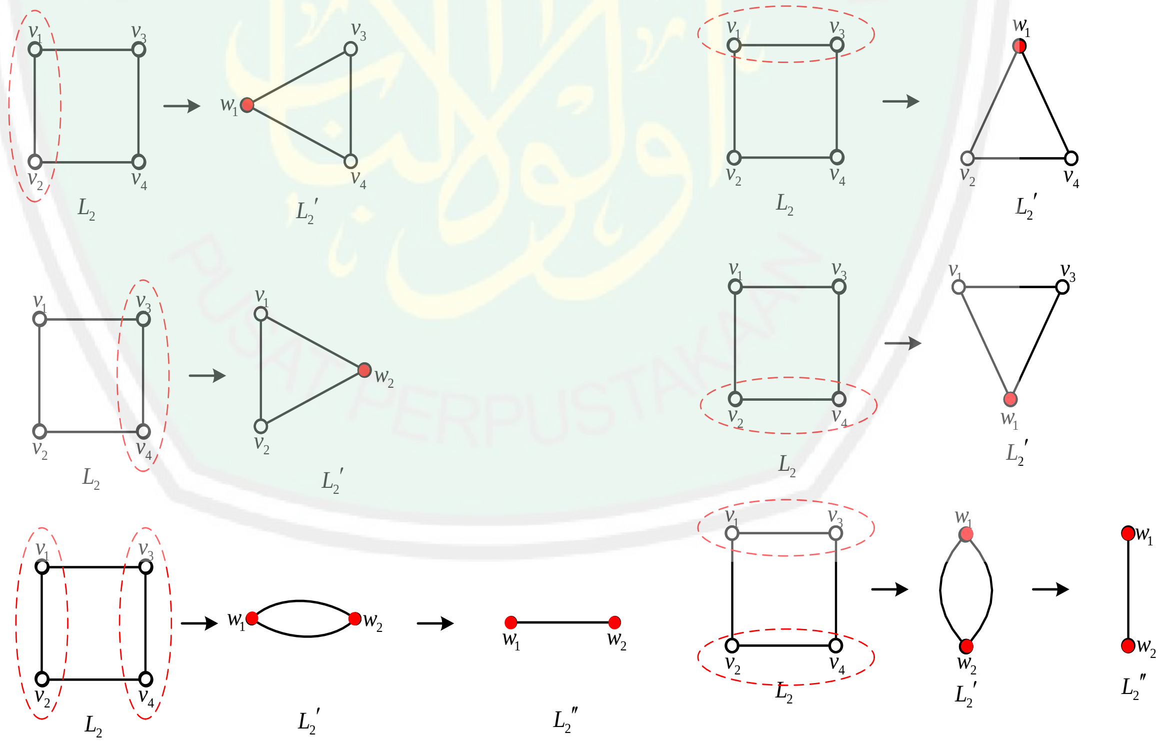
LAMPIRAN 1

Gambar Kontraksi Titik dan Kontraksi Sisi pada Graf Tangga $L_n, n \in \mathbb{N}$

1. Graf tangga L_2:



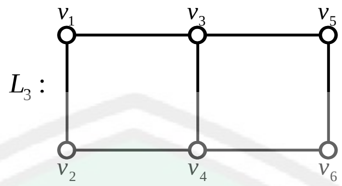
Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf tangga L_2 adalah sebagai berikut:



Kontraksi dasar dengan arah sisi mendatar *(horizontal)*

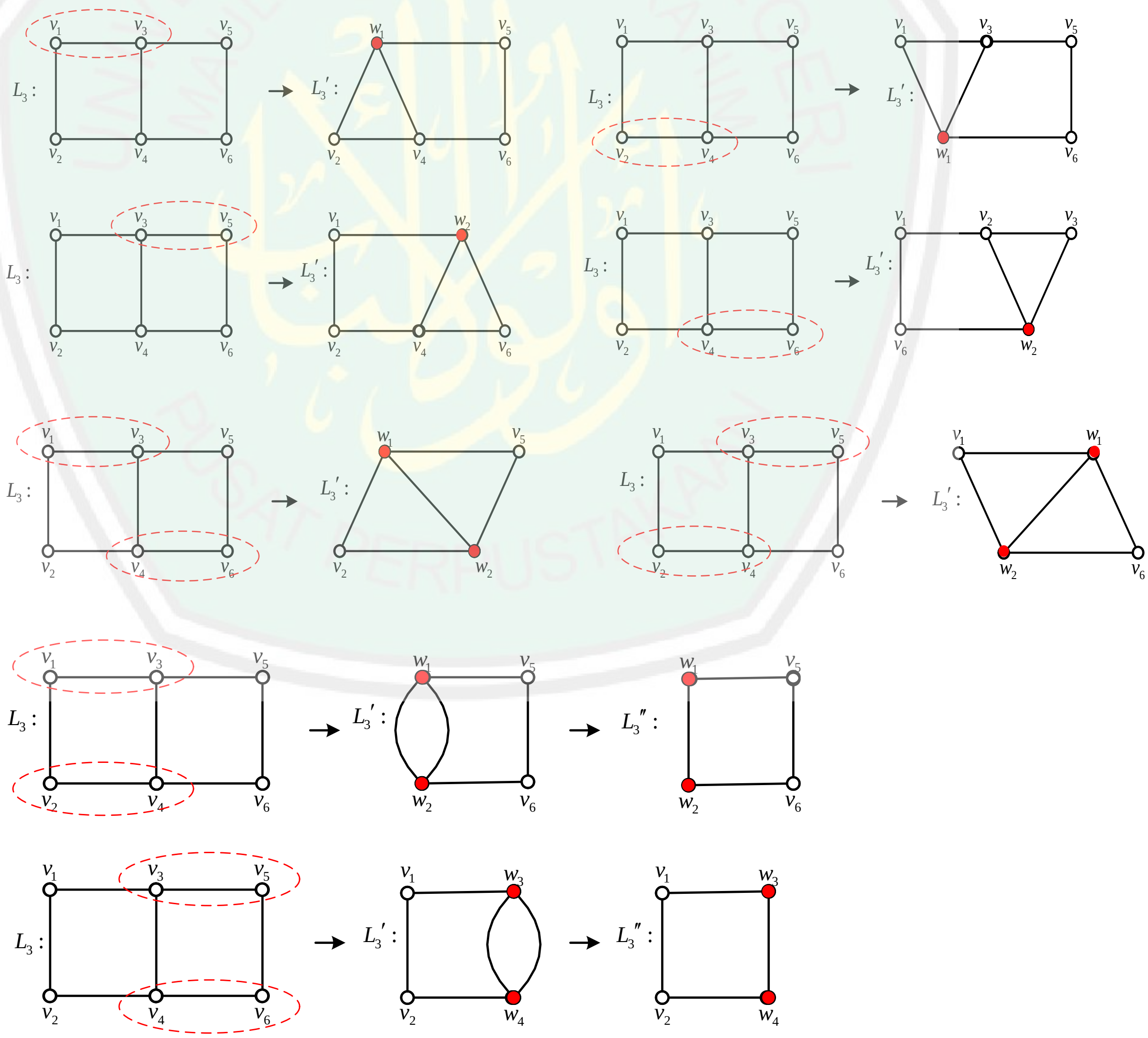
Kontraksi dasar dengan arah sisi tegak lurus *(vertical)*

2. Graf tangga L_3:

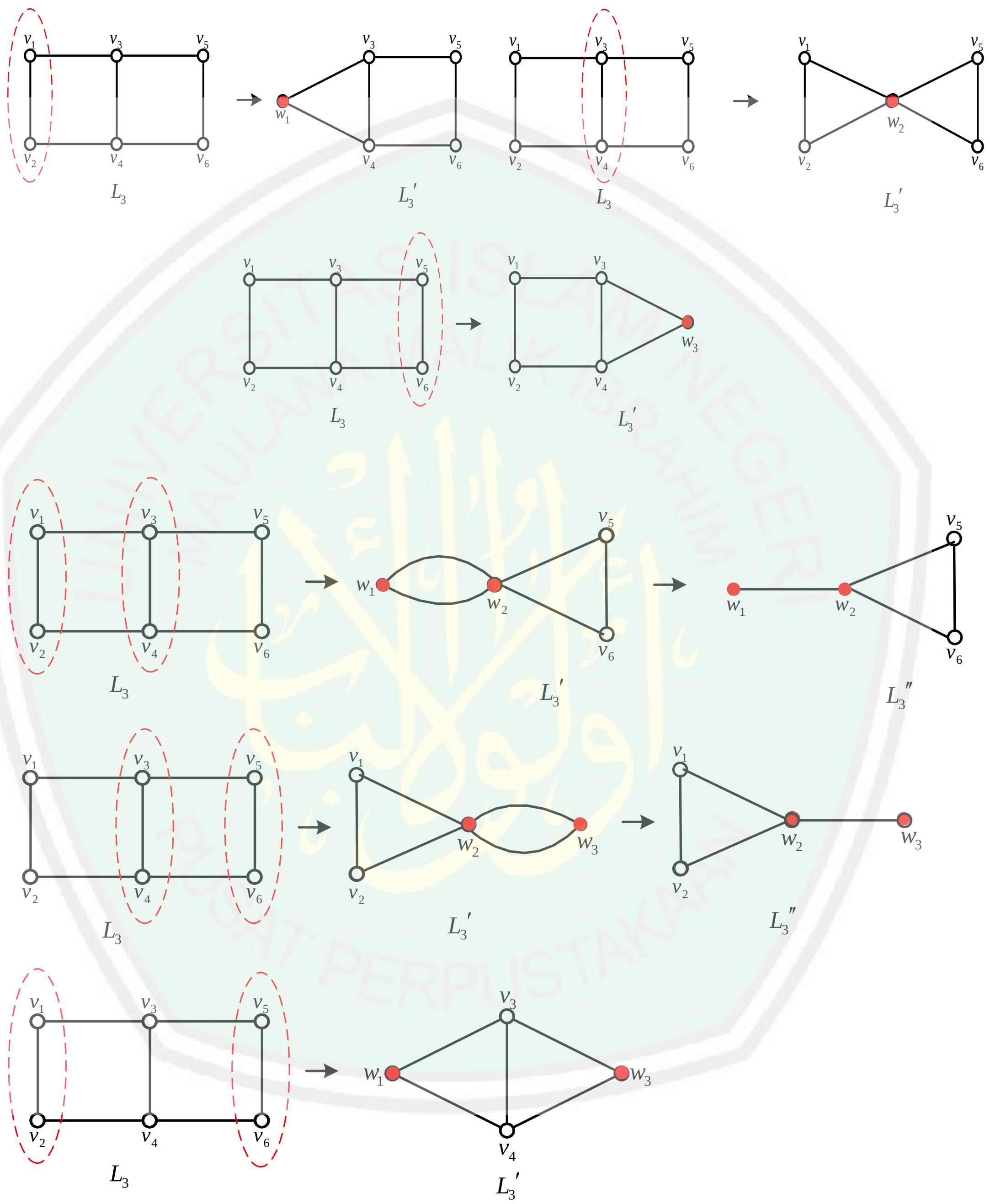


Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf tangga L_3 adalah sebagai berikut:

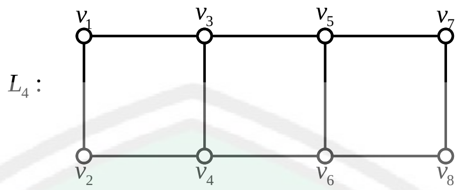
Kontraksi dasar dengan arah sisi mendatar *(horizontal)*



Kontraksi dasar dengan arah sisi tegak lurus *(vertical)*

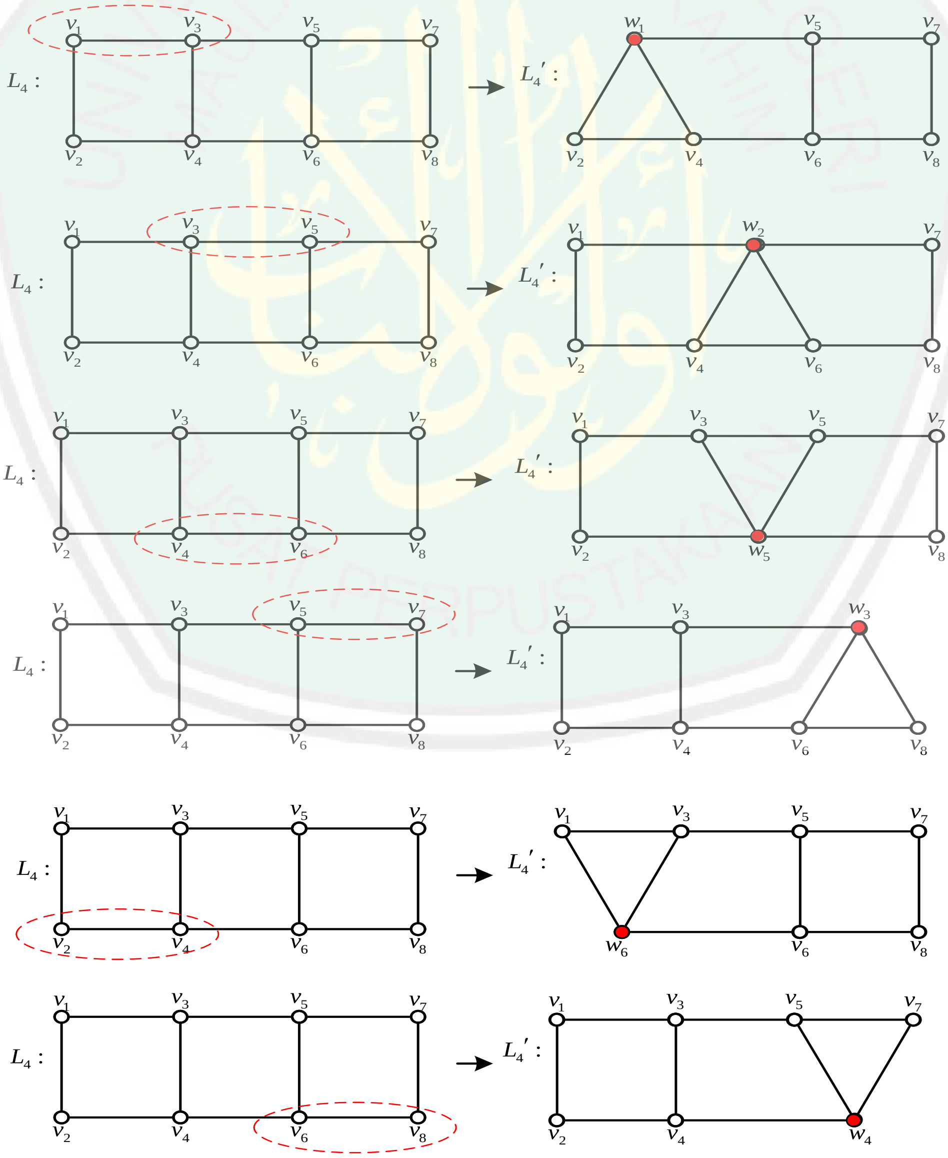


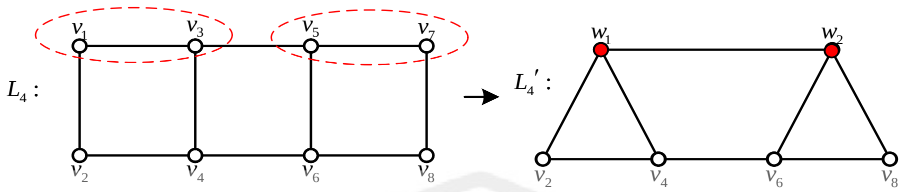
3. Graf tangga L_4:

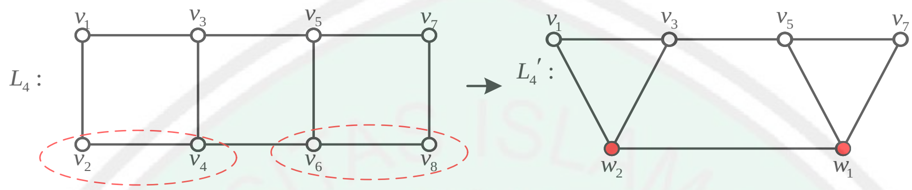


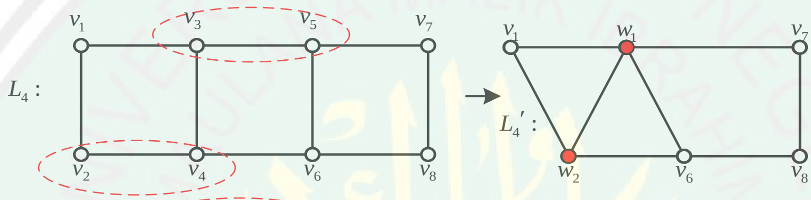
Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf tangga L_4 adalah sebagai berikut:

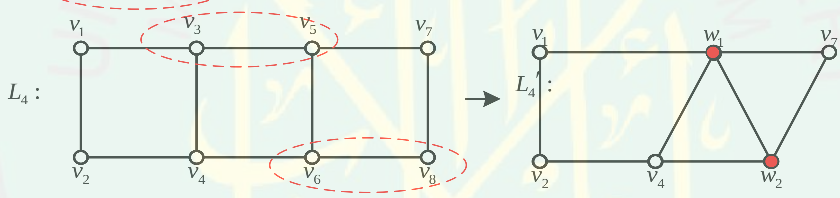
Kontraksi dasar dengan arah sisi mendatar *(horizontal)*

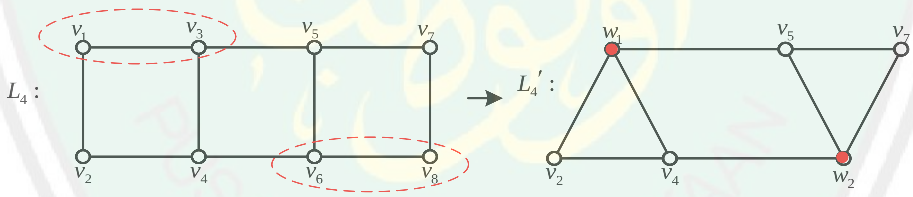


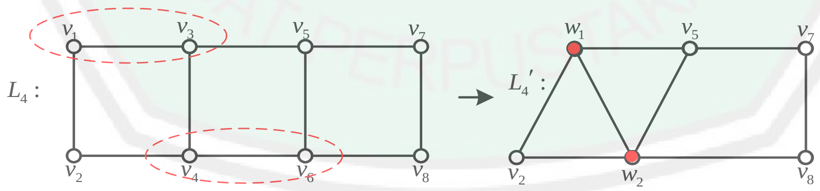

L4 :
v1 v3 v5 v7
v2 v4 v6 v8
L4' :
w1 w2
v2 v4 v6 v8

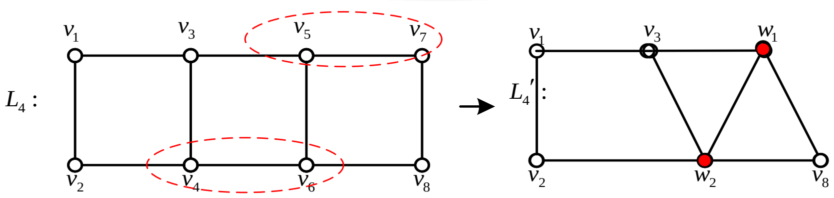

L4 :
v1 v3 v5 v7
v2 v4 v6 v8
L4' :
v1 v3 v5 v7
w2 w1

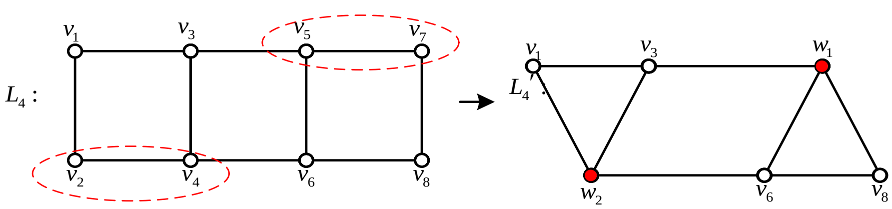

L4 :
v1 v3 v5 v7
v2 v4 v6 v8
L4' :
v1 w1 v7
w2 v6 v8

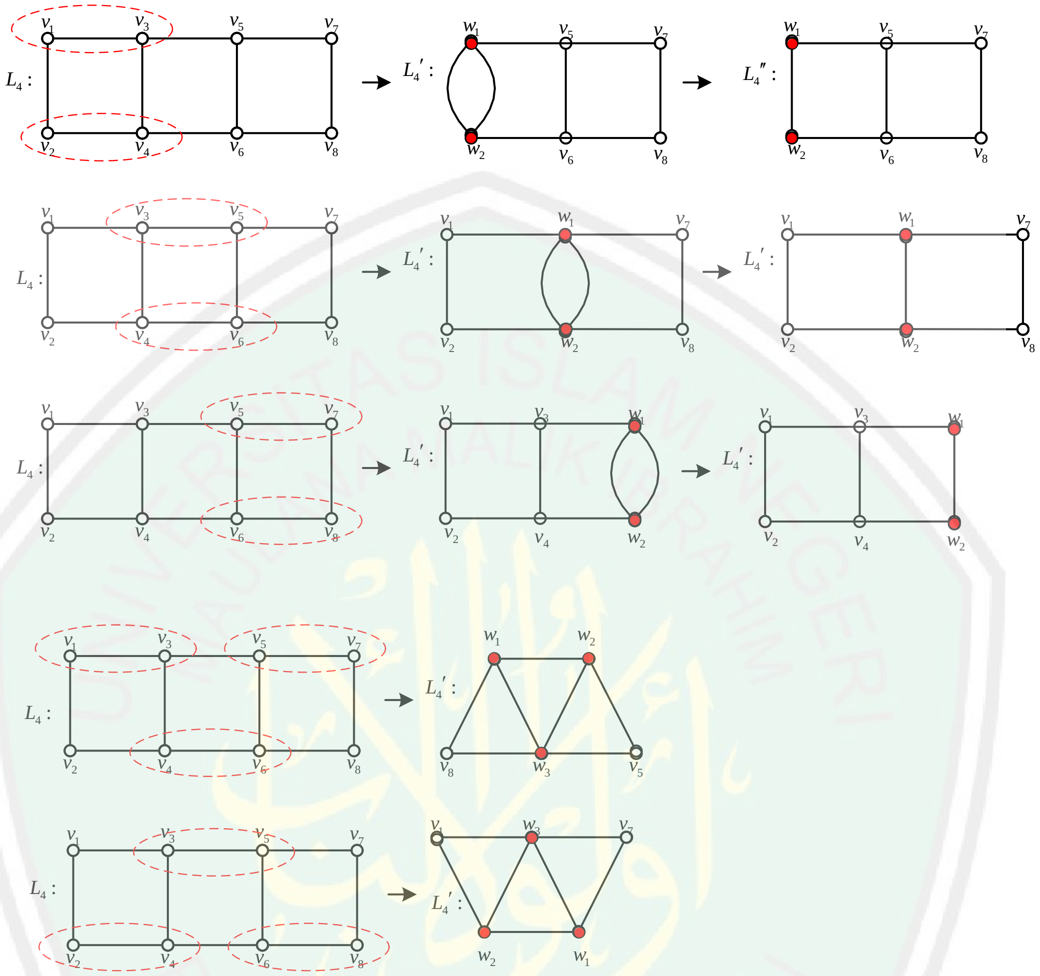

L4 :
v1 v3 v5 v7
v2 v4 v6 v8
L4' :
v1 w1 v7
v2 v4 w2


L4 :
v1 v3 v5 v7
v2 v4 v6 v8
L4' :
w1 v5 v7
v2 v4 w2

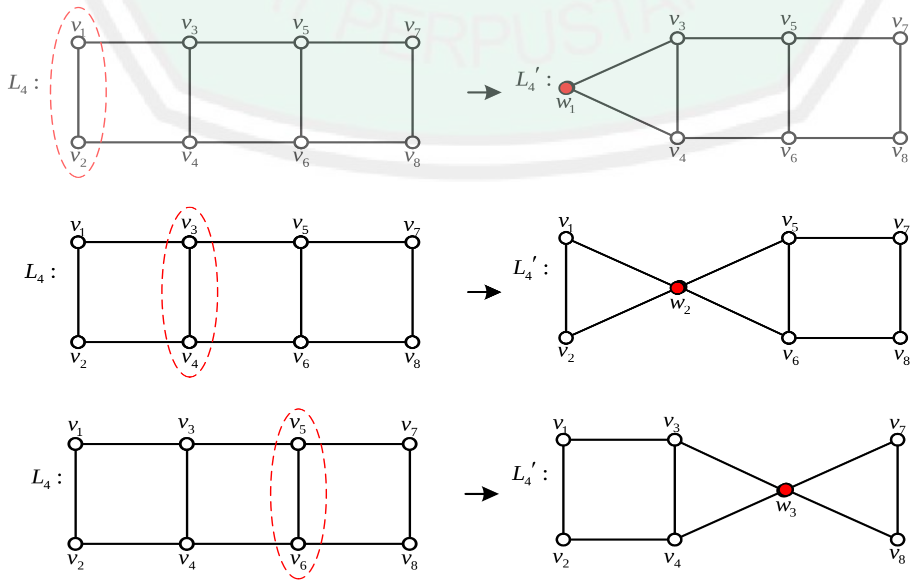

L4 :
v1 v3 v5 v7
v2 v4 v6 v8
L4' :
w1 v5 v7
v2 w2 v8

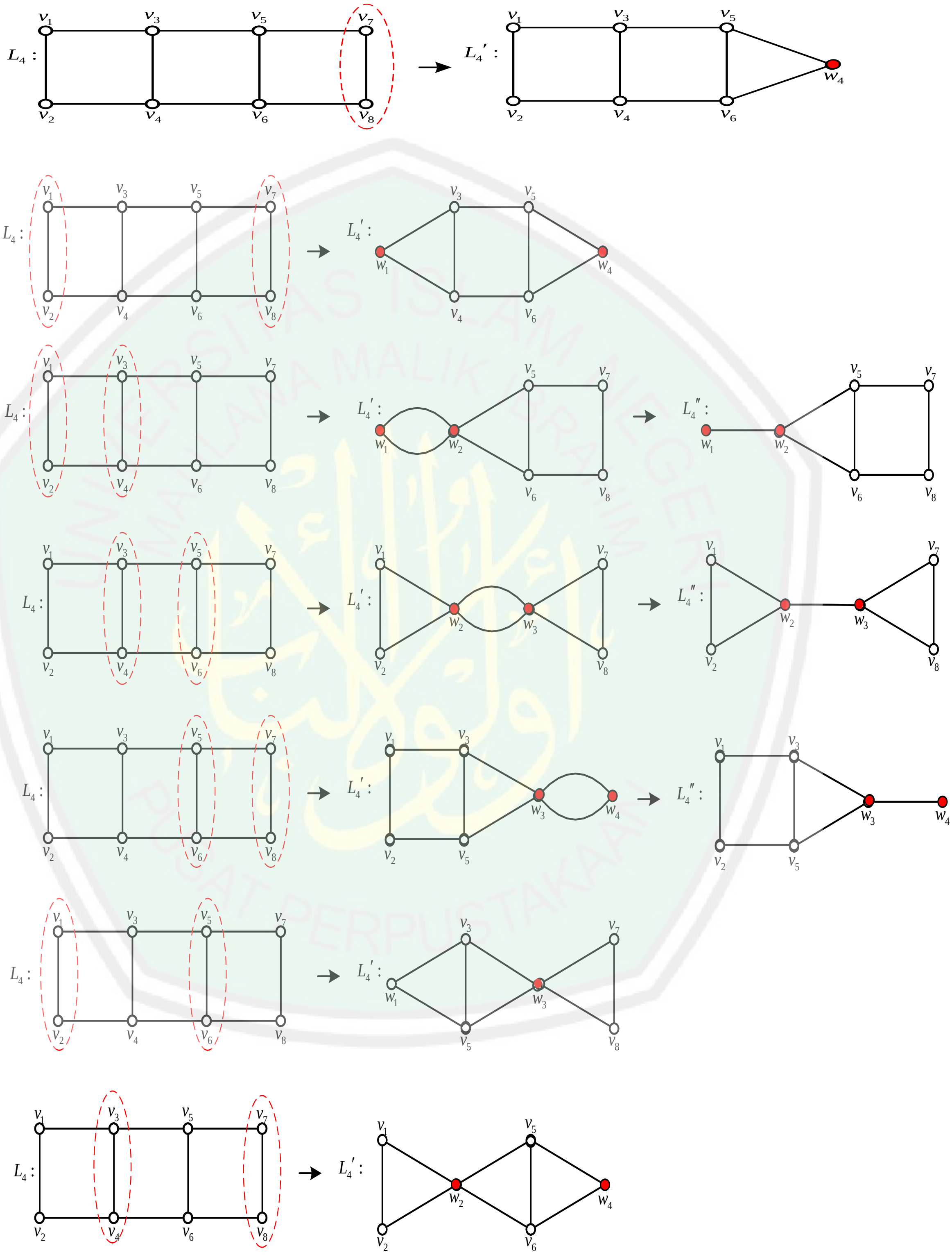

L4 :
v1 v3 v5 v7
v2 v4 v6 v8
L4' :
v1 v3 w1
v2 w2 v8

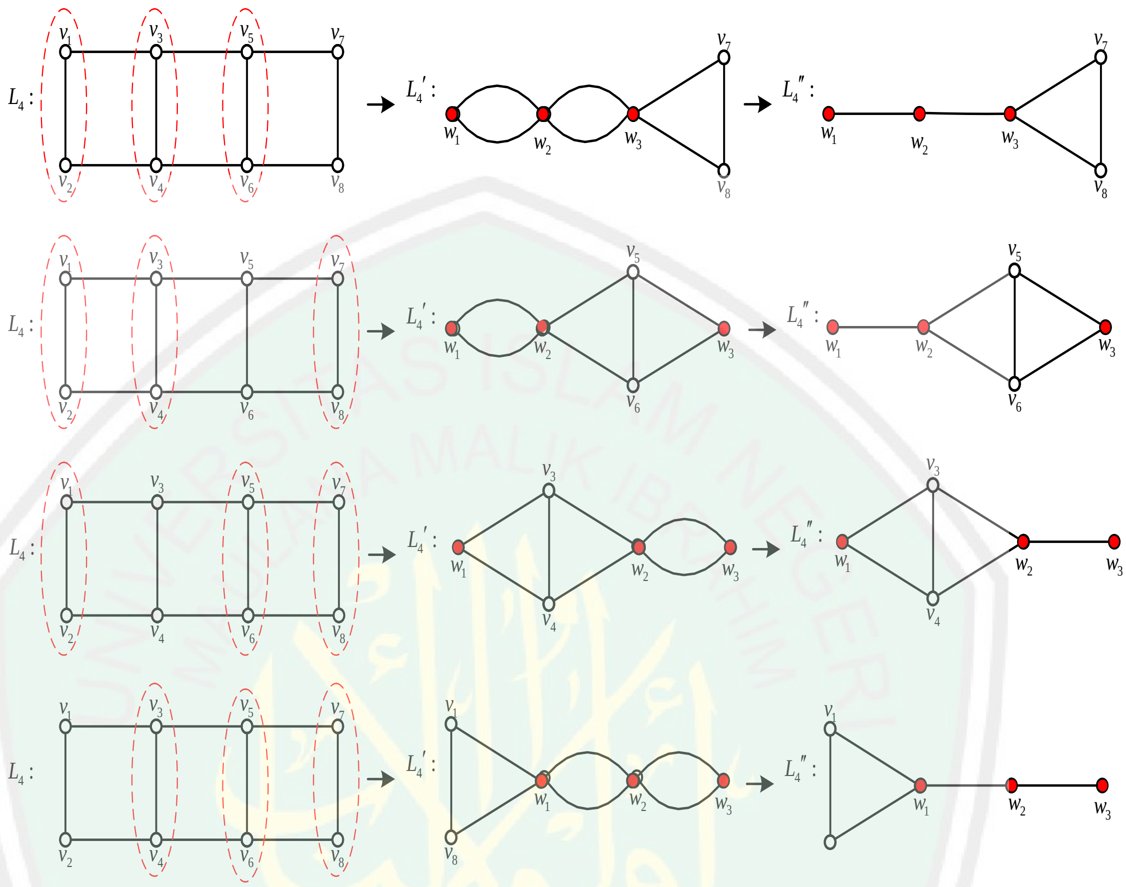

L4 :
v1 v3 v5 v7
v2 v4 v6 v8
L4' :
v1 v3 w1
w2 v6 v8



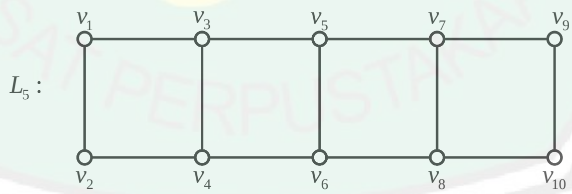
Kontraksi dasar dengan arah sisi tegak lurus *(vertical)*




L₄ :
L₄′ :
L₄″ :
v1 v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8
w1 w2 w3 w4

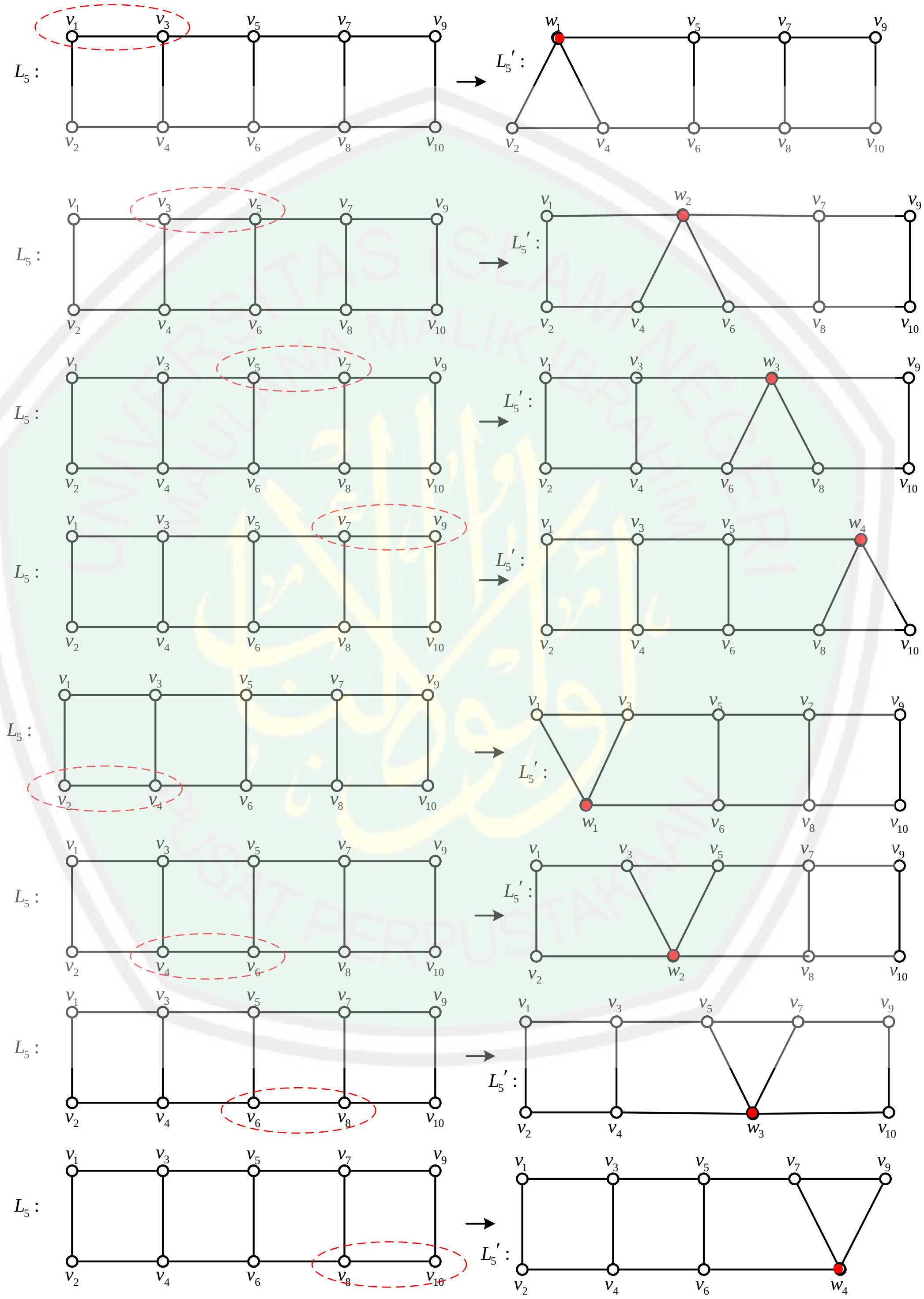


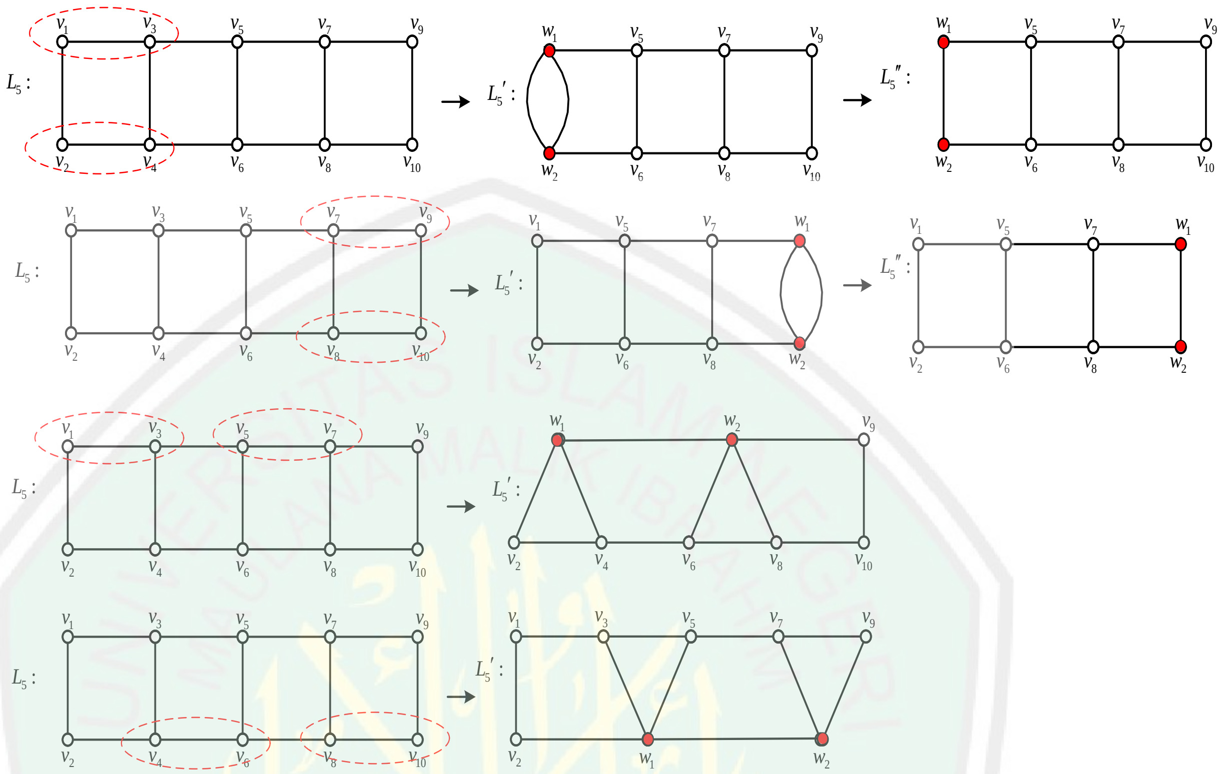
4. Graf tangga L_5:



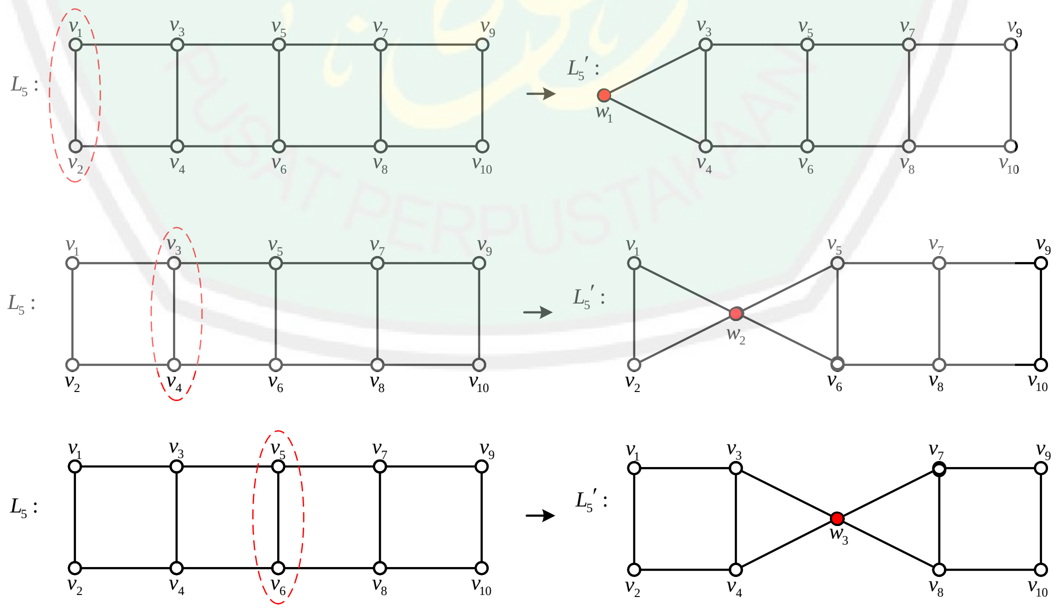
Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf tangga L_5 adalah sebagai berikut:

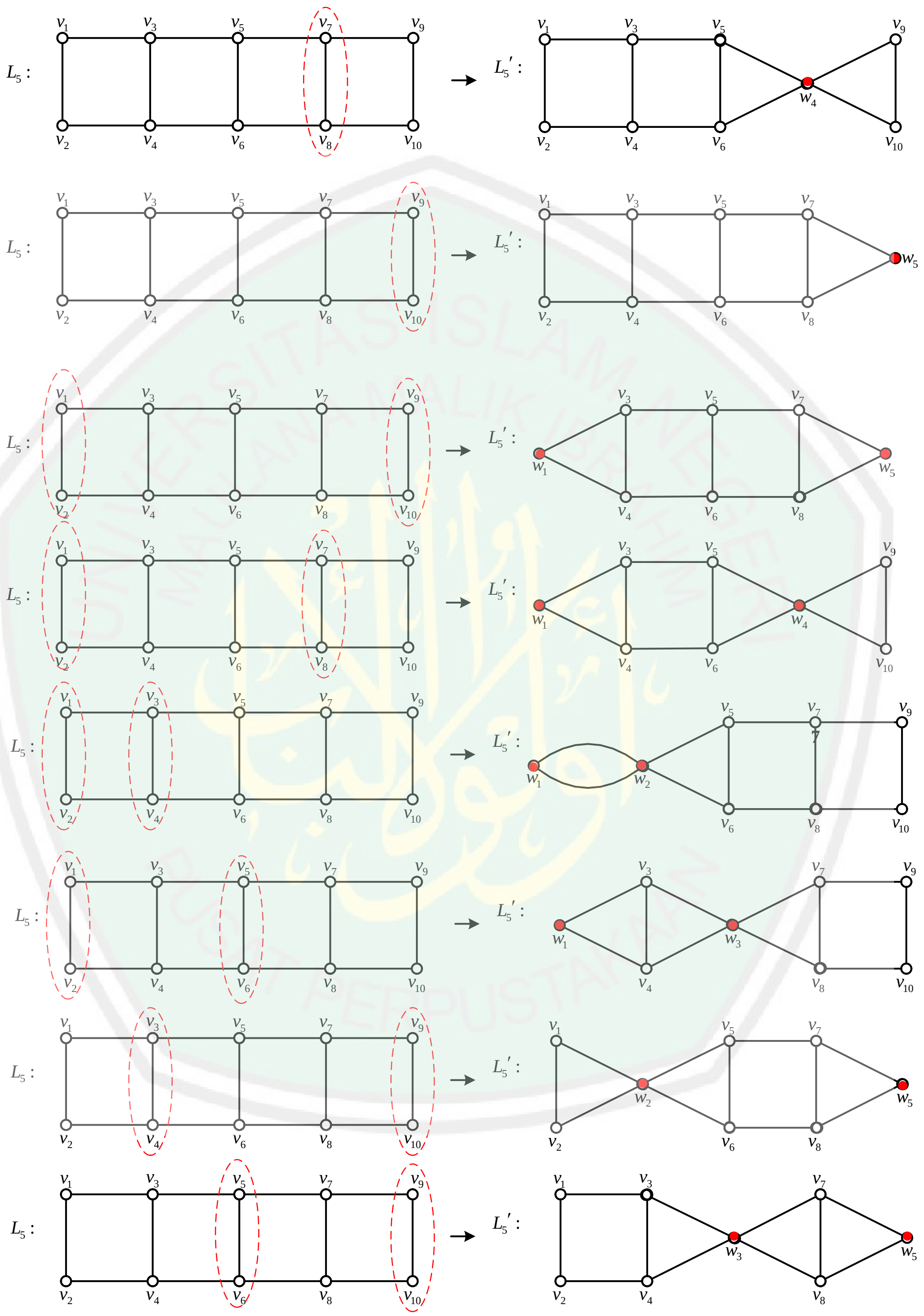
Kontraksi dasar dengan arah sisi mendatar *(horizontal)*

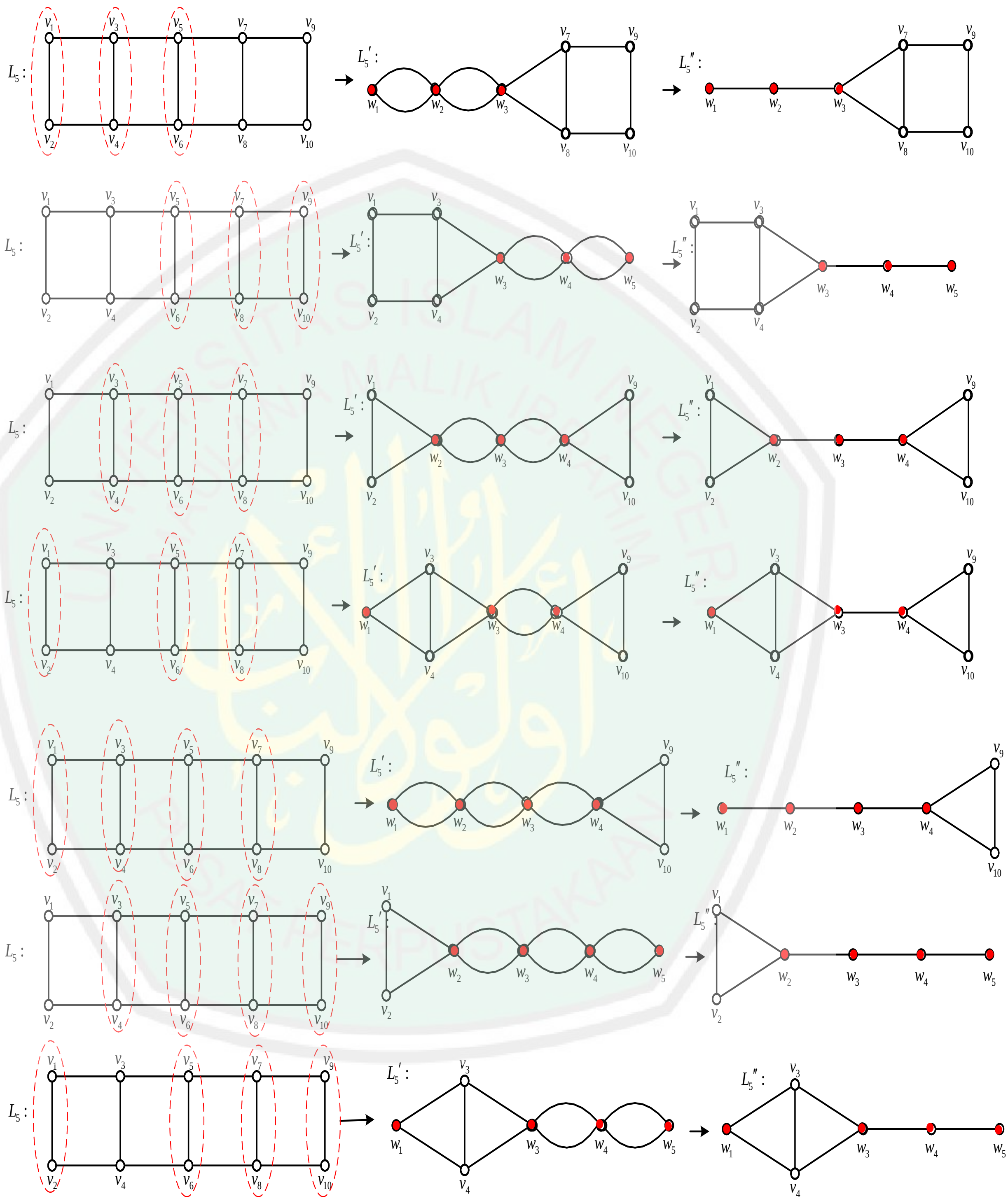




Kontraksi dasar dengan arah sisi tegak lurus *(vertical)*



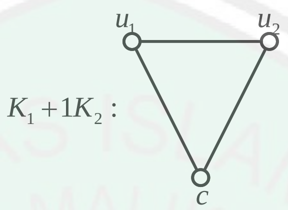



L_5 :
L_5' :
L_5'' :

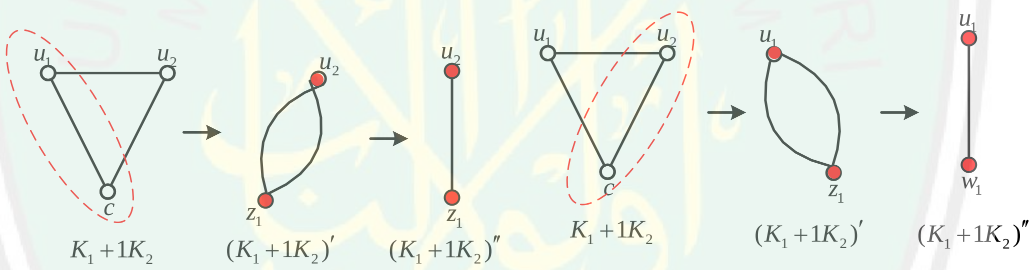
LAMPIRAN 2

Gambar Kontraksi Titik dan Kontraksi Sisi pada Graf Kincir $K_1 + mK_2, m \in \mathbb{N}$

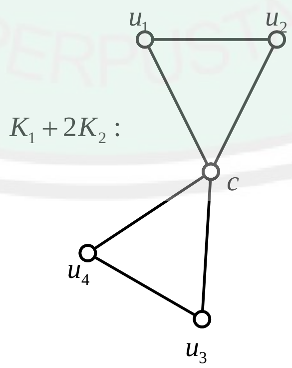
1. Graf kincir K_1+$1K_2$:



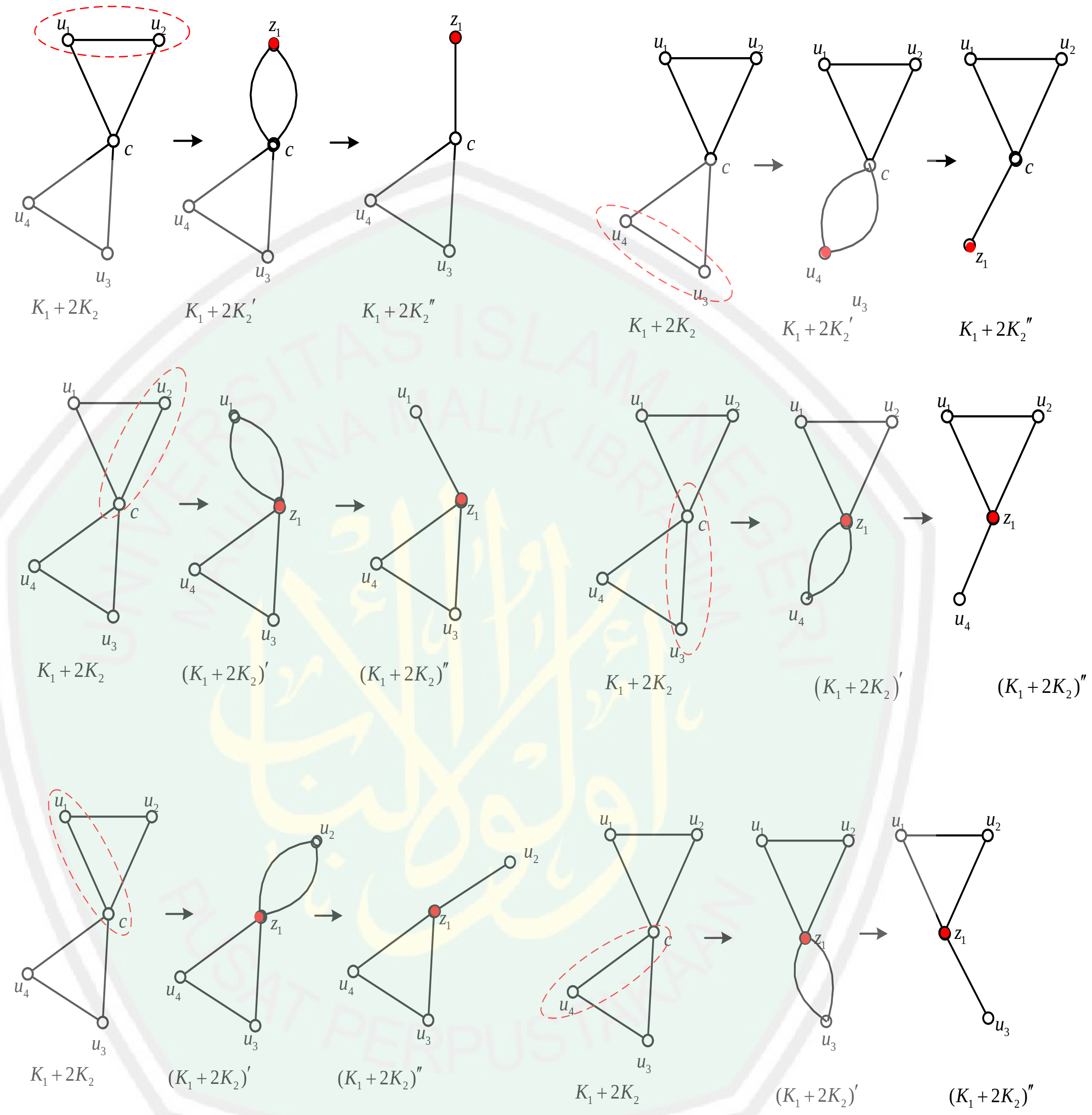
Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir $K_1 + 1K_2$ adalah sebagai berikut:

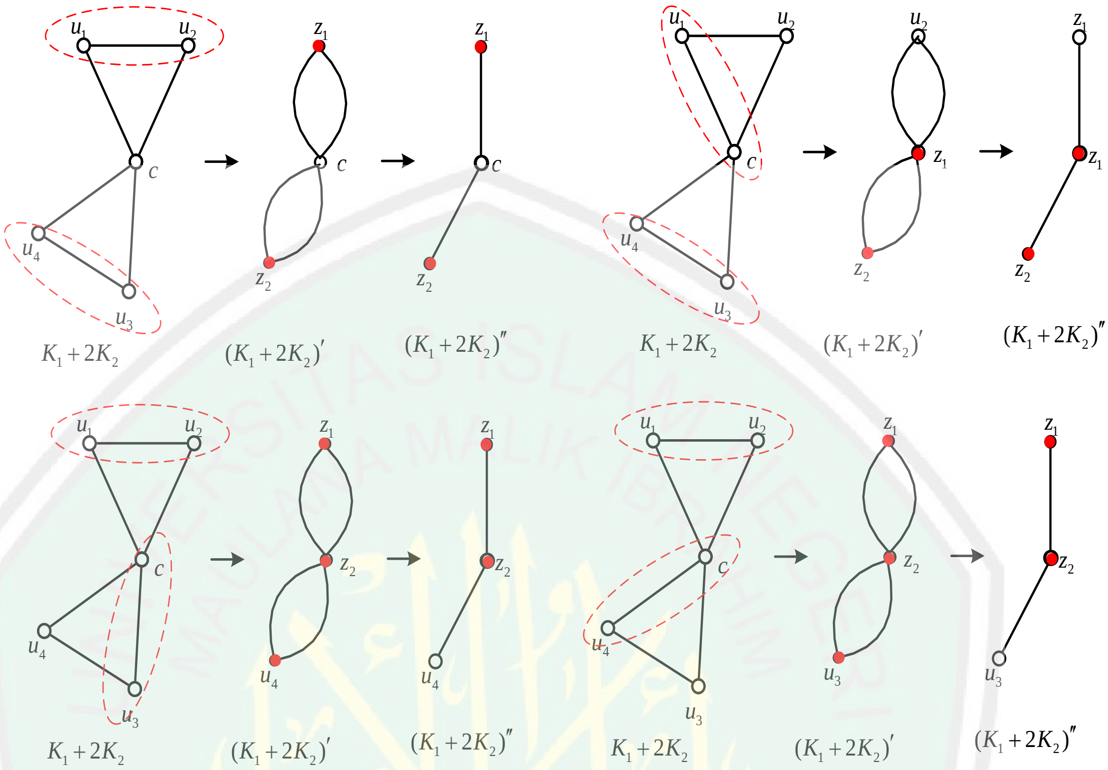


2. Graf kincir K_1+$2K_2$:



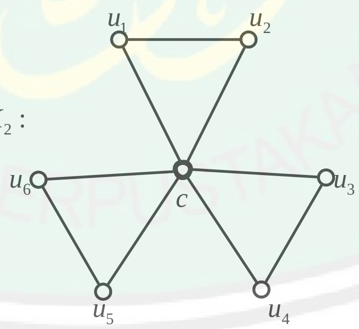
Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir $K_1 + 2K_2$ adalah sebagai berikut:


K_1+2K_2
K_1+2K_2'
K_1+2K_2''
K_1+2K_2
K_1+2K_2'
K_1+2K_2''
K_1+2K_2
$(K_1+2K_2)'$
$(K_1+2K_2)''$
K_1+2K_2
$(K_1+2K_2)'$
$(K_1+2K_2)''$
K_1+2K_2
$(K_1+2K_2)'$
$(K_1+2K_2)''$
K_1+2K_2
$(K_1+2K_2)'$
$(K_1+2K_2)''$

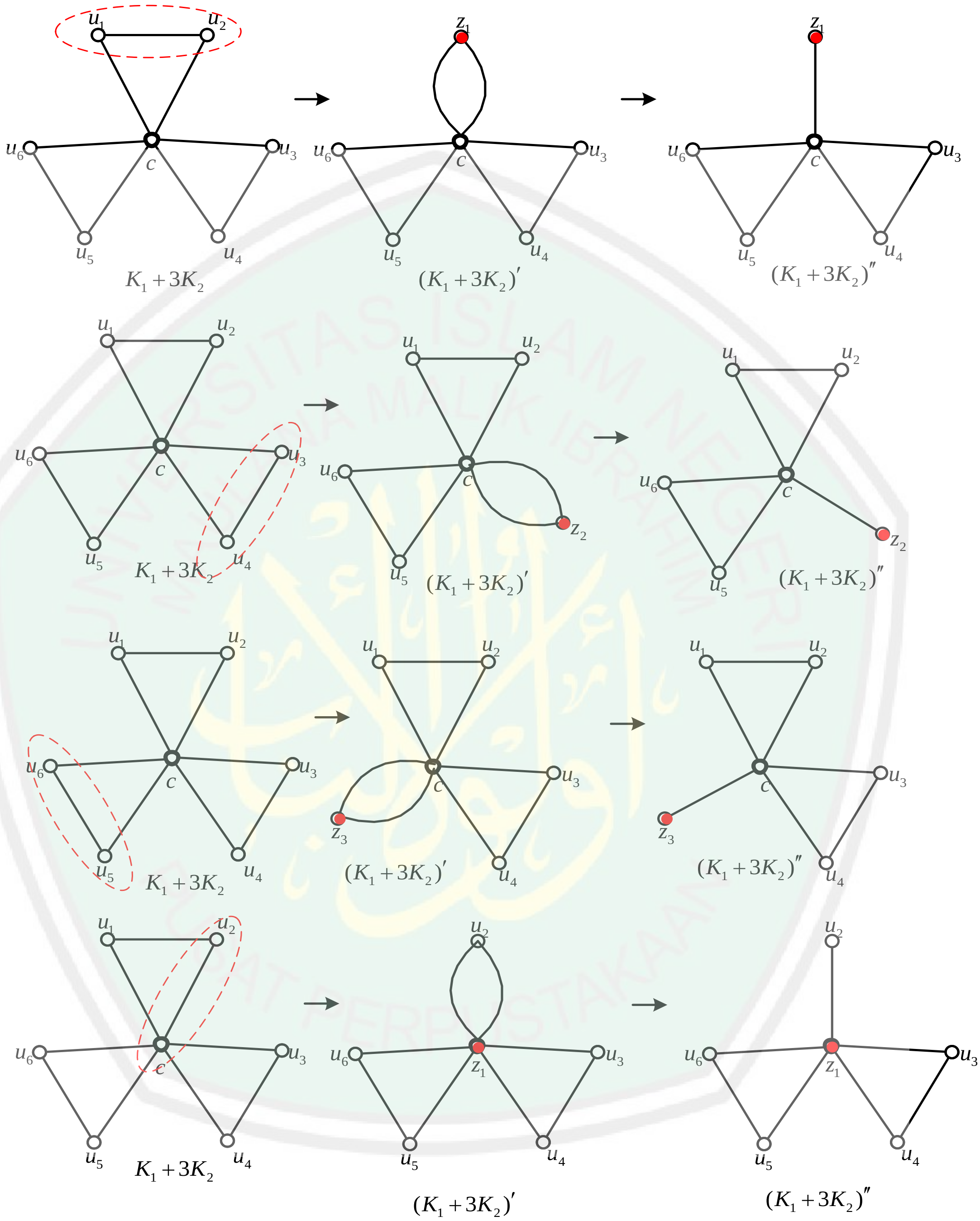


3. Graf kincir K_1+3K_2:

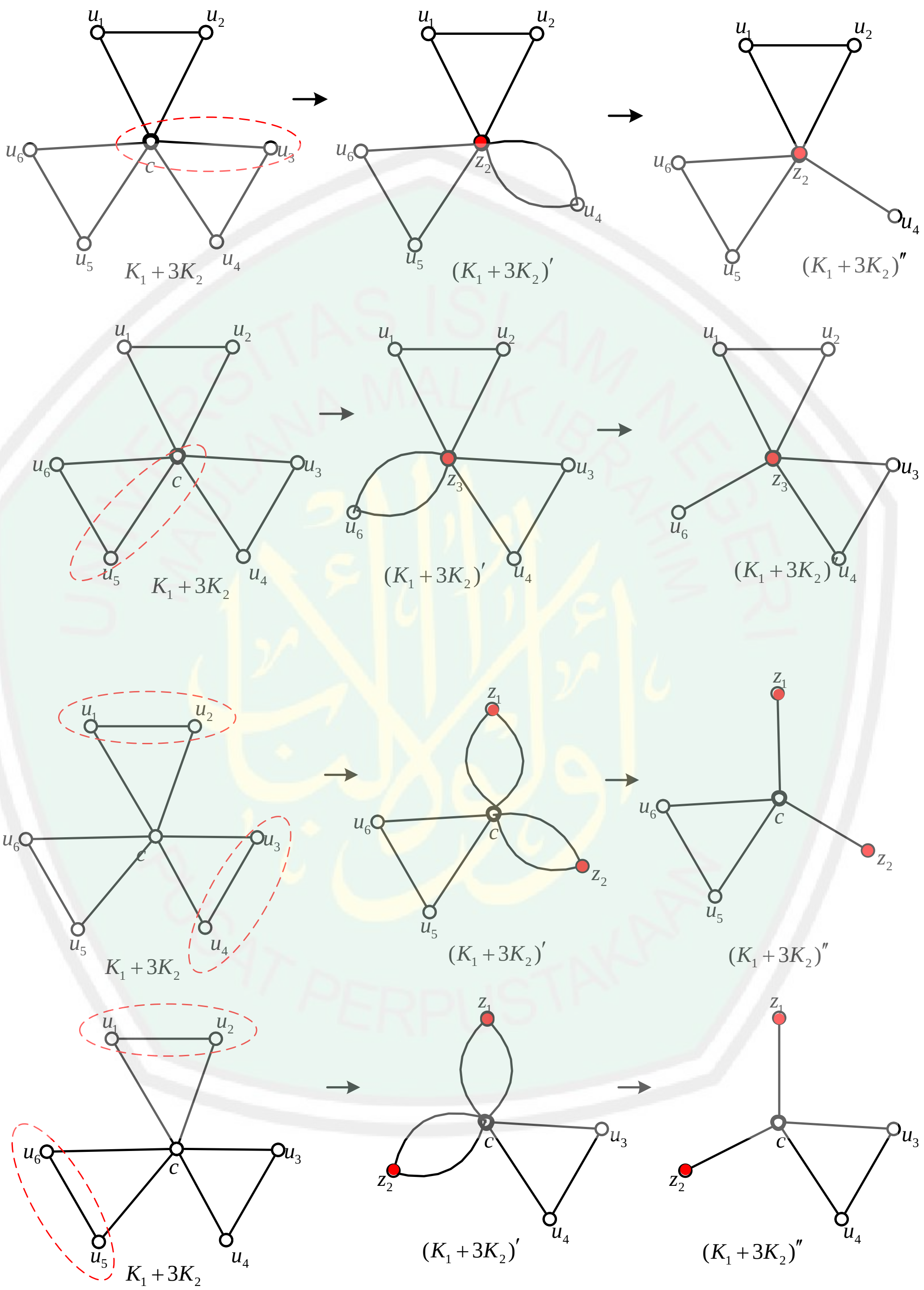
K_1+3K_2 :

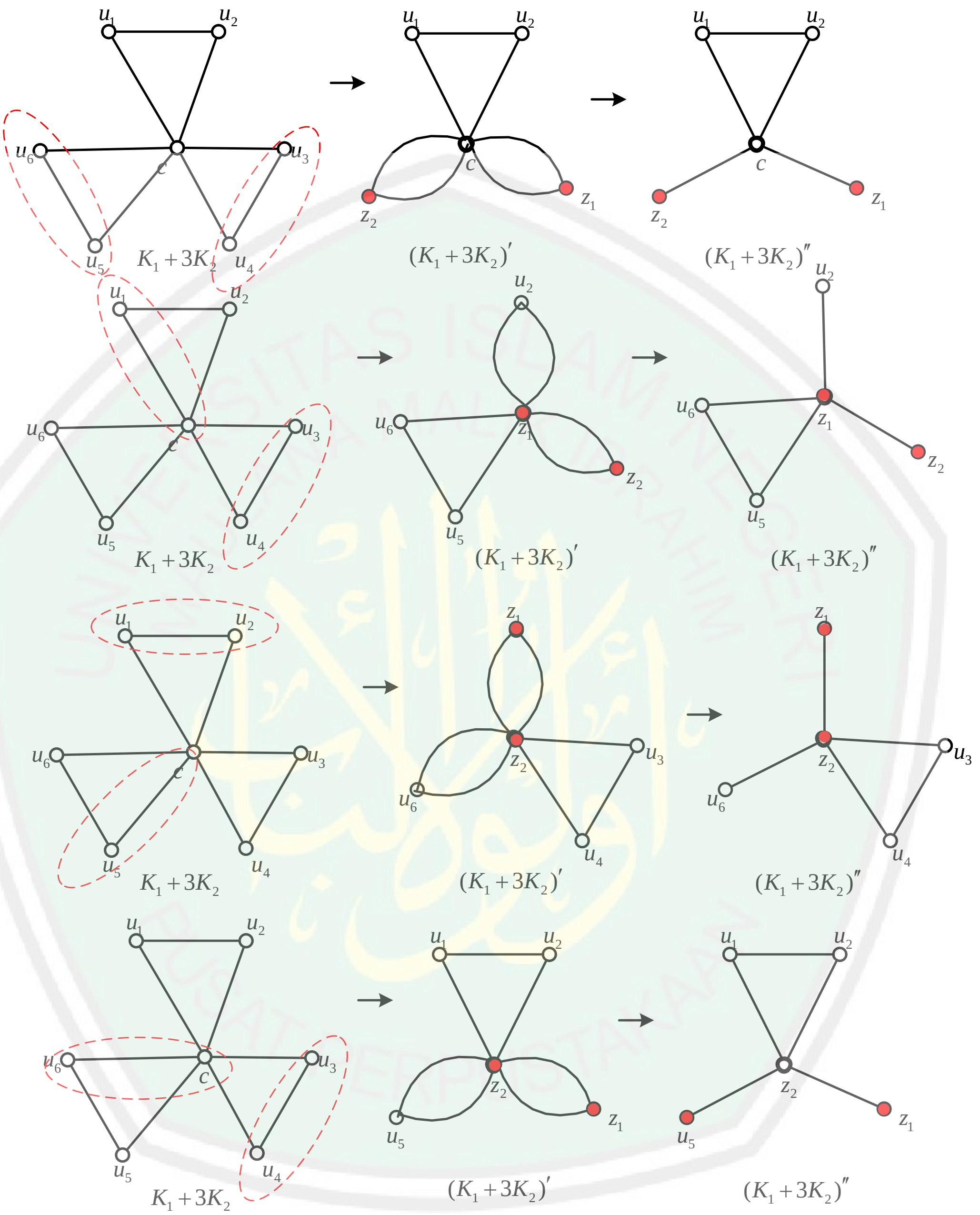


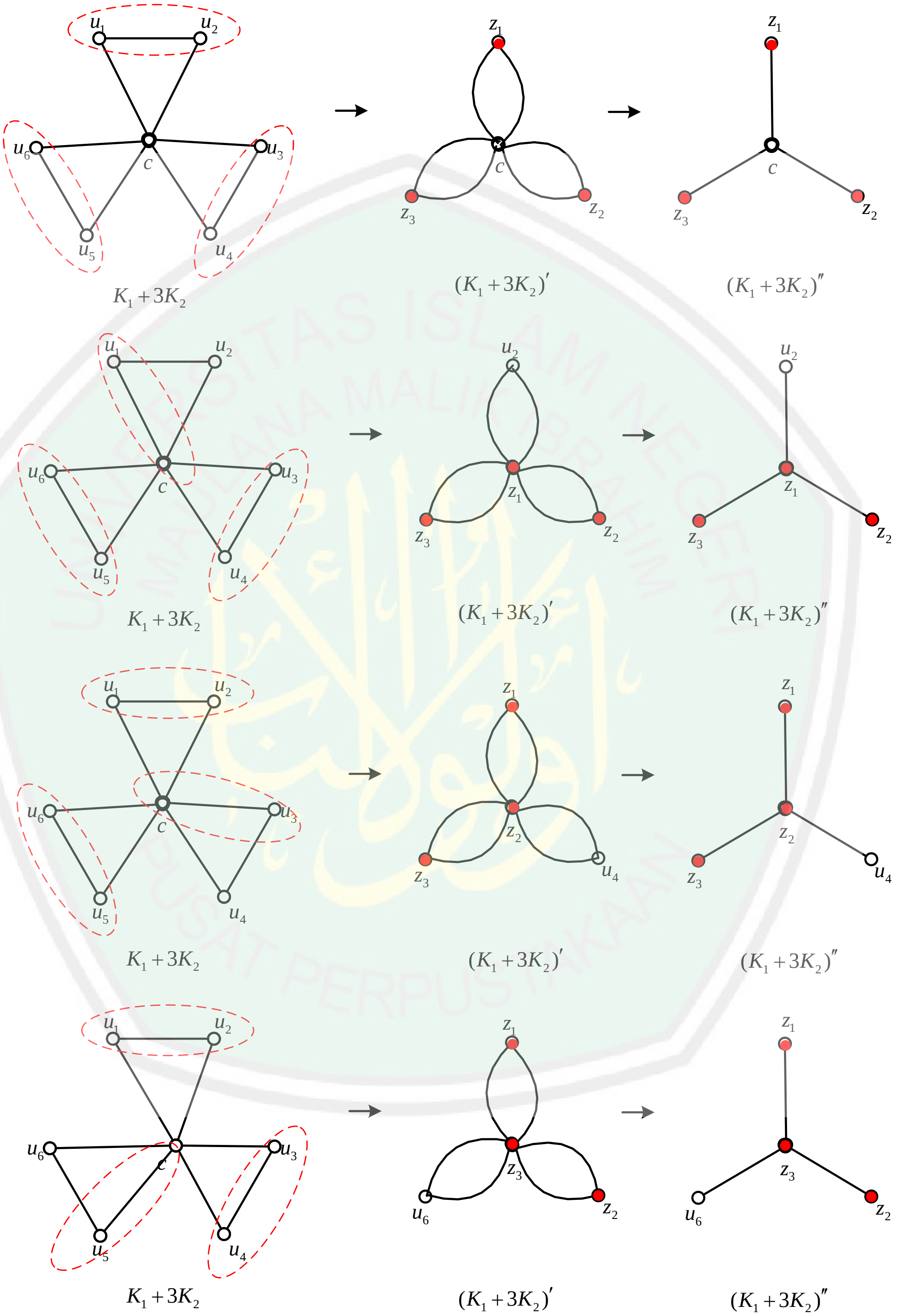
Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir K_1+3K_2 adalah sebagai berikut:



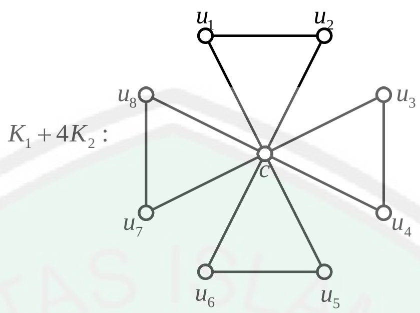
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$


K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
(K_1+3K_2)
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$

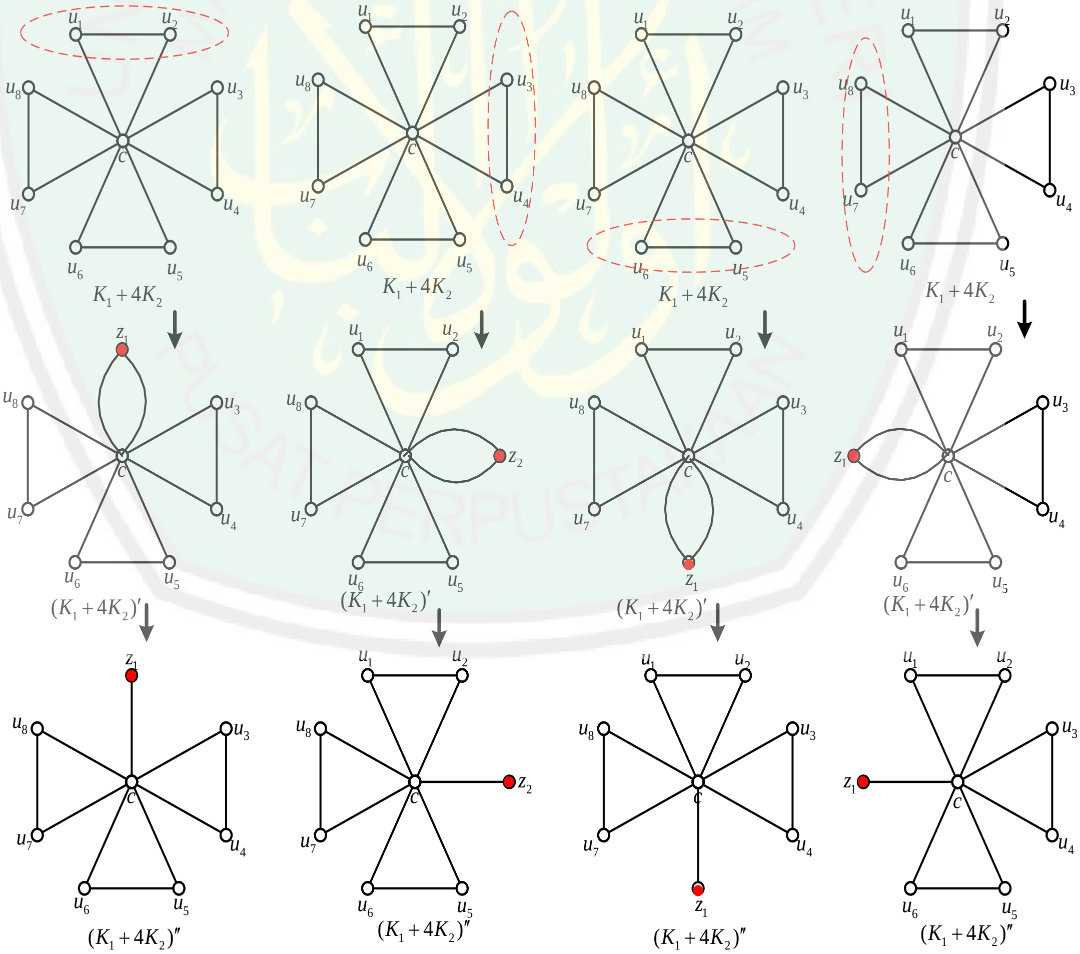

K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$

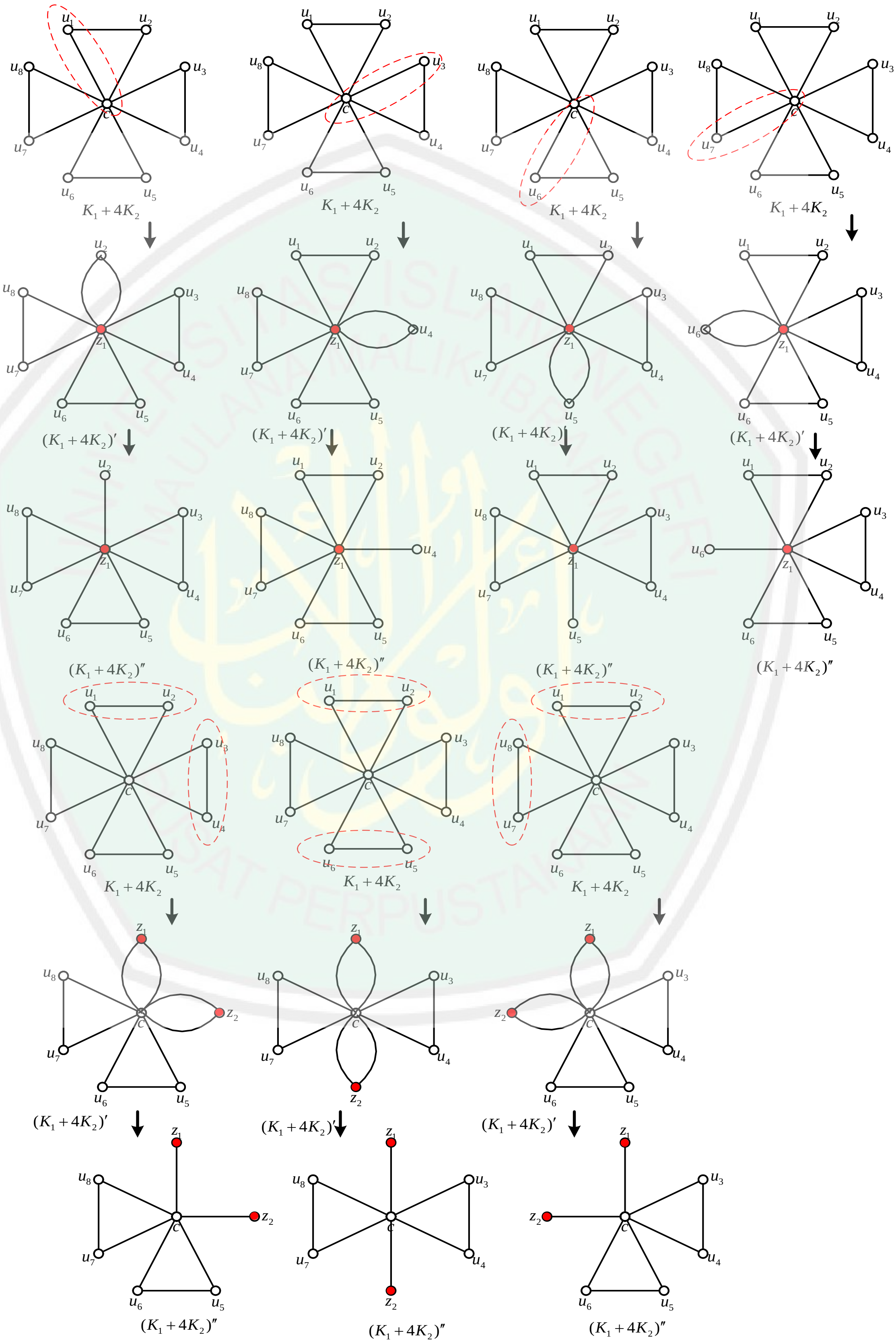

u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 c
z_1 z_2 z_3
K_1+3K_2
$(K_1+3K_2)'$
$(K_1+3K_2)''$

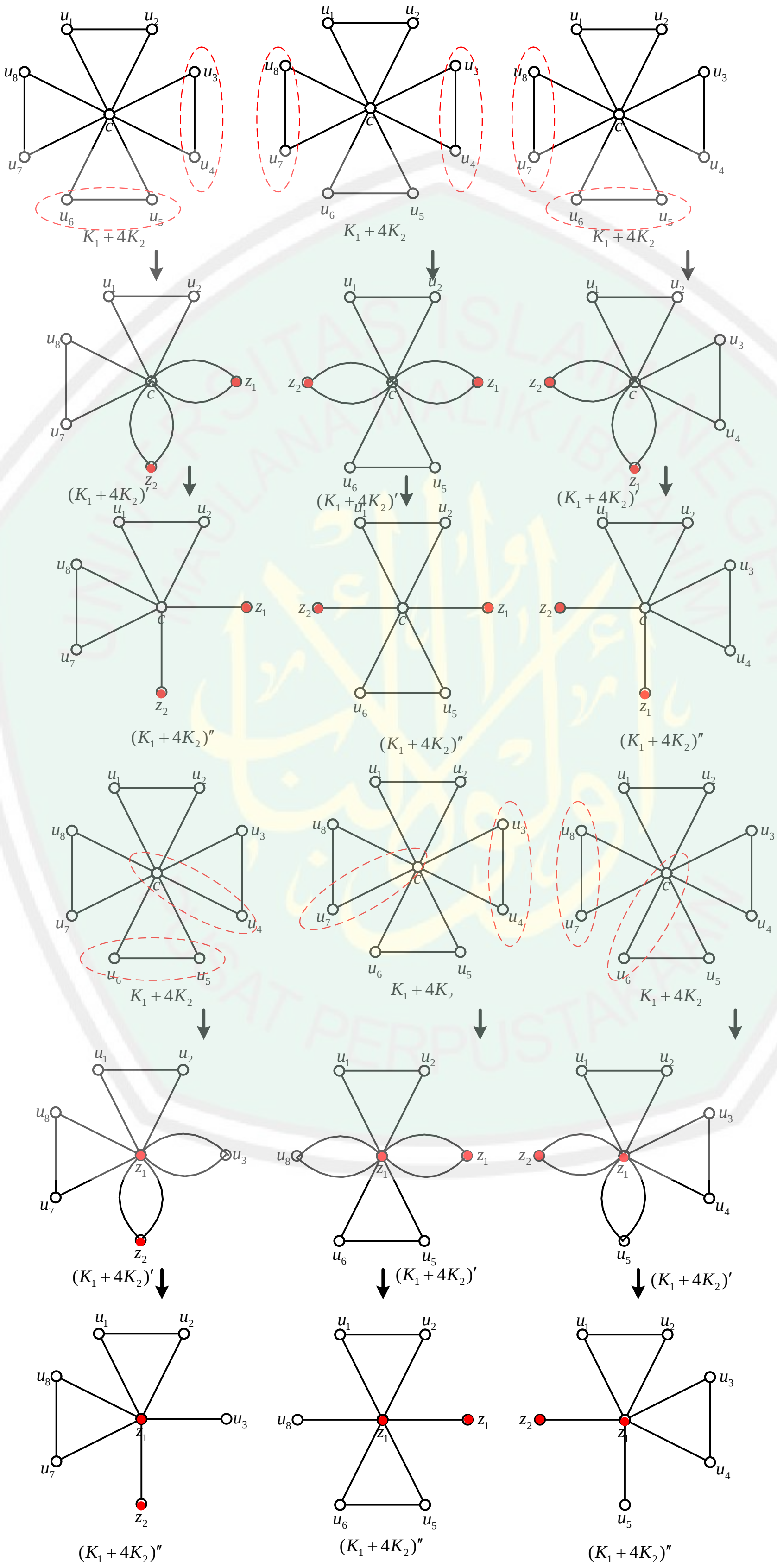
4. Graf kincir K_1+$4K_2$:

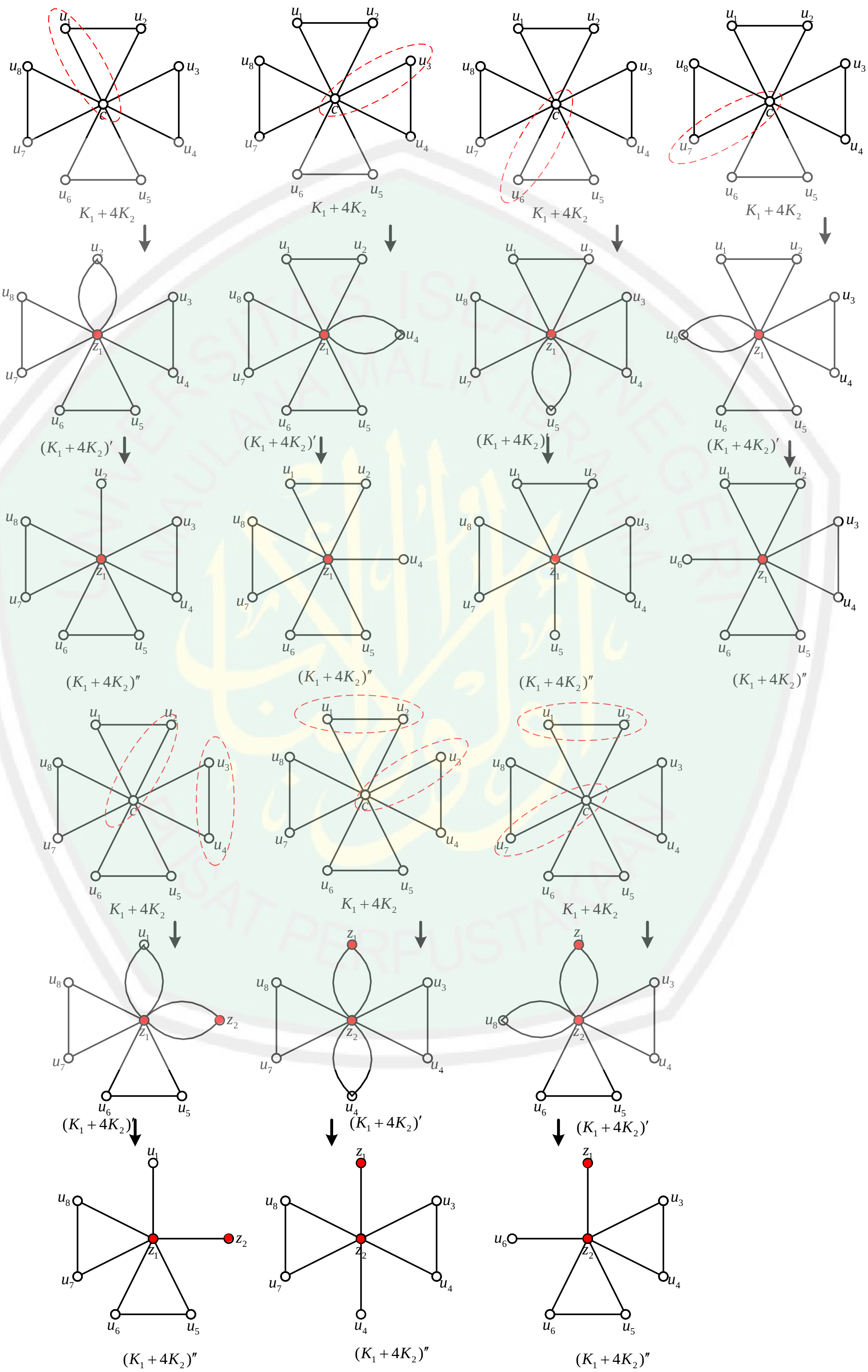


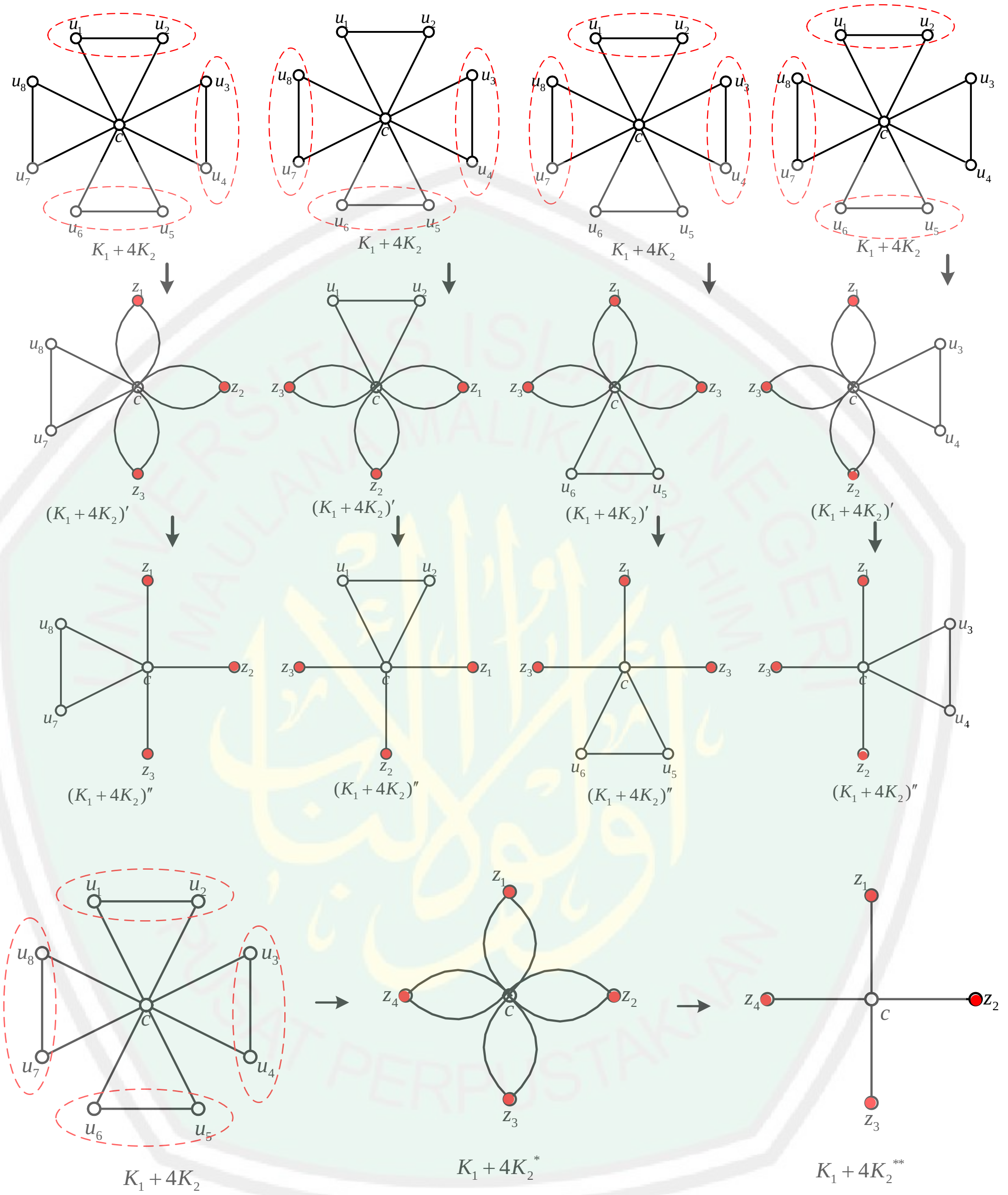
Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir K_1+4K_2 adalah sebagai berikut:




K_1+4K_2
K_1+4K_2
K_1+4K_2
K_1+4K_2
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$
K_1+4K_2
K_1+4K_2
K_1+4K_2
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$

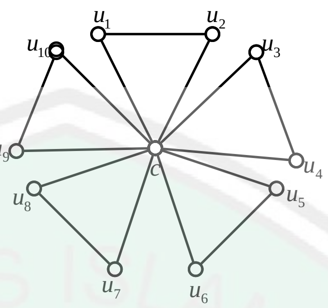

K1 + 4K2
K1 + 4K2
K1 + 4K2
(K1 + 4K2)′
(K1 + 4K2)′
(K1 + 4K2)′
(K1 + 4K2)″
(K1 + 4K2)″
(K1 + 4K2)″
K1 + 4K2
K1 + 4K2
K1 + 4K2
(K1 + 4K2)′
(K1 + 4K2)′
(K1 + 4K2)′
(K1 + 4K2)″
(K1 + 4K2)″
(K1 + 4K2)″


K_1+4K_2
K_1+4K_2
K_1+4K_2
K_1+4K_2
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$
K_1+4K_2
K_1+4K_2
K_1+4K_2
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$
$(K_1+4K_2)''$

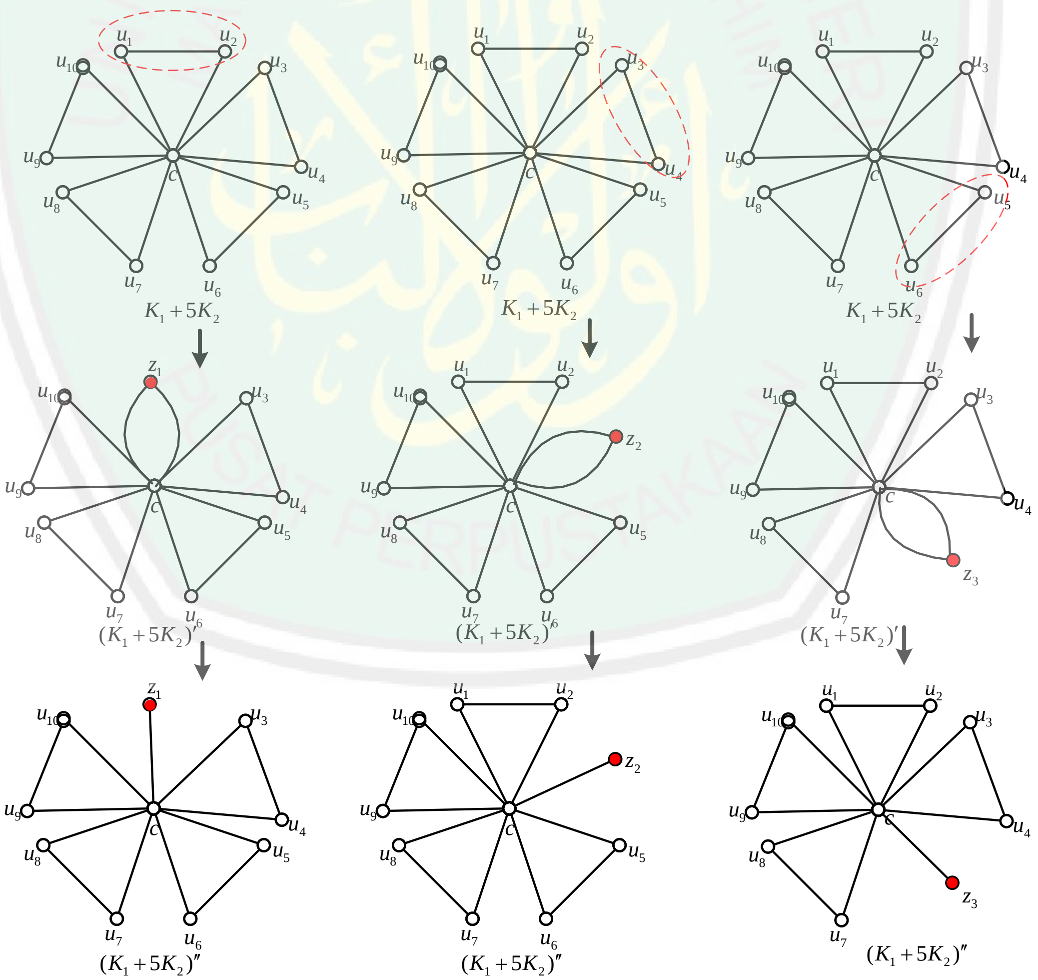

K_1+4K_2
$(K_1+4K_2)'$
$(K_1+4K_2)''$
$K_1+4K_2^*$
$K_1+4K_2^{**}$
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 c
z_1 z_2 z_3 z_4

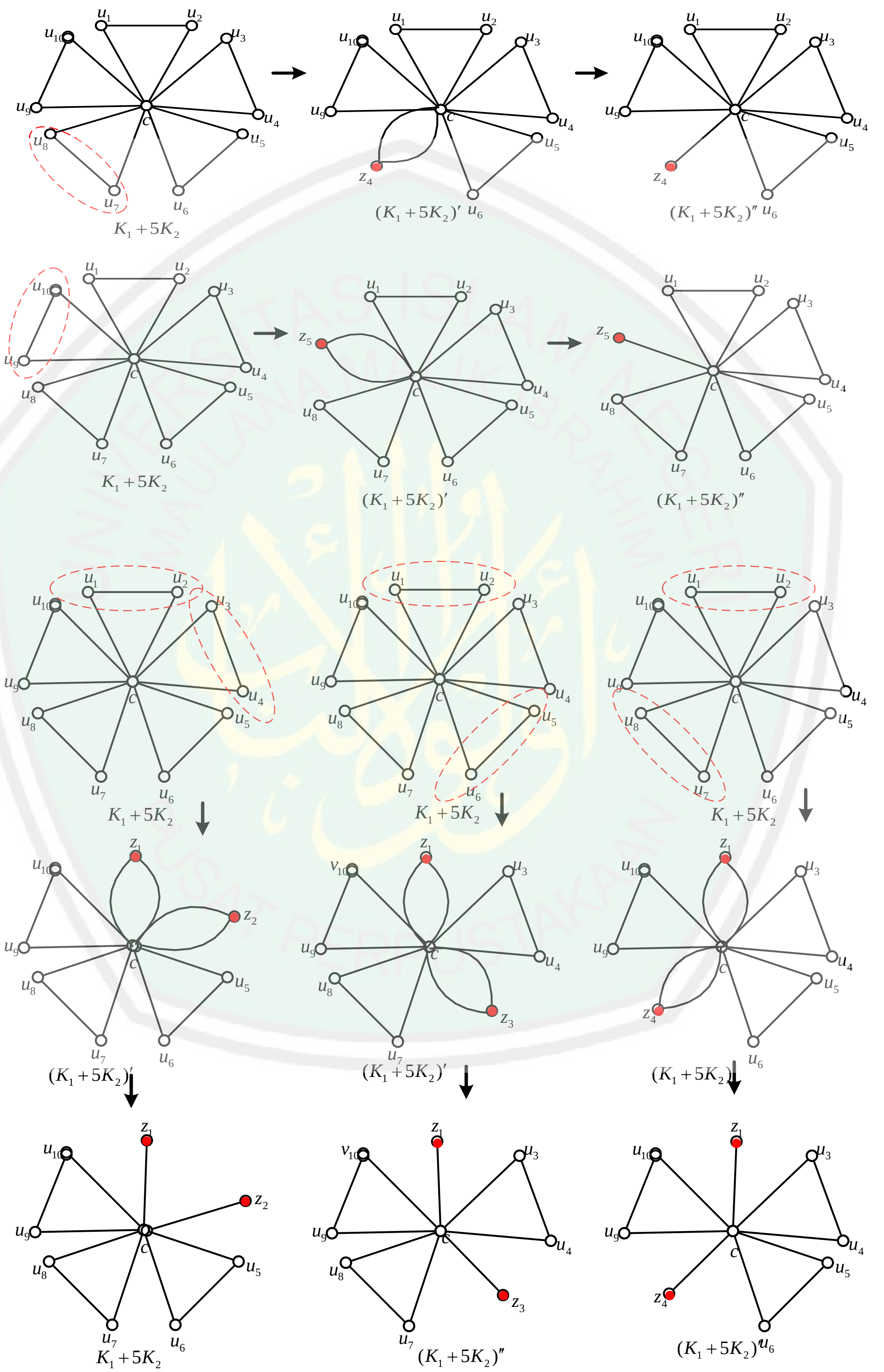
5. Graf kincir K_1+5K_2:

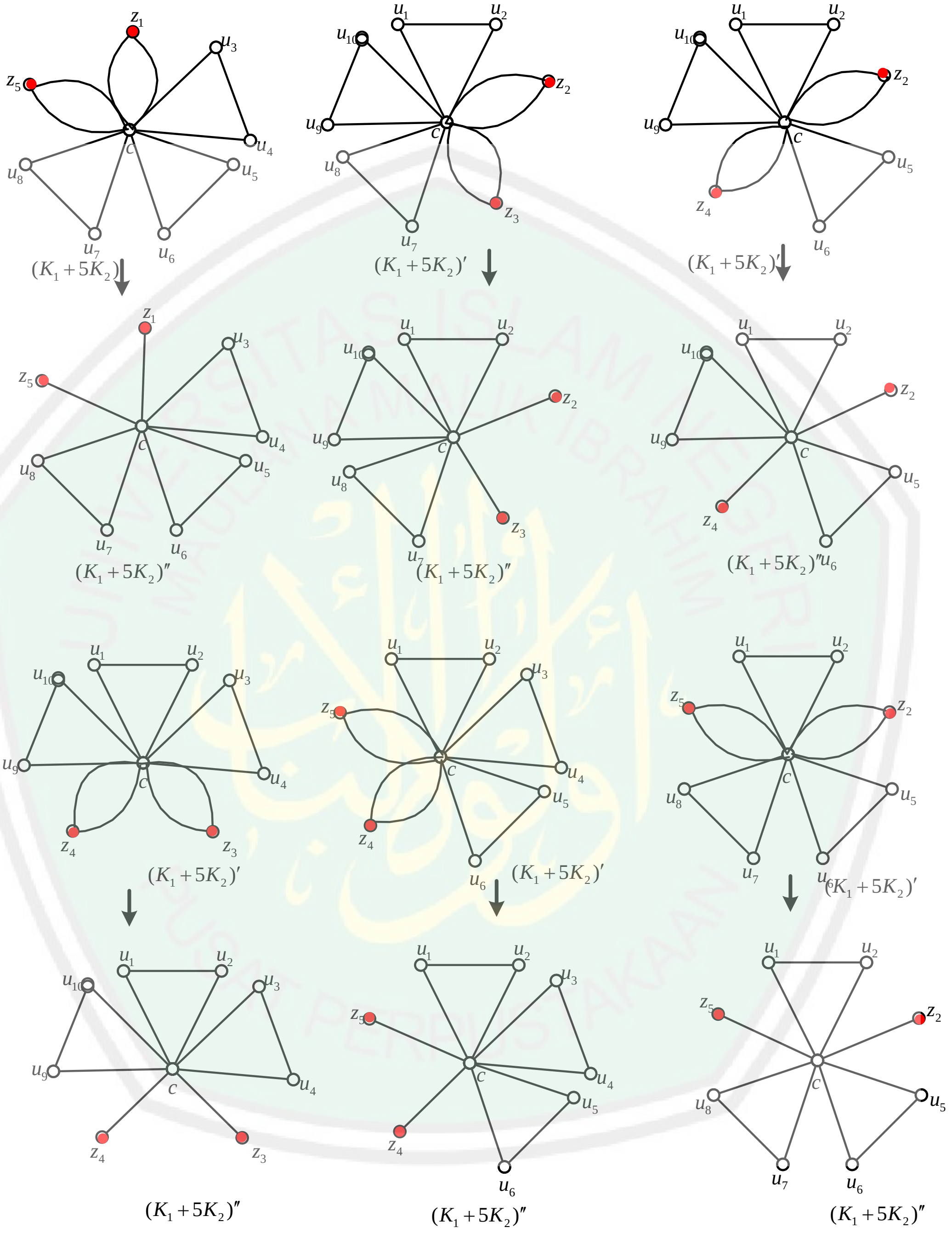
$K_1 + 5K_2$:

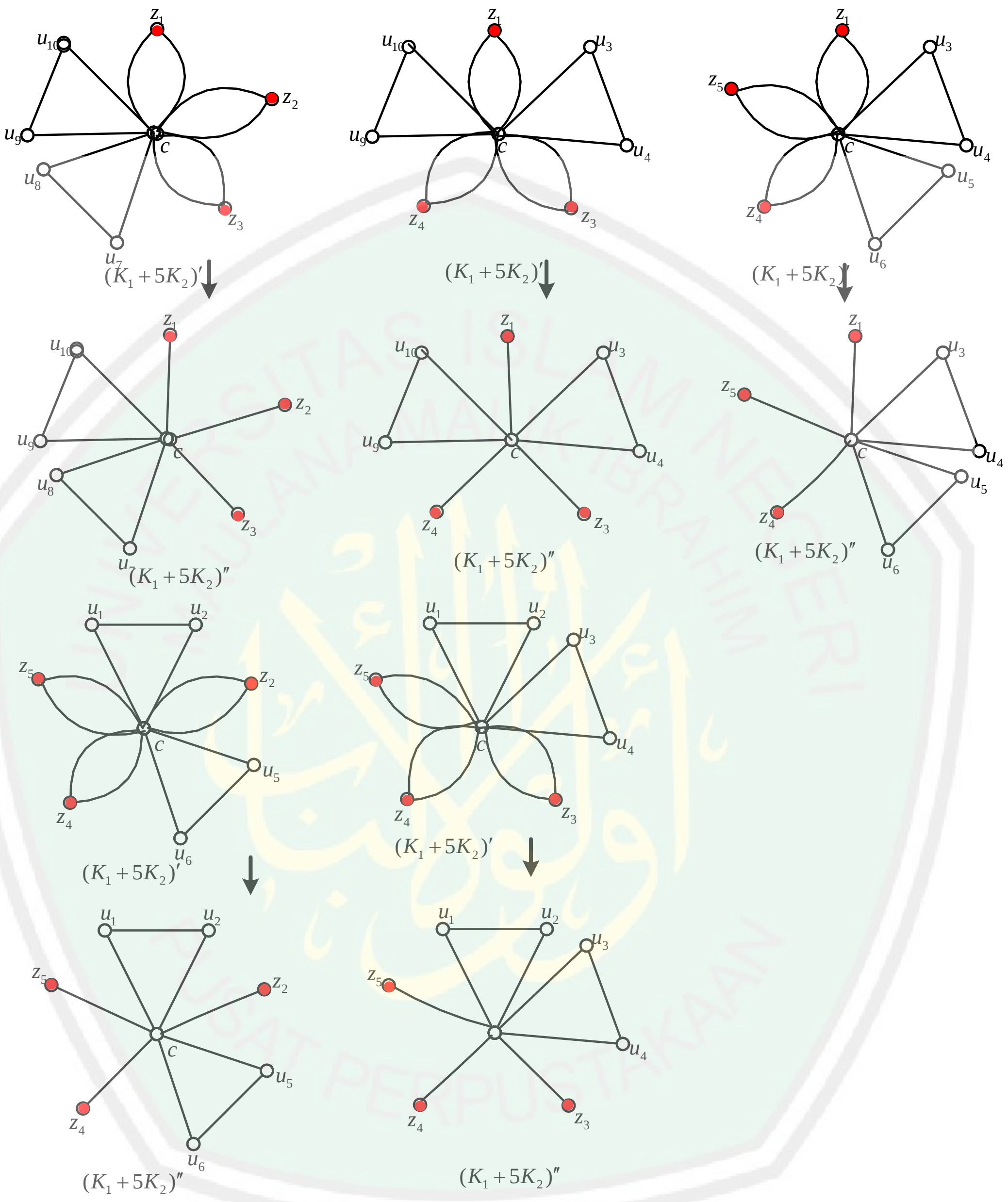


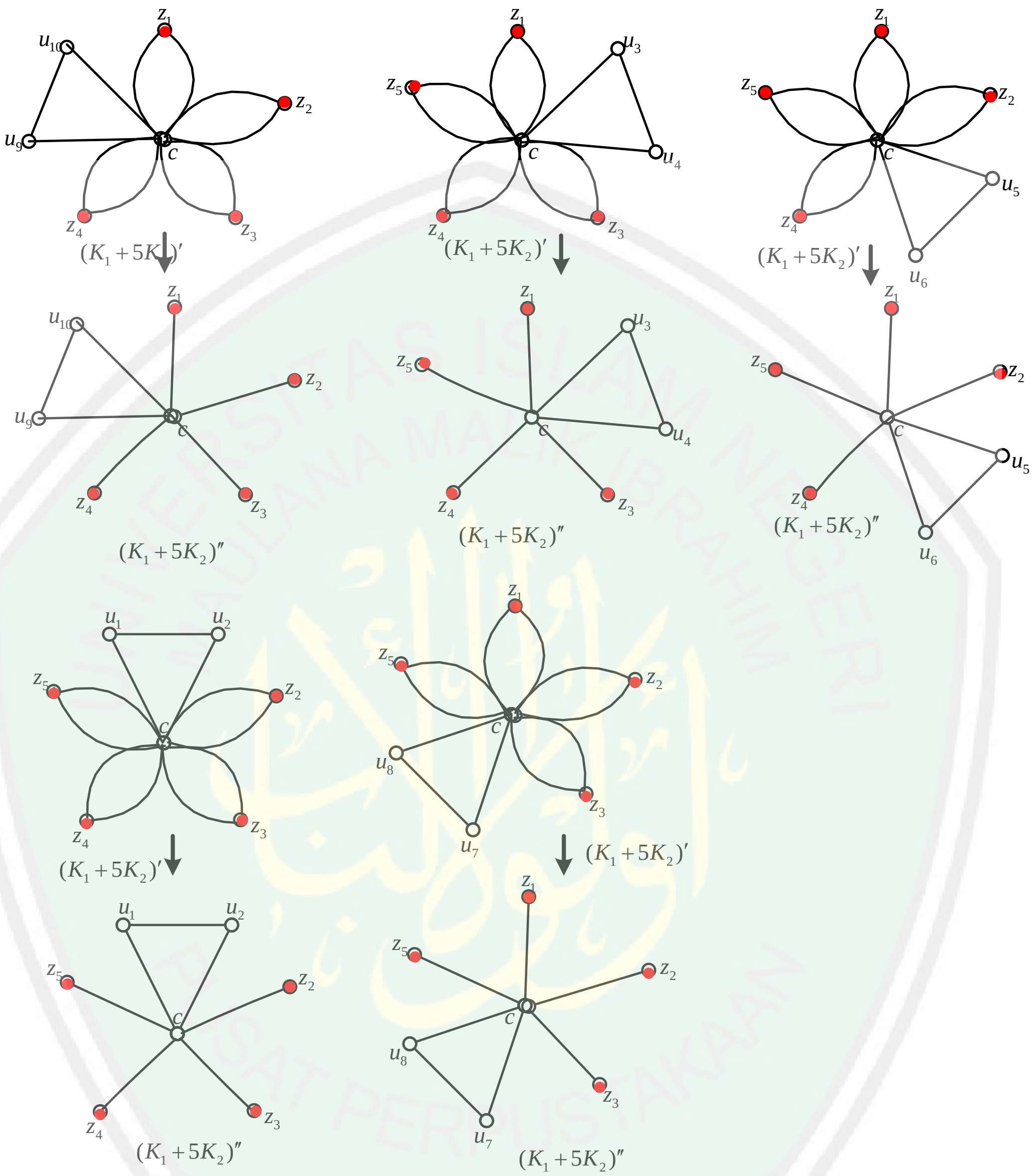
Semua kemungkinan cara mengkontraksi graf kincir $K_1 + 5K_2$ adalah sebagai berikut:




K_1+5K_2
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)''$
K_1+5K_2
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)''$
K_1+5K_2
K_1+5K_2
K_1+5K_2
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
K_1+5K_2
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$


$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$


$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$


$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)'$
$(K_1+5K_2)''$
$(K_1+5K_2)''$