ESTIMASI *ORDINARY COKRIGING* DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL KHOLIQ
NIM. 06510065

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2013

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ESTIMASI *ORDINARY COKRIGING* DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ABDUL KHOLIQ
NIM. 06510065

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ESTIMASI *ORDINARY COKRIGING* DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL KHOLIQ
NIM. 06510065

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 14 Februari 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Sri Harini, M.Si	**Ach. Nashichuddin, MA**
NIP. 19731014 200112 2 002	**NIP. 19730725 200003 1 002**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ESTIMASI *ORDINARY COKRIGING* DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL KHOLIQ
NIM. 06510065

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 2 Maret 2013

Susunan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: **Drs. H. Turmudi, M.Si** NIP. 19571005 198203 1 006	( )
2. Ketua	: **Abdussakir, M.Pd** NIP. 19751006 200312 1 001	( )
3. Sekretaris	: **Dr. Sri Harini, M.Si** NIP. 19731014 200112 2 002	( )
4. Anggota	: **Ach. Nashichuddin, MA** NIP. 19730725 200003 1 002	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Abdul Kholiq
NIM	: 06510065
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Februari 2013

Yang membuat pernyataan,

Abdul Kholiq

NIM. 06510065

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

وَلِكُلٍّ وِجْهَةٌ هُوَ مُوَلِّيهَا ۖ فَٱسْتَبِقُوا۟ ٱلْخَيْرَٰتِ ۚ أَيْنَ مَا تَكُونُوا۟ يَأْتِ بِكُمُ ٱللَّهُ جَمِيعًا ۚ
إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١٤٨﴾

"Dan bagi tiap-tiap umat ada kiblatnya (sendiri) yang ia menghadap kepada-Nya. Maka berlomba-lombalah (dalam membuat) kebaikan. di mana saja kamu berada pasti Allah akan mengumpulkan kamu sekalian (pada hari kiamat). Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu (QS. al-Baqarah: 148)."

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan skripsi ini untuk…

Ayahanda Asy'ari dan Ibunda Sumni, yang tidak dilekang oleh waktu dalam memberikan kasih sayang kepada penulis. Semoga Allah swt memberikan kebahagiaan di dunia dan di akhirat.

Adik Emi Masthuro Asy'ari yang memberi semangat untuk menyelesaikan penulisan ini.

Seluruh dosen-dosen yang dengan ikhlas telah memberikan ilmu kepada penulis. Terima kasih atas ilmunya, semoga menjadi ilmu yang bermanfaat.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahi Robbil 'Alamin, segala puji bagi Allah swt, Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Dengan seizin-Mu, penulis dapat menyelesaikan studi di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan tugas skripsi yang berjudul "Estimasi Ordinary Cokriging dengan Metode Maximum Likelihood Estimation".

Sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad saw, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang yang kaya akan ilmu pengetahuan.

Dalam penulisan skripsi ini, banyak pihak yang berjasa dan senantiasa memberikan dukungan, bimbingan, arahan serta motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika atas segala motivasinya dalam menyelesaikan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4. Dr. Sri Harini, M.Si dan Ach.Nashichuddin, MA selaku Dosen Pembimbing skripsi atas memberikan pengalaman berharga, segala masukan, kesabaran beliau dalam membimbing sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayahanda dan ibunda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Adik Emi Masthuro Asy'ari yang begitu berarti menjadikan penulis lebih bersemangat lagi untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Semua keluarga besar penulis, yang telah mencurahkan dan memberikan kasih sayang, perhatian, motivasi dan kepercayaan penuh kepada penulis.
9. Teman-teman di Majalah MATAN (Muh Kholid As, Abd Shidiq Notonegoro, Faris, Khoiri, dll) yang memberikan motivasi untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Seluruh teman IMM Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya Komisariat Revivalis.
11. Teman penulis sekaligus sahabat Fahmi Abdul Halim terima kasih atas kebaikannya. Nita Sugiarti yang telah memberi motivasi dan membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Teman-teman kontrakan (Bahak, Ridlo, Faisal) yang memberi semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Teman-teman (Pradana Boy ZTF, Moh. David Andhika, Amrozi, dll) yang memberi semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi, Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Februari 2013

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Kholiq, Abdul. 2013. SKRIPSI. **Estimasi *Ordinary Cokriging* dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation*.** Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing (I) : Dr. Sri Harini, M.Si
Pembimbing (II) : Ach. Nashichuddin, M.A

Kata kunci: *Kriging*, *Ordinary Cokriging*, *Maximum Likelihood Estimation*

Kriging adalah metode geostatistika yang menggunakan nilai spasial pada lokasi tersampel untuk memprediksi nilai pada lokasi lain yang belum tersampel. Metode *kriging* dapat digunakan untuk memprediksi data di lokasi yang tidak terukur. Metode *kriging* lebih optimal digunakan untuk menyelesaikan spasial, sebab dapat mengistimasi yang memenuhi kriteria estimator tak bias variansi minimum. Adapun metode *ordinary cokriging* merupakan salah satu dari model dari *kriging*, yang mana metode *ordinary cokriging* digunakan untuk menginterpolasi titik sebagai data masukan guna menghasilkan peta raster dengan estimasi kesalahan. *Ordinary cokriging* menggunakan semivariogram kovarian untuk menghitung pembobot.Tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan estimasi parameter *ordinary cokriging* dengan menggunakan metode *maximum likelihood estimation*.

Ordinary cokriging dapat diestimasi dengan metode *maximum likelihood estimation* karena mempunyai suatu fungsi data spasial. Sehingga langkah-langkah estimasi *maximum likelihood estimation* adalah menentukan model persamaan ordinary cokrigingnya, menenentukan parameter yang ada dalam *kriging* untuk diestimasi yakni λ dan σ^2, selanjutnya mencari estimasi dari λ dan σ^2. Karenanya estimator $E\left(\hat{Z}(u)\right) = Z(u)$, maka untuk penaksir parameter model estimasi dari λ, σ^2 dengan menggunakan $\delta(u) = \hat{Z}(u) - Z(u) = Z(u) - Z(u)$ adalah estimator tak bias. Kesimpulan yang dapat diambil dari model *ordinary cokriging* yaitu hasil estimasi parameternya adalah:

$$\hat{\lambda} = \left((Z(u))^T \lambda Z(u) \Sigma^{-1})^{-1} \right) (Z(u))^T Z(u) \Sigma^{-1}$$

dan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(Z(u) - \lambda Z(u))^T (Z(u) - \lambda Z(u)),$$

yang bersifat *unbias*, linear, dan efisien.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Kholiq, Abdul. 2013. Thesis. ***Ordinary Cokriging* Estimation with *Maximum Likelihood Estimation* Method**. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology of the State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors (I) : Dr. Sri Harini, M.Si
Advisors (II) : Ach. Nashichuddin, M.A

Keywords: *Kriging, Ordinary cokriging, Maximum Likelihood Estimation*

Kriging is a geostatistical method that uses spatial values predict location to predict value at another location that has not predict yet. *Kriging* method can be used to predict the data in a location that is not measurable. More optimal kriging method used to solve spatial, because it can estimation to conform minimum variance unbiased estimator. The method of ordinary cokriging is one of the models of *kriging*, *ordinary cokriging* method which is used to interpolate points as input data to produce a raster map with the estimated *error*. *Ordinary cokriging* using semivariogram covariance to calculate weighted. Goal writing this thesis is to determine the parameters of *ordinary cokriging* estimation using *maximum likelihood estimation*.

Ordinary cokriging can be estimated by the method of *maximum likelihood estimation* because it has a function of spatial data. So the estimation steps is to determine the *maximum likelihood estimation* of *cokriging ordinary* equation model, determine have parameters in the *kriging* to estimate λ and σ^2, further seek estimates of λ and σ^2. Therefore estimator $E\left(\hat{Z}(u)\right) = Z(u)$, for estimating the model parameters are estimated λ, σ^2 from using $\delta(u) = \hat{Z}(u) - Z(u) = Z(u) - Z(u)$ is *unbias*. Conclusion estimator that can be drawn from the model of *ordinary cokriging* estimation parameters are:

$\hat{\lambda}(u) = \left((Z(u))^T \lambda Z(u) \Sigma^{-1})^{-1} \right) (Z(u))^T Z(u) \Sigma^{-1}$ and

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (Z(u) - \lambda Z(u))^T (Z(u) - \lambda Z(u))$, which is unbias, linear and efficient.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

الملخص

الخالك، عبد. ، 2013. بحث الجامعي. **تقدير العادية جكريغين مع احتمال الحد الأقصى طريقة تقدير (Estimasi Ordinary Cokriging dengan Metode Maximum Likelihood Estimation).** برامج الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف (I) : د. سري هريني، الماجستير(M.Si)

المشرف (II) : أحمد ناصح الدين ، الماجسبير (MA)

كلمات البحث: كريغ، جكريغين العادية، أقصى تقدير احتمالات

كريغ هو طريقة إحصائية جيولوجية الموقع المكاني الذي يستخدم للتنبؤ الواقع القيم القيمة في موقع آخر لم الواقع. ويمكن استخدام أسلوب للتنبؤ كريغ البيانات في موقع غير قابلة للقياس. أكثر طريقة المثلى كريغ تستخدم لحل المكانية، لأنه يمكن أن يقدر الفرق المؤهلة الحد الأدنى التحيز مقدر. طريقة جكريغين العادية هي واحدة من النماذج من كريغ، طريقة جكريغين العادية التي تستخدم لنقطة الشرخ وإدخال البيانات لإنتاج خريطة خطوط المسح مع الخطأ المقدرة. جكريغين العاديةباستخدام التباين semivariogram لحساب رصيد البضائع. غرض هذه كتابة الرسالة هو لتحديد تقدير المعلمة العادية جكريغين باستخدام أسلوب تقدير احتمال الحد الأقصى.

ويمكن تقدير جكريغين العادية من خلال طريقة لتقدير الحد الأقصى لاحتمال وجود وظيفة من البيانات المكانية. بحيث خطوات لتقدير احتمال تقدير الحد الأقصى هو لتحديد نموذج المعادلة العادية جكريغينها ، وتعتبر المعلمات في كريغ لتقدير λ و σ^2 ، ثم ابحث عن تقديرات λ و σ^2. ولذلك مقدر $E\left(\hat{Z}(u)\right) = Z(u)$ ، ثم لتقدير معالم النموذج المقدر من λ, σ^2 باستخدام $\delta(u) = \hat{Z}(u) - Z(u) =$ $Z(u) - Z(u)$. هو مقدر منحاز الاستنتاج الذي يمكن استخلاصه من النموذج العادي من بارامترات التقدير *cokriging* هي: $\hat{\lambda} = \left(\left(Z(u)\right)^T \lambda Z(u) \Sigma^{-1}\right)^{-1}\right)\left(Z(u)\right)^T Z(u) \Sigma^{-1}$

و $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(Z(u) - \lambda Z(u)\right)^T \left(Z(u) - \lambda Z(u)\right),$ هذا هو unbiasوكفاءة وخطي ،

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Data spasial merupakan data pengukuran yang memuat suatu informasi lokasi. Pada data spasial, seringkali pengamatan di suatu lokasi bergantung pada pengamatan disuatu lokasi lain yang berdekatan. Cressie (1990) menyatakan bahwa data spasial merupakan salah satu jenis data terikat (dependen), yaitu data pada suatu lokasi dipengaruhi oleh pengukuran data pada suatu lokasi yang lain. Akibatnya, apabila data spasial diselesaikan menggunakan analisis regresi linier dengan regresi kuadrat terkecil *(Ordinary Least Square)* akan menghasilkan model yang tidak tepat. Karena pada analisis regresi linier dengan OLS diasumsikan bahwa varians *error* tetap *(homoscedasticity)* dan tidak terdapat ketergantungan antar *error (autokorelasi)* di tiap lokasi pengamatan. Oleh karena itu dalam pemodelan statistik, apabila model regresi klasik digunakan sebagai alat analisis pada data spasial dapat menyebabkan kesimpulan yang kurang tepat karena asumsi *error* saling bebas dan asumsi homogenitas tidak terpenuhi.

Anselin (2002) menjelaskan data spasial dapat digunakan untuk menganalisis data yang memiliki heterogenitas. Salah satu penyebab munculnya heterogenitas pada model ini adalah disebabkan oleh kondisi unit-unit spasial di dalam suatu contoh wilayah penelitian tidak homogen. Penelitian pada bidang geologi, merupakan salah satu contoh penyebab data memiliki kecenderungan tidak homogen. Untuk memodelkan data spasial, dapat digunakan metode geostatistik. Dimana area yang saling berdekatan cenderung memiliki bobot nilai

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang tidak jauh berbeda (Cressie, 1993:10). Salah satu metode yang digunakan untuk memecahkan masalah spasial adalah dengan menggunakan metode *kriging*.

Menurut Tatalovich, *kriging* adalah metode geostatistika yang menggunakan nilai spasial pada lokasi tersampel untuk memprediksi nilai pada lokasi lain yang belum tersampel. Dalam hal ini, metode *ordinary cokriging* dapat digunakan untuk memprediksi data di lokasi yang tidak terukur. Tetapi, metode *ordinary cokriging* dapat memprediksi nilai kesalahan (*error*). Metode *ordinary cokriging* dapat diasumsikan bahwa input pada data terdekat semakin berpengaruh kuat terhadap output titik di dekatnya, serta dapat membaca *error* (Beers dan Kleijnen, 2004:113).

Dalam hal ini, metode *ordinary cokriging* digunakan untuk mempermudah penaksiran dalam menangani variabel teregionalisasi *(regionalized variable).* Variabel teregionalisasi adalah variabel yang mempunyai nilai berbeda (bervariasi) dengan berubahnya lokasi/tempat. Lebih lanjut metode *ordinary cokriging* lebih optimal digunakan untuk menyelesaikan spasial serta dapat mengistimasi yang memenuhi kriteria estimator tak bias variansi minimum.

Menurut Largueche (2006) bahwa metode *ordinary cokriging* dapat memadukan korelasi spasial antar data. Jika dibandingkan dengan teknik konturisasi lainnya, metode ini mampu mengkuantifikasi variansi dari nilai yang diestimasi. Artinya, tingkat presisi dari hasil estimasi dapat diketahui. Metode *ordinary cokriging* ini digunakan untuk menginterpolasi titik. Interpolasi titik sebagai data masukan guna menghasilkan peta raster dengan estimasi kesalahan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Metode *ordinary cokriging* menggunakan semivariogram kovarian untuk menghitung pembobot.

Untuk mengintegrasikan antara bidang matematika dengan agama, khususnya korelasi antara metode *ordinary cokriging* dengan al-Qur’an penulis mengambil QS. ar-Rum:41 sebagai dasar pemikiran.

ظَهَرَ ٱلْفَسَادُ فِى ٱلْبَرِّ وَٱلْبَحْرِ بِمَا كَسَبَتْ أَيْدِى ٱلنَّاسِ لِيُذِيقَهُم بَعْضَ ٱلَّذِى عَمِلُوا۟ لَعَلَّهُمْ يَرْجِعُونَ ﴿٤١﴾

”Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia, supaya Allah merasakan kepada mereka sebahagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar).”

Pelestarian alam dan lingkungan hidup tidak terlepas dari peran manusia sebagai khalifah. *“Dan (ingatlah) ketika Tuhanmu berfirman kepada para malaikat, “Aku hendak menjadikan khalifah di bumi.”...)* (QS. al-Baqarah:30). Dengan tugas yang mulia tersebut, sudah selayaknya manusia mengelola sumber daya yang ada di muka bumi ini dengan bijaksana. Al-Quran menegaskan bahwa segala apa yang diciptakan Allah di bumi adalah untuk kesejahteraan manusia. Karena itu, alam mestinya dikelola secara arif. Inilah makna pemakmuran atau pembangunan lingkungan hidup sebagaimana diisyaratkan dalam QS. Hud:61.

Islam adalah *Diin* yang *Syaamil* (integral), *Kaamil* (sempurna) dan *Mutakaamil* (menyempurnakan). Dengan demikian, Islam bukan hanya mencakup aturan untuk sesama manusia, melainkan terhadap alam dan lingkungan hidupnya (Amsyari, 1989). Manusia menganggap alam sebagai obyek yang harus dimanfaatkan semaksimal mungkin untuk kepentingan dan kesejahteraannya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tetapi, manusia lupa memperhatikan kelestariannya. Akibatnya, terjadi kerusakan alam diberbagai tempat.

Georges Matheron mengatakan, bahwa metode *ordinary cokriging* banyak dipakai oleh peneliti dalam ilmu *geostatistika*. Metode *ordinary cokriging* dapat diterapkan dalam berbagai bidang, misalnya dalam bidang ekonomi, geografi, geologi, dan lain sebagainya. Sebagai contoh dalam penelitian sebelumnya, metode *ordinary cokriging* diterapkan dalam bidang geologi.

Dari pemaparan di atas, penulis tertarik untuk menulis skripsi dengan judul **"Estimasi *Ordinary Cokriging* dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation*"**

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana estimasi parameter *ordinary cokriging* dengan menggunakan metode *maximum likelihood estimation*?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Penentuan bobot spasial hanya menggunakan pendekatan area dengan metode *ordinary coriging.*
2. Metode estimasi yang digunakan adalah metode *maximum likelihood estimation.*

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan estimasi parameter *ordinary cokriging* dengan menggunakan metode *maximum likelihood estimation*.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini bermanfaat bagi:

1. Penulis, yaitu sebagai tambahan wawasan keilmuan terutama tentang *ordinary cokriging* yang sangat mendukung akademisnya.
2. Mahasiswa Jurusan Matematika, yaitu sebagai titik awal pembahasan yang bisa dilanjutkan atau lebih dikembangkan.
3. Pemerhati Matematika, yaitu suatu model *ordinary kriging* dapat diterapkan dalam bidang geologi.

1.6 Metode Penelitian

a. Pendekatan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan literatur dan deskriptif kuantitatif. Pendekatan literatur diantaranya adalah analisis teoritis, pemodelannya dan juga estimasi parameternya. Pendekatan deskriptif kuantitatif adalah menggambarkan data yang sudah ada, dan tidak terbatas hanya sampai pada pengumpulan dan penyusunannya saja, akan tetapi data yang sudah terkumpul disusun kembali kemudian dijelaskan dan dianalisis.

Dalam penelitian ini, penulis mengumpulkan informasi dari literatur atau catatan yang berhubungan dengan metode *ordinary cokriging*.

b. Metode Analisis

Analisis dilakukan berdasarkan teori-teori yang sudah ada dalam statistik yang mendukung pada masalah dalam penelitian ini. Tahap-tahapnya adalah sebagai berikut:

1. Menetapkan model regresi *ordinary cokriging.*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Mengasumsikan *error* $\varepsilon \sim N\left(0, \sigma^2(u_i, v_i)\right)$.
3. Memeriksa dari model regresi klasik yang akan digunakan untuk mendeteksi adanya autokorelasi spasial.
4. Membentuk matriks pembobot dengan menggunakan *Rook Continguity*.
5. Melakukan pendugaan parameter model *ordinary cokriging* dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation.*
6. Uji signifikansi parameter.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk melengkapi skripsi ini, peneliti akan menuliskan hasil penelitian menjadi empat bab. Pada bab pertama diberikan pendahuluan atau pengantar penelitian. Bab tersebut terdiri dari latar belakang penelitian, perumusan masalah penelitian, batasan masalah penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan juga sistematika penulisan penelitian.

Bab selanjutnya yaitu bab dua, yang memaparkan beberapa literatur yang mendukung penelitian. Dalam mengulas literatur, akan ditulis teori-teori yang mendasari kajian yang dibahas yaitu tentang model regresi spasial, *kriging*, *ordinary kriging*, *cokriging*, *ordinary cokriging* metode *maximum likelihood estimation*, metode *ordinary cokriging* dan lingkungan dan manusia sebagai khalifah.

Pada bab tiga, akan dipaparkan hasil penelitian penulis bagaimana estimasi *ordinary cokriging* dengan metode *maximum likelihood estimation.*

Adapun pada bab empat dipaparkan kesimpulan dari penelitian yang dilakukan penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Data Spasial

Data spasial adalah data pengukuran yang memuat informasi lokasi. Misal, $Z\left(s_i\right), i = 1, 2, \ldots, n$ data pengukuran Z di lokasi atau koordinat s_i. Cressie (1990) menyatakan, bahwa data spasial merupakan salah satu model data dependen. Karena data spasial dikumpulkan dari lokasi spasial berbedah yang mengindikasikan ketergantungan antara pengukuran data dengan lokasi.

Data spasial banyak dijumpai dalam disiplin ilmu yang membutuhkan data dengan informasi lokasi, antara lain: geologi, ilmu tanah, epidemiologi, ilmu tanaman, ekologi, kuhutanan, astronomi. Biasanya data diasumsikan random dan kadang-kadang lokasi juga diasumsikan random.

Ada dua tahap utama dalam menganalisis data spasial yaitu tahap analisis struktural dan tahap estimasi parameter. Analisis struktural merupakan proses fitting model korelasi spasial (*semivariogram*) pada semivariogram eksperimental. Tahap estimasi merupakan proses prediksi parameter proses spasial berdasarkan informasi *semivariogram* data spasial.

2.2 Model Regresi Spasial

Menurut Anselin (2002), bahwa model spasial yang melibatkan pengaruh spasial disebut dengan model regresi spasial. Salah satu pengaruh spasial yaitu autokorelasi spasial. Adanya unsur autokorelasi spasial menyebabkan terbentuknya parameter spasial autoregresif dan *moving average*, sehingga bentuk proses spasial yang terjadi yaitu sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y = \rho W_1 y + x\beta + \mu \quad (2.1)$$

dan

$$\mu_t = \lambda W_2 \mu_{t-1} + \epsilon \quad (2.2)$$

dimana $\epsilon \sim N(0,\sigma^2)$ tidak ada autokorelasi, akibatnya model umum yang terbentuk adalah:

$$y = \rho W_1 y + \lambda W_2 \mu + \epsilon \quad (2.3)$$

dimana:

$y_{(nx1)}$ = vektor peubah dependen

$x_{(nxp)}$ = matriks yang berisi p peubah independen

$\beta y_{(px1)}$ = vektor koefisien parameter regresi

ρ = koefisien autoregresif spasial *lag* dependen

λ = koefisien autoregresif spasial *error* dependen

$\mu_{(nx1)}$ = vektor yang diasumsikan mengandung autokorelasi

$W_{1(nxp)}$ = matriks bobot spasial peubah dependen

$W_{2(nxp)}$ = matriks bobot spasial *error*

n = banyak pengamatan

p = banyaknya parameter regresi

$\in$ = vektor *error* yang diasumsikan tidak mengalami autokorelasi berukuran $n\ x\ 1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3 Model Regresi Spasial *Error*

Menurut Anselin (2002) jika pada persamaan 2.1 dan 2.2 dinyatakan $\rho = 0,$ maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$y = X\beta + \mu,$ dimana $\mu_t = \lambda W_2 \mu_{t-1} + \epsilon$ atau dapat ditulis

$$y = X\beta + \lambda W_2 \mu + \epsilon \tag{2.4}$$

$$y = X\beta + (1 - \lambda W_2)^{-1} + \epsilon \tag{2.5}$$

sehingga apabila ditulis bentuk matriks, lebih jelasnya sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{1n} \\ w_{12} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

$$y = X\beta + \lambda W_2 \mu + \epsilon$$
$$(n\ x1) = \quad n\ x\ n \quad n\ x\ 1\ +\ n\ x\ k \quad kx1\ +\ n\ x1$$

dimana λ adalah koefisien spasial autoregresif, W_2 matriks bobot spasial *error* dan $\in$ adalah vektor *error* dengan konstanta variansi σ^2.

2.4 *Kriging*

Pada tahun 1950, peneliti pertambangan bernama Daniel Gerhardus (DG) Krige, merancang metode interpolasi untuk menentukan struktur biji emas. Dia menginterpolasi suatu kandungan biji emas berdasarkan data sampel. Dari sini *kriging* dijadikan sebuah nama metode interpolasi atas penemuannya tersebut.

Data sampel pada ilmu kebumian biasanya diambil di tempat-tempat yang tidak beraturan. Metode *kriging* digunakan untuk mengestimasi besarnya nilai karakteristik $\hat{Z}$ pada titik tersampel berdasarkan informasi dari karakteristik titik-

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

titik tersampel yang berada di sekitarnya dengan mempertimbangkan korelasi spasial yang ada dalam data tersebut.

G. Matheron memperkenalkan metode *kriging* guna menonjolkan metode khusus dalam moving average terbobot *(weighted moving average)* yang meminimalkan varians dari hasil estimasi. *Kriging* menghasilkan estimator tidak bias terbaik *efisien linear unbiased estimation (BLUE)* dari variabel yang ingin diketahui nilainya. Hasil prediksi *kriging* lebih akurat daripada metode regresi. Sebab, metode ini mampu membaca *error* yang berkorelasi, sehingga dapat diketahui nilai kedekatannya (Van Beers dan Kleijnen, 2004).

Bohling (2005:4) menyatakan bahwa estimator *kriging* $\hat{Z}(u)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{Z}(u) - m(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \left[Z(u_\alpha) - m(u_\alpha) \right] \qquad (2.6)$$

dengan

u, u_α : vektor lokasi untuk estimasi dan salah satu dari data yang berdekatan, yang dinyatakan sebagai α

$m(u)$: nilai ekspektasi dari $\hat{Z}(u)$

$m(u_\alpha)$: nilai ekspektasi dari $Z(u_\alpha)$

$\lambda_\alpha(u)$: nilai $Z(u_\alpha)$ untuk estimasi lokasi u, nilai $Z(u_\alpha)$ yang sama akan memiliki nilai yang berbeda untuk estimasi pada lokasi berbeda.

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\hat{Z}\ u$ diperlakukan sebagai bidang acak dengan suatu komponen trend, $m\ u$ dan komponen sisa atau *error*, $\delta\ u\ = Z\ u\ - m\ u$ Estimasi *kriging* yang bersifat sisa pada u sebagai penilaian penjumlahan dari sisa pada data disekitarnya. Nilai λ_α diperoleh dari kovariansi atau semivariogram, dengan diperlukan komponen karakteristik sisa (Bohling, 2005:4).

Tujuan *kriging* adalah untuk menentukan nilai λ_α yang meminimalkan variansi pada estimator, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma^2 = \text{var}\left[\hat{Z}\ u\ - Z\ u\ \right] \tag{2.7}$$

Tiga pokok dalam kringing adalah *simple, ordinary, dan universal kriging* (Bohling, 2005:4). Goovaerts (1998) mengatakan bahwa estimasi kriging tergantung pada model dengan bersifat random.

2.4.1 *Simpel Kriging*

Untuk *simpel kriging*, diasumsikan bahwa komponen *trend* adalah konstan dan diketahui rata-rata, $m\ u\ = m$ sehingga:

$\hat{Z}(u) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha(u)\left[Z\ u_\alpha\ - m\right]$ estimasi ini tidak bias, karena $E[Z\ u_\alpha\ - m] = 0$ sehingga $E\left[\hat{Z}(u)\right] = m = E\left[Z\ u_\alpha\ \right]$ Estimasi *error*nya, $\hat{Z}(u) - Z(u)$, merupakan galat estimasi atau bias yang merepresentasikan sisa pada data (u_α) dan estimasi point

u:

$$\hat{Z}(u) - Z(u) = \left[\hat{Z}(u) - m\right] - \left[Z\ u\ - m\right]$$

$$= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (u) Z\left(u_\alpha\right) - Z(u)$$
$$= \hat{Z}(u) - Z(u)$$

variansi *error*nya diberikan:

$$\sigma^2\left(u\right) = \text{var}\left[\hat{Z}\left(u\right) + \text{var}\, Z\left(u\right)\right] - 2Cov\left[\hat{Z}\left(u\right), Z\left(u\right)\right] \tag{2.8}$$

maka akan diperoleh estimasi variansi *error simple kriging* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{var}\left(\delta\left(u_0\right)\right) &= \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m} \lambda_\alpha \lambda_b \,\text{cov}\left(Z\left(u_\alpha\right), Z\left(u_b\right)\right) + \sigma^2 - 2\sum_{b=1}^{m} \lambda_\alpha \,\text{cov}\left(Z\left(u_\alpha\right), Z\left(u_0\right)\right) \\ &= \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m} \lambda_\alpha (u) \lambda_b (u) C(u_a - u_b) + C(0) - 2\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (u) C(u_\alpha - u)\end{aligned}$$

$\left(\text{Goovaerts, 1998}:7\right)$

dengan syarat

$\sum_{a=1}^{m} \lambda_\alpha\left(u\right) C(u_\alpha - u_b) = C(u_\alpha - u)$,dimana $a = 1, \ldots, n\left(u\right)$, karena rata-rata konstans, fungsi kovarian untuk $Z\left(u\right)$ sama dengan komponen *error*, $\hat{\mathrm{C}}\left(\mathrm{h}\right) = \mathrm{C(h)}$. Sehingga dapat ditulis sistem simpel kriging dengan bentuk $\mathrm{C(h)}$:

$\sum_{b=1}^{m} \lambda_b (u) C\left(u_\alpha - u_b\right) = C(u_\alpha - u)$, dimana $a = 1, \ldots, n\left(u\right)$.

Bentuk di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$K\lambda\left(u\right) = k$$

dimana K adalah matriks kovarian antara titik data dengan elemen $K_{\alpha,b} = C(u_\alpha - u_b)$, k adalah vektor kovarian antara titik poin dan estimasi poin, dengan elemen diberikan oleh $k_\alpha = C(u_\alpha - u)$ dan $\lambda\left(u\right)$ adalah vektor dari pembobot data yang ada di sekililing simple kriging (Goovaerts, 1998:8).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4.2 *Universal Kriging*

Universal kriging atau *kriging* dengan *trend* seperti *halnya ordinary kriging*. Point yang membedakan hanya rata-rata persekitaran pada estimasi. *Universal kriging* juga disebut sebagai metode pundugaan spasial yang didasarkan atas asumsi adanya *nonstasionary-trand* dalam data sehingga nilai tengah bervariasi menurut lokasi geografis (Tiryana, 2007). Pada dasarnya nilai dugaan penurunan tanah diperoleh seperti halnya pada metode *ordinary kriging*, tetapi dengan menggunakan pembobot *i* yang telah telah memperhitungkan adanya trend tersebut. Model *universal kriging*:

$$m(u) = m(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y,$$

dimana (x, y) merpakan titik koordinat.

2.4.3 *Ordinary Kriging*

Ordinary kriging adalah metode *kriging* paling sederhana yang terdapat pada geostatistika. Pada metode ini, memiliki asumsi bahwa rata-rata (*mean*) tidak diketahui dan bernilai konstan. Pada *ordinary kriging*, $m(u)$ merupakan *mean* dari $Z(u)$ yaitu $m(u) = E[Z(u)]$, dimana $E[Z(u)] =$ nilai dari μ.

Pada Cressie (1990:120) dijelaskan bahwa *ordinary kriging* berhubungan dengan prediksi spasial dengan dua asumsi:

Asumsi Model:

$$Z(u) = \mu + \delta(u), u \in \Re \text{ dan } \mu \text{ tak diketahui} \tag{2.9}$$

Asumsi Prediksi:

$$\hat{Z}(u) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u) \text{ dengan } \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha = 1 \tag{2.10}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dimana:

$Z(u)$: peubah acak bebas

μ : ekspektasi peubah acak $Z(u)$

$\delta(u)$: nilai *error* pada $Z(u)$

D : himpunan random di $\Re^d$

$\Re$: bilangan real

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi

karena koefisien dari hasil penjumlahan prediksi linier adalah 1 dan memiliki syarat tak bias maka $E[\hat{Z}(u)] = \mu = E[Z(u)] = Z(u)$, untuk setiap $\mu \in \Re$ dan karena $Z(u)$ erupakan suatu konstanta maka $E[Z(u)] = Z(u)$ terdapat estimator *error*, $\delta(u)$, pada setiap lokasi merupakan perbedaan antara nilai estimasi $\hat{Z}(u)$ dengan nilai sebenarnya $Z(u)$, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\delta}(u) = \hat{Z}(u) - Z(u) \tag{2.11}$$

dimana:

$\hat{\delta}(u)$: estimator *error*

$\hat{Z}(u)$: nilai estimasi

$Z(u)$: nilai sebenarnya

dengan $E[\hat{\delta}(u)] = 0$. Selisih $\hat{Z}(u) - Z(u)$ disebut galat estimasi atau bias. Bobot $\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, n$ ditentukan berdasarkan kriteria :

1. Tak bias : $\left[\hat{Z}(u) - Z(u)\right] = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Variansi : $Var\left[\hat{Z}(u) - Z(u)\right]$ minimum

dengan menggunakan persamaan (2.10) dapat dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias. Akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias:

$$\hat{\delta}(u) = \hat{Z}(u) - Z(u)$$
$$E\left[\hat{\delta}(u)\right] = E\left[\hat{Z}(u) - Z(u)\right]$$
$$E\left[\hat{\delta}(u)\right] = E\left[\hat{Z}(u)\right] - E\left[Z(u)\right]$$

dengan $E\left[\hat{\delta}(u)\right] = 0$, maka diperoleh

$$0 = E\left[\hat{Z}(u)\right] - E\left[Z(u)\right]$$
$$E\left[\hat{Z}(u)\right] = E\left[Z(u)\right]$$
$$E\left[\hat{Z}(u)\right] = Z(u)$$

terbukti bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias dari $Z(u)$. *Ordinary kriging* akan meminimalkan rata-rata estimator *error* kuadrat, dengan menggunakan persamaan (2.11).

$$\hat{Z}(u) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u) \text{ dengan } \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$$
$$\hat{Z}(u) = 1 \cdot Z(u)$$
$$\hat{Z}(u) = Z(u)$$
$$E\left[\hat{Z}(u)\right] = E\left[Z(u)\right]$$
$$0 = E\left[\hat{Z}(u)\right] - E\left[Z(u)\right], \text{ (estimator tak bias } E\left[\hat{\delta}(u)\right] = 0)$$
$$E\left[\hat{\delta}(u)\right] = E\left[\hat{Z}(u)\right] - E\left[Z(u)\right]$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Menurut (Walpole & Myers, 1995:75) sifat Variansi adalah:

$$Var\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^{2}\right]$$

$$Var\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)=E\left[\left(\hat{\delta}\left(u\right)-E\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)\right)^{2}\right]$$

$$Var\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)=E\left[\hat{\delta}\left(u\right)^{2}\right]-\left[E\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)\right]^{2}$$

$$E\left[\hat{\delta}\left(u\right)^{2}\right]=Var\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)-\left[E\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)\right]^{2}$$

$$E\left[\hat{\delta}\left(u\right)^{2}\right]=Var\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)-\left[E\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)\right]^{2} \tag{2.12}$$

$$=Var\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)+0$$

$$=Var\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)$$

karena $E\left[\hat{\delta}(u)\right]=0$, maka $E\left[\hat{\delta}\left(u\right)^{2}\right]=Var\left(\hat{\delta}\left(u\right)\right)$.

Adapun sifat-sifat dari *ordinary kriging*, sebagai salah satu tujuan *kriging*, yaitu menghasilkan estimator yang bersifat *best linear unbiassed efficient (BLUE)*. Berikut akan dibuktikan sifat *BLUE* pada *ordinary kriging*:

1. Linier

Diperoleh suatu persamaan pada metode *ordinary kriging* adalah sebagai berikut:

$$\hat{Z}\left(u\right)=\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}Z\left(u\right)$$

Dari persamaan di atas, $\hat{Z}\left(u\right)$ dapat dikatakan estimator yang bersifat linier karena merupakan fungsi linier dari $Z\left(u\right)$. Terdapat n pengukuran pada lokasi $1,2,3,\ldots,n$ dinyatakan sebagai berikut $Z\left(u_1\right),Z\left(u_2\right),Z\left(u_3\right),\ldots,Z\left(u_n\right)$. Berdasarkan data yang tersampel, akan diestimasi $Z\left(u\right)$ pada lokasi yang tersampel yang dinyatakan dalam $Z\left(u_0\right)$. Selanjutnya, dari persamaan (2.9) dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.10 , akan disusun variabel acak untuk menggambarkan estimator dari *error*, yaitu dari:

$$\hat{Z}\ u\ = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z\ u_a \text{ dengan } \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$$

$$\hat{\delta}\ u\ = \hat{Z}\ u\ - Z\ u$$

sehingga

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\ u\ &= \hat{Z}\ u\ - Z\ u \\ &= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z\ u\ - Z(u) \end{aligned} \tag{2.13}$$

dengan $\hat{Z}(u)$ merupakan kombinasi linier dari semua data tersampel.

2. Tak bias

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}\ u$ merupakan estimator tak bias. Dapat dipastikan bahwa *error* pada lokasi tertentu memilki nilai ekspektasi 0 dengan menerapkan rumus untuk nilai ekspektasi pada kombinasi linier terhadap persamaan 2.14 , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} E\ \hat{\delta}\ u\ &= E\ \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z\ u\ - Z\ u \\ &= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E\ Z\ u\ - E\ Z\ u \end{aligned} \tag{2.14}$$

dengan asumsi bahwa fungsi acak bersifat stasioner, dimana setiap nilai ekspektasi boleh dituliskan sebagai $E\ Z$. Sehingga diperoleh:

$$E\ \hat{\delta}\ u\ = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha EZ\ u\ - Z\ u$$

karena $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$, maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right)=0$$

$$0=\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}EZ(u)-Z(u)$$

$$0-\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}EZ(u) = \sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}E(Z) - \sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}EZ(u)-EZ(u)$$

$$-\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}EZ(u)-Z(u)=-EZ(u)$$

$$\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}EZ(u)-Z(u)=EZ(u)$$

$$\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}\frac{E(Z)}{E(Z)}=\frac{E(Z)}{E(Z)}$$

$$\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}\cdot 1=1$$

$$\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}=1$$

sehingga,

$$\begin{aligned}E\left(\hat{Z}(u)\right)&=E\left(\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}E(Z(u))\right)\\&=\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}E(Z(u))\\&=1\mu\\&=\mu\end{aligned}$$

dimana, $\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}=1$, $\mathrm{E}(Z(u))=\mu$. Berdasarkan penjabaran di atas, maka diperoleh $E\left(\hat{Z}(u)\right)=\mu=Z(u)$, dimana $Z(u)=\mathrm{E}(Z(u))$ dengan $Z(u)$ berupa suatu konstanta. Ini berarti *ordinary kriging* menghasilkan estimator yang tak bias dengan $\sum_{a=1}^{n}\lambda_{\alpha}=1$.

3. Efisien

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa metode *ordinary kriging* bersifat efisien yaitu dengan meminimumkan variansi *error*. Dengan mengasumsikan bahwa $\mathrm{var}(Z(u))=\sigma^2$, maka persamaan estimator kuadrat (2.13) sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$E\left[\hat{\delta}(u)^2\right] = Var\left[\hat{\delta}(u)\right] + \left(E\left[\hat{\delta}(u)\right]\right)^2$$

estimator tak bias:

$$E\left[\hat{\delta}(u)\right] = E\left[\hat{Z}(u)\right] - E\left[Z(u)\right]$$

$$E\left[\hat{\delta}(u)\right] = E\left[\hat{Z}(u) - Z(u)\right]$$

menjadi

$$\begin{aligned} Var\left[\hat{\delta}(u)\right] &= Var\left[\hat{Z}(u) - Z(u)\right] \\ &= \operatorname{cov}\left(\hat{Z}(u_0), \hat{Z}(u_0)\right) + \operatorname{cov}\left(Z(u_0), Z(u_0)\right) - 2\operatorname{cov}\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right) \\ &= \operatorname{var}\left(\hat{Z}(u_0)\right) + \operatorname{var}\left(Z(u_0)\right) - 2\operatorname{cov}\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right) \\ &= \operatorname{var}\left(\hat{Z}(u_0)\right) + \sigma^2 - 2\operatorname{cov}\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

dengan

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\left(\hat{Z}(u_0)\right) &= \operatorname{var}\left(\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha)\right) \\ &= \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m} \lambda_\alpha \lambda_b \operatorname{cov}\left(Z(u_\alpha), Z(u_b)\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

dan

$$\begin{aligned} Cov\left(\hat{Z}(u_0), \hat{Z}(u_0)\right) &= E\left[\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha) Z(u_0)\right] - E\left[\hat{Z}(u_0)\right] E\left[Z(u_0)\right] \\ &= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E\left[Z(u_\alpha) Z(u_0)\right] - E\left[\hat{Z}(u_0)\right] E\left[Z(u_0)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E\left[Z(u_\alpha) Z(u_0)\right] - E\left[\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha)\right] E\left[Z(u_0)\right] \\ &= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E\left[Z(u_\alpha) Z(u_0)\right] - \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E\left[Z(u_\alpha)\right] E\left[Z(u_0)\right] \\ &= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha \operatorname{cov}\left(Z(u_\alpha), Z(u_0)\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.18) dan (2.19) ke dalam persamaan (2.17).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka akan diperoleh estimasi variansi *error ordinary kriging* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\delta(u_0)) &= \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m} \lambda_\alpha \lambda_b \operatorname{cov}(Z(u_\alpha), Z(u_b)) + \sigma^2 \\ &\quad -2\sum_{b=1}^{m} \lambda_\alpha \operatorname{cov}(Z(u_\alpha), Z(u_0)) \end{aligned} \tag{2.18}$$

dengan syarat $\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$.

Penulisan sistem *kriging* kovariansi dalam bentuk matriks, yaitu :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1V} \\ \bar{C}_{2V} \\ \vdots \\ \bar{C}_{nV} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jika blok U merupakan satu titik, maka taksiran *kriging* menjadi taksiran titik dan sistem *kriging* blok menjadi sistem *kriging* titik. Misalkan ditaksir nilai Z di $u_0, Z(u_0)$. Taksiran $Z(u_0)$ merupakan rataan berbobot data di sekitar $Z(u_0)$:

$$\hat{Z}(u_0) = \hat{Z}_0 = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z_\alpha$$

bobot $\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, n$ diperoleh dari sistem *kriging* :

$$\begin{cases} \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha C_{\alpha b} + \mu = \bar{C}_{\alpha 0}, b = 1, \ldots, n \\ \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha = 1 \end{cases}$$

atau dalam bentuk matriks :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{10} \\ \hat{C}_{20} \\ \vdots \\ \hat{C}_{n0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.5 *Cokriging*

Cokriging adalah metode *kriging* untuk mengestimasi distribusi sampel yang terdapat pada geostatistika. Jika variabel utama sulit diketahui, *cokriging* dapat memperkiraan interpolasi tanpa harus mengetahui variabel utama.

Menurut Journel dan Huijbrechts (1978), dalam aplikasi ilmu bumi *cokriging* memiliki keakuratan tinggi. *Cokriging* merupakan teknik khusus dalam interpolasi dengan memakai dua variabel yang berbeda, tetapi secara spasial berhubungan. Dengan memanfaatkan hubungan spasial ini, nilai-nilai suatu variabel dapat diestimasi dari variabel lain yang sampelnya diketahui.

Menurut Isaaks dan Srivastava (1990), metode interpolasi *cokriging* merupakan kombinasi linier dari data primer dan sekunder sebagai berikut:

$$\hat{Z}\ u\ = \sum\nolimits_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z\ u$$

$$\hat{Z}(u_0) = \sum\nolimits_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z_1(u_a) + \sum\nolimits_{b=1}^{m} \lambda_b Z_2(v_b) \tag{2.19}$$

dimana $\hat{Z}(u_0)$ adalah dugaan $Z\ u$ pada lokasi awal; $u_1,\ldots,u_n$ adalah data primer pada n lokasi terdekat; $v_1,\ldots,v_m$ adalah data sekunder pada m lokasi terdekat; $a_1,\ldots,a_n$ dan $b_1,\ldots,b_m$ adalah bobot *cokriging* yang harus ditentukan. Galat dugaan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\delta = \hat{Z}(u_0) - Z(u_0)$$
$$= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z_1(u_a) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b Z_2(v_b) - Z(u_0)$$
$$\delta = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m - u_0$$

$$\delta = (a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_{m1})^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \\ V_1 \\ \vdots \\ V_m \\ U_0 \end{pmatrix} = w^T Z$$

dengan

$$w^T = (a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_{m1})^{-1}$$

$$\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \\ V_1 \\ \vdots \\ V_m \\ U_0 \end{pmatrix}$$

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ adalah peubah acak yang merepresentasikan sifat U pada n lokasi dimana U dijadikan sampel data $V_1, V_2, \ldots, V_m$ adalah peubah acak yang merepresentasikan sifat V pada m lokasi berdekatan dimana V dijadikan sampel data. Persamaan 2.21 adalah kombinasi linier dari $n + m + 1$peubah acak, yaitu $U_1, U_2, \ldots, U_n, U_1, U_2, \ldots, U_n$ dan U_0.

Diperoleh ekspresi ragam δ sebagai berikut:

$$Var \ \ \delta \ = w^T CW$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

$$
\begin{aligned}
Var\ \ \delta\ \ &= Var(w^T C) \\
&= E\Big[\ \ w^T Z\ \ - E(w^T Z)\ \ ^2\Big] \\
&= E\Big[(w^T Z)^2 - 2\ \ w^T Z\ \ E\ \ w^T Z\ \ + (E\ \ w^T Z\ \ )^2\Big] \\
&= E\Big[\ \ w^T Z\ \ \ \ w^T Z\ \ - 2E\ \ w^T Z\ \ E\ \ w^T Z\ \ E\ \ w^T Z\ \ + E\ \ w^T Z\ \ E\ \ w^T Z\ \ \Big] \\
&= \Big[E(w^T Z)(w^T Z) - E\ \ w^T Z\ \ E\ \ w^T Z\ \ \Big]^{TT} \\
&= w^T [E\ \ Z\ \ \ Z\ \ - E\ \ Z\ \ E\ \ Z\ \ ]^T w \\
&= w^T [Cov\ \ Z, Z\ \ ]^T w \\
&= w^T Cov\ \ Z, Z\ \ w \\
&= w^T CW \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

dengan C adalah matrik kovarian Z. Untuk memperluas dan menyederhanakan 2.22 diperoleh suatu ekspresi untuk ragam dari galat pendugaan dalam bagian pembobot *cokriging* dan *covarian* peubah-peubah acak:

$$Var\ \ \delta\ \ = Var(w^T C)$$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
Var\ \ \delta\ \ &= Var(w^T C) \\
&= \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\lambda_a\lambda_b Cov(U_a U_b) + \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\lambda_a\lambda_b Cov(V_a V_b) \\
&\quad + 2\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\lambda_a\lambda_b Cov(U_a V_b) - 2\sum_{a=1}^{n}\lambda_a Cov(U_a U_0) \\
&\quad - 2\sum_{b=1}^{m}\lambda_a Cov(V_b U_0) + Cov(U_a U_0
\end{aligned}
$$

dengan

$Cov\ \ U_a U_b$ adalah covarian antara U_a dan U_b

$Cov(V_a V_b)$ adalah covarian antara V_a dan V_b

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$Cov(U_a V_b)$ adalah cross-covarian antara U_a dan V_b

Adapun gugus pembobot yang dicari harus memenuhi dua syarat. Pertama, pembobot harus menghasilkan nilai interpolasi yang tak bias. Kedua, nilai dugaan harus memiliki ragam minimum, maka:

$$E\left[\hat{Z}(u_0)\right] = E\left[\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z_1(u_a) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b Z_2(v_b)\right]$$
$$E\left[\hat{Z}(u_0)\right] = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E\ \ Z_1(u_a)\ \ + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b E\ \ Z_2(v_b)$$
$$E\left[\hat{Z}(u_0)\right] = \bar{m}u_a \sum_{a=1}^{n}\ \ \lambda_\alpha + \bar{m}v_b \sum_{b=1}^{m} \lambda_b$$

dimana $E\left[\hat{Z}(u_a)\right] = \bar{m}u_a$ dan $E\left[\hat{Z}(v_b)\right] = \bar{m}v_b$. Persamaan tersebut dapat menghasilkan ketakbiasan yaitu:

$$\sum_{a=1}^{n} u_a = 1 \text{ dan} \sum_{b=1}^{m} v_b = 0$$

Kondisi di atas dikenal dengan *ordinary cokriging*. Selain itu, terdapat kondisi ketakbiasan lain yang dapat dipenuhi dengan satu kondisi dikenal sebagai standarisasi *ordinary cokriging*, yaitu:

$$E\left[\hat{Z}(u_0)\right] = E\left[\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (u_a) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b (v_b - \hat{m}v_b + \hat{m}u_a)\right]$$
$$E\left[\hat{Z}(u_0)\right] = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E(u_a) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b\ \ E(v_b) - E(\hat{m}v_b) + E(\hat{m}u_a)$$
$$= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E(u_a) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b (E(v_b) - \sum_{a=1}^{n} \lambda_b E(Z_1(v_b) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b E(Z_2(u_a)$$
$$= E\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (u_a) + E\sum_{b=1}^{m} \lambda_b (v_b) - E\sum_{b=1}^{m} \lambda_b (Z_1(v_b)) + E\sum_{b=1}^{m} \lambda_b E(Z_2(u_a))$$
$$= \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (E(u_a)) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b (E(v_b) - \sum_{a=1}^{n} \lambda_b (E(v_b)) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b E(u_a)$$
$$= \bar{m}u_a \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha + \bar{m}v_b \sum_{b=1}^{m} \lambda_b - \bar{m}v_b \sum_{a=1}^{n} \lambda_b + \bar{m}u_a \sum_{b=1}^{m} \lambda_b$$
$$= \bar{m}u_a \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha + \bar{m}v_b \sum_{b=1}^{m} \lambda_b - \bar{m}v_b \sum_{a=1}^{n} \lambda_b + \bar{m}u_a \sum_{b=1}^{m} \lambda_b$$
$$= \bar{m}u_a \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha + \bar{m}v_b \sum_{b=1}^{m} \lambda_b - \bar{m}v_b \sum_{a=1}^{n} \lambda_b + \bar{m}u_a \sum_{b=1}^{m} \lambda_b$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\bar{m}u_a \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha = \bar{m}u_a \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha - \bar{m}v_b \sum_{a=1}^{n} \lambda_b + \bar{m}u_a \sum_{b=1}^{m} \lambda_b$$

$$\bar{m}u_a \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha + \bar{m}v_b \sum_{a=1}^{n} \lambda_b = \bar{m}u_a \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha + \bar{m}u_a \sum_{b=1}^{m} \lambda_b$$

$$\bar{m}u_a .1 = \bar{m}u_a \quad \sum_{a=1}^{n} \lambda_{\alpha}{}_{\alpha} + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b$$

$$\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b = 1$$

nilai dugaan yang diperoleh menjadi

$$\hat{Z}(u_0) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha u_a + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b (v_b - \hat{m}v + \hat{m}u)$$

Permasalahan minimasi yang bergantung pada dua kendala dapat dicari dengan gugus pembobot meminimasi ragam galat serta tidak bias. Metode pengganda *Lagrange*, merupakan metode yang sering digunakan untuk memperoleh pembobot tersebut:

$$Var \quad \delta \quad = w^T CW + 2u_a \quad \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha \quad + 2v_b \quad \sum_{b=1}^{m} \lambda_b$$

dengan u_a dan v_b merupakan pengganda *Lagrange*. Untuk meminimasi persamaan. Maka turunan parsial Var(δ) terhadap $n + m$ pembobot dan dua pengganda *Lagrange*, yaitu

$$\frac{\partial \ Var(\delta)}{\partial \lambda_\alpha} = 2\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha cov(U_a U_b) + 2\sum_{b=1}^{m} \lambda_b cov(U_a V_b)$$
$$-2cov(U_a U_0) + \lambda_1$$

untuk $a = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial \ Var \quad \delta}{\partial \lambda_b} = 2\sum_{b=1}^{m} \lambda_b cov \quad V_a V_b \quad + 2\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha cov(U_a V_b) - 2Cov(V_b U_0) + \lambda_2$$

untuk $b = 1, \ldots, n$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{\partial\ Var(\delta)}{\partial\lambda_1} = 2\ \sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha - 1$$

$$\frac{\partial\ Var(\delta)}{\partial\lambda_2} = 2\sum_{b=1}^{m}\lambda_b$$

sistem *cokriging* dapat diperoleh dengan hasil dari tiap persamaan yaitu $n+m+2,$ sama dengan nol dan menyusun ulang masing-masing bagian.

$$\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha cov\ U_aU_b\ + \sum_{b=1}^{m}\lambda_b cov\ V_aU_b\ + 2\lambda_1 = cov\ U_aU_0$$

untuk $a = 1,\ldots,n$

$$\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha cov\ U_aV_b\ + \sum_{b=1}^{m}\lambda_b cov\ V_aV_b\ + \lambda_2 = cov(V_bU_0)$$

dimana: $\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha = 1,\quad \sum_{b=1}^{m}\lambda_b = 0$

untuk $b = 1,\ldots,n.$

Dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$X = \begin{pmatrix} cov\ U_1U_1 & \cdots & cov\ U_1U_n & cov\ U_1V_1 & \cdots & cov\ U_1U_m & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov\ U_nU_1 & \cdots & cov\ U_nU_n & cov\ U_nV_1 & \cdots & cov\ U_nU_m & 1 & 0 \\ cov\ V_1U_1 & \cdots & cov\ V_1U_n & cov\ V_1V_1 & \cdots & cov\ V_1V_m & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov\ V_mU_1 & \cdots & cov\ V_mU_n & cov\ V_mV_1 & \cdots & cov\ V_mV_m & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dimana X ialah matriks kovarian dari peubah primer dan sekunder antar lokasi pengamatan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y = \begin{pmatrix} cov(U_0U_1) \\ \vdots \\ cov(U_0U_n) \\ cov(U_0V_1) \\ \vdots \\ cov(U_0V_m) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yaitu vektor yang berisi pembobot bagi peubah primer dan sekunder serta nilai pengganda Langrange. Penduga bagi vektor z adalah:

$$z = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix}$$

yaitu vektor yang berisi pembobot bagi peubah primer dan sekunder serta nilai pengganda Lagrange. Penduga bagi vektor z adalah:

$$z = X^{-1}y.$$

Ragam galat dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Var\ \ \delta\ \ = cov(U_0U_0) + \mu_1 - \sum_{a=1}^{n} a_a cov(U_aU_0) - \sum_{b=1}^{m} b_b Cov(V_bU_0).$$

2.5.1 *Ordinary Cokriging*

Untuk kasus tunggal, nilai sekunder z_2, estimator z_1 *ordinary cokriging* pada di u diperoleh:

$$\hat{Z}(u) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a\ \ u\ \ Z_1\ \ u_a\ \ + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b\ \ u\ \ Z_2\ \ v_b \tag{2.21}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

estimator tak bias mengikuti pembatas pembobot *cokriging* ditunjukkan sebagai berikut:

$$\sum_{a=1}^{n}\lambda_a \; u \; =1 \quad \sum_{b=1}^{m}\lambda_b \; u \; =0 \qquad (2.22)$$

Meminimalkan pada *error* variansi $\sigma^2(u)$, hasil persamaannya dari dua pembatas adalah $(n_1 \; u \; + n_2 \; u \; +2)$ persamaan liniernya:

$$\begin{cases} \sum_{a=1}^{n}\lambda_a \; u \; C_{11} \; u_a - v_b \; + \sum_{b=1}^{m}\lambda_b \; u \; C_{12} \; u_a - v_b \\ \quad +\mu_1 \; u \; = C_{11} \; u_a - u \; , \qquad a_1 = 1,\ldots,n_1 \; u \\ \sum_{a=1}^{n}\lambda_a \; u \; C_{21} \; u_a - v_b \; + \sum_{b=1}^{m}\lambda_b \; u \; C_{22} \; u_a - v_b \\ \quad +\mu_2 \; u \; = C_{21} \; u_a - u \; , \qquad a_2 = 1,\ldots,n_2 \; u \\ \qquad \sum_{a=1}^{n}\lambda_a \; u \; =1 \\ \qquad \sum_{b=1}^{m}\lambda_b \; u \; =0 \end{cases}$$

dimana dua parameter Lagrange $\mu_1 \; u$ dan $\mu_2 \; u$ terhitung dari dua pembatas tidak bias. Bentuk standarisasi estimasi *ordinary cokriging* sebagai berikut:

$$\frac{\hat{Z} \; u \; - m_1}{\sigma_1} = \sum_{a=1}^{n}\lambda_a\left[\frac{Z_1 \; u_a \; - m_1}{\sigma_1}\right] + \sum_{b=1}^{n}\lambda_b\left[\frac{Z_2 \; v_b \; - m_2}{\sigma_2}\right] \qquad (2.23)$$

dimana pembobot cokriging λ_a diperoleh dengan menyelesaikan sistem *ordinary cokriging*.

Untuk menguji bahwa keduanya standart dan bentuk asli dari hasil *ordinary cokriging* sama dengan estimasi *cokriging*. *Ordinary cokriging* pada umumnya lebih dekat ke persamaan *cokriging* sederhana karena memerlukan rata-rata stasioner primer dan sekunder ataupun tidak diketahui di segala area *a*. Tentu, satu dapat menunjukkan bahwa *ordinary cokriging* dengan mencari lokasi terdekat.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Mengaplikasikan estimasi *cokriging* sederhana (1) cukup menggunakan rata-rata lokasi, kemudian menstasionerkan rata-rata m_1 dan m_2:

$$\hat{Z}\ u\ - m\ u\ = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a\ u\ [Z_1\ u_a\ - m(u)] + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b\ u\ [Z_2\ u_b\ - (u)$$

Estimasi persamaan di atas ditarik kesimpulan:

$$\hat{Z}\ u\ = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha\ u\ Z_1\ u_a\ + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b\ u\ Z_2\ v_b$$

dimana,

$$Z_1\ \mathrm{u}\ = \hat{m}\ \mathrm{u}\ - m_1,\ Z_2\ \mathrm{u}\ = \hat{m}\ \mathrm{u}\ - m_2$$

Perbedaan antara estimasi *cokriging* sederhana dan *ordinary cokriging* disebabkan oleh estimasi rata-rata primer dan sekunder di lokasi stasioner m_1 dan m_2.

Menstandarkan *ordinary cokriging* adalah varian *ordinary cokriging* yang dua pembatas tidak bias diganti dengan satu yang mana memerlukan pembobot data rata-rata primer dan sekunder jumlahnya satu.

$$\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (u) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b (u) = 1$$

Pembatas tunggal tidak bias dari estimator *ordinary cokriging* dipastikan dengan menstandarkan variabel kedua Z_2 sehingga rata-rata sama pada variabel primer.

Standarisasi estimator *cokriging* ditulis:

$$Z\ u\ = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (u) Z_1\ u_a\ + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b (u) Z_2\ v_b\ - m_2 + m_1$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dimana rata-rata m_1 dan m_2 diestimasi oleh rata-rata sampel setelah pembetulan sampel pada pengelompokan rata-rata. Pembobot *cokriging* diperoleh dengan menyelesaikan sistem *ordinary cokriging* dengan satu pembatas tidak bias:

$$\begin{cases} \sum_{a=1}^{n} \lambda_a \; u \; C_{11} \; u_a - v_b \; + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b \; u \; C_{12} \; u_a - v_b \\ \quad + \mu_1 \; u \; = C_{11} \; u_a - u \; , \qquad a_1 = 1, \ldots, n_1 \; u \\ \sum_{a=1}^{n} \lambda_a \; u \; C_{21} \; u_a - v_b \; + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b \; u \; C_{22} \; u_a - v_b \\ \quad + \mu_2 \; u \; = C_{21} \; u_a - u \; , \qquad a_2 = 1, \ldots, n_2 \; u \\ \qquad \sum_{a=1}^{n} \lambda_a \; u \; + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b \; u \; = 1 \end{cases}$$

Standarnya *ordinary cokriging* tidak sama, memerlukan nilai stasioner dari data primer dan sekunder. Bagaimanapun, pembatas tidak tunggal tidak bias pasti untuk mengestimasi kembali keadaan rata-rata lokal dan variabel kedua dengan setiap mencari persekitaran. Persamaan dengan estimator *ordinary cokriging* adalah $\hat{Z} \; u$ ditambah perkalian dengan perbedaan rata-rata lokal primer pada variabel u:

$$Z \; u \; = Z \; u \; + [\lambda_{m1} \; u \; + \lambda_{m2} \; u \; [m \; u \; - m_1]$$

Standarisasi bentuk estimator *ordinary cokriging* dinotasikan dengan $\hat{Z} \; u$

$$\frac{\hat{Z} \; u \; - m_1}{\sigma_1} = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a \left[\frac{Z_1 \; u_a \; - m_1}{\sigma_1} \right] + \sum_{b=1}^{n} \lambda_b \left[\frac{Z_2 \; v_b \; - m_2}{\sigma_2} \right]$$

pembobot $\lambda_a(u)$ adalah solusi sistem *ordinary cokriging* dengan pembobot *ordinary cokriging*.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.6 *Metode Maximum Likelihood Estimation*

Metode dari estimasi titik (*point estimation*) dengan sifat-sifat teoritis yang lebih kuat daripada metode OLS adalah metode *maximum likelihood estimation*. Metode *maximum likelihood estimation* merupakan salah satu cara untuk mengestimasi parameter yang tidak diketahui. Prosedur estimasi maksimum likelihood menguji apakah estimasi maksimum yang tidak diketahui dari fungsi *likelihood* suatu sampel nilainya sudah memaksimumkan fungsi *likelihood* (Gujarati, 2007:131).

Fungsi *likelihood* dari n variabel random $X_1, X_2, \cdots X_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama $fx_i, ..., fx_n(x_1, x_2, ..., x_n \mid \theta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $X_1, X_2, \cdots X_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(x;\theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $L \quad f(X_1 : \theta) f(X_2 : \theta) ... f(X_n : \theta)$ (Spiegel, Murray and Schiller, 2004:170).

Menurut Greene (2003:468-469) fungsi PDF (*probability density function*) dari variabel y acak dengan parameter β, dinotasikan $f(y|\beta)$. Probabilitas sampel random dari *joint* PDF untuk $y_1, y_2, \cdots y_n$ (dimana n saling bebas dan berdistribusi sama) dapat dihitung:

$$f(y_1, ..., y_n | \beta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i | \beta) = l \quad \beta | y \tag{2.24}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Metode maksimum *likelihood* akan memilih nilai β yang diketahui sedemikian hingga memaksimumkan nilai probabilitas dari gambaran sampel secara acak yang telah diperoleh secara aktual.

Menurut Abdul Aziz (2007:12), fungsi *log likelihood*-nya adalah :

$$
\begin{aligned}
L(\beta \mid y) &= \ln\left\{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(y_i-\beta)}{\sigma^2}\right)^2\right]\right\} \\
&= \ln\left\{(2\pi\sigma^2)^{n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(y_i-\beta)}{\sigma^2}\right)^2\right]\right\} \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\beta)^2}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

Menurut Davidson dan MacKinnon (1993:32-33) bila fungsi likelihood terdiferensialkan terhadap β , maka estimasi maksimum *likelihood* dapat diperoleh melalui persamaan berikut:

$$
\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n \rightarrow \frac{\partial l(x_1, x_2, \cdots x_n)}{\partial \beta_i} \qquad (2.25)
$$

Untuk $i = 1, 2, \ldots, n.$

Dalam banyak kasus, penggunaan deferensiasi akan lebih mudah bekerja pada logaritma natural dari

$$
L(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \beta) = \ln l(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \beta) \qquad (2.26)
$$

2.7 Kajian Keagamaan

2.7.1 Metode *Ordinary Cokriging* dan Lingkungan Hidup

Masalah lingkungan menjadi perhatian luas dari masyarakat. Perhatian tersebut terjadi karena kerusakan pada lingkungan telah nyata memberi akibat kepada kesehatan dan kelangsungan hidup manusia. Peristiwa semburan Lapindo,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

misalnya, mengakibatkan meningkatnya polusi udara, penurunan tanah dan sebagainya. Polusi secara nyata merusak kesehatan kesehatan manusia, bahkan keutuhan manusia itu sendiri.

Sebenarnya persoalan lingkungan, demikian pula di Indonesia, menjadi lebih rumit karena dampaknya juga mengena pada kualitas kehidupan sosial masyarakat baik langsung maupun tidak langsung. Menurut Ramzi Tadjoedin (2005:105), gejala yang sekarang melanda dunia dan umat manusia dalam kaitannya dengan masalah lingkungan adalah karena kegiatan manusia. Alam sekitar menjadi terkuras yang mengakibatkan menurunnya secara drastis daya dukung sumber-sumber alam yang seharusnya membuat kehidupan menjadi lebih layak dan dunia menjadi tempat yang baik.

Misalnya kerusakan hutan, yang berdampak adanya proses *siltasi* sebagai akibat penebangan hutan serta penurunan jumlah hutan. Berkurangnya persediaan air, maupun terganggunya sumber-sumber air. Terancam punahnya berbagai jenis binatang yang terganggu sebab terganggunya alam sekitar. Begitu juga dengan terancamnya berbagai jenis tanaman yang sesungguhnya dapat mendorong dan membantu kehidupan manusia secara lebih baik apabila bioversitas dapat tetap terpelihara untuk masa yang akan datang.

Terkurasnya sumberdaya alam yang membahayakan kelangsungan hidup manusia dan kelestarian alam itu, jelas merupakan tingkah laku manusia itu sendiri. Yaitu, tingkah laku yang disentralkan kepada keserakahan intelektual (ilmu pengetahuan) dan moral (tanggung jawab sosial) yang ditujukan pada kenikmatan biologis semata (Suhartono, 2005:75). Sikap egoistis terhadap

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

lingkungan hidup tidak hanya mengancam keselamatan dan kesejahteraan hidup manusia. Melainkan, berpengaruh terhadap kehidupan makhluk hidup selain manusia.

2.7.2 Manusia sebagai Khalifah

Selain manusia diciptakan untuk beribadah kepada Allah, manusia juga diciptakan sebagai khalifah di muka bumi. Sebagai khalifah, manusia memiliki tugas memelihara alam semesta. Selain memanfaatkan dan mengelolah sumber daya alam. Sebagaimana yang disebut dalam QS. al-Baqarah:30 *("Dan (ingatlah) ketika Tuhanmu berfirman kepada para malaikat, "Aku hendak menjadikan khalifah di bumi."...).*

Arti khalifah di sini adalah seseorang yang diberi kedudukan oleh Allah untuk mengelola suatu wilayah, ia berkewajiban untuk menciptakan suatu masyarakat yang hubungannya dengan Allah baik, kehidupan masyarakatnya harmonis, dan agama, akal dan budayanya terpelihara (Sihab, 2006).

Allah berfirman dalam al-Qur'an surah al-Hijr berbunyi sebagai berikut:

وَٱلۡأَرۡضَ مَدَدۡنَٰهَا وَأَلۡقَيۡنَا فِيهَا رَوَٰسِيَ وَأَنۢبَتۡنَا فِيهَا مِن كُلِّ شَيۡءٖ مَّوۡزُونٖ ﴿١٩﴾ وَجَعَلۡنَا
لَكُمۡ فِيهَا مَعَٰيِشَ وَمَن لَّسۡتُمۡ لَهُۥ بِرَٰزِقِينَ ﴿٢٠﴾

"Dan Kami telah menghamparkan bumi dan menjadikan padanya gunung-gunung dan Kami tumbuhkan padanya segala sesuatu menurut ukuran. Dan Kami telah menjadikan untukmu di bumi keperluan-keperluan hidup, dan (Kami menciptakannya pula) makhluk-makhluk yang kamu sekali-kali bukan pemberi rezeki kepadanya." (QS. al-Hijr:19-20)

Secara konseptual-religius, Islam sangat menitikberatkan pada kepedulian kepada lingkungan. Yakni, kesadaran akan menjaga lingkungan (QS.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

al-Baqarah:11). Ayat tersebut berbunyi, *“Dan bila dikatakan kepada mereka:"Janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi". Mereka menjawab: "Sesungguhnya kami orang-orang yang mengadakan perbaikan”.*

Tetapi banyak manusia yang tidak peduli terhadap terhadap kelestarian lingkungan hidup. Beberapa ayat al-Qur’an mengatakan “Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan perbuatan tangan manusia, supaya Allah merasakan pada mereka sebagai dari perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar)” (QS. ar-Rum:21). “Dan di antara mereka ada orang yang ucapannya tentang kehidupan dunia menarik hatimu, dan diperselisihkannya kepada Allah (atas kebenaran) isi hati, padahal ia adalah penantang yang paling keras. Dan apabila ia berpaling (darimu) ia berjalan di bumi untuk untuk mengadakan kerusakan padanya, dia merusak tanam-tanaman dan binatang-binatang ternak, dan Allah tidak menyukai kebinasaan” (QS. al-Baqarah:204-205)

Karena itu, al-Qur’an menunjukkan kesadaran manusia agar memiliki ketajaman nalar berfikir.

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَأٓيَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ ١٩٠
ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَٰطِلًا سُبْحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka.” (QS. al-Baqarah: 190-191).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Estimasi *Ordinary Cokriging*

Ordinary coriging adalah metode geostatistika yang menggunakan nilai spasial pada lokasi tersampel untuk memprediksi nilai pada lokasi lain yang belum tersampel. *Ordinary cokriging* adalah teknik interpolasi untuk mempermudah dalam bidang Ilmu Geologi (Cressie, 1990). Model persamaan Kriging didefinisikan dengan:

$$Z(u) = \mu + \delta(u),\ u \in D, \mu \in \mathfrak{R} \text{ dan } \mu \text{ tak diketahui} \tag{3.1}$$

Asumsi Prediksi:

$$\hat{Z}(u) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha(u) Z_1(u_a) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b(u) Z_2(u_b) \tag{3.2}$$

Estimator ditakbiaskan jika pembobot *ordinary cokriging* memenuhi syarat: $\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha(u) = 1,\ \sum_{b=1}^{m} \lambda_b(u) = 0$

dimana:

$Z(u)$: peubah acak bebas

μ : ekspektasi peubah acak $Z(u)$

$\delta(u)$: nilai *error* pada $Z(u)$

D: himpunan random di $\mathfrak{R}$

$\mathfrak{R}$: bilangan real

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi

$\lambda_\alpha(u)$: nilai $Z(u_\alpha)$ untuk estimasi lokasi u

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha$:adalah lokasi pertama pada data tersampel

$\sum_{b=1}^{m} \lambda_b$:adalah lokasi kedua pada data tersampel

dimana jika $\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (u) = 1$ maka persamaan (3.1) menjadi:

$$\hat{Z}(u) = 1 \cdot Z_1(u_a) + 0$$
$$\hat{Z}(u) = Z_1(u_a), \; \exists\forall\mu \in \Re.$$

Untuk mendapatkan estimasi *error* pada setiap lokasi dengan cara mencari selisih nilai estimasi $\hat{Z}(u)$ dengan nilai sebenarnya $Z(u)$, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\delta(u) = \hat{Z}(u) - Z(u)$$

dengan syarat $\delta(u)$ adalah :

1.Tak bias: $E\left[\hat{Z}(u) - Z(u)\right] = 0$

2. Variansi : $Var\left[\hat{Z}(u) - Z(u)\right]$ minimum

Dengan menggunakan persamaan (3.2) akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimasi tak bias bagi $Z(u)$.

Untuk $\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha (u) = 1$ maka

$$E(Z(u)) = Z_1(u_a). = Z(u) \qquad (3.3)$$

$$\delta(u) = Z(u) - \hat{Z}(u)$$
$$E(\hat{\delta}(u)) = E(Z(u)) - E(\hat{Z}(u))$$
$$= (Z(u)) - (\hat{Z}(u))$$
$$= 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Terbukti bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan *estimator* tak bias bagi $Z(u)$ untuk model *ordinary cokriging.* Untuk mendapatkan estimasi yang tak bias dengan cara sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
Z(u) &= \sum_{a=1}^{n} \lambda_{\alpha}(u)\, Z_1(u_a) + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b(u)\, Z_2(v_b) \\
Z(u) &= 1 \cdot Z_1(u_a) + 0 \\
Z(u) &= Z_1(u_a)
\end{aligned}
$$

dimana diketahui bahwa $E[Z(u)] = Z(u)$ maka $E[Z(u_a)] = Z(u)$, sehingga terbukti juga $Z(u)$ *tak bias.* Atau, jika $Z(u)$ pada seluruh lokasi tersampel *tak bias*, maka $Z(u_a)$ pada salah satu lokasi tersampel juga tak bias. Setelah didapatkan sifat tak bias dari $Z(u)$ dan $Z(u_a)$ maka akan dibuktikan untuk sifat variansi $\delta(u)$ yang memiliki asumsi minimum sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] \\
Var(\hat{\delta}(u)) &= E\left[(\hat{\delta}(u) - E(\hat{\delta}(u)))^2\right] \\
Var(\hat{\delta}(u)) &= E\left[\hat{\delta}(u)^2\right] - \left[E(\hat{\delta}(u))\right]^2 \\
E\left[\hat{\delta}(u)^2\right] &= Var(\hat{\delta}(u)) + \left[E(\hat{\delta}(u))\right]^2 \\
&= Var(\hat{\delta}(u)) + 0 \\
&= Var(\hat{\delta}(u))
\end{aligned}
$$

sehingga didapatkan bahwa $Var(\delta(u)) = E(\delta(u))$.

Selanjutnya dari sifat estimasi tak bias dan variansi terpenuhi dari model *ordinary cokriging*, maka akan dibuktikan sifat linier dari $Z(u)$ dengan syarat $\lambda_{\alpha}(u) = 1$ dan $\lambda_b(u) = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E\left(Z(u)\right)$$

karena $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$, maka $\left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2 = Var\left(\hat{\delta}(u)\right)$

Jika pada suatu lokasi pengukuran terdapat n yang dinyatakan $Z(u_1), Z(u_2), Z(u_3), \ldots, Z(u)$. Berdasarkan data yang tersampel, akan diestimasi $Z(u)$ pada lokasi yang tersampel yang dinyatakan dalam $Z(u_0)$. Selanjutnya, dari persamaan (2.7) dan (3.1), akan disusun variabel acak untuk menggambarkan *estimation* dari *error*, yaitu dari:

$$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_a), \text{ karena } \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$$

sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(u) &= \hat{Z}(u) - Z(u) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{n} \lambda_\alpha Z(u) - Z(u) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

dengan $\hat{Z}(u)$ merupakan kombinasi linier dari semua data tersampel.

1. Tak bias

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan *estimation tak bias.* Dapat dipastikan bahwa *error* pada lokasi tertentu memilki nilai ekspektasi 0 dengan menerapkan rumus untuk nilai ekspektasi pada kombinasi linier terhadap persamaan (3.3), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\delta}(u)\right) &= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\left(\hat{Z}(u)\right) - Z(u) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u) - Z(u) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dengan asumsi bahwa fungsi acak bersifat stasioner, dimana setiap nilai ekspektasi boleh dituliskan sebagai $E(Z)$, sehingga diperoleh:

$$E\left[\hat{\delta}(u)\right] = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha \, E\left[\hat{Z}(u)\right] - Z(u)$$

karena $E\left[\hat{\delta}(u)\right] = 0$, maka

$$E\left[\hat{\delta}(u)\right] = 0$$

$$0 = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - E(Z)$$

$$0 - \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - \left(\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - E(Z)\right)$$

$$-\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) = -E(Z)$$

$$\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) = E(Z)$$

$$\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{E(Z)}{E(Z)} = \frac{E(Z)}{E(Z)}$$

$$\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha .1 = 1$$

$$\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha . = 1$$

Berdasarkan penjabaran di atas, maka diperoleh $E\left(\hat{Z}(u)\right) = \mu = Z(u)$, dimana $Z(u) = E\left[Z(u)\right]$ dengan $Z(u)$ berupa suatu konstanta. Ini berarti *ordinary cokriging* menghasilkan *estimation* yang tak bias dengan $\sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$.

2. Efisien

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa metode *ordinary kriging* bersifat efisien yaitu dengan meminimumkan variansi error. Dengan mengasumsikan bahwa, $\mathrm{var}\left[Z(u)\right] = \sigma^2$ persamaan *estimation* kuadrat (3.2) :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$E\left(\hat{\delta}\;u^{2}\right)=Var\left(\hat{\delta}\;u\right)+\left(E\left(\hat{\delta}\;u\right)\right)^{2}$$

estimator *tak bias*:

$$E\left(\hat{\delta}\;u\right)=E\left(\hat{Z}\;u\right)-E\;Z\;u$$

$$E\left(\hat{\delta}\;u\right)=E\left(\hat{Z}\;u\;-Z\;u\right)$$

dengan

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\;\hat{Z}\;u_1 &= \operatorname{var}\;\textstyle\sum_{a=1}^{n}\lambda_a\;Z\;u_1\\ &= \operatorname{var}\;1\cdot\;Z(u_1)\\ &= \operatorname{var}\;Z(u_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(\hat{Z}\;u_1\;,\hat{Z}\;u_2\right) &= E\;\textstyle\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha Z\;u_\alpha\;\;Z\;u_1\;\;-E\left(\hat{Z}\;u_1\;\;E\;Z\;u_2\right)\\ &= \sum\lambda_\alpha E\;Z\;u_\alpha\;\;Z\;u_1\;\;-E\left(\hat{Z}\;u_1\right)E\;Z\;u_2\end{aligned}$$

$$=\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha E\;Z\;u_\alpha\;\;Z\;u_1\;\;-E\left(\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha Z\;u_\alpha\right)E\;Z\;u_2$$

$$=\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha E\;Z\;u_\alpha\;\;Z\;u_1\;\;-\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha E\;Z\;u_\alpha\;\;E\;Z\;u_2$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.6) dan (3.7) ke dalam persamaan (3.5) maka akan diperoleh estimasi variansi *error ordinary cokriging* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\;\delta\;u_0 &= \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\lambda_\alpha\lambda_b \operatorname{cov}\;Z\;u_\alpha\;\;,Z\;u_b\;\;+\sigma^2\\ &\quad -2\sum_{b=1}^{m}\;\lambda_\alpha \operatorname{cov}\;Z\;u_\alpha\;\;,Z\;u_0\end{aligned} \tag{3.5}$$

dengan syarat $\sum_{a=1}^{n}\lambda_\alpha\;=1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika blok U merupakan satu titik, maka taksiran *kriging* menjadi taksiran titik dan sistem *kriging* blok menjadi sistem *kriging* titik. Misalkan ditaksir nilai Z di u_0, $Z\ u_0$. Taksiran $Z\ u_0$ merupakan rataan berbobot data di sekitar $Z\ u_0$:

$$\hat{Z}\ u_0 = \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha Z_\alpha$$

Bobot $\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, n$ diperoleh dari sistem *kriging* :

$$\begin{cases} \sum_{a=1}^{n} \lambda_a C_{\alpha b} + \mu = \bar{C}_{\alpha 0}, b = 1, \ldots, n \\ \sum_{a=1}^{n} \lambda_\alpha = 1 \end{cases}$$

3.2 Estimasi Menggunakan *Maximum Likelihood Estimation*

Setelah didapatkan estimasi $Z(u)$ pada tiap lokasi tersampel selanjutnya model *ordinary cokriging* pada persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z\ u &= \mu + \delta(u) \\ Z(u) &= \lambda Z(u_a) + \delta(u) \\ \delta(u) &= Z(u) - \lambda Z(u_a) \end{aligned} \tag{3.6}$$

dimana, $\mu = \lambda_a(u_1) Z_1(u_1)$
$\quad = \lambda Z(u_a)$

dengan menggunakan metode *maximum likelihood estimation* akan dicari estimasi penentu λ dan σ^2 untuk seluruh lokasi sebagai berikut:

$$f\ Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n \mid \lambda, \sigma^2 = f\ Z_1 \mid \lambda, \sigma^2\ \ f\ Z_2 \mid \lambda, \sigma^2\ \ f\ Z_3 \mid \lambda, \sigma^2\ \ldots\ldots f\ Z_n \mid \lambda, \sigma^2$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f\ Z(u)_i \mid \lambda, \sigma^2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$f\left(Z(u)\,|\,\lambda,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z(u)-\lambda Z(u)}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.7)$$

dari persamaan (3.7) akan dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu:

$$f\left(Z(u)\,|\,\lambda,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z(u)-\lambda Z(u)}{\sigma}\right)^2\right]$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(Z(u)-\lambda Z(u)\right)^T\Sigma^{-1}\left(Z(u)-\lambda Z(u)\right)$$

$$\mathrm{L}\,f\left(Z(u)\,|\,\lambda,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(\left(Z(u)\right)^T Z(u)-\left(Z(u)\right)^T\lambda^T Z(u)+\left(Z(u)\right)^T\lambda^T\lambda Z(u)\right)\right]$$

karena estimator $E\left(\hat{Z}(u)\right)=Z(u)$, maka untuk penaksir parameter model

estimasi dari λ,σ^2 dengan menggunakan:

$$\delta(u)=\hat{Z}(u)-Z(u)$$
$$=Z(u)-Z(u) \text{ estimator tak bias}$$

fungsi *log- likelihood* dari persamaan (3.6) sebagai berikut:

$$\mathrm{L}=\left(\lambda,\sigma^2\,|\,Z(u)\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(Z(u)-\lambda\left(Z(u)\right)\right)^T\left(Z(u)-\lambda Z(u)\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{1}\left(\left(Z(u)\right)^T-\left(Z(u)\right)^T\lambda^T\right)\left(Z(u)-\lambda Z(u)\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(\left(Z(u)\right)^T Z(u-\left(Z(u)\right)^T\lambda Z(u)-\left(Z(u)\right)^T\lambda^T Z(u)+\left(Z(u)\right)^T\lambda^T\lambda Z(u)\right)\right]$$

Maka fungsi *log-likelihood-nya* adalah:

$$\mathrm{L}=\ln l$$
$$=\ln(2\pi\sigma^2)^{-n/2}-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(Z(u)-\lambda Z(u)\right)^T\left(Z(u)-\lambda Z(u)\right)$$
$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(\left(Z(u)\right)^T-\left(Z(u)\right)^T\lambda^T\right)\left(y-\lambda Z(u)\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(Z(u)^T Z(u) - Z(u)^T \lambda Z(u) - Z(u)^T \lambda^T y + Z(u)^T \lambda^T \lambda Z(u) \right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(Z(u)^T Z(u) - Z(u)^T \lambda Z(u) - Z(u)^T \lambda^T (Z(u))^T + Z(u)^T \lambda^T \lambda Z(u) \right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(Z(u)^T Z(u) - Z(u)^T \lambda Z(u) - (Z(u))^T \lambda Z(u) + (Z(u))^T \lambda^T \lambda Z(u) \right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left((Z(u))^T (Z(u)) - 2y^T \lambda Z(u) + (Z(u))^T \lambda^T \lambda Z(u) \right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left((Z(u))^T (Z(u)) - 2 (Z(u))^T \lambda Z(u) + (Z(u))^T \lambda^T \lambda Z(u) \right) \quad (3.7)$$

Untuk mendapatkan λ yang efisien maka pada persamaan 3.7 diturunkan terhadap λ sehingga

$$\ln L = (\lambda, \sigma^2 \mid Z(u))$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(Z(u)^T Z(u) - 2 Z(u)^T \lambda Z(u) + Z(u)^T \lambda^T \lambda Z(u) \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(Z(u)^T Z(u) - 2 Z(u)^T \lambda Z(u) + Z(u)^T \lambda^T \lambda Z(u) \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(Z(u)^T Z(u) \Sigma^{-1} - 2 Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} + Z(u)^T \lambda^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2 Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1} + Z(u)^T \lambda^T Z(u)\Sigma^{-1} + (Z(u))^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2 (Z(u))^T Z(u)\Sigma^{-1} + (Z(u))^T \lambda^T Z(u)\Sigma^{-1} + (Z(u))^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2 Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1} + Z(u)^T \lambda Zu\,\Sigma^{-1} + Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2 Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1} + 2(u)Z^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} \right)$$

$$= Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1} - Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} \quad (3.8)$$

dengan menyamakan hasil turunan dengan nol maka diperoleh :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1} - Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} = 0$$

$$Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1} - Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} = 0$$

$$Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} = Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1}$$

$$Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} = Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1}$$

$$Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1} \; Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1} \lambda_{MLE} = Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1} \; Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1}$$

$$I\lambda_{MLE} = Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1} \; Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1}$$

$$I\lambda_{MLE} = Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1} \; Z(u)^T Z(u)\Sigma^{-1}$$

$$\lambda_{MLE} = \left(\left(Z(u)\right)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1}\right)^{-1} \left(Z(u)\right)^T Z(u)\Sigma^{-1} \qquad (3.9)$$

Estimator tak bias jika $E(\hat{\lambda}) = \lambda$

$$E\ \hat{\lambda} = E\left[\ Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1} Z(u)\ Z(u)^T \Sigma^{-1}\right]$$

$$= \left[\ Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1} E\ Z(u)\ \ Z(u)^T \Sigma^{-1}\right]$$

$$= Z\ \ Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1} Z(u)\ Z(u)^T \Sigma^{-1}$$

$$= Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\ Z(u)^T \Sigma^{-1}\left[(Z(u) + (\delta(u))\right]$$

$$= Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\left[\ Z(u)^T \Sigma^{-1}(Z(u) + \left(Z(u)\right)^T \Sigma^{-1} \left(\delta(u)\right)\right]$$

$$= Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\left[\ Z(u)^T \Sigma^{-1}(Z(u) + Z(u)^T \Sigma^{-1}\ \delta(u)\ \right]$$

$$= Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\ Z(u)^T \Sigma^{-1}(Z(u)\ + Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\ Z(u)^T \Sigma^{-1}\ \delta(u)$$

$$= Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\ Z(u)^T \Sigma^{-1}(Z(u) + Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\ Z(u)^T \Sigma^{-1}\ \delta(u)$$

$$= Z(u)^T \lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\ Z(u)^T \Sigma^{-1}(Z(u)$$

$$= I\lambda$$

$$= \lambda$$

sehingga terbukti bahwa $\hat{\lambda}$ merupakan estimator tak bias.

Selanjutnya akan dibuktikan sifat efisien. Suatu estimator dikatakan efisien jika estimator tersebut memiliki varians yang terkecil.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\hat{\lambda}MLE = E(\mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}\Sigma^{-1}Z(u)$$

$$= \mathrm{E}\left[\mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}\Sigma^{-1}(Z(u))\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}z^{T}(u)\Sigma^{-1}(Z(u))\right]$$

$$= \mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}\Sigma^{-1}E(Z(u))$$

$$= \mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\left[\mathrm{Z(u)}^{T}\Sigma^{-1}(Z(u)+(\delta)\right]$$

$$= (\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\left[(\mathrm{Z(u)})^{T}\Sigma^{-1}(Z(u)+(\mathrm{Z(u)})^{T}\Sigma^{-1}(\delta)\right]$$

$$= \mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}\Sigma^{-1}Z(u)+\mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}\Sigma^{-1}(\delta)$$

$$= \mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}Z(u)+\mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}(\delta(u))$$

$$= \mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}(\mathrm{Z(u)})^{T}Z(u)+(\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}(\mathrm{Z(u)})^{T}(\delta(u))$$

$$= \boxed{\lambda}+(\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}(\mathrm{Z(u)})^{T}(\delta(u))$$

$$= \boxed{\lambda}+\left[(\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}(\mathrm{Z(u)})^{T}(\delta(u))\right]$$

Maka var $\hat{\lambda}_{MLE}$ adalah sebagai berikut:

$$\mathrm{var}\ \hat{\lambda}MLE = E\left[\hat{\lambda}MLE - E\ \hat{\lambda}MLE^{\ T}\ \hat{\lambda}MLE - E\ \hat{\lambda}MLE\right]$$

$$= E\left[\hat{\lambda}MLE - \lambda^{\ T}\ \hat{\lambda}MLE - \lambda\right]$$

$$= E\left[\mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}(\delta(u))^{T}\ \mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}^{T}(\delta(u))\right]$$

$$= E\left[\mathrm{Z(u)}^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\mathrm{Z(u)}\ \delta(u))^{T}\left((\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\right)(\mathrm{Z(u)})^{T}(\delta(u))\right]$$

$$= E\left[(\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}(\mathrm{Z(u)})(\mathrm{Z(u)})^{T}\left((\delta(u))\right)^{T}(\delta(u))\right]$$

$$= (\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}(\mathrm{Z(u)})(\mathrm{Z(u)})^{T}E\left((\delta(u))^{T}(\delta(u))\right)$$

$$= \left((\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}(\mathrm{Z(u)})(\mathrm{Z(u)})^{T}\right)E\left(Z(u)Z(u)^{T}\right)$$

$$= (\mathrm{Z(u)})^{T}\lambda Z(u)\Sigma^{-1})^{-1}\sigma^{2}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga fungsi variansinya adalah:

$\text{var}\ \hat{\lambda}_{MLE} = \text{Z(u)}^T \lambda Z(u) \Sigma^{-1})^{-1} \sigma^2$, dimana σ^2 sekecil mungkin.

Sedangkan penaksir ragam galat σ^2 pada model regresi spasial yaitu:

$$\frac{\partial \ \ln L \ \ \lambda, \sigma^2 \mid Z(u)}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \left[-\frac{n}{2} \ln 2\pi - n.\ln \sigma^2 - \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right) Z(u) - \lambda Z(u)^{\ T} \ \ Z(u) - \lambda Z(u \right]}{\partial \sigma^2}$$

$$= \frac{\partial \left[-\frac{n}{2} \ln 2\pi \right]}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial \left[n.\ln \sigma^2 \right]}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{\partial \ \ Z(u) - \lambda Z(u)^{\ T} \ \ Z(u) - \lambda Z(u)}{\partial \sigma^2}$$

$$= 0 - \frac{\partial \left[n.\ln \sigma^2 \right]}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{\partial \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)^T \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)}{\partial \sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2 \left(\sigma^2 \right)^2} \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)^T \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)$$

$$= \frac{-\sigma^2 n + \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)^T \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)}{2\sigma^4}$$

$$\frac{\sigma^2 n}{2\sigma^4} = \frac{\left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)^T \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)}{2\sigma^4}$$

$$\sigma^2 n = \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)^T \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)$$

$$\sigma^2 = \frac{\left[\left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)^T \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right) \right]}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right)^T \left(Z(u) - \lambda Z(u) \right) \tag{3.10}$$

sehingga dari persamaan (3.10) diperoleh hasil estimasi parameter σ^2 adalah:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \ \ y - \lambda W u^{\ T} \ \ y - \lambda W u$$

$$E\left(\widehat{\sigma^2} \right) = \frac{1}{n} E \ \ Z(u) - \lambda Z(u)^{\ T} \ \ Z(u) - \lambda Z(u)$$

$$= \frac{1}{n} E \ \ \ Z(u)^{\ T} - \ Z(u)^{\ T} \lambda^T \ \ \ Z(u) - \lambda Z(u)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{1}{n} E \quad Z(u)^{T} Z(u) - Z(u)^{T} \lambda Z(u) - Z(u) \; Z(u)^{T} \lambda^{T} + Z(u)^{T} \lambda^{T} \lambda Z(u)$$

$$= \frac{1}{n} E \quad Z(u)^{T} Z(u) - Z(u)^{T} \lambda Z(u) - \lambda Z(u) \; Z(u)^{T} + Z(u)^{T} \lambda^{T} \lambda Z(u)$$

$$= \frac{1}{n} E\left(Z(u)^{T} Z(u) - 2 \; Z(u)^{T} \lambda Z(u) + Z(u)^{T} \lambda^{T} \lambda Z(u) \right)$$

$$= \frac{1}{n} E\left(\left(Z(u)^{T} Z(u) + \left(Z(u) \right)^{T} Z(u) - 2Z(u)\lambda^{T} Z(u) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\left(2 \left(Z(u) \right)^{T} \right) - \left(2Z(u)\lambda^{T} \right) E(Z(u)) \right)$$

karena $E \; \hat{\sigma}^{2} \neq \sigma^{2}$ maka penaksir tersebut dikatakan penaksir bias sehingga $E \; \hat{\sigma}^{2}$ mengandung autokorelasi spasial.

Dari uraian di atas dapat diambil kesimpulan untuk estimasi parameter model adalah sebagai berikut:

$$\hat{\lambda} = \quad Z(u)^{T} \lambda Z(u) \Sigma^{-1})^{-1} \quad Z(u)^{T} Z(u) \Sigma^{-1} \qquad (3.9)$$

$$\hat{\sigma}^{2} = \frac{1}{n} \; Z(u) - \lambda Z(u)^{T} \; Z(u) - \lambda Z(u) \qquad (3.10)$$

3. 3 Kajian Keagamaan

3.3.1 Integrasi *Ordinary Cokriging* dalam Agama

Kewajiban bagi manusia adalah tunduk kepada Allah sebagai maha pemelihara alam semesta ini. *"...Dialah Allah Tuhan kamu; tidak ada Tuhan selain Dia. Pencipta segala sesuatu, maka sembahlah Dia; dan Dia adalah pemelihara segala sesuatu"* (QS. al-An'am:102). Maka "…janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi, sesudah (Allah) memperbaikinya dan berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut (tidak akan diterima) dan harapan (akan dikabulkan).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sesungguhnya rahmat Allah amat dekat kepada orang-orang yang berbuat baik (QS. al-A'raf:56). "Tidakkah kamu perhatikan sesungguhnya Allah telah menundukkan untuk (kepentingan)mu apa yang di langit dan apa yang di bumi dan menyempurnakan untukmu nikmat-Nya lahir dan batin. Dan di antara manusia ada yang membantah tentang (keesaan) Allah tanpa ilmu pengetahuan atau petunjuk dan tanpa kitab yang memberi penerangan." (QS. Luqman:20).

Perlu disadari bahwa misi manusia sebagai khalifah di bumi adalah menjaga dan memelihara lingkungan hidup. Rasulullah Saw dan para sahabat telah memberikan teladan pengelolaan lingkungan hidup yang mengacu kepada tauhid dan keimanan. Islam mengutamakan kebersihan sebagai standar lingkungan hidup. Standar inilah yang mempengaruhi pembangunan kota Cordoba, sebagaimana hasil penelitian dari Sir Thomas Arnold (1931) yang mengatakan bahwa kota ini memiliki tingkat peradaban tertinggi di Eropa pada masa itu. Kota dengan 70 perpustakaan yang berisi ratusan ribu koleksi buku, 900 tempat pemandian umum, serta pusatnya segala macam profesi tercanggih pada masa itu. Kebersihan dan keindahan kota tersebut menjadi standar pembangunan kota lain di Eropa (Fazlun, 2007).

Dengan begitu, pencapaian misi manusia sebagai khalifah cukup dilihat dari seberapa jauh tingkat kualitas lingkungan hidupnya. Kegiatan pembangunan apabila tidak memperhatikan kualitas lingkungan tentu akan mengakibatkan terganggunya keseimbangan ekosistem dan terjadinya degradasi lingkungan seperti tanah longsor, erosi, sedimentasi, penggundulan hutan, peningkatan lahan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kritis, pencemaran tanah, air dan udara, abrasi pantai, instrusi air asin, serta penurunan debit air permukaan dan air tanah (Sastrawijaya, 2009).

Antara manusia dan lingkungan hidupnya terdapat hubungan timbal balik. Manusia mempengaruhi lingkungan hidupnya dan sebaliknya manusia dipengaruhi oleh lingkungan hidupnya. Manusia ada di dalam lingkungan hidupnya dan ia tidak dapat terpisahkan (Sastrawijaya, 2009). Jika lingkungan rusak, maka manusia dalam melakukan aktivitasnya akan terganggu juga. Lingkungan hidup yang rusak adalah lingkungan yang tidak dapat lagi menjalankan fungsinya dalam mendukung kehidupan.

Dengan demikian konteks integrasi antara estimasi *ordinary cokriging* dengan agama nyata tergambar dalam ayat berikut ini:

ظَهَرَ ٱلْفَسَادُ فِى ٱلْبَرِّ وَٱلْبَحْرِ بِمَا كَسَبَتْ أَيْدِى ٱلنَّاسِ لِيُذِيقَهُم بَعْضَ ٱلَّذِى عَمِلُوا۟
لَعَلَّهُمْ يَرْجِعُونَ ﴿٤١﴾

"Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia, supaya Allah merasakan kepada mereka sebahagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar)."

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dalam skripsi ini adalah: Estimasi $Z(u)$ pada tiap lokasi tersampel pada model *ordinary cokriging* dengan menggunakan metode *maximum likelihood estimation (MLE)*, menghasilkan estimasi penentu λ dan σ^2 untuk seluruh lokasi didapatkan parameter sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}(u) = \left((Z(u))^T \lambda Z(u) \Sigma^{-1})^{-1} \right) (Z(u))^T Z(u) \Sigma^{-1}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} (Z(u) - \lambda Z(u))^T (Z(u) - \lambda Z(u))$$

yang bersifat, tak bias, efisien dan liner.

4.2 Saran

Dalam mengestimasi parameter *ordinary cokriging* pada skripsi ini, digunakan metode *maximum likelihood estimation*. Peneliti berharap pada penelitian selanjutnya dapat mengestimasi *ordinary cokriging* dengan metode yang lain dan menguji hipotesis dengan metode yang lain pula. Selain itu, bisa dikembangkan pada aplikasinya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Allen and Holt, Pincock. 2008. *About Kriging.* Colorado: Consultants for Mining and Financial Solutions

Amsyari, Fuad. 1989. *Islam dalam Dimensi Pembangunan Nasional*, Surabaya: Bina Ilmu

Anselin Luc. 2002. *Under the Hood. Issues in the Specification and Interpretation of Spatial Regression Models.* Urbana: Department of Agricultural and Consumer Economics University of Illinois

Aziz, Abdul. 2007. *Buku Ajar Ekonometrika, Teori dan Analisis Matematis.* Uin Malang: Jurusan Matematika

Beers and Kleijnen. 2004. *Kriging Interpolation In Simulation, Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference*. New Jersey: IEEE

Bohling Geoff. 2005. *Kriging.* Kansas: Geological Survey.

Cressie, N. 1990. *The origins of kriging*. *Math. Geol.*volume 22, hal: 239-252

Cressie, N. 1993. *Statistics for Spatial Data, revised ed*. New York: Wiley

Davidson and MacKinnon. 1993. *Estimation and inference in econometrics.* Inggris: Oxford University Press

Departemen Agama. 2005. *Al-Quran dan Terjemahan.* Jakarta: Syaamil

Fazlun, M Khalid. 2007. *Islamic Foundation for Ecology and Environmental Sciences* (IFEES), *Islam dan Lingkungan Hidup*. Birmingham: Green Press Network.

Gujarati. 2007. *Dasar-dasar Ekonometri Edisi Ketiga, Jilid I dan II*. Terjemahan M. Jullius A. Jakarta: Erlangga

Goovaerts, P. 1998. *Ordinary Cokriging Revisited.* International Assosiation for Mathematical Geology

Grenee, William.H. 2003. *Econometric Analysis, Fifth Edition*. New Jersey: Prentice Hall.

Journel A,G, Huijbregts, CH, J. 1978. *Minning Geostatistics*. London: Akademic Press

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Largueche, F.Z.B. 2006. *Estimating Soil Contamination with Kriging Interpolation Method American Journal of Applied Sciences*: Vol.3, No. 6. Hal:1894-1898.

LeSage, J.P. 2004. *Maximum Likelihood Estimation of Spatial Regression Models*, http://www4.fe.uc.pt/spatial/doc/lecture1.pdf, tanggal akses : 21 Juli 2010

Srivastava, RM and Isaaks. 1990. *An introduction to applied geostatistics*. New York: Oxford University Press

Stein, Michael. 1999. *Interpolation of Spatial Data*, *Some Theory for Kriging*. New York: Springer

Sastrawijaya. 2009. *Program Studi Ilmu Lingkungan*. Jakarta: Gramedia Pustaka

Shihab, Quraish. 1996. *Membumikan Al-Quran* Fungsi dan Peran Wahyu dalam Kehidupan Masyarakat. Jakarta: Penerbit Mizana

Suhartono, Suparlan. 2005. *Sejarah Pemikiran Filsafat Modern*. Yogyakarta: Ar-Ruzz Media

Tadjoeddin, Ramzi. 1993. *Permasalahan Abad XXI: Sebuah Agenda, Kumpulan Karangan*. Yogyakarta: Sippres

Tiryana, Tatang. 2007. *Pendugaan Simpanan Karbon Hutan Tanaman Mangium, dengan Pendekatan Geostatistika*. Bogor: Fakultas Kehutanan IPB.

Walpole, Ronal & Meyes, Raymond. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*. Bandung: ITB

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS & TEKNONOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama :**Abdul Kholiq**
NIM :**06510065**
Fakultas/ Jurusan :**Sains dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi :**Estimasi Ordinary Cokriging dengan Metode Maximum Likelihood Estimation**
Pembimbing I :**Dr. Sri Harini, M.Si**
Pembimbing II :**Ach. Nashichuddin, MA**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	12 Mei 2011	Konsultasi Bab I, Bab II	1.	
2	18 Nopember 2011	Konsultasi Kajian Agama		2.
3	4 Nopember 2012	Revisi Bab I, Bab II	3.	
4	2 Desember 2012	Konsultasi Kajian Agama		4.
5	6 Desember 2012	ACC Bab I, Bab II	5.	
6	9 Desember 2012	Revisi Kajian Agama		6.
7	20 Desember 2012	Revisi Bab I, Bab II	7.	
8	6 Januari 2013	Konsultasi Bab II, Bab III		8.
9	17Januari 2013	ACC Kajian Agama	9.	
10	15 Januari 2013	Konsultasi Bab I, II dan III		10.
11	2 Februari 2013	Konsultasi Keseluruhan	11.	
12	13 Februari 2013	Revisi Keseluruhan		12.
13	14 Januari 2013	ACC Keseluruhan	13.	

Malang, 14 Februari 2013

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG