

**ANALISIS SISTEM DINAMIK UNTUK MODEL KOMPETISI
GLUKOSA, INSULIN DAN EPINEFRIN PADA DIABETES DALAM
DARAH**

SKRIPSI

Oleh:
YUSUF ARIFUDDIN
NIM. 09610043



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**ANALISIS SISTEM DINAMIK UNTUK MODEL KOMPETISI
GLUKOSA, INSULIN DAN EPINEFRIN PADA DIABETES DALAM
DARAH**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
YUSUF ARIFUDDIN
NIM. 09610043

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**ANALISIS SISTEM DINAMIK UNTUK MODEL KOMPETISI
GLUKOSA, INSULIN DAN EPINEFRIN PADA DIABETES DALAM
DARAH**

SKRIPSI

Oleh:
YUSUF ARIFUDDIN
NIM. 09610043

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 27 Desember 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Achmad Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**ANALISIS SISTEM DINAMIK UNTUK MODEL KOMPETISI
GLUKOSA, INSULIN DAN EPINEFRIN PADA DIABETES DALAM
DARAH**

SKRIPSI

Oleh:
YUSUF ARIFUDDIN
NIM. 09610043

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 09 Januari 2014

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si _____
NIP. 19650414 200312 1 001

Ketua Penguji : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd _____
NIP. 19710420 200003 1 003

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd _____
NIP. 19770521 200501 2 004

Anggota Penguji : Achmad Nashichuddin, M.A _____
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Yusuf Arifuddin

NIM : 09610043

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada kajian pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Januari 2014
Yang membuat pernyataan,

Yusuf Arifuddin
NIM. 09610043

MOTTO

Resiko Diabetes itu Nyata,
Tapi Manisnya Hidup, Allah & Kita yang Menentukan



PERSEMBAHAN

Do'a dan usaha,
Air mata dan air keringat,
Rasa syukur dan rasa ampun
Kepada Allah Subhanahu wa Ta'ala.

Karya tulis ini, penulis persembahkan kepada:

*Ayah dan ibu terbaik dunia akhirat,
selalu memberikan yang terbaik untuk penulis.
Kakak adik tersayang, yang selalu memberikan do'a.
Seluruh keluarga besar penulis, yang selalu memberikan dukungan.
Teman-teman seperjuangan, yang memberikan warna dalam mengarungi
kehidupan.*

*Bagi semua makhluk hidup, semoga karya tulis ini bermanfaat dunia dan akhirat
sebagai tanda ibadah bagi penulis.*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Analisis Sistem Dinamik untuk Model Kompetisi Glukosa, Insulin dan Epinefrin pada Diabetes dalam Darah” ini dengan baik dan benar. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dosen Wali Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

5. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan terbaik selama penulisan skripsi ini.
6. Achmad Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
7. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh staf dan karyawan.
8. Ayah dan bunda terbaik, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil. Cucuran air mata dan cucuran keringat dalam membahagiakan penulis sepanjang masa, tidak hanya pada masa kuliah.
9. Kakak adik tercinta, yang selalu memberikan do'a dengan tulus.
10. Teman-teman seperjuangan, terima kasih atas do'a serta warna kehidupan yang kalian berikan.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas bantuannya yang tulus.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan, khususnya dibidang Matematika. Amin.

Malang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR ISTILAH	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
البحث مستخلص	xviii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Batasan Masalah	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Metode Penelitian	4
1.7 Sistematika Penulisan	4
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial	6
2.2 Persamaan Diferensial Linier	7
2.3 Sistem Persamaan Linier	8
2.4 Pemodelan Matematika	10
2.5 Titik Tetap atau <i>Fixed Point</i>	12
2.5.1 Tipe Kestabilan Titik Tetap.....	12
2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	13
2.7 Analisis Bidang Fase atau <i>Phase Portrait</i>	14
2.7.1 Contoh Bidang Fase untuk Nilai Eigen Kompleks	25
2.2.1 Contoh Bidang Fase untuk Nilai Eigen Riil Berulang	32
2.8 Deteksi Diabetes	38
2.9 Sikap Muslim Ketika Mengalami Musibah	39
 BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Analisis Model Kompetisi Glukosa, Insulin dan Epinefrin	44
3.1.1 Identifikasi Model Matematika	44

3.1.2 Besaran Parameter	48
3.1.3 Tahapan Diabetes pada Manusia	48
3.2 Analisis Dinamik Model Kompetisi Glukosa, Insulin dan Epinefrin	49
3.2.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	52
3.3 Interpretasi Hasil	61
3.4 Integrasi Penyakit Diabetes dalam Kajian Islam	63
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	65
4.2 Saran	65
DAFTAR PUSTAKA	66
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Langkah-Langkah Membangun Model 10

Gambar 2.2. Panah Vektor dengan Arah Vektor Eigen 16

Gambar 2.3. *Phase Portrait* untuk *Saddle* 19

Gambar 2.4. *Phase Portrait* untuk *Stable Node* 22

Gambar 2.5. *Phase Portrait* untuk Nilai Eigen 0 24

Gambar 2.6. *Phase Portrait* untuk *Elliptic Center* 27

Gambar 2.7. *Phase Portrait* untuk *Stable Fokus* 29

Gambar 2.8. *Phase Portrait* untuk *Degenerate Stable Node* 37

Gambar 3.1. Skema Dinamik Model Diabetes 47

Gambar 3.2. Grafik Model Diabetes pada Interval Waktu 50

Gambar 3.3. *Phase Portrait Node* dan *Spiral* untuk Model Diabetes 60

DAFTAR ISTILAH

Patologi	: Kajian dan diagnosis penyakit melalui pemeriksaan organ, jaringan, cairan tubuh dan seluruh tubuh.
Fisiologi	: Salah satu dari cabang biologi yang mempelajari berlangsungnya sistem kehidupan.
Glikogen	: Tepung putih manis yang menjadi tempat menyimpan karbohidrat.
Polisakarida	: Karbohidrat yang dibentuk oleh penggabungan molekul monosakarida yang banyak.
Lipase	: Enzim yang menguraikan lemak menjadi alkohol dan asam lemak terdapat dihati, pankreas, perut, dan organ pencernaan lainnya.
Substrat	: Senyawa kimia yang mengalami perubahan oleh hasil kerja enzim.
Thibbun nabawi	: Tindakan dan perkataan (hadits) Nabi Islam Muhammad mengenai penyakit, pengobatan, kebersihan, maupun tulisan oleh para sarjana untuk mengumpulkan dan menjelaskan tradisi-tradisi tersebut.

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Dinamik Linier 14

Tabel 3.1. Konsentrasi Glukosa Darah Setelah Penuangan Insulin dan
Dihubungkan dengan Epinefrin (mmol/L)..... 48

Tabel 3.2. Jumlah Konsentrasi Glukosa, Insulin dan Epinefrin pada Waktu t . 59



DAFTAR SIMBOL

<i>a</i>	: Penghasilan glukosa ditingkatkan dari glikogen gangguan
<i>b</i>	: Penghasilan glukosa ditingkatkan dari laktat dan asam amino
<i>c</i>	: Mobilisasi lemak ditingkatkan oleh rangsangan dari hormon lipase sensitif
<i>d</i>	: Rangsangan jaringan kekecilan dari pengeluaran insulin dari pankreas sel- β
<i>e</i>	: Konsentrasi epinefrin
<i>g</i>	: Konsentrasi glukosa
<i>h</i>	: Konsentrasi insulin
<i>f, k, l, m, n</i>	: Variabel yang sudah ditambah konsentrasi epinefrin.
T_0	: Periode resonansi

ABSTRAK

Arifuddin, Yusuf. 2014. **Analisis Sistem Dinamik untuk Model Kompetisi Glukosa, Insulin dan Epinefrin pada Diabetes dalam Darah.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
(II) Achmad Nashichuddin, M.A

Kata Kunci: model matematis, sistem linier, sistem dinamik

Diabetes adalah penyakit yang ditandai dengan kadar glukosa darah melebihi nilai normal akibat tubuh kekurangan insulin yang diproduksi sel β pulau Langerhans yang berfungsi menyerap glukosa dalam darah untuk dijadikan energi, dan epinefrin merupakan kekuatan yang ada pada diri manusia dari segi emosional atau perasaan. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah.

Penelitian ini menggunakan metode sistem dinamik dengan mengetahui titik tetap, nilai eigen, vektor eigen, solusi umum, analisis *phase portrait* dan grafik model, sehingga dapat diinterpretasikan perilaku model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah.

Hasil dari sistem dinamik pada model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah menghasilkan nilai eigen riil negatif dan kompleks dengan nilai $a < 0$ maka dapat disimpulkan bahwa model *stable node* asimtotik dan *stable spiral* asimtotik serta kestabilan model terdapat pada $t \geq 4$.

Penelitian selanjutnya dapat dibahas mengenai analisis bifurkasi pada model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah. Metode bifurkasi mencoba untuk mengubah nilai parameter pada model dan membandingkannya dengan hasil parameter pada model sebelumnya.

ABSTRACT

Arifuddin, Yusuf. 2014. **Analysis of Dynamic Systems Model Competition for Glucose, Insulin and Epinephrine on the Diabetes in Blood**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology. State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Promotor:

(I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

(II) Achmad Nashichuddin, M.A

Keywords: mathematical models, linear systems, dynamical systems.

Diabetes is a disease characterized by blood glucose levels exceeded the normal value due to lack of insulin produced by the body β *Palau Langerhans* cells which serves to absorb glucose in the blood for energy, and epinephrine are the strengths that exist in human beings in terms of emotional or feeling. This study aims to analyze the competition model of glucose, insulin and epinephrine in the blood in diabetes.

This research uses a dynamical system by knowing the fixed points, eigenvalues, eigenvectors, the general solution, phase portrait's analysis and graph models, models of behavior that can be interpreted competitions glucose, insulin and epinephrine in the blood in diabetes.

The results of the dynamic system model of competition on glucose, insulin and epinephrine on diabetes in the blood produces a negative real eigenvalues and complex with value $a < 0$ then it can be concluded that the model is asymptotically stable and a stable spiral node and the asymptotic stability of the model contained in $t \geq 4$.

Future studies may be discussed on the bifurcation analysis on competition models of glucose, insulin and epinephrine in the blood in diabetes. Bifurcation methods to try to change the parameter values in the model parameters and compare them with the results of the previous model.

البحث مستخلص

عارف الدين، يوسف. ٢٠١٤. تحليل ديناميكية نظم أساليب المنافسة على الجلوكوز والأنسولين، وادرينالين على مرض السكري في الدم. البحث العلمي. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) آري كوسوماتوتي، الماجستير (٢) أحمد نصيح الدين، الماجستير

الكلمات الرئيسية: أسلوب الرياضية، الأنظمة الخطية، الأنظمة الديناميكية

مرض السكري هو مرض يتميز مستويات السكر في الدم تجاوزت القيمة العادية (ارتفاع سكر الدم بسبب عدم وجود الأنسولين التي ينتجها الجسم β *palau Langerhans* والذي يعمل على امتصاص الجلوكوز في الدم لاستخدامها كمصدر من مصادر الطاقة، وادرينالين هي نقاط القوة التي توجد في البشر من حيث اقتراحات أو المشاعر. تهدف هذه البحث إلى تحليل نموذج المنافسة من الجلوكوز والأنسولين والأدرينالين في الدم في مرض السكري.

يستخدم هذه البحث نظام ديناميكي من خلال معرفة نقاط ثابتة، القيم الذاتية، المتجهات الذاتية، الحل العام، وتحليل صورة المرحلة ونماذج الرسم البياني، ونماذج السلوك التي يمكن أن تفسر المسابقات الجلوكوز والأنسولين والأدرينالين في الدم في مرض السكري.

نتائج نموذج نظام ديناميكي من المنافسة على الجلوكوز والأنسولين وادرينالين على مرض السكري في الدم تنتج القيم الذاتية الحقيقية السلبية والمعقدة بقيمة $a > 0$ ثم يمكن استنتاج أن هذا النموذج هو مستقر مقارب وعقدة دوامة مستقرة والاستقرار مقارب للنموذج الوارد في $t \leq 4$.

يمكن لمزيد من البحث أن تناقش على تحليل التشعب في أسلوب المنافسة من الجلوكوز والأنسولين والأدرينالين. يهدف أسلوب التشعب تختلف قيم المعلمات في معلمات نموذج ومقارنتها مع نتائج النموذج السابق.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terhadap satu atau lebih variabel bebas. Jika turunan fungsi tergantung pada satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan jika tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

Pemodelan matematika merupakan suatu proses yang menjalani tiga tahap yaitu perumusan model matematika, penyelesaian analisis model matematika dan penginterpretasian hasil model. Secara umum model matematika adalah representasi perilaku suatu sistem ke dalam bentuk persamaan atau sekumpulan persamaan diferensial. Kecocokan model matematika terhadap fenomena alam tergantung dari ketetapan formulasi persamaan matematis dalam mendeskripsikan fenomena alam tersebut.

Diabetes merupakan sekumpulan gejala yang timbul pada seseorang ditandai dengan kadar glukosa darah yang melebihi nilai normal akibat tubuh kekurangan insulin yang diproduksi sel- β *palau langerhans* baik absolut maupun relatif. Sedangkan epinefrin merupakan kekuatan yang ada pada diri manusia dari segi sugesti atau perasaan. Penderita diabetes dapat terjadi pada semua lapisan umur bagi yang muda atau tua.

Pada model penyakit diabetes terdapat tiga sub-populasi yang dapat dipertukarkan, yaitu konsentrasi glukosa (g) insulin (h) dan epinefrin (e).

Ketiga konsentrasi ini ditemukan pada kondisi normal dan berpotensi dipengaruhi oleh sesuatu yang tidak normal, baik mengenai patologi maupun fisiologi.

Berdasarkan latar belakang tersebut pembahasan dilakukan dengan tujuan mengetahui interpretasi matematis model matematika pada kompetisi konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah. Kemudian juga mengetahui perilaku model matematika pada penyakit diabetes.

Dalam Al-Qur'an telah dijelaskan bahwa setiap penyakit ada obatnya dengan izin Allah SWT, sebagaimana firman Allah

وَإِذَا مَرَضْتُ فَهُوَ يَشْفِينِ ﴿٨٠﴾

“...dan apabila aku sakit, Dialah yang menyembuhkan aku” (QS. Asy Syu'araa':80).

Menurut 'Aidh Al-Qarni dalam buku Tafsir Muyassar. Bila aku sakit, tiada yang mampu menyembuhkanku kecuali Allah yang Maha Esa. Dia-lah yang memberi penyakit dan menurunkan obatnya (Al-Qarni, 2007:194).

Menurut Hikmat Basyir dalam buku Tafsir Al-Muyassar. Dia-lah yang menciptakanku dalam bentuk terbaik, Dia-lah yang membimbingku kepada kemaslahatan dunia dan akhirat, Dia-lah yang memberiku kenikmatan berupa makanan dan minuman, bila aku sakit, maka Dia-lah yang menyembuhkanku dan menyelamatkanku darinya (Basyir, 2011:677).

Berdasarkan paparan di atas, penulis ingin mengangkat tema tulisan ini dengan judul “Analisis Sistem Dinamik untuk Model Kompetisi Glukosa, Insulin dan Epinefrin pada Diabetes dalam Darah”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalahnya adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis model kompetisi glukosa, insulin, dan epinefrin pada diabetes dalam darah?
2. Bagaimana analisis dinamik untuk model kompetisi glukosa, insulin, dan epinefrin pada diabetes dalam darah?
3. Bagaimana interpretasi model kompetisi glukosa, insulin, dan epinefrin di sekitar titik kesetimbangan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui analisis model kompetisi glukosa, insulin, dan epinefrin pada diabetes dalam darah.
2. Mengetahui analisis dinamik untuk model kompetisi glukosa, insulin, dan epinefrin pada diabetes dalam darah.
3. Mengetahui interpretasi model kompetisi glukosa, insulin, dan epinefrin di sekitar titik kesetimbangan.

1.4 Batasan Masalah

Untuk menghindari terjadinya pembahasan yang meluas, maka penulis membatasi pembahasan dengan asumsi, yaitu diberikan parameter a , b , c , d , f , k , l , m , dan n berturut-turut sebagai berikut 2,92; 4,34; 0,21; 0,78; 1,24; 0,14; 2,94; 0,98; dan 0,53 (Kwach dkk, 2011:283).

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat bagi penelitian tentang menstabilkan konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin dalam darah untuk mencegah diabetes.

1.6 Metode Penelitian

Dalam hal ini penulis menggunakan metode penelitian analisis *library research* dengan tahapan sebagai berikut:

1. Analisis model, meliputi:
 - a) Analisis parameter
 - b) Analisis model kompetisi glukosa, insulin, dan epinefrin pada diabetes dalam darah.
 - c) Konstruksi model kompetisi glukosa, insulin, dan epinefrin pada diabetes dalam darah
2. Analisis sistem dinamik, meliputi:
 - a) Analisis dinamik model
 - b) Analisis *phase portrait*
 - c) Analisis kestabilan lokal
3. Interpretasi, simulasi dan pembahasan solusi model.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penelitian ini, penulis memberi gambaran umum tentang sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini terdiri atas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian serta sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini terdiri atas persamaan diferensial, persamaan diferensial linier, sistem persamaan linier, pemodelan matematika, titik tetap, nilai eigen, vektor eigen, analisis bidang fase atau *phase portrait*, deteksi diabetes dan sikap muslim ketika mengalami musibah.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini terdiri atas analisis model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin (identifikasi model, besaran parameter, tahapan diabetes pada manusia), analisis dinamik model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin (nilai eigen, vektor eigen, interpretasi hasil dan integrasi penyakit diabetes dalam kajian Islam).

Bab IV Penutup

Pada bab ini terdiri atas kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dibahas pada bab pembahasan dan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 1

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial (Pamuntjak dan Santoso, 1990:11).

Contoh: pandang model diabetes untuk konsentrasi glukosa sebagai berikut:

$$\frac{dg(t)}{dt} = -ag(t) - bh(t) + fe(t) \quad 2.1$$

Sesuai definisi 1, persamaan 2.1 merupakan persamaan diferensial.

Definisi 2

Sebuah persamaan diferensial biasa (PDB) bersifat autonomous jika di dalamnya tidak terdapat ketergantungan terhadap variabel secara eksplisit.

Contoh: pandang persamaan 2.1

Sesuai definisi 2, persamaan 2.1 merupakan persamaan diferensial autonomous, karena secara emplit tidak dipengaruhi oleh variabel waktu t .

Definisi 3

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan diferensial biasa (PDB) jika fungsi yang hanya terdiri dari satu variabel independen. Jika fungsi yang dicari terdiri dari dua atau lebih variabel independen disebut persamaan diferensial parsial (PDP).

Contoh: pandang persamaan 2.1

Sesuai definisi 3, persamaan 2.1 merupakan persamaan diferensial biasa (PDB), karena hanya terdiri dari satu variabel bebas (waktu) yaitu $\frac{dg(t)}{dt}$, $\frac{dh(t)}{dt}$ dan $\frac{de(t)}{dt}$ pada masing-masing persamaan.

Definisi 4

Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi turunan yang timbul (Ayres, 1995:1).

Contoh: pandang persamaan 2.1

Sesuai definisi 4, persamaan 2.1 merupakan persamaan orde satu, karena pangkat yang tertinggi adalah berpangkat 1.

Definisi 5

Derajat (pangkat) persamaan diferensial yang dapat ditulis sebagai polinomial dalam turunannya adalah derajat turunan tingkat tertinggi yang terjadi.

Contoh: pandang persamaan 2.1

Sesuai definisi 5, persamaan 2.1 merupakan persamaan derajat 1, karena derajat turunan tingkat tertingginya adalah 1 (Ayres, 1995:1).

2.2 Persamaan Diferensial Linier

Definisi 6

Persamaan diferensial linier adalah persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah bebas dan turunan-turunannya, yaitu persamaan diferensial yang berbentuk:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad 2.2$$

Didefinisikan $a_0, a_1, \dots, a_n$ dan $f(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinyu pada suatu selang I dan koefisien pertama $a_n(x) \neq 0 \forall x \in I$.

Contoh: pandang persamaan 2.1

Sesuai definisi 6, persamaan 2.1 merupakan persamaan diferensial linier, karena berpangkat satu dalam peubah bebas dan turunannya (Waluya, 2006:6).

2.3 Sistem Persamaan Linier

Pada persamaan diferensial, linier urutan ke dua persamaan diferensial

$$\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

diberikan model untuk satu sumber linier dengan pergeseran, dapat ditulis $\dot{x}$ untuk $\frac{dx}{dt}$ dan $\ddot{x}$ untuk $\frac{d^2x}{dt^2}$. Menentukan gerak untuk mengetahui ke dua posisi saat x dan percepatan saat $\dot{x}$ sehingga $x_1 = x$ dan $x_2 = \dot{x}$, dapat ditulis sebagai satu sistem linier dari persamaan diferensial order pertama (Robinson, 2004:13).

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -kx_1 - bx_2$$

dalam notasi matrik dapat dinyatakan $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} x$

dimana $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ adalah vektor.

Sistem umum dari persamaan diferensial linier dari jenis ini dengan n variabel koefisien tetap. Dapat ditulis sebagai sistem persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots = \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

dimana semua a_{ij} adalah nilai riil tetap. Menggunakan notasi matrik, ditulis

$$\dot{x} = Ax \quad 2.3$$

dimana A adalah matrik $n \times n$ dengan memasukkan nilai riil tetap a_{ij} dan x

adalah (kolom) vektor pada $\mathbb{R}^n$ variabel $x = (x_1, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ pada

$(x_1, \dots, x_n)^T$ adalah ubah urutan dari vektor baris yang menghasilkan satu vektor kolom.

Sistem linier dengan koefisien $a_{ij}(t)$ dan matrik $A(t)$ menyesuaikan tepat waktu. Menghasilkan sistem linier bergantung waktu

$$\dot{x} = A(t)x \quad 2.4$$

Jenis dari persamaan ini muncul dan terkontrol secara eksternal untuk memberikan suatu persamaan dari bentuk

$$\ddot{x} + k(t)x = 0 \quad 2.5$$

Dimana $k(t)$ adalah fungsi diketahui oleh t . Persamaan sebagian besar terjadi oleh "linierisasi" perubahan satu solusi dari satu persamaan tidak linier.

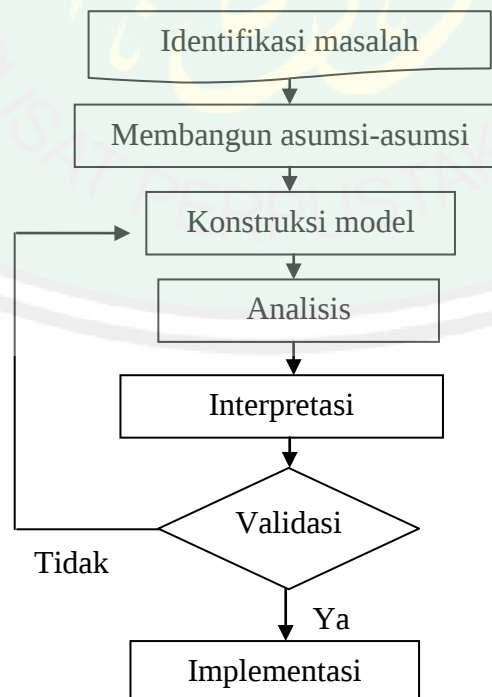
Contoh untuk persamaan 2.5 yang memiliki solusi adalah $e^{-bt/2}\cos(\omega t)$ dan $e^{-bt/2}\sin(\omega t)$, di mana $\omega^2 = k - b^2/4$. Memperlihatkan sistem linier dengan n variabel, menghasilkan n solusi independen. Maka dapat mengambil kombinasi dari solusi ini dan memperoleh semua solusi lain dari satu fundamental untuk menemukan solusi sistem linier dimana koefisien tidak menyesuaikan dari satu sistem persamaan diferensial (Robinson, 2004:14).

2.4 Pemodelan Matematika

Secara umum tahapan dalam membangun sebuah model adalah sebagai berikut:

1. Proses menetapkan masalah yang akan dimodelkan.
2. Identifikasi masalah meliputi identifikasi variabel-variabel.
3. Menetapkan hukum-hukum hubungan dan sifat dari variabel-variabel.
4. Mentranslasikan hukum-hukum dan data lain kedalam bentuk matematika.
5. Menyelesaikan persamaan yang dihasilkan.
6. Mengaplikasikan solusi kedalam sistem fisik.
7. Menguji untuk mengetahui apakah solusi yang dihasilkan dapat diterima.
8. Meninjau kembali model jika diperlukan (Boyce dan Dilprima, 1999:264):.

Tahap-tahap pemodelan matematika dapat dituliskan dalam sebuah diagram alir (*flowchart*) sebagai berikut:



Gambar 2.1. Langkah-Langkah Membangun Model (Pagalay, 2009:24)

1. Identifikasi masalah

Identifikasi masalah dilakukan untuk memahami masalah yang akan dirumuskan yaitu formulasi masalah secara umum ke dalam matematika.

2. Membangun asumsi-asumsi

Hal ini diperlukan karena model adalah penyederhanaan realitas yang kompleks. Kompleksitas permasalahan dapat disederhanakan dengan mengasumsikan hubungan yang sederhana antara variabel.

3. Membuat konstruksi model

Membuat konstruksi model dapat dilakukan baik melalui hubungan fungsional dengan cara membuat diagram alur persamaan matematika dengan bantuan *software* atau secara analitis.

4. Menganalisis model

Tahap ini dilakukan untuk mencari solusi yang sesuai untuk menjawab pertanyaan yang dibangun pada tahap identifikasi. Di dalam pemodelan, analisis dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan melakukan optimasi dan simulasi. Optimasi dirancang untuk mencari solusi yang seharusnya terjadi dan simulasi dirancang untuk mencari solusi yang akan terjadi.

5. Interpretasi

Interpretasi dilakukan untuk mengetahui kerasionalan hasil model tersebut.

6. Validasi

Sebelum menggunakan model untuk menyimpulkan kejadian alam, model tersebut harus diuji keabsahannya. Model yang valid tidak hanya mengikuti

kaidah-kaidah teoritis yang sah tetapi juga menghasilkan interpretasi yang mendekati kesesuaian.

7. Implementasi

Hasil validasi yang memenuhi syarat dan hasilnya dapat diterima (rasional), maka dapat dilakukan implementasi dari model yang diperoleh.

2.5 Titik Tetap atau *Fixed Point*

Satu karakteristik dari sistem linier mengidentifikasi banyak solusi ke arah asal. Asumsikan bahwa sistem persamaan diferensial $\dot{x} = F(x)$ memiliki turunan parsial komponen dari F disebut solusi. Diberikan $\phi(t; x_0)$ maka (Robinson, 2004:99):

$$\frac{d}{dt}\phi(t; x_0) = F(\phi(t; x_0)) \text{ dan } \phi(0; x_0) = x_0$$

Definisi 7

Satu titik x^* di sebut satu titik tetap, jika $F(x^*) = 0$. Solusi mulai pada satu titik tetap mempunyai percepatan nol dan $\phi(t; x^*) = x^*$ bagi seluruh t disebut titik tetap. Jika kekuatan berada di dalam keseimbangan dan berkumpul pada titik tetap maka disebut titik keseimbangan. Titik tetap untuk sistem linier $e^{At}0 \equiv 0$ ini satu-satunya titik tetap dari satu sistem linier, kecuali jika memasuki nilai eigen (Robinson, 2004:100).

2.5.1 Tipe Kestabilan Titik Tetap

Definisi 8

Suatu titik tetap x^* disebut *lyapunov* stabil atau L-stabil, terdapat semua solusi $\phi(t; x_0)$ mendekati x^* untuk semua $t \geq 0$ jika kondisi awal x_0 diawali

dengan mendekati x^* . Maka titik tetap x^* disebut L-stabil, untuk $\epsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|\phi(t; x_0) - x^*\| < \epsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Perhatikan bahwa pusat pengutuban linier adalah L-stabil, ambil $\delta < \epsilon$, solusi bergerak elips. Fokus L-stabil linier adalah L-stabil, dengan $\delta < \epsilon$ (Robinson, 2004:101).

Definisi 9

Suatu titik tetap disebut tidak stabil, maka titik ini bukan L-stabil (ada $\epsilon_1 > 0$ sedemikian sehingga $\delta > 0$ ada beberapa titik x_δ dengan $\|x_\delta - x^*\| < \delta$ dan waktu $t_1 > 0$ bergantung pada titik x_δ dengan $\|\phi(t_1; x_\delta) - x^*\| < \epsilon_1$). Diawali dengan x^* minimal bergerak satu jarak ϵ_1 menjauhi x^* (Robinson, 2004:101).

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 10

Nilai eigen merupakan nilai yang didapatkan sebagai solusi dari persamaan karakteristik dari matriks Jacobi. Nilai eigen dapat menyimpulkan bentuk kestabilan suatu sistem. Asumsikan bahwa panah atau garis vektor x berbeda dari vektor nol. Nol vektor $x = 0$ selalu membuat persamaan $Ax = \lambda x$.

Asumsikan bahwa A adalah matriks . A nonzero panah atau garis vektor x bahwa memuat persamaan

$$Ax = \lambda x$$

Apakah suatu vektor eigen matrik adalah A dan jumlah λ adalah suatu nilai eigen matriks A (Neuhauser, 2004:569).

Tindakan A pada vektor eigen menjadi bentuk sederhana, jika menerapkan A pada suatu vektor eigen x . Vektor eigen memiliki suatu penafsiran geometris jika nilai eigen adalah λ bernilai riil yaitu garis lurus melalui arah asal dari suatu vektor eigen.

Tabel 2.1. Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Dinamik Linier (Boyce dan Dilprima, 1999:468)

No.	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
1.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	-	-
2.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	<i>Node</i> / Simpul
3.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node</i> / Simpul
4.	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak Stabil	<i>Saddle</i> / Pelana
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	<i>Node</i> / Simpul
6.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node</i> / Simpul
7.	$\lambda_{1,2} = a \pm bi \in \mathbb{C}$	-	-
8.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
9.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
10.	$a = 0$	Stabil	Terpusat / center

2.7 Analisis Bidang Fase atau *Phase Portrait*

Bentuk solusi dari sistem linier pada suatu persamaan dengan mengawali skalar persamaan linier. Persamaan diferensial $\dot{x} = ax$ memiliki solusi $x(t) = x_0 e^{at}$ yang berubah-ubah oleh x_0 . Jika mengkombinasikan dua skalar persamaan ke dalam sistem tunggal, $\dot{x}_1 = a_1 x_1$ dan $\dot{x}_2 = a_2 x_2$, kemudian memiliki solusi dari bentuk $x_1(t) = c_1 e^{a_1 t}$ dan $x_2(t) = c_2 e^{a_2 t}$, dimana c_1 dan c_2 adalah nilai konstan berubah-ubah. Dalam hal ini disebut vektor solusi (Robinson, 2004:21).

$$x(t) = c_1 e^{a_1 t} u^1 + c_2 e^{a_2 t} u^2$$

Dimana u^j adalah vektor unit 1 pada tempat j^{th} dan 0 untuk yang lainnya. Bentuk vektor solusi kombinasi linier dari sifat exponen vektor waktu. Perhatikan solusi $e^{a_j t} u^j$ dikali skalar dari vector u^j dan determinan bergerak oleh u^j . Solusi dari

koefisien konstan pada persamaan 2.3 dikali skalar dari vektor. Maka bentuk solusi $x(t) = e^{\lambda t}v$.

Determinan oleh vektor v untuk solusi, memerlukan

$$\begin{aligned} Ae^{\lambda t}v &= Ax(t) \\ &= \frac{d}{dt}x(t) \\ &= \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}v) \\ &= \lambda e^{\lambda t}v \end{aligned}$$

Untuk $e^{\lambda t} \neq 0$, memiliki kesamaan nilai eigen

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian $x(t) = e^{\lambda t}v$ adalah solusi tak nol jika dan hanya jika λ adalah nilai eigen dengan vektor eigen v . Maka untuk menemukan solusi (i) dengan menyelesaikan nilai eigen λ_j seperti akar dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$. Solusi (ii) dengan masing-masing akar, menyelesaikan sesuai vektor eigen yang membentuk persamaan $(A - \lambda_j I)v = 0$. Dimana I adalah identitas matrik dengan 1s di bawah diagonal dan 0s tidak pada diagonal. Jika n riil nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sesuai vektor eigen $v^1, \dots, v^n$, maka diperoleh n solusi berbeda, bentuk solusi fundamental dan solusi umum dari bentuk

$$c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v^n$$

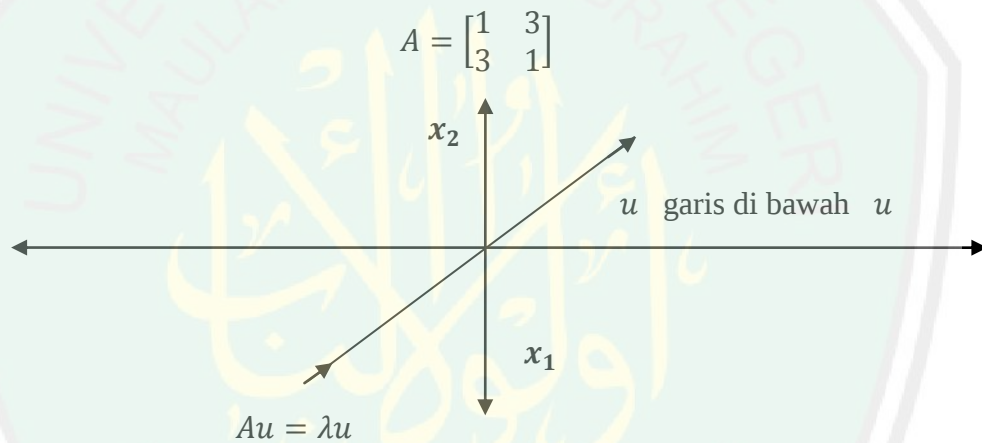
Untuk sistem linier dua dimensi $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Persamaan karakteristik $0 = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 &= (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\
 &= \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta
 \end{aligned}$$

Dimana $\tau = a + d = \text{tr}(A)$ adalah arah asal dari metrik dan $\Delta = ad - bc = \det(A)$ adalah determinan atau faktor penentu. Maka persamaan karakteristik adalah penentu dalam hal ini. Proses penyelesaian beberapa contoh spesifik untuk himpunan fundamental dari solusi dengan gambar solusi pada ruang fase.

Contoh 1 (saddle)



Gambar 2.2. Panah Vektor dengan Arah Vektor Eigen

Solusi

$$Ax = \lambda x$$

dapat ditulis

$$Ax - \lambda x = 0$$

faktor x dikalikan λx oleh matriks identitas $I = I_2$, sebab berhadapan dengan

matriks 2×2

$$Ax - \lambda Ix = 0$$

maka faktor x

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Ditunjukkan matriks bagian dalam rangka memperoleh solusi $A - \lambda I$ dalam bentuk tunggal, sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - (2)(3) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0$$

Hasil $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = 4$

Nilai eigen $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ menyatakan *saddle*.

Untuk mencari vektor eigen pertama diperoleh dari nilai eigen pertama yaitu $\lambda_1 = -2$. Mencari nilai tak nol dari vektor $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$AV = \lambda V$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Tulis sistem persamaan

$$1v_1 + 3v_2 = -2v_1$$

$$3v_1 + 1v_2 = -2v_2$$

$$1v_1 + 2v_1 + 3v_2 = 0$$

$$3v_1 + 1v_2 + 2v_2 = 0$$

$$3v_1 + 3v_2 = 0$$

$$3v_1 + 3v_2 = 0$$

Penyederhanaan

$$3v_2 = -3v_1$$

$$v_2 = -v_1$$

Misalkan $v_2 = 1$ maka $v_1 = -1$

Sehingga $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ maka $x(t) = e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk mencari vektor eigen kedua diperoleh dari nilai eigen kedua yaitu

$\lambda_2 = 4$. Mencari nilai tak nol dari vektor $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$$AU = \lambda U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tulis sistem persamaan

$$1u_1 + 3u_2 = 4u_1$$

$$3u_1 + 1u_2 = 4u_2$$

$$1u_1 - 4u_1 + 3u_2 = 0$$

$$3u_1 + 1u_2 - 4u_2 = 0$$

$$-3u_1 + 3u_2 = 0$$

$$3u_1 - 3u_2 = 0$$

Penyederhanaan

$$-3u_2 = -3u_1$$

$$u_2 = u_1$$

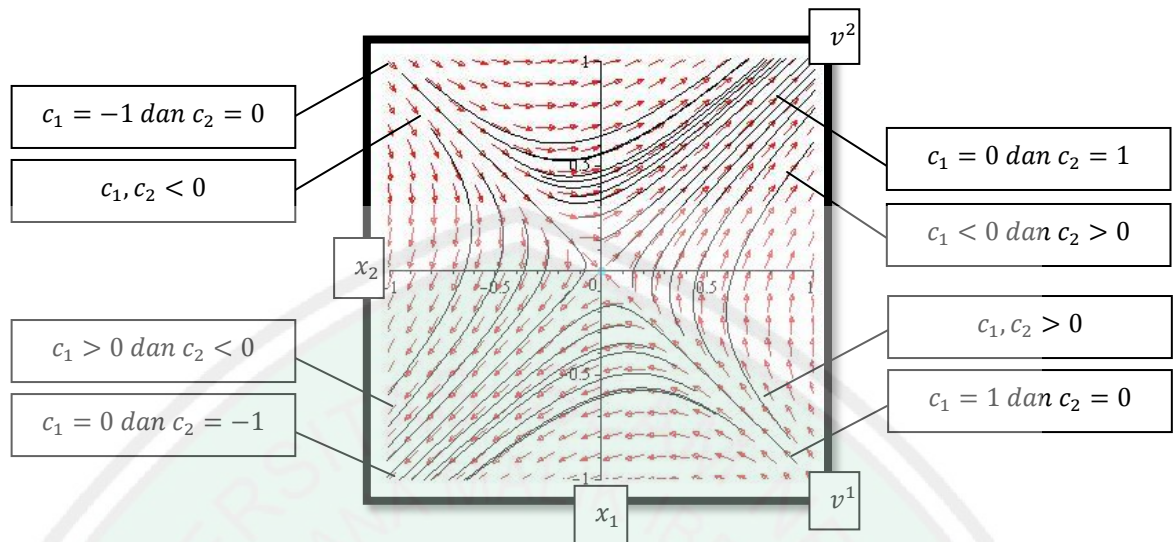
Misalkan $u_2 = 1$ maka $u_1 = 1$

Sehingga $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ maka $x(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Maka solusi umum:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$= C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Gambar 2.3. Phase Portrait Saddle untuk Contoh 1

Ambil $C_1 = 1$ dan $C_2 = 0$, maka menghasilkan solusi $e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bergerak sepanjang garis lurus dari perkalian skalar dari vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Maka diperoleh e^{-2t} menuju nol dimana t menuju tak hingga pada $e^{-2t} \neq 0$, menghasilkan trayektori $e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mendekati titik arah asal dimana t menuju tak hingga, tapi tidak pernah mencapai titik arah asal. Gambar trayektori terdapat pada bidang (x_1, x_2) dengan panah menandai arah yang bergerak sepanjang kurva. Lihat garis lurus yang menuju titik asal dari kanan bawah pada gambar 2.3. Misalkan $C_1 = -1$ dan $C_2 = 0$ maka menghasilkan solusi $e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ yang juga bergerak sepanjang garis lurus dari kiri atas (Robinson, 2004:23).

Misalkan $C_1 = 0$ dan $C_2 = 1$ maka menghasilkan solusi $e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ yang juga bergerak sepanjang garis lurus dari perkalian skalar dari vektor eigen dan bergerak saat t meningkat. Solusi ini menuju tak hingga dimana t menuju tak hingga dan menuju titik asal dimana t menuju negatif tak hingga. Lintasan berupa separuh

garis pada kanan atas pada gambar 2.3. Jika $C_1 = 0$ dan $C_2 = -1$ maka menghasilkan solusi $e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ yang bergerak sejalan dari titik asal berupa separuh garis pada kiri ke bawah. Untuk solusi yang berisi komponen pada masing-masing vektor eigen $C_1 \neq 0$ dan $C_2 \neq 0$,

$$c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{4t} \left[c_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

pada kurung besar di atas mendekati $C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pada t menuju tak hingga, sehingga trayektori garis yang dihasilkan oleh vektor eigen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ seperti asimtotik t menuju tak hingga. Serupa dengan trayektori yang dihasilkan vektor eigen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ asimtotik t menuju negatif tak hingga. Misalkan masing-masing C_1 dan C_2 positif, maka trayektori seperti bergerak pada hiperbola sebelah kanan pada gambar 2.3. Titik asal untuk system linier dengan nilai eigen riil positif dan satu nilai eigen riil negatif disebut *saddle* (Robinson, 2004:24).

Menggambar *phase portrait* untuk sistem linier *saddle*

1. Menarik semua lintasan yang bergerak sepanjang garis lurus dalam atau keluar dari asal dengan mencari vektor eigen, masing-masing setengah garis dengan arah, maka solusi bergerak pada t meningkat.
2. Dalam masing-masing empat wilayah antara solusi garis lurus, menghasilkan salah satu solusi yang merupakan kombinasi linier dari dua solusi utama.

Menggunakan program komputer menggambar *phase portrait*. Asumsikan bahwa $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ adalah nilai eigen, dengan vektor eigen yang sesuai v^1 dan v^2 .

1. Ambil dua kondisi awal yang kelipatan kecil $\pm v^1$ bergerak sampai $(\pm 0.01 v^1)$.
2. Ambil dua kondisi awal $\pm C v^2$ merupakan kelipatan skalar sebesar $\pm v^2$ menunjukkan daerah tepi dan mengikuti solusi dalam waktu. Mengambil dua kondisi awal yang kelipatan sekecil $\pm v^2$ dan bergerak mundur dalam waktu.
3. Minimal mengambil empat kondisi awal lainnya dari kelipatan skalar $\pm v^2 (\pm C v^2 \pm 0.1 v^1)$ (Robinson, 2004:24).

Misalkan, sistem dalam $\mathbb{R}^2$ dengan dua nilai eigen riil negatif yang berbeda, vektor eigen yang sesuai $0 > \lambda_1 > \lambda_2$, vektor eigen v^1 dan v^2 . Menghasilkan solusi umum:

$$c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2$$

Solusi (i) $c_1 \neq 0$ dan $c_2 = 0$ atau (ii) $c_1 = 0$ dan $c_2 \neq 0$ bergerak menuju arah asal sepanjang garis lurus. Jika kedua $c_1, c_2 \neq 0$ maka memiliki solusi sebagai berikut:

$$e^{\lambda_1 t} (c_1 v^1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v^2)$$

sebab $\lambda_2 < \lambda_1$, $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, dan kedua periode menuju nol pada t tak terhingga. Hal ini menunjukkan bahwa setiap solusi dengan $c_1 \neq 0$ mendekati arah asal asimtotik ke baris yang dihasilkan oleh eigen vektor v^1 (nilai eigen yang negatif). Selama t menuju minus tak terhingga dengan $e^{\lambda_2 t}$ menuju nol lebih cepat dan solusi menjadi lebih sejajar dengan garis yang dihasilkan oleh vektor v^2 . Gambar 2.3 adalah sketsa *phase portrait* yang menunjukkan empat lintasan yang bergerak

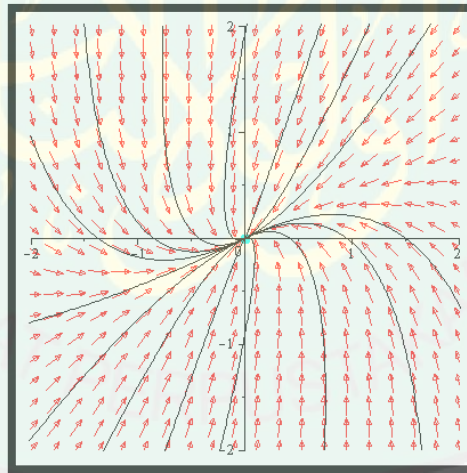
sepanjang garis lurus menuju arah asal, solusi lain yang keduanya adalah $c_1, c_2 \neq 0$. Plot waktu solusi semua menuju nol pada tingkat eksponensial, tapi solusi kedua berjalan pada tingkat yang lebih cepat. Arah asal untuk sistem jenis ini (sistem linier) dengan semua nilai eigen riil, negatif, dan berbeda disebut *stable node* (Robinson, 2004:25).

Contoh 2 (*stable node*)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} x$$

Matriks diatas memiliki nilai eigen, dengan vektor eigen $v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Menghasilkan solusi umum sebagai berikut: $c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Gambar 2.4. *Phase Portrait Stable Node* untuk Contoh 2

Contoh 3 (*unstable node*)

Jika kedua nilai eigen dari suatu sistem pada $\mathbb{R}^2$ positif dan berbeda, maka jenis untuk sistem linier disebut *unstable node*. Maka *phase portrait* sama dengan contoh 2 dengan arah gerakan terbalik. *Phase portrait* untuk *unstable node* dan

stable node dengan perubahan yaitu panah dibalik dan lintasan konvergen ke arah asal pada t menuju minus tak terhingga (Robinson, 2004:25).

Menggambar *phase portrait* untuk *stable node*

Asumsikan bahwa nilai-nilai eigen yang berbeda $0 > \lambda_1 > \lambda_2$.

1. Semua lintasan yang bergerak sepanjang garis lurus ke arah asal ditandai pada masing-masing setengah garis dengan arah solusi bergerak pada t meningkat. Setiap lintasan mendekati arah asal pada tingkat yang lebih cepat (terkait dengan nilai eigen lebih negatif) dengan panah ganda.
2. Pada masing-masing empat wilayah antara solusi garis lurus, menghasilkan solusi yang merupakan kombinasi linier dari dua solusi utama. Untuk lintasan yang mendekati asal (seperti t tak terhingga), lintasan yang bersinggungan dengan garis yang dihasilkan oleh vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen kurang negatif. Untuk lintasan yang menuju tak terhingga (t menuju minus tak terhingga), mereka menjadi sejajar dengan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen yang lebih negatif.

Menggunakan program komputer untuk menggambar *phase portrait*. Asumsikan bahwa $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ adalah nilai eigen dengan vektor eigen v^1 dan v^2 .

1. Ambil dua kondisi awal $\pm c_1 v^1$ yang merupakan kelipatan besar $\pm v^1$ sehingga menuju daerah sekitar tepi dan diikuti solusi maju dalam waktu.
2. Ambil dua kondisi awal lainnya $\pm c_2 v^2$ yang merupakan kelipatan skalar besar $\pm v^2$ dan $\pm c_2 v^2$, sehingga menunjukkan titik daerah sekitar tepi dan diikuti solusi maju dalam waktu.

3. Mengambil setidaknya satu kondisi awal pada masing-masing empat wilayah dipisahkan oleh $\pm v^1$ dan $\pm v^2$ yang berada didaerah sekitar tepi dan ikuti solusi maju dalam waktu (Robinson, 2004:26).

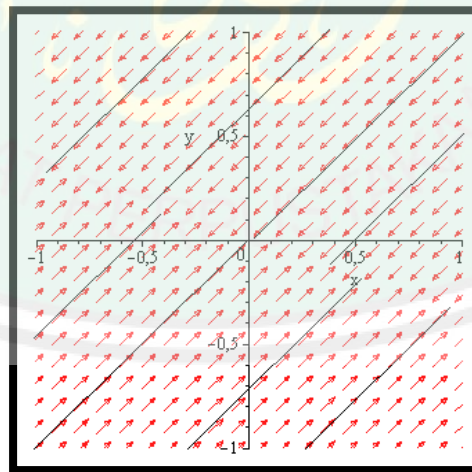
Contoh 4 (nilai eigen 0)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x$$

Memiliki nilai eigen 0 dan -4 . Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen untuk 0 dan $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen untuk -4 . Pada saat $e^{0t} = 1$ menghasilkan solusi umum:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa semua titik yang merupakan kelipatan dari $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ titik tetap (ini adalah kondisi awal yang diperoleh dengan mengambil $c_2 = 0$) karena e^{-4t} menuju nol sebagai t tak terhingga.



Gambar 2.5. Phase Portrait Nilai Eigen 0 untuk Contoh 4

Titik tetap untuk persamaan linier $\dot{x} = Ax$, karena $A0 = 0$. Satu-satunya cara mencari titik tetap lainnya adalah untuk 0 menjadi nilai eigen jika $\dot{x} = Ax_0 =$

0 untuk beberapa titik nol x_0 , maka x_0 adalah vektor eigen untuk nilai eigen 0 (Robinson, 2004:27).

2.7.1 Contoh Analisis Bidang Fase untuk Nilai Eigen Kompleks

Untuk dapat mempertimbangkan nilai eigen kompleks, perlu memahami eksponensial dengan eksponen kompleks. Dengan membandingkan seri ekspansi kekuasaan, menghasilkan:

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \sin(\beta t)$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

Maka jika $\lambda = \alpha + i\beta$ adalah nilai eigen kompleks dengan kompleks vektor eigen $v = u + iw$ (dengan α dan β bilangan riil. u dan v vektor riil), kemudian

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t}(u + iw) &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u + iw) \\ &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t)u - i \sin(\beta t)w) + i e^{\alpha t} (\sin(\beta t)u + i \sin(\beta t)w) \end{aligned}$$

Maka dapat ditulis sebagai jumlah dari fungsi riil ditambah fungsi murni imajiner. Teorema berikut menunjukkan bahwa masing-masing merupakan solusi dari persamaan diferensial.

Teorema 1

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dengan memasukkan konstan riil.

- Asumsikan bahwa $z(t) = x(t) + iy(t)$ adalah solusi kompleks $z' = Az$ dimana $x(t)$ dan $y(t)$ adalah bilangan nyata. Kemudian $x(t)$ dan $y(t)$ masing-masing solusi nyata dari persamaan.
- Secara khusus, jika $\lambda = \alpha + i\beta$ adalah nilai eigen kompleks dengan kompleks vektor eigen $v = u + iw$, maka

$$e^{\alpha t} (\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)w)$$

$$e^{\alpha t}(\sin(\beta t)u + \cos(\beta t)w)$$

Bukti setiap solusi nyata $\dot{x} = Ax$.

Hasil ini mengikuti secara langsung dengan menggunakan aturan diferensiasi dan perkalian matriks:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) + i \dot{y}(t) &= \dot{z}(t) \\ &= Az(t) \\ &= A(x(t) + i y(t)) \\ &= Ax(t) + i Ay(t)\end{aligned}$$

Dengan menyamakan bagian riil dan imajiner menghasilkan $\dot{x} = Ax(t)$ dan $\dot{y} = Ay(t)$, yang memberikan bagian pertama dari teorema. Bagian kedua dari teorema berikut dari bagian pertama dan representasi adalah $e^{(\alpha+i\beta)t} (u + i w)$.

Contoh 5 (elliptic center)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Menghasilkan persamaan karakteristik $\lambda^2 + 4 = 0$ dan nilai eigen adalah $\lambda = \pm 2i$. Menggunakan nilai eigen $2i$ menghasilkan

$$A - (2i)I = \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix}$$

Dua baris adalah (kompleks) kelipatan satu sama lain, sehingga menghasilkan vektor eigen, berupa persamaan $-2i v_1 + 4 v_2 = 0$

Vektor eigen adalah $v = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$

Maka menghasilkan dua solusi nyata

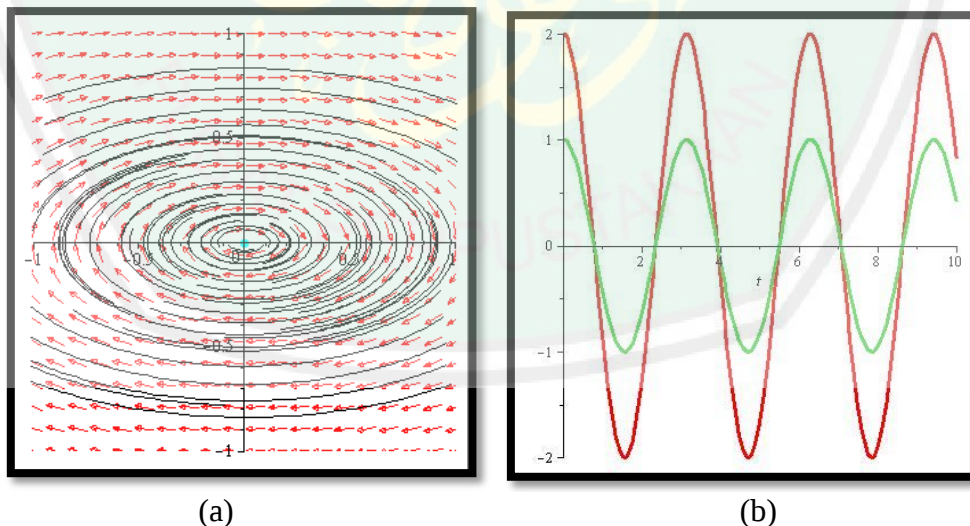
$$x^1(t) = \cos(2t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2(t) = \sin(2t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Memiliki kondisi awal $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ saat masing-masing $t = 0$. Perhatikan bahwa

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Menghasilkan solusi linier tak terikat. Kedua solusi periodik dengan periode $T = 2\pi/2 = \pi$. Maka solusi kembali ke titik yang sama setelah waktu π . Solusi ini bergerak pada *elips* dengan sumbu dua kali lebih lama dalam arah x_1 seperti dalam arah x_2 . Pada $x_1 = 0$ dan $x_2 > 0$, $\dot{x}_1 = 4x_2 > 0$, maka solusi yang mengitari searah jarum jam. Seperti contoh dengan nilai eigen murni imajiner yang disebut *elliptic center*. Lihat gambar 2.6(a) Plot $(t, x_1^1(t))$ untuk solusi $x^1(t)$ diberikan pada gambar 2.6(b). Perhatikan bahwa komponen $x_1^1(t)$ adalah fungsi periodik dari t dan periode tidak tergantung pada amplitudo.



Gambar 2.6 (a) *Phase Portrait*. (b) Plot x_1 sebagai Fungsi dari t , Kondisi Awal $(1, 0)$ dan $(2, 0)$, *Elliptic Center* untuk Contoh 5

Contoh 6 (*stable focus*)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} x$$

Menghasilkan persamaan karakteristik $\lambda^2 + \lambda + 17 = 0$, dan nilai eigen $\lambda = -1 \pm 4i$. Menggunakan nilai eigen $-1 + 4i$

$A - (-4 + 4i)I = \begin{pmatrix} -3 - 4i & 5 \\ -5 & 3 - 4i \end{pmatrix}$ mengalikan baris pertama dengan $-3 + 4i$ yang merupakan konjugat kompleks $3 - 4i$ menghasilkan $(25, -15 + 20i)$ kelipatan dari baris kedua. Oleh karena itu, vektor eigen memenuhi persamaan $5v_1 + (-3 + 4i)v_2 = 0$

dan vektor eigen adalah $v = \begin{pmatrix} 3 - 4i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sebuah solusi yang kompleks dari sistem diberikan oleh

$$\begin{aligned} e^{-t}(\cos(4t) + i \sin(4t)) \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ = e^{-t} \left[\cos(4t) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \sin(4t) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + i e^{-t} \left[\sin(4t) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \cos(4t) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Mengambil bagian riil dan imajiner, solusi nyata keduanya adalah

$$\begin{aligned} x^1(t) &= e^{-t} \left(\cos(4t) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \sin(4t) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ x^2(t) &= e^{-t} \left(\sin(4t) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \cos(4t) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

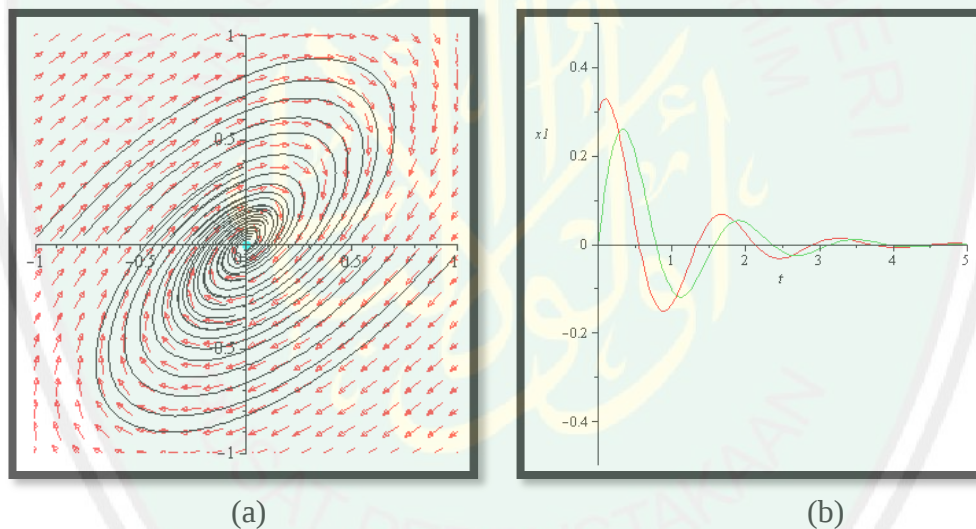
Kondisi awal dari dua solusi sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 20 \neq 0$$

Diatas adalah solusi yang independen. Sinus dan cosines memiliki periode $2\pi/4 = \pi/2$, namun faktor eksponensial menurun. Pada contoh ini dengan meningkatnya t dan kontrak oleh $e^{-\pi/2}$, maka setiap revolusi ada sekitar arah

asal. Solusi cenderung asimtotik terhadap asal sebagai t tak terhingga. Bila $x_1 = 0$ dan $x_2 > 0$, $\dot{x}_1 = 5x_2 > 0$, maka solusi berkeliling searah jarum jam. Contoh ini, dengan bagian nyata negatif dan nol imajiner bagian dari nilai eigen, disebut fokus stabil. Hal ini stabil karena solusi cenderung arah asal sebagai t tak terhingga merupakan *stable focus* karena solusi spiral. Lihat gambar 2.7a. Plot $(t, x_1^1(t))$ solusinya $x_1^1(t)$ diberikan pada gambar 2.7b. Perhatikan bahwa komponen $x_1^1(t)$ berosilasi sebagai fungsi dari t seperti menuju nol (Robinson, 2004:30).



Gambar 2.7. (a) Phase Portrait. (b) Plot x_1 sebagai Fungsi dari t , Kondisi Awal $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0.3)$, Stable Focus untuk Contoh 6

Contoh 7 (dalam $\mathbb{R}^3$)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Menghasilkan persamaan karakteristik adalah

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$$

Nilai eigen adalah $\lambda = 1, -1 \pm 2i$.

Menggunakan nilai eigen $\lambda = 1$, maka

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka vektor eigen adalah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Menggambar *phase portrait* untuk sepasang eigen kompleks

Asumsikan bahwa nilai eigen adalah $\lambda = \alpha \pm i\beta$ dengan $\beta \neq 0$.

1. Jika $\alpha = 0$ maka arah asal merupakan pusat lingkaran dengan semua solusi periodik. Arah gerakan searah jarum jam atau berlawanan.
2. Jika $\alpha < 0$ maka asal adalah fokus stabil yang spiral baik searah jarum jam atau berlawanan.
3. Jika $\alpha > 0$ maka solusi spiral keluar dan arah asal merupakan fokus tidak stabil dengan gerakan spiral searah jarum jam atau berlawanan.
4. Salah satu dari tiga kasus, arah solusi berputar mengelilingi arah asal dapat ditentukan dengan memeriksa apakah $\dot{x}_1$ positif atau negatif pada $x_1 = 0$. Jika positif, maka arah searah jarum jam, dan jika negatif, maka arah berlawanan (Robinson, 2004:32).

Dengan nilai eigen $-1 + 2i$, maka

$$A - (-1 + 2i)I = \begin{pmatrix} 1 - 2i & 0 & 1 \\ 1 & 2 - 2i & -1 \\ -1 & 4 & -1 - 2i \end{pmatrix}$$

Menukar pertama dan ketiga baris dan mengalikan baris ketiga baru oleh konjugat kompleks $1 - 2i$ (oleh $1 + 2i$) untuk membuat pertama yang nyata masuk baris ketiga, sehingga

$$A - (-4 + 2i)I \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 - 2i \\ 1 & 2 - 2i & -1 \\ 5 & 0 & 1 + 2i \end{pmatrix}$$

Melakukan operasi baris untuk membuat entri dari kolom pertama, kecuali untuk bagian atas satu, sama dengan nol, menghasilkan

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 - 2i \\ 0 & 6 - 2i & -2 - 2i \\ 0 & 20 & -4 - 8i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 + 2i \\ 0 & 3 - i & -1 - i \\ 0 & 5 & -1 - 2i \end{pmatrix}$$

Dimana dalam langkah kedua mengalikan baris pertama dengan -1 , baris kedua oleh $1/2$ dan baris ketiga oleh $1/4$. Untuk membuat entri pertama dalam nyata baris kedua, kita kalikan baris kedua dengan konjugat kompleks dari entri pertama $1 - 3i$, sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 + 2i \\ 0 & 10 & -2 - 4i \\ 0 & 5 & -1 - 2i \end{pmatrix}$$

Melakukan operasi baris selanjutnya, menghasilkan urutan matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 + 2i \\ 0 & 5 & -1 - 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 - 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satu vektor eigen adalah

$$\begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -1 - 2i \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Menggabungkan, tiga solusi tak terikat

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-t} \cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - e^{-t} \sin(2t) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dan}$$

$$e^{-t} \sin(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + e^{-t} \cos(2t) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Tiga kondisi awal solusi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Maka $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} = -20 \neq 0$

2.7.2 Contoh Analisis Bidang Fese untuk Nilai Eigen Riil Berulang

Contoh 8 (nilai eigen berulang)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} x$$

Menghasilkan persamaan karakteristik $0 = \lambda^3 - 12\lambda - 16 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$.

Oleh karena itu, -2 adalah nilai eigen diulang dengan dua keserbaragaman.

Matriks $A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Baris direduksi, sehingga

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrik ini memiliki satu peringkat, karenanya $3 - 1 = 2$ vektor eigen tak terikat

v_1 adalah berubah-ubah dan $v_2 = -2v_3$ atau vektor eigen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu, $\lambda = -2$ memiliki banyak vektor eigen independen sebagai multiplisitas dari persamaan karakteristik.

Nilai eigen $\lambda = 4$ memiliki vektor eigen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, menghasilkan solusi umum

$$\text{sebagai berikut: } x(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Contoh 9 (tidak cukup vektor eigen)

Sebagai contoh dengan tidak cukup vektor eigen, pertimbangkan

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} x$$

Persamaan karakteristiknya adalah $0 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$, jadi $\lambda = -1$ adalah nilai eigen diulang.

Untuk nilai eigen $\lambda = -2$, menghasilkan matrik

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka vektor eigen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Untuk nilai eigen $\lambda = -1$ matrik

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Yang memiliki peringkat dua. Oleh karena itu, hanya memiliki satu vektor eigen

tak terikat $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Menemukan ketiga solusi yang tak terikat dalam situasi umum,

maka kembalikan ke contoh terakhir. Sebelumnya $e^{At}w$, merupakan solusi untuk setiap vektor w . Jika dua matriks A dan B bolak-balik ($AB = BA$), maka

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

Hal ini dapat ditunjukkan dengan mengalikan seri dan menata ulang istilah, sehingga $(A - \lambda I)(\lambda I) = (\lambda I)(A - \lambda I)$, karena λI merupakan kelipatan skalar identitas, sehingga

$$\begin{aligned} e^{At}w &= e^{((\lambda I) + (A - \lambda I))t}w = e^{(\lambda I)t}e^{(A - \lambda I)t}w = e^{\lambda t}Ie^{(A - \lambda I)t}w \\ &= e^{\lambda t} \left(Iw + t(A - \lambda I)w + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2w + \dots \right). \end{aligned}$$

Jika w seperti itu $(A - \lambda I)w = v$ dimana v adalah vektor eigen untuk nilai eigen λ , sehingga

$$(A - \lambda I)^2w = (A - \lambda I)v = 0$$

$$(A - \lambda I)^nw = (A - \lambda I)^{n-1}v = 0 \quad \text{untuk } n \geq 2$$

Maka deret tak terhingga sebelumnya memberikan untuk $e^{At}w$ sebenarnya terbatas, menghasilkan solusi kedua $x^2(t) = e^{\lambda t}(w + tv)$. Kesamaan dengan solusi kedua untuk akar berulang persamaan karakteristik dari urutan persamaan skalar kedua, dimana solusi kedua adalah $te^{\lambda t}$.

Menunjukkan bahwa $x^2(t)$ adalah solusi dengan $\lambda v = Av$ dan $\lambda w + v =$

$$\begin{aligned} Aw \text{ untuk mendapatkan } \dot{x}^2(t) &= \lambda e^{\lambda t}(w + tv) + e^{\lambda t}v \\ &= e^{\lambda t}(\lambda w + v) + e^{\lambda t}tv \\ &= e^{\lambda t}(Aw + Atv) \\ &= Ax^2(t) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, untuk nilai eigen λ , yang memiliki dua keserbaragaman tetapi hanya satu v vektor eigen independen untuk λ , kita memecahkan $(A - \lambda I)v = 0$ untuk v , maka memperoleh persamaan $(A - \lambda I)w = v$ untuk w dan solusi kedua adalah $e^{\lambda t}v$. Perhatikan, jika multiplisitas adalah lebih besar dari solusi kedua, maka muncul situasi lebih rumit (Robinson, 2004:36).

Kembali ke contoh 9

Untuk nilai eigen $\lambda = -1$ adalah $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dan $A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Menggunakan persamaan homogen $(A + I)w = v$ memisahkan matriks $A + I$ dari vektor v dengan garis vertikal, matrik yang diperbesar adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Menghasilkan solusi $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka solusi lain adalah

$$x^3(t) = e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Menghasilkan solusi umum sebagai berikut:

$$c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maka menemukan tiga solusi. Determinan dari matrik dibentuk dengan menempatkan kondisi awal dari tiga solusi pada $t = 0$ sebagai berikut:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

maka tiga solusi diatas adalah solusi tak terikat (Robinson, 2004:36).

Contoh 10 (*degenerate stable node*).

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Persamaan karakteristik adalah $0 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$,

Nilai eigen yang berulag adalah -1 .

Matrik $A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Memiliki peringkat satu, dan hanya satu vektor eigen tak terikat $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Untuk

mengatasi persamaan $(A + I)w = v$. Matrik di perbesar menjadi

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

atau $-\omega_1 + \omega_2 = 1$. Menghasilkan solusi $\omega_1 = 0$ dan $\omega_2 = 1$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Maka

solusi yang kedua adalah

$$x^2(t) = e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

menghasilkan solusi umum sebagai berikut:

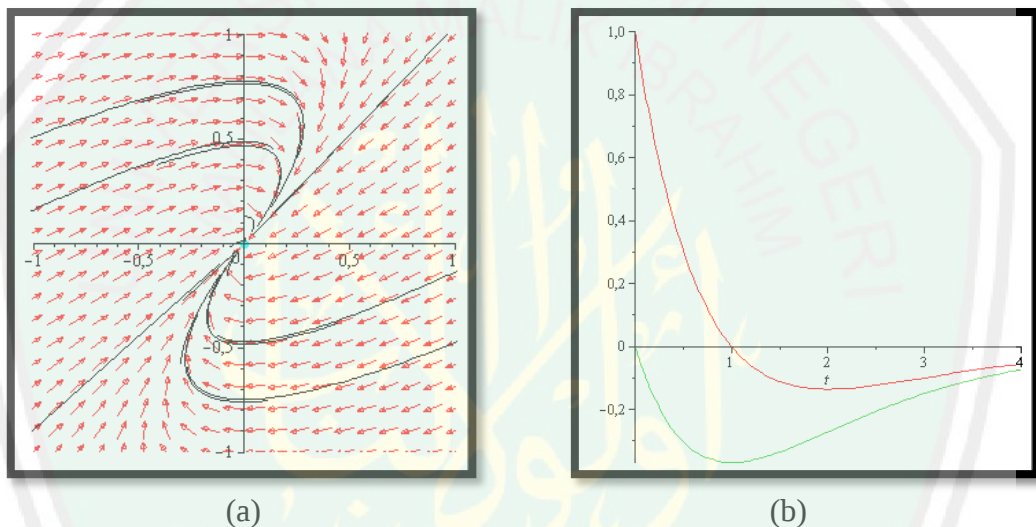
$$c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

Komponen pertama dari solusi kedua adalah $x_1^2(t) = te^{-t}$ menuju nol pada t tak terhingga, karena eksponensial menuju nol lebih cepat dari t tak terhingga, saat t/e^t menuju nol. Dengan cara yang sama, komponen kedua

$x_2^2(t) = e^{-t} + te^{-t}$ menuju nol pada t tak terhingga. Menggabungkan $x^2(t)$ menuju t tak terhingga. Menghasilkan

$$x^2(t) = te^{-t} \left[\frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Menuju $te^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pada t tak terhingga, maka solusi menuju ke arah asal asimtotik oleh vektor eigen.



Gambar 2.8 (a) Phase Portrait, (b) Plot x_1 Dibandingkan t untuk $c_1 = 2$ dan $c_2 = -2$, *Degenerate Stable Node* untuk Contoh 10

Jelas bahwa $x_1(t)$ menuju ke titik arah asal dan t menuju tak hingga, sehingga beberapa solusi yang linier dari dua variabel bebas menuju titik arah asal t menuju tak hingga. Maka terdapat satu solusi yang bergerak sepanjang garis lurus. Semua solusi menuju titik arah asal dengan nilai vektor eigen. Sistem ini disebut *degenerate stable node*, diberikan $c_1 = 2$ dan $c_2 = -2$ untuk menggambar grafik dari $(t, x_1(t))$ dan kondisi $x_1(0) = 2$ dan $x_2(0) = 0$. Maka diperoleh gambar 2.8(b). Perhatikan bahwa komponen solusi dapat berubah tandanya satu kali, tapi tetap mendekati. Ini merupakan perbedaan dengan solusi *stable node*.

2.8 Deteksi Diabetes

M. Braun menyajikan sebuah model dalam buku karyanya untuk mendeteksi penyakit diabetes, dua variabel g dan h adalah penyimpanan dari tingkat glukosa dan konsentrasi hormon dari tingkat dasar setelah beberapa jam ketika berpuasa. Ketika pasien masuk ke rumah sakit, tingkat glukosa darah meningkat dari tingkat $g(0)$ dan kemudian respon tubuh diukur untuk waktu yang positif. Hormonal yang diambil sebagai $h(0) = 0$. Maka respon diukur mulai dari $t = 0$ setelah glukosa diberikan jika respon diasumsikan linier, sistem yang dihasilkan dari persamaan diferensial adalah sebagai berikut (Robinson, 2004:50):

$$\dot{g} = -m_1 g - m_2 h$$

$$\dot{h} = m_4 g - m_3 h$$

Dimana m adalah parameter. Persamaan karakteristik yang homogen adalah $\lambda^2 + \tau\lambda + \Delta$, dimana $\tau = m_1 + m_3$ dan $\Delta = m_1 m_3 + m_2 m_4$. Jika diasumsikan $\tau^2 - 4\Delta = -\omega^2 < 0$, maka nilai eigen adalah $-\frac{\tau}{2} \pm i\omega$.

Semua solusi memiliki faktor $e^{-\tau t/2}$ dan yang lainnya $\cos(\omega t)$ atau $\sin(\omega t)$. Seperti untuk solusi skalar yang berordo dua, komponen g memiliki solusi sebagai berikut:

$$g(t) = Ae^{-\tau t/2} \cos(\omega(t - \delta))$$

Untuk pasien tertentu, konstanta m_j serta amplitudo A dan pergeseran fasa δ yang tidak diketahui. Cukup mencoba untuk menentukan m_j dan menentukan jumlah τ dan ω , selain A dan δ .

Dengan mengukur tingkat glukosa ketika pasien datang untuk tingkat dasar, kemudian untuk menentukan g_j dan juga t_j , terdapat empat konstanta yang

tidak diketahui, maka memerlukan empat pembaca pada waktu t_j untuk memecahkan persamaan

$$g(t) = Ae^{-\tau t/2} \cos(\omega(t - \delta))$$

Untuk konstanta. Dari pada menggunakan empat bacaan, lebih baik mengambil lebih dan menggunakan kuadrat terkecil untuk meminimalkan kuantitas sebagai berikut:

$$E = \sum_{j=1}^n \left[g_j - Ae^{-\tau t_j/2} \cos(\omega(t_j - \delta)) \right]^2$$

Hal ini dilakukan dalam sebuah penelitian medis seperti yang dilaporkan bahwa telah ditemukan sedikit kesalahan dalam pembacaan menyebabkan kesalahan besar dikonstan τ , tapi konstanta ω jauh lebih dapat diandalkan, dengan demikian ω adalah kuantitas yang lebih baik untuk menentukan apakah seseorang menderita diabetes. ω Pada dasarnya periode osilasi tingkat hormon dan glukosa dalam darah. Seseorang tanpa diabetes memiliki periode $T_0 = 2\pi/\omega$ kurang dari empat jam, sedangkan orang terkena diabetes memiliki T_0 lebih dari empat jam.

2.9 Sikap Muslim Ketika Mengalami Musibah

Dalam Al-Qur'an telah dijelaskan bahwa penyakit hanyalah ujian untuk melatih kesabaran dan menaikkan derajat manusia dihadapan Allah serta yakin baik buruk akan kembali kepada Allah, sebagaimana firman Allah

وَلَنَبْلُوَنَّكُمْ بِشَيْءٍ مِّنَ الْخَوْفِ وَالْجُوعِ وَنَقْصٍ مِّنَ الْأَمْوَالِ وَالْأَنْفُسِ وَالثَّمَرَاتِ ۗ وَبَشِّرِ الصَّابِرِينَ ﴿١٢٥﴾ الَّذِينَ إِذَا أَصَابَتْهُمُ مُصِيبَةٌ قَالُوا إِنَّا لِلَّهِ وَإِنَّا إِلَيْهِ رَاجِعُونَ ﴿١٢٦﴾ أُولَٰئِكَ عَلَيْهِمْ صَلَوَاتٌ مِّن رَّبِّهِمْ وَرَحْمَةٌ وَأُولَٰئِكَ هُمُ الْمُفْتَخُونَ ﴿١٢٧﴾

“dan sungguh akan Kami berikan cobaan kepadamu, dengan sedikit ketakutan, kelaparan, kekurangan harta, jiwa dan buah-buahan. dan berikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar. (yaitu) orang-orang yang apabila ditimpa musibah, mereka mengucapkan: "Inna lillaahi wa innaa ilaihi raaji'uun". Mereka itulah yang mendapat keberkatan yang sempurna dan rahmat dari Tuhan mereka dan mereka Itulah orang-orang yang mendapat petunjuk“ (QS.Al-Baqarah: 155-157).

Menurut ‘Aidh Al-Qarni dalam buku Tafsir Muyassar. Sesungguhnya kalian akan Kami beri cobaan dengan musibah dan kesusahan agar menjadi jelas siapa yang jujur dan siapa yang pendusta. Di antara cobaan yang akan Kami timpakan kepada kalian itu adalah rasa takut dari musuh, kekurangan makanan, kehilangan sebagian dari harta benda, kekacauan kondisi, meninggalnya orang tercinta, rusaknya buah-buahan, serta binasanya pohon-pohonan. Semua itu Kami lakukan agar Kami dapat menguji kalian dikehidupan dunia, karena dunia bukanlah negeri abadi. Dalam keadaan sulit dan menghadapi berbagai cobaan tidak akan ada yang berguna bagi kalian selain kesabaran (Al-Qarni, 2007:118).

Orang yang sabar adalah orang-orang beriman yang apabila ditimpa musibah akan berkata, “Kami adalah hamba Allah dan milik-Nya, Dia memutuskan untuk kami apa yang Dia kehendaki dari kebahagiaan, kesusahan, dan kesenangan. Kami berada di bawah pengaturan dan suratan takdir-Nya, dan kami akan dikembalikan kepadanya untuk dihisab”. Barang siapa bersabar maka baginya pahala, dan barang siapa berkeluh kesah maka siksa baginya. Orang yang sabar akan diberi rahmat dan orang yang marah akan terjatuh dari rahmat (Al-Qarni, 2007:119).

Orang-orang yang bersabar mendapat pujian dan sanjungan dari Allah SWT. Disebutkan, mereka akan mendapat rahmat dan ridha-Nya, karena mereka mendapat petunjuk untuk menyembah Rabb mereka dengan cara bersyukur

terhadap setiap nikmat-Nya dan bersabar atas setiap cobaan dari-Nya. Keberkatan dari Allah merupakan mahkota dari segala bentuk penerimaan. Rahmat merupakan rasa aman dari segala rasa kerugian, dan hidayah adalah taufik untuk menempuh jalan yang lurus (Al-Qarni, 2007:119).

Menurut Syaikh Shafiyyur al-Mubarak dalam buku Shahih Tafsir Ibnu Katsir. Allah mengabarkan bahwa Dia akan memberikan cobaaan kepada hamba-hamba-Nya. Terkadang Allah memberikan ujian berupa kebahagiaan dan terkadang Dia memberikan ujian berupa kesusahan, seperti rasa takut dan kelaparan. Ujian pada orang yang sedang dalam keadaan lapar dan takut akan sangat terlihat jelas. Hilangnya sebagian harta, kematian kerabat, sahabat dan orang-orang yang dicintai. Ketika kebun dan ladang tidak dapat diolah sebagaimana mestinya.

Kemudian Allah menjelaskan tentang orang-orang yang bersabar. Mereka menghibur diri dengan ucapan ini ketika ujian menimpa mereka. Mereka yakin bahwa diri mereka adalah milik Allah, serta Allah memperlakukan hamba-Nya sesuai dengan kehendak-Nya. Selain itu, mereka meyakini bahwa Dia tidak akan menyia-nyiakan amalan mereka, meskipun hanya sebesar *dzarrah* (materi terkecil) pada hari Kiamat kelak. Keyakinan ini menjadikan mereka mengakui bahwa dirinya hanyalah seorang hamba yang dihadapan Allah, dan mereka akan kembali kepada-Nya kelak di akhirat. Karena itulah, Allah mengabarkan apa yang akan diberikan kepada mereka yaitu rahmat-Nya terhadap mereka. Mereka itulah orang-orang yang diberikan pahala-pahala dan diberikan pula tambahannya.

Ucapan *istirja'* ketika ditimpa musibah telah disebutkan dalam banyak hadits. Di antaranya adalah hadits yang diriwayatkan oleh Imam Ahmad dari Ummu salamah, ia bercerita: “pada suatu hari, setelah menemui Rasulullah, Abu salamah mendatangiku, lalu ia menceritakan bahwa ia telah mendengar ucapan Rasulullah yang membuat aku merasa senang. Beliau bersabda, yang artinya: “Tidak ada seseorang dari kaum muslimin yang ditimpa musibah, lalu ia mengucapkan *'Innaa lillaahi wa innaa ilaihi wa raaji'uun'*, lalu berdoa, *'Allaahumma' jurnii fii mushiibatii wa akhliflii khairan minhaa* (Ya Allah, berilah aku pahala dalam musibahku ini, dan berilah aku pengganti yang lebih baik darinya), ‘melainkan akan do'anya itu dikabulkan” (Al-Mubarak, 2006:516).

Menurut Hikmat Basyir dalam buku Tafsir Al-Muyassar. Kami akan menguji kalian dengan sedikit rasa takut, lapar, menipisnya harta baik karena kehilangan atau kesulitan mendapatkannya. Dan ujian pada jiwa berupa kematian atau syahadah di jalan Allah, menipisnya buah-buahan seperti kurma, anggur dan biji-biji lainnya. Sampaikan berita gembira wahai Nabi kepada orang-orang yang sabar dalam menghadapi hal itu dan hal-hal yang sepertinya dengan sesuatu yang membahagiakan mereka dan menyenangkan hati mereka berupa akibat baik di dunia dan akhirat (Basyir, 2011:93).

Di antara sifat orang-orang yang sabar tersebut adalah bahwa bila mereka ditimpa musibah yang tidak mereka harapkan, mereka berkata “sesungguhnya kami hanyalah hamba milik Allah, kami diatur oleh-Nya melalui perintah dan aturan-Nya, Dia melakukan terhadap kami sebagaimana yang Dia kehendaki. Sesungguhnya kami akan kembali kepada-Nya dengan kematian, kemudian Dia

membangkitkan untuk menghisab dan membalas. Orang-orang sabar tersebut mendapatkan sanjungan dari tuhan mereka, rahmat yang besar dari-Nya. Mereka adalah orang-orang yang mendapatkan bimbingan ke jalan yang lurus (Basyir, 2011:93).

Menurut Imam Jalaluddin As-Suyuti dalam buku Tafsir Jalalain. (dan sesungguhnya Kami akan memberimu cobaan berupa sedikit ketakutan) terhadap musuh, paceklik (kelaparan), kurang harta disebabkan datangnya malapetaka, kematian, penyakit, dan buah-buahan karena banyak kekeringan artinya Kami akan menguji kamu, apakah kamu bersabar atau tidak. Sampaikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar bahwa mereka akan menerima ganjaran kesenangan berupa surga. Dalam hal ini yaitu orang-orang yang apabila mereka ditimpa musibah, bencana atau malapetaka, mereka mengucapkan “*innalillahi*” sesungguhnya kita ini milik Allah yang dapat diperlakukan-Nya sekehendak-Nya (wa inna ilaihi raji’un)” dan sesungguhnya manusia akan kembali kepada-Nya yaitu ke akhirat, disana manusia akan diberi-Nya balasan. Dalam sebuah hadits disebutkan “barang siapa yang istirja’ membaca ucapan seperti di atas, ketika menerima musibah, maka ia diberi pahala oleh Allah dan diringinya dengan kebaikan. Diberitakan bahwa pada suatu saat lampu Nabi Muhammad SAW padam, maka beliau pun membaca istirja’, lalu berkata Aisyah: “bukankah ini hanya sebuah lampu”. Jawabannya “setiap yang mengecewakan hati orang mukmin itu berarti musibah”. Diriwayatkan oleh Abu Daud (Jalaluddin, 2008:79).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Model Kompetisi Glukosa, Insulin dan Epinefrin

Diabetes merupakan sekumpulan gejala yang timbul pada seseorang dengan kadar glukosa darah yang melebihi nilai normal akibat tubuh kekurangan insulin. Insulin merupakan salah satu hormon dalam tubuh manusia yang dihasilkan oleh sel β pulau Langerhans yang berada di dalam kelenjar pankreas.

Glukosa dalam darah akan merangsang sel- β pulau Langerhans untuk mengeluarkan insulin. Sebelum ada insulin, glukosa yang terdapat dalam darah tidak dapat masuk ke dalam sel-sel jaringan tubuh. Insulin berfungsi membuka pintu sel jaringan, memasukkan glukosa ke dalam sel kemudian menutup pintu sel jaringan kembali. Sedangkan epinefrin lebih dikenal sebagai adrenalin yaitu suatu hormon yang dikeluarkan oleh medula dari kelenjar adrenal. Epinefrin dilepaskan oleh tubuh ke dalam darah ketika seseorang dalam keadaan emosi seperti rasa marah atau takut. Hal ini menyebabkan peningkatan denyut jantung, kekuatan otot, tekanan darah, dan metabolisme gula (Kwack dkk, 2011:279).

3.1.1 Identifikasi Model Matematika

Model matematika pada kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah menggunakan beberapa variabel dan parameter adalah sebagai berikut:

$g(t)$: Jumlah konsentrasi glukosa dalam darah (g) pada waktu t

$h(t)$: Jumlah konsentrasi insulin dalam darah (h) pada waktu t

$e(t)$: Jumlah konsentrasi epinefrin dalam darah (e) pada waktu t

a : Penghasilan glukosa ditingkatkan dari glikogen gangguan

b : Penghasilan glukosa ditingkatkan dari laktat dan asam amino

c : Mobilisasi lemak ditingkatkan oleh rangsangan hormon lipase sensitif

d : Rangsangan jaring kekecilan dari pengeluaran insulin dari pankreas sel- β

Bolie (1961) mengukur glukosa dalam gram, insulin dalam unit dan waktu dalam jam. Maka menghasilkan nilai rata-rata untuk orang normal a, b, c, d dan f, k, l, m, n setelah memasukkan epinefrin sebagai variabel ketiga (Kwach dkk, 2011:280).

Model yang digunakan diambil dari jurnal yang dirumuskan (Kwach dkk, 2011) dalam karya tulis yang berjudul “*Mathematical Model for Detecting Diabetes in the Blood*”. Misalkan $g(t)$, $h(t)$ dan $e(t)$ berturut-turut menyatakan jumlah konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin pada waktu t maka laju perubahan dari konsentrasi tersebut diperoleh dengan asumsi sebagai berikut:

1. Konsentrasi Glukosa

Perubahan jumlah konsentrasi glukosa $g(t)$ terhadap waktu adalah dikurangi nilai penghasilan glukosa ditingkatkan dari glikogen gangguan (a), sehingga laju perubahan konsentrasi adalah

$$\frac{dg(t)}{dt} = -ag(t)$$

dengan adanya konsentrasi insulin $h(t)$ terhadap waktu maka dikurangi dengan nilai penghasilan glukosa ditingkatkan dari laktat dan asam amino (b), sehingga laju perubahan konsentrasi menjadi

$$\frac{dg(t)}{dt} = -ag(t) - bh(t)$$

dan kemudian ditambah koefisien (f) pada laju konsentrasi epinefrin $e(t)$, terhadap waktu, sehingga laju perubahan konsentrasi menjadi

$$\frac{dg(t)}{dt} = -ag(t) - bh(t) + fe(t)$$

2. Konsentrasi Insulin

Perubahan jumlah konsentrasi insulin $h(t)$ terhadap waktu adalah dikurangi rangsangan jaring kekecilan dari pengeluaran insulin dari pankreas sel- β (d), sehingga laju perubahan konsentrasi adalah

$$\frac{dh(t)}{dt} = -dh(t)$$

dengan adanya konsentrasi glukosa $g(t)$ terhadap waktu maka ditambah nilai rangsangan dari hormon lipase sensitif (c), sehingga laju perubahan konsentrasi menjadi

$$\frac{dh(t)}{dt} = cg(t) - dh(t)$$

dan kemudian ditambah koefisien (k) pada laju konsentrasi epinefrin $e(t)$ terhadap waktu, sehingga laju perubahan konsentrasi menjadi

$$\frac{dh(t)}{dt} = cg(t) - dh(t) + ke(t)$$

3. Konsentrasi Epinefrin

Perubahan jumlah konsentrasi epinefrin $e(t)$ terhadap waktu adalah ditambah koefisien (n), sehingga laju perubahan konsentrasinya adalah

$$\frac{de(t)}{dt} = ne(t)$$

dengan adanya konsentrasi glukosa $g(t)$ terhadap waktu maka dikurangi koefisien (l), sehingga laju perubahan konsentrasi menjadi

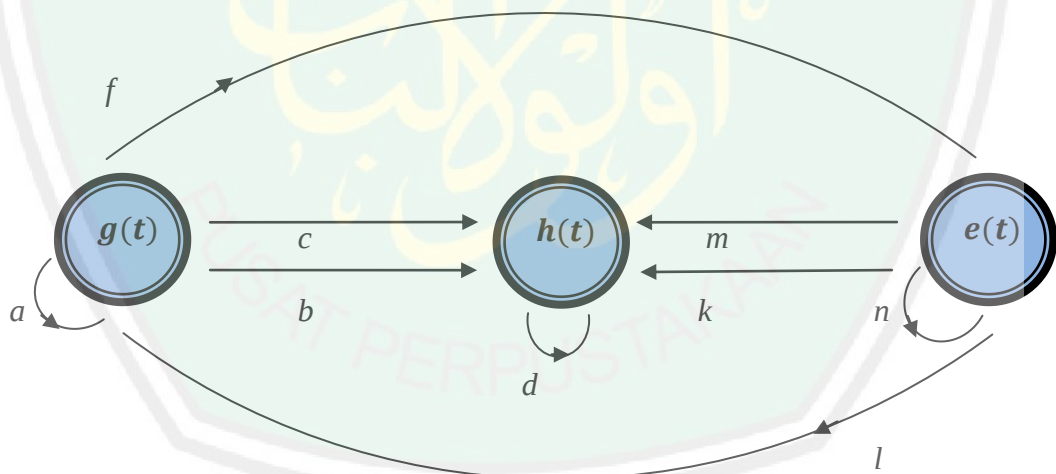
$$\frac{de(t)}{dt} = -lg(t) + ne(t)$$

dan kemudian dikurangi koefisien (m) pada laju konsentrasi insulin $h(t)$ terhadap waktu, sehingga laju perubahan konsentrasi menjadi

$$\frac{de(t)}{dt} = -lg(t) - mh(t) + ne(t)$$

Maka persamaan untuk laju konsentrasi glukosa $g(t)$, insulin $h(t)$ dan epinefrin $e(t)$ terhadap waktu dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= -ag(t) - bh(t) + fe(t) \\ \frac{dh(t)}{dt} &= cg(t) - dh(t) + ke(t) \\ \frac{de(t)}{dt} &= -lg(t) - mh(t) + ne(t)\end{aligned}\quad 3.1$$



Gambar 3.1. Skema Dinamik Model Diabetes

Diabetes dalam darah terdapat tiga sub-populasi yang meliputi glukosa, insulin, dan epinefrin. Unsur-unsur dalam tiga sub-populasi ini memiliki keterkaitan yang dihubungkan oleh konsanta. Maka terjadi suatu situasi keseimbangan dinamik dan jumlah sel darah harus merefleksikan nilai konstan yang ada.

Model yang direduksi dari glukosa, insulin, dan epinefrin terdiri dari sistem persamaan diferensial yang bergantung pada variabel-variabel yang menyatakan tingkat konsentrasi dalam darah.

3.1.2 Besaran Parameter

Untuk parameter a , b , c , d , f , k , l , m , dan n berturut-turut diberikan ketetapan oleh 2,92; 4,34; 0,21; 0,78; 1,24; 0,14; 2,94; 0,98; dan 0,53.

Tabel 3.1 Konsentrasi Glukosa Darah Setelah Penuangan Insulin dan Dihubungkan dengan Epinefrin (di mmol / L) (Kwach dkk, 2011:283).

Glukosa	Insulin	Epinefrin	Glukosa	Insulin	Epinefrin
Awal	Kontrol	Kontrol	Awal	Kontrol	Kontrol
26.00	6.8	3.0634	30.00	9.0	3.6495
18.30	11.3	7.9093	18.60	7.9	3.2156
22.00	8.0	3.0831	21.84	7.2	2.5910
25.00	7.0	3.6415	27.20	4.3	3.9789
17.30	5.7	2.4745	20.70	7.1	2.9385
18.00	6.9	2.7898	18.46	6.7	2.5910
20.20	8.0	2.9766	18.10	7.2	2.2616

Untuk manusia dengan gula darah rendah, nilai sekunder dan data mentah dari konsentrasi glukosa darah sebelum dan sesudah kedalam pembuluh darah, digunakan pada konsentrasi glukosa darah seperti terlihat pada tabel 3.1.

3.1.3 Tahapan Diabetes pada Manusia

Insulin dan glukosa merupakan sistem kontrol umpan balik yang penting untuk menjaga konsentrasi glukosa darah yang normal. Saat konsentrasi glukosa meningkat terlalu tinggi, insulin disekresikan untuk menurunkan konsentrasi glukosa darah menuju normal.

Kadar gula darah normal manusia saat puasa adalah 110 mg/dl – 126 mg/dl. Pada saat puasa, jika kadar gula darah di bawah 110 mg/dl dikatakan kekurangan zat gula. Sebaliknya jika kadar gula darah di atas 126 mg/dl dikatakan menderita kadar gula darah tinggi atau diabetes.

Kadar gula darah normal manusia setelah mengkonsumsi makanan (dua jam setelah makan) adalah 140 mg/dl – 200 mg/dl. Jika kadar gula darah setelah makan di bawah 140 mg/dl dikatakan kekurangan gula darah. Sebaliknya jika kadar gula darah di atas 200 mg/dl dikatakan menderita kadar gula darah tinggi atau diabetes (Kwack dkk, 2011:285).

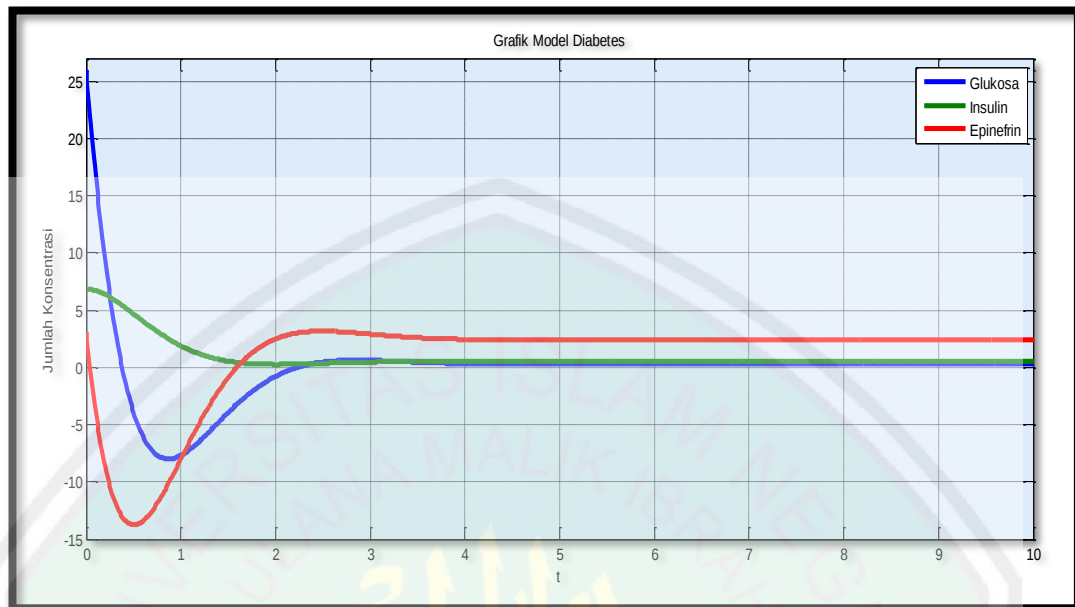
3.2 Analisis Dinamik Model Kompetisi Glukosa, Insulin dan Epinefrin

Bentuk model matematika pada diabetes dalam darah setelah dimasukkan besaran nilai parameter adalah sebagai berikut:

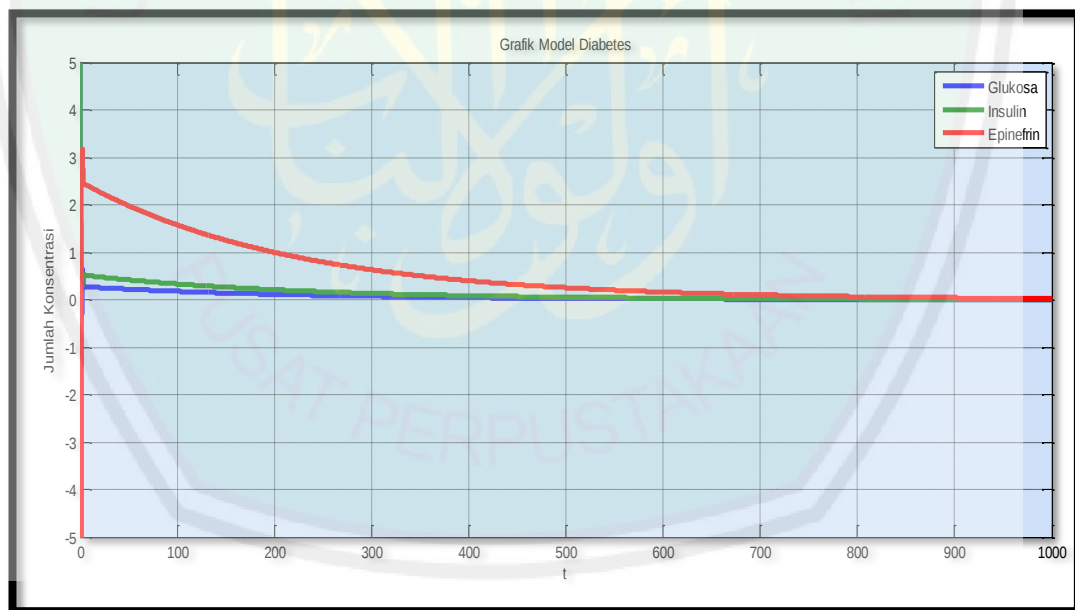
$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= -2,92g(t) - 4,34h(t) + 1,24e(t) \\ \frac{dh(t)}{dt} &= 0,21g(t) - 0,78h(t) + 0,14e(t) \\ \frac{de(t)}{dt} &= -2,94g(t) - 0,98h(t) + 0,53e(t)\end{aligned}$$

Persamaan 3.2. Model Diabetes dengan Nilai Parameter

Dalam hal ini akan ditampilkan grafik solusi numerik dari persamaan 3.2 untuk menentukan selang waktu yang stabil.



Gambar 3.2(a). Grafik Model Diabetes pada Saat Batas Atas Interval Waktu 10 dengan Nilai Awal $g(0) = 26$, $h(0) = 6.8$, dan $e(0) = 3.0634$.



Gambar 3.2(b). Grafik Model Diabetes pada Saat Batas Atas Interval Waktu 1000 dengan Nilai Awal $g(0) = 26$, $h(0) = 6.8$, dan $e(0) = 3.0634$.

Grafik solusi numerik pada gambar 3.2(a) dan 3.2(b) terdapat catatan bahwa garis vertikal atau jumlah konsentrasi yang menunjukkan nilai nol adalah kondisi normal untuk konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin dalam darah.

Sedangkan yang menunjukkan nilai negatif adalah kondisi kekurangan atau rendah untuk konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin dalam darah.

Berdasarkan gambar 3.2(a) diketahui bahwa konsentrasi glukosa dalam darah mengalami penurunan (di bawah normal) sampai saat $t = 0,6$ kemudian konsentrasi glukosa meningkat (menuju normal) sampai saat $t = 2$, konsentrasi insulin dalam darah mengalami penurunan (di bawah normal) sampai saat $t = 1,5$ dan konsentrasi epinefrin dalam darah mengalami penurunan (di bawah normal) sampai saat $t = 0,4$ kemudian konsentrasi epinefrin meningkat sampai saat $t = 2$. Maka dapat diinterpretasikan bahwa konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin dalam darah akan stabil pada saat $t \geq 4$, sedangkan pada saat $t < 4$ ketiga konsentrasi berada pada kondisi yang tidak stabil, disebabkan konsentrasi antara glukosa, insulin dan epinefrin jumlahnya tidak seimbang atau mengalami penurunan atau peningkatan yang tidak proporsional.

Sedangkan gambar 3.2(b) menunjukkan perilaku populasi sampai dengan waktu 1000. Jelas terlihat bahwa jumlah konsentrasi glukosa, insulin, dan epinefrin terus stabil menuju normal.

Persamaan 3.2 adalah sistem persamaan linier, maka memiliki titik tetap $(0, 0, 0)$. Titik tetap lainnya dapat diperoleh secara analitik, dengan perhitungan sebagai berikut:

$$\dot{g} = -2,92g - 4,34h + 1,24e \quad 3.2.1$$

$$\dot{h} = 0,21g - 0,78h + 0,14e \quad 3.2.2$$

$$\dot{e} = -2,94g - 0,98h + 0,53e \quad 3.2.3$$

Eliminasi persamaan (3.2.1) dengan persamaan (3.2.3)

$$\begin{array}{rcl} -2,92g - 4,34h + 1,24e = 0 & \left| \begin{array}{l} \times 2,94 \\ \times 2,92 \end{array} \right| & \begin{array}{l} -8,5848g - 12,7596h + 3,6456e = 0 \\ -8,5848g - 2,8616h + 1,5476e = 0 \end{array} \\ \hline & & -9,898h + 2,098e = 0 \end{array} \quad 3.2.4$$

Eliminasi persamaan (3.2.1) dengan persamaan (3.2.2)

$$\begin{array}{rcl} -2,92g - 4,34h + 1,24e = 0 & \left| \begin{array}{l} \times 0,78 \\ \times 4,34 \end{array} \right| & \begin{array}{l} -2,2776g - 3,3852h + 0,9672e = 0 \\ 0,9114g - 3,3852h + 0,6076e = 0 \end{array} \\ \hline & & -3,189g + 0,3596e = 0 \end{array} \quad 3.2.5$$

Dari persamaan (3.2.4)

$$-9,898h + 2,098e = 0$$

$$9,898h = 2,098e$$

$$h = 0,21196e$$

Dari Persamaan (3.2.5)

$$-3,189g + 0,3596e = 0$$

$$3,189g = 0,3596e$$

$$g = 0,11276e$$

Menghasilkan titik tetap berupa perbandingan, sebagai berikut:

$$(g:h:e) = (1:1,87974:8,86839)$$

3.2.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan persamaan 3.2 adalah A , maka

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{h} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,92 & -4,34 & 1,24 \\ 0,21 & -0,78 & 0,14 \\ -2,94 & -0,98 & 0,53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \\ e \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -2,92 & -4,34 & 1,24 \\ 0,21 & -0,78 & 0,14 \\ -2,94 & -0,98 & 0,53 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -2,92 - \lambda & -4,34 & 1,24 \\ 0,21 & -0,78 - \lambda & 0,14 \\ -2,94 & -0,98 & 0,53 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
&= (-2,92 - \lambda)(-0,78 - \lambda)(0,53 - \lambda) + (-4,34)(0,14)(-2,94) + (1,24) \\
&\quad (0,21)(-0,98) - 2,94(-0,78 - \lambda)(1,24) - (-0,98)(0,14)(-2,92 - \lambda) \\
&\quad - (0,53 - \lambda)(0,21)(-4,34) \\
&= (-\lambda^3 - 3,17\lambda^2 - 0,3166\lambda + 1,2071) + 1,7863 + (-0,2552) - (3,6456\lambda + \\
&\quad 2,8436) - (0,1372\lambda + 0,4006) - (0,9114\lambda - 0,438) \\
&= -\lambda^3 - 3,17\lambda^2 - 0,3166\lambda - 4,6924\lambda + 2,7382 - 2,7612 \\
&= -\lambda^3 - 3,17\lambda^2 - 5,009\lambda - 0,023
\end{aligned}$$

Jadi nilai eigen pada titik tetap $(0, 0, 0)$ adalah:

$$\lambda_1 = -0,0046$$

$$\lambda_2 = -1,5827 + 1,5778 i$$

$$\lambda_3 = -1,5827 - 1,5778 i$$

$\lambda_1 < 0$ dikatakan *stable node* asimtotik dan $\lambda_{2,3} = a \pm bi$ nilai $a < 0$ disebut *stable spiral* asimtotik.

Selanjutnya untuk mencari vektor eigen, dengan rumus:

$$(A - \lambda_i I) \vec{v}^{(i)} = 0, \forall i = 1, 2, 3$$

Menghasilkan vektor eigen dari masing-masing nilai eigen pada titik tetap $(0, 0, 0)$ sebagai berikut:

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0815 \\ -0,1539 \\ -0,7309 \end{bmatrix} k$$

$$\vec{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1483 \\ -0,1271 \\ 0,2794 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,6969 \\ -0,0602 \\ 0,7319 \end{bmatrix} i$$

$$\vec{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1483 \\ -0,1271 \\ 0,2794 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,6969 \\ -0,0602 \\ 0,7319 \end{bmatrix} i$$

Maka memiliki solusi umum sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} g \\ h \\ e \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}^{(1)} + e^{\alpha t} \left(C_2 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \\ C_3 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \sin \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \end{pmatrix} \right) +$$

Maka

$$\begin{bmatrix} g \\ h \\ e \end{bmatrix} = C_1 e^{-0,0046t} \begin{bmatrix} -0,0815 \\ -0,1539 \\ -0,7309 \end{bmatrix} + e^{-1,5827t} \left(C_2 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -0,1483 \\ -0,1271 \\ 0,2794 \end{bmatrix} \cos 1,5778t - \begin{bmatrix} 0,6969 \\ -0,0602 \\ 0,7319 \end{bmatrix} \sin 1,5778t \\ C_3 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -0,1483 \\ -0,1271 \\ 0,2794 \end{bmatrix} \sin 1,5778t - \begin{bmatrix} 0,6969 \\ -0,0602 \\ 0,7319 \end{bmatrix} \cos 1,5778t \end{pmatrix} \right)$$

Maka solusi umum untuk persamaan 3.1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$g(t) = -0,0815C_1 e^{-0,0046t} + e^{-1,5827t} (C_2 (-0,1483 \cos 1,5778t - 0,6969 \sin 1,5778t) + C_3 (-0,1483 \sin 1,5778t - 0,6969 \cos 1,5778t))$$

$$h(t) = -0,1539C_1 e^{-0,0046t} + e^{-1,5827t} (C_2 (-0,1271 \cos 1,5778t + 0,0602 \sin 1,5778t) + C_3 (-0,1271 \sin 1,5778t + 0,0602 \cos 1,5778t))$$

$$\begin{aligned}
 e(t) &= -0,7309C_1e^{-0,0046t} \\
 &+ e^{-1,5827t}(C_2(0,2794 \cos 1,5778t - 0,7319 \sin 1,5778t) \\
 &+ C_3(0,2794 \sin 1,5778t - 0,7319 \cos 1,5778t))
 \end{aligned}$$

Dengan nilai awal $g(0) = 26$, $h(0) = 6,8$ dan $e(0) = 3,0634$ maka menghasilkan nilai C_1 , C_2 dan C_3 sebagai berikut:

untuk

$$\begin{aligned}
 g(0) &= C_1e^0(-0,0815) \\
 &+ e^0(C_2(-0,1483 \cos 0 - 0,6969 \sin 0) \\
 &+ C_3(-0,1483 \sin 0 - 0,6969 \cos 0)) \\
 g(0) &= -0,0815C_1e^0 + e^0(-0,1483C_2 - 0,6969C_3) \\
 26 &= -0,0815C_1 - 0,1483C_2 - 0,6969C_3
 \end{aligned}$$

untuk

$$\begin{aligned}
 h(0) &= C_1e^0(-0,1539) \\
 &+ e^0(C_2(-0,1271 \cos 0 + 0,0602 \sin 0) \\
 &+ C_3(-0,1271 \sin 0 + 0,0602 \cos 0)) \\
 h(0) &= -0,1539C_1e^0 + e^0(-0,1271C_2 + 0,0602C_3) \\
 6,8 &= -0,1539C_1 - 0,1271C_2 + 0,0602C_3
 \end{aligned}$$

untuk

$$\begin{aligned}
 e(0) &= C_1e^0(-0,7309) \\
 &+ e^0(C_2(0,2794 \cos 0 - 0,7319 \sin 0) \\
 &+ C_3(0,2794 \sin 0 - 0,7319 \cos 0)) \\
 e(0) &= -0,7309C_1e^0 + e^0(0,2794C_2 - 0,7319C_3)
 \end{aligned}$$

$$3,0634 = -0,7309C_1 + 0,2794C_2 - 0,7319C_3$$

Menghasilkan

$$26 = -0,0815C_1 - 0,1483C_2 - 0,6969C_3 \quad 3.3.1$$

$$6,8 = -0,1539C_1 - 0,1271C_2 + 0,0602C_3 \quad 3.3.2$$

$$3,0634 = -0,7309C_1 + 0,2794C_2 - 0,7319C_3 \quad 3.3.3$$

Untuk mendapatkan nilai C_1 , C_2 dan C_3 menggunakan cara substitusi dan eliminasi persamaan 3.3.1, 3.3.2 dan 3.3.3. Setelah melakukan proses pengeliminasian dan pensubstitusian, menghasilkan nilai $C_1 = -3,9485$; $C_2 = -59,6452$ dan $C_3 = -24,1538$.

Maka solusi khusus untuk persamaan 3.1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g(t) &= -0,0815(-3,9485)e^{-0,0046t} \\ &\quad + e^{-1,5827t}(-59,6452(-0,1483 \cos 1,5778t \\ &\quad - 0,6969 \sin 1,5778t) \\ &\quad - 24,1538(-0,1483 \sin 1,5778t - 0,6969 \cos 1,5778t)) \\ g(t) &= 0,3218 e^{-0,0046t} \\ &\quad + e^{-1,5827t}(-59,6452(-0,1483 \cos 1,5778t \\ &\quad - 0,6969 \sin 1,5778t) \\ &\quad - 24,1538(-0,1483 \sin 1,5778t - 0,6969 \cos 1,5778t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(t) = & -0,1539(-3,9485)e^{-0,0046t} \\
 & + e^{-1,5827t}(-59,6452(-0,1271 \cos 1,5778t \\
 & + 0,0602 \sin 1,5778t) \\
 & - 24,1538(-0,1271 \sin 1,5778t + 0,0602 \cos 1,5778t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(t) = & 0,6077 e^{-0,0046t} \\
 & + e^{-1,5827t}(-59,6452(-0,1271 \cos 1,5778t \\
 & + 0,0602 \sin 1,5778t) \\
 & - 24,1538(-0,1271 \sin 1,5778t + 0,0602 \cos 1,5778t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e(t) = & -0,7309 (-3,9485)e^{-0,0046t} \\
 & + e^{-1,5827t}(-59,6452(0,2794 \cos 1,5778t \\
 & - 0,7319 \sin 1,5778t) \\
 & - 24,1538(0,2794 \sin 1,5778t - 0,7319 \cos 1,5778t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e(t) = & 2,8856 e^{-0,0046t} \\
 & + e^{-1,5827t}(-59,6452(0,2794 \cos 1,5778t \\
 & - 0,7319 \sin 1,5778t) \\
 & - 24,1538(0,2794 \sin 1,5778t - 0,7319 \cos 1,5778t))
 \end{aligned}$$

Dengan solusi khusus akan didapatkan jumlah konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin yang dinyatakan stabil pada saat $t \geq 4$ dapat dinyatakan sebagai berikut:
untuk $t = 4$

$$\begin{aligned}
 g(4) &= 0,3218 e^{-0,0046(4)} \\
 &+ e^{-1,5827(4)}(-59,6452(-0,1483 \cos 1,5778(4) \\
 &- 0,6969 \sin 1,5778(4)) \\
 &- 24,1538 (-0,1483 \sin 1,5778(4) - 0,6969 \cos 1,5778(4)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(4) &= 0,3218 e^{-0,0184} \\
 &+ e^{-6,3308}(-59,6452(-0,1483 \cos 6,3112 - 0,6969 \sin 6,3112) \\
 &- 24,1538(-0,1483 \sin 6,3112 - 0,6969 \cos 6,3112))
 \end{aligned}$$

$$g(4) = 0,3639$$

$$\begin{aligned}
 h(4) &= 0,6077 e^{-0,0046(4)} \\
 &+ e^{-1,5827(4)}(-59,6452(-0,1271 \cos 1,5778(4) \\
 &+ 0,0602 \sin 1,5778(4)) \\
 &- 24,1538(-0,1271 \sin 1,5778(4) + 0,0602 \cos 1,5778(4)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(4) &= 0,6077 e^{-0,0184} \\
 &+ e^{-6,3308}(-59,6452(-0,1271 \cos 6,3112 + 0,0602 \sin 6,3112) \\
 &- 24,1538 (-0,1271 \sin 6,3112 + 0,0602 \cos 6,3112))
 \end{aligned}$$

$$h(4) = 0,6075$$

$$\begin{aligned}
 e(4) &= 2,8856 e^{-0,0046(4)} \\
 &+ e^{-1,5827(4)}(-59,6452(0,2794 \cos 1,5778(4) \\
 &- 0,7319 \sin 1,5778(4)) \\
 &- 24,1538(0,2794 \sin 1,5778(4) - 0,7319 \cos 1,5778(4)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e(4) &= 2,8856 e^{-0,0184} \\
 &+ e^{-6,3308}(-59,6452(0,2794 \cos 6,3112 - 0,7319 \sin 6,3112) \\
 &- 24,1538(0,2794 \sin 6,3112 - 0,7319 \cos 6,3112)) \\
 e(4) &= 2,8366
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh nilai konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin sebagai tabel di bawah ini:

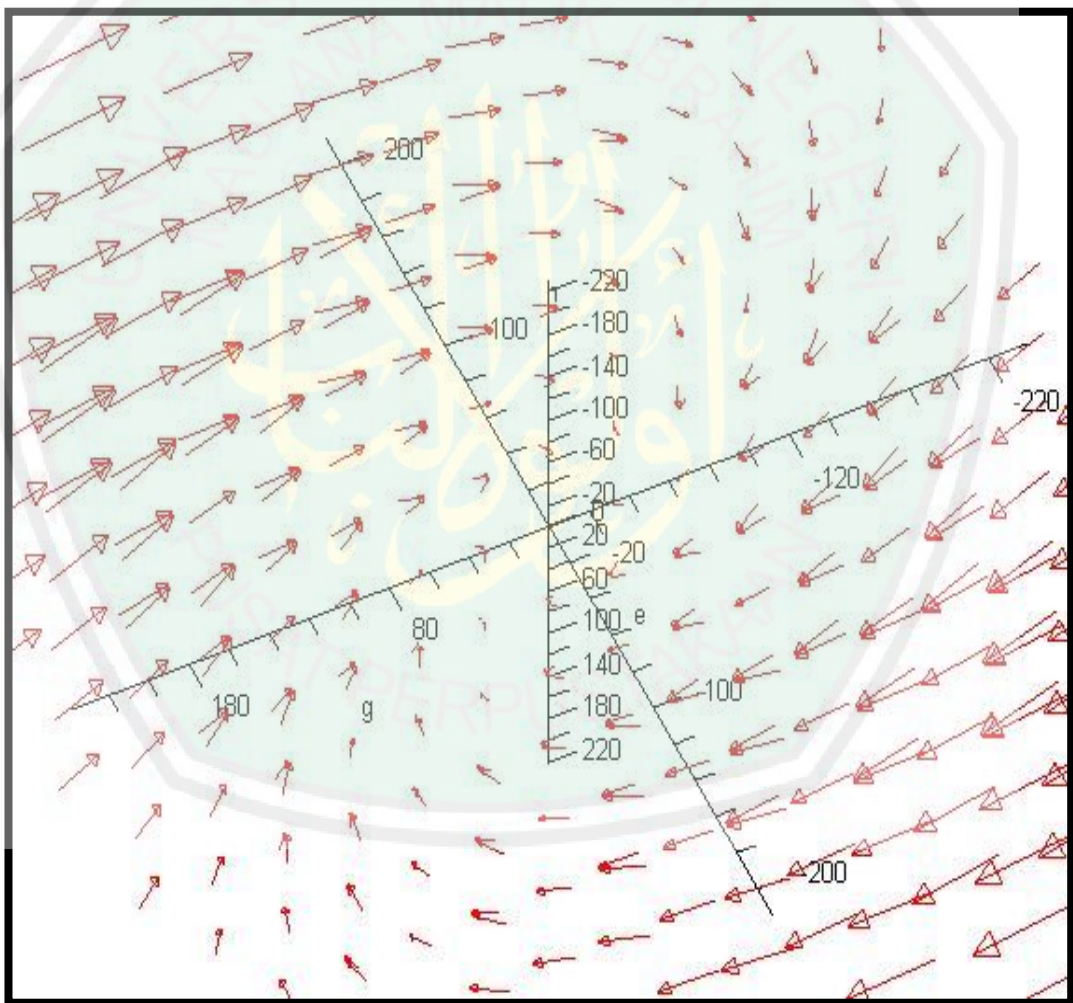
Tabel 3.2. Jumlah Konsentrasi Glukosa, Insulin dan Epinefrin Pada Waktu t .

No.	Waktu (t)	Konsentrasi Glukosa	Konsentrasi Insulin	Konsentrasi Epinefrin	Kondisi pasien
1.	0	26	6.8	3.0634	Diabetes / tidak stabil
2.	1	9.5576	1.1507	10.4519	Diabetes / tidak stabil
3.	2	-0.7913	0.3420	2.7946	Diabetes / tidak stabil
4.	3	-0.0692	0.5771	2.5264	Sehat / stabil
5.	4	0,3639	0,6075	2,8366	Sehat / stabil
6.	5	0.3307	0.5948	2.8335	Sehat / stabil
7.	10	0.3073	0.5804	2.7559	Sehat / stabil
8.	25	0.2868	0.5417	2.5721	Sehat / stabil
9.	50	0.2557	0.4828	2.2927	Sehat / stabil
10.	100	0.2031	0.3836	1.8216	Sehat / stabil
11.	1000	0.0032	0.0061	0.0290	Sehat / stabil
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabel 3.2 menyatakan jumlah konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin dalam darah pada interval waktu t dimana pada interval $t < 4$ jumlah konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin dalam darah tidak seimbang atau tidak proporsional, maka pada kondisi ini tidak stabil atau dapat dikatakan pasien

terkena penyakit diabetes. Sedangkan pada interval $t \geq 4$ jumlah konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin dalam darah seimbang atau proporsional, maka pada kondisi ini disebut kondisi stabil atau dapat dikatakan pasien dalam keadaan sehat.

Selanjutnya perilaku solusi dari persamaan 3.2 dapat diperlihatkan pada gambar berikut:



Gambar 3.3. *Phase Portrait Stable Node dan Spiral Asimtotik untuk Model Diabetes*

Berdasarkan titik tetap $(0,0,0)$ diperoleh nilai eigen riil $\lambda_1 = -0,0046$ dan sepasang nilai Eigen kompleks $\lambda_{2,3} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha < 0$. Gambar

trayektori di sekitar titik tetap diperlihatkan pada gambar 3.3 menyatakan arah trayektori yang terjadi akibat sembarang nilai awal yang tak hingga terhadap titik tetap akan bergerak menuju titik tetap. Perilaku konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin disebut *stable node* asimtotik disebabkan adanya nilai eigen riil negatif dan juga disebut *stable spiral* asimtotik disebabkan adanya nilai eigen kompleks dengan $\alpha < 0$.

3.3 Interpretasi Hasil

Model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin yang ditunjukkan oleh persamaan 3.1 berdasarkan studi yang dilakukan, dimana variabel yang digunakan adalah $g(t)$ sebagai konsentrasi glukosa terhadap waktu, $h(t)$ sebagai konsentrasi insulin terhadap waktu dan $e(t)$ sebagai konsentrasi epinefrin terhadap waktu (Kwach dkk, 2011:280).

Parameter yang digunakan pada model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin ialah $a = 2,92$ merupakan penghasilan glukosa ditingkatkan dari glikogen gangguan, $b = 4,34$ merupakan penghasilan glukosa ditingkatkan dari laktat dan amino asam, $c = 0,21$ merupakan mobilisasi lemak ditingkatkan oleh rangsangan dari hormon lipase sensitif, $d = 0,78$ merupakan rangsangan jaring kekecilan dari pengeluaran insulin dari pankreas sel β . Menggunakan tiga metode yang berbeda, berdasarkan data dari percobaan pada anjing, kemudian diekstrapolasikan pada manusia. Mengukur glukosa dalam gram, insulin dalam unit dan waktu dalam jam. Maka menghasilkan nilai rata-rata untuk orang normal a, b, c, d dan $f = 1,24$; $k = 0,14$; $l = 2,94$; $m = 0,98$ dan $n = 0,53$ dengan memasukkan epinefrin sebagai variabel ketiga (Kwach dkk, 2011:283).

Model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah menghasilkan persamaan 3.2 yaitu sistem persamaan linier, sehingga memiliki titik tetap $(0, 0, 0)$. Titik tetap inilah yang merupakan titik kestabilan atau titik equilibrium. Kemudian titik tetap ini dilanjutkan untuk mencari nilai eigen.

Nilai eigen untuk model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah ditunjukkan pada persamaan 3.2 dengan titik tetap $(0, 0, 0)$ menghasilkan tiga nilai eigen, pertama dengan nilai eigen riil negatif $\lambda_1 = -0,0046$ menunjukkan *stable node* asimtotik, kedua dan ketiga dengan nilai eigen kompleks $\lambda_{2,3} = a + \beta i$ untuk $a < 0$ menunjukkan *stable spiral* asimtotik. Kemudian masing-masing vektor eigen diperoleh dari nilai eigen. Vektor eigen inilah yang akan menghasilkan solusi untuk persamaan 3.2.

Berdasarkan titik tetap $(0, 0, 0)$, nilai eigen pertama riil negatif, nilai eigen kedua dan ketiga kompleks $\lambda_{1,2} = a \pm i\beta$ dengan $a < 0$ dan vektor eigen pada masing-masing dari nilai eigen. Menghasilkan perilaku stabil asimtotik atau *L-stable* pada konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin dimana trayektori bergerak searah jarum jam menuju titik tetap dan masuk menuju titik tetap. Gambar 3.3 menunjukkan perilaku *stable node* asimtotik dan *stable spiral* asimtotik. Perilaku *stable node* tersebut disebabkan oleh nilai eigen riil negatif dan perilaku *stable spiral* tersebut disebabkan nilai eigen kompleks dengan bagian riil negatif yaitu $a < 0$ dan imajiner yang tak nol menunjukkan kondisi stabil asimtotik, sehingga solusi berbentuk spiral.

Berdasarkan gambar 3.2 menunjukkan perilaku untuk model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah, pada $t < 4$

menunjukkan bahwa konsentrasi glukosa, insulin dan epinefrin tidak stabil atau mengalami kondisi yang naik turun yang tidak beraturan dan akan stabil pada $t \geq 4$.

3.4 Integrasi Penyakit Diabetes dalam Kajian Islam

Sehat adalah suatu keadaan sejahtera dari badan, hati, jiwa, dan sosial yang memungkinkan setiap orang hidup produktif secara sosial dan ekonomis. Sehat merupakan nikmat Allah yang sangat besar, karena manusia yang sehat dapat melakukan semua aktivitas dengan baik. Maka sepantasnya manusia bersyukur atas semua nikmat Allah SWT.

Kesehatan jasmani erat kaitannya dengan mengonsumsi makanan dan minuman yang halal dan baik (*thayib*) yaitu makanan dan minuman yang secara hukum dinyatakan boleh, dalam keadaan baik, mengandung gizi dan kalori seimbang atau tidak berlebihan. Dengan demikian, jelas bahwa ajaran Islam sangat mementingkan kesehatan yang dilakukan dengan cara memelihara kebersihan makanan, minuman, tempat tinggal dan sebagainya, serta tidak berlebihan dalam beraktivitas atau berlebihan mengonsumsi makanan.

Sakit adalah suatu keadaan abnormal dari tubuh atau pikiran yang menyebabkan tidak nyaman, disfungsi atau kesukaran. Penyakit diabetes merupakan suatu penyakit kelebihan gula darah. Penyakit diabetes disebabkan oleh banyak faktor, salah satunya mengonsumsi glukosa secara berlebihan. Dalam Islam telah dijelaskan bahwa tidak baik mengonsumsi makanan secara berlebihan, karena dapat mengganggu keseimbangan atau kestabilan dalam tubuh.

Penyakit yang diderita oleh seorang manusia adalah suatu musibah atau ujian dari Allah SWT. Agama Islam mengajarkan manusia untuk sabar, tawakal dan berserah diri kepada Allah SWT saat ditimpa musibah. Segala penyakit datang dari Allah untuk menguji setiap hambanya. Allah telah menurunkan obat untuk semua penyakit, maka setiap manusia dianjurkan tidak putus asa dalam berusaha untuk sembuh atau kembali sehat.

Al-Qur'an merupakan sumber pedoman, bimbingan, dan kekuatan bagi kaum muslim di dunia. Melalui Al-Qur'an, Islam membimbing manusia menuju hidup sehat baik lahir dan batin. Banyak hadits Nabi Muhammad yang mengandung nilai-nilai medis. Seharusnya perkembangan ilmu kedokteran Islam menjadi kiblat kedokteran dunia.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang dilaksanakan, maka didapatkan kesimpulan dari pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah terhadap waktu adalah sebagai berikut adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= -ag(t) - bh(t) + fe(t) \\ \frac{dh(t)}{dt} &= cg(t) - dh(t) + ke(t) \\ \frac{de(t)}{dt} &= -lg(t) - mh(t) + ne(t)\end{aligned}$$

2. Model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah pada titik tetap $(0, 0, 0)$ dengan analisis dinamik menghasilkan nilai eigen riil negatif dan kompleks dengan $a < 0$ yang menunjukkan *stable node* asimtotik dan *stable spiral* asimtotik, kemudian eigen vektor yang diperoleh dari nilai eigen menghasilkan solusi umum dan solusi khusus untuk mengetahui perilaku model yang terdapat dalam pembahasan.
3. Model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah dengan menggunakan grafik numerik pada gambar 3.2 menghasilkan kestabilan model terjadi pada saat $t \geq 4$ dan terlihat pada tabel 3.2 hasil perhitungan solusi khusus pada saat $t \geq 4$.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi bifurkasi model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin pada diabetes dalam darah.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Mubarak, S.S.. 2006. *Shahih Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Ibnu Katsir.
- Al-Qarni, A.. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press.
- Ayres, F.. 1995. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.
- Basyir, H.. 2011. *Tafsir Al-Muyassar*. Solo: An-Naba'.
- Bolie, V.W.. 1960. Coefficients of Normal Glucose Regulation. *Journal of Applied Physiology*, Vol. 16 Hal. 783.
- Boyce, W.E. dan Dilprima, R.C.. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey and sons, Inc.
- Jalaluddin, I.. 2008. *Tafsir Jalalain*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Kwach, B., Ongati, O., dan Simwa, R.. 2011. Mathematical Model for Detecting Diabetes in the Blood. *Jurnal Applied Mathematical Sciences*, Vol. 5 Hal. 279-286.
- Muhammad, S.A.. 2009. *Tafsir Ath-Thabari*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Neuhaunser, C.. 2004. *Calculus for Biology and Medicine Second Edition*. London: Prentice-Hall Internasional.
- Pagalay, U.. 2009. *Mathematical Modelling Aplikasi pada Kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan*. Malang: UIN Press.
- Pamuntjak dan Santoso. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB Press.
- Robinson, R.C.. 2004. *Dynamical Systems Continuous and Discrete*. London: Prentice-Hall Internasional.
- Santoso, W.. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Waluya, S.B.. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

LAMPIRAN 1

Program Maple phase portrait 3D untuk model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin.

```
➤ restart;
➤ SYS := [diff(g(t), t) = -2.93*g(t) -
4.34*h(t)+1.24*e(t), diff(h(t), t) = 0.21*g(t) -
0.78*h(t)+0.14*e(t), diff(e(t), t) = -2.94*g(t) -
0.98*h(t)+0.53*e(t)]:
➤ RHS := eval(map(rhs, SYS), [g(t) = g, h(t) = h, e(t)
= e]):
➤ with(plots); fieldplot3d(RHS, g = -200 .. 200, h = -
200 .. 200, e = -200 .. 200, grid = [7, 7, 7],
arrows = SLIM, axes = normal);
```

LAMPIRAN 2

Program Maple numerik 2D untuk model kompetisi glukosa, insulin dan epinefrin.

```
➤ restart;
➤ Dg:=-2.93*g-4.34*h+1.24*e:Dh:=0.21*g-
  0.78*h+0.14*e:De:=-2.94*g-0.98*h+0.53*e:
➤ titiktetap:=solve({Dg,Dh,De},{g,h,e}):titik1:=titikt
  etap[1]:titik1:=titiktetap[2]:titik1:=titiktetap[3]:
➤ with(plots):with(linalg):
➤ jac:=jacobian([Dg,Dh,De],[g,h,e]):
➤ eigenvals(jac):eigenvector:=eigenvectors(jac):
➤ persamaan:=D(g)(t)=-
  2.93*g(t)-4.34*h(t)+1.24*e(t),D(h)(t)=0.21*g(t)-
  0.78*h(t)+0.14*e(t),D(e)(t)=-2.94*g(t)-
  0.98*h(t)+0.53*e(t):
➤ solusi:=dsolve({persamaan},{g(t),h(t),e(t)}):
➤ solusieksak:=dsolve({persamaan,g(0)=26,h(0)=6.8,e(0)
  =3.0634},{g(t),h(t),e(t)}):
➤ plot({rhs(solusieksak[1]),rhs(solusieksak[2]),rhs(so
  lusieksak[3])},t=0..10,populasi=-
  20..27,title="Grafik Model Diabetes"):
```