

**BILANGAN KROMATIK PEWARNAAN TITIK PADA GRAF DUAL
DARI GRAF PIRAMID (Prn*)**

SKRIPSI

Oleh:
MUHIB
NIM. 06510020



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**BILANGAN KROMATIK PEWARNAAN TITIK PADA GRAF DUAL
DARI GRAF PIRAMID (Pr_n^*)**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MUHIB
NIM. 06510020

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**BILANGAN KROMATIK PEWARNAAN TITIK PADA GRAF DUAL
DARI GRAF PIRAMID (Pr_n^*)**

SKRIPSI

Oleh:
MUHIB
NIM. 06510020

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 28 Juni 2013

Pembimbing I

Pembimbing II

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Abdul Azis, M.Si
NIP. I97603182006041002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**BILANGAN KROMATIK PEWARNAAN TITIK PADA GRAF DUAL
DARI GRAF PIRAMID (Pr_n^*)**

SKRIPSI

Oleh:
MUHIB
NIM. 06510020

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 13 Juli 2013

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

Penguji Utama	: <u>Abdussakir, M.Pd</u>	()
	NIP. 19751006 200312 1 001		
Ketua	: <u>Dr. Sri Harini, M.Si</u>	()
	NIP. 19731014 200112 2 002		
Sekretaris	: <u>H. Wahyu H Irawan, M.Pd</u>	()
	NIP. 19710420 200003 1 003		
Anggota	: <u>Abdul Azis, M.Si</u>	()
	NIP. 197603182006041002		

**Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Muhib
NIM : 06510020
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juni 2013

Yang membuat pernyataan,

MUhib
NIM. 06510020

MOTTO

كُلُّ يَوْمٍ زِيَادَةٌ مِنَ الْعِلْمِ # وَاسْبِحْ فِي بِحُورِ الْقَوَائِدِ

Setiap Hari Bertambah Ilmu & Berenang Dalam Lautan

Faedah



PERSEMBAHAN

ABAH DAN UMMI SERTA SEMUA PEJUANG AGAMA ISLAM

Prof. Dr. KH. AHMAD MUDHOR, S.H



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah menganugerahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga dapat menyelesaikan studi dan penulisan skripsi ini dengan lancar di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis juga haturkan sholawat dan salam kepada nabi Muhammad SAW yang telah memberikan teladan terbaik sehingga penulis dapat berkarya dengan dasar kaidah syar'i dan akal secara Islam.

Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan membimbing penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Hj. Bayyinatul Muhtaromah, drh., M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, dan Abdul Azis, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi yang telah mengajarkan banyak keilmuan.

5. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingan.
6. Ayahanda terbaik dan Ibunda tercinta yang tak pernah berhenti memberikan do'a dan restu.
7. Kepada Keluarga besar Pesantren luhur Malang, terkhusus kepada beliau Prof. Dr. Kyai. H. Ahmad Mudlor, S.H yang senantiasa memberikan ilmu dan doa.
8. Keluarga besar UKM Pagar Nusa UIN Maliki Malang.
9. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini, namun tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan para pembaca.Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juni 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	7
1.3 Tujuan Penelitian.....	7
1.4 Manfaat Penelitian.....	8
1.5 Metode Penulisan	8
1.6 Sistematika Penulisan.....	9
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Definisi Graf.....	11
2.2 <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i>	13
2.3 Graf Beraturan	14
2.4 Graf Komplit	14
2.5 Graf Terhubung	15
2.5.1 Definisi <i>Walk</i>	15
2.5.2 Definisi <i>Trail</i>	16
2.5.3 Definisi <i>Phat</i>	16
2.5.4 Definisi <i>Sirkuit</i>	16
2.5.5 Definisi <i>Sikel</i>	16
2.6 Graf Planar dan Graf Dual.....	17
2.7 Pewarnaan pada Graf	19

2.7.1 Pewarnaan Titik.....	19
2.7.2 Pewarnaan Sisi	20
2.8 Algoritma <i>Welsh-Powell</i>	21
2.10 Kajian Agama	25
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 GrafDual dari Graf Piramid Pr_n	29
3.1.1 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_1	29
3.1.1 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_2	32
3.1.1 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_3	33
3.1.1 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_4	35
3.1.1 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_5	37
3.1.1 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_6	40
3.1.1 Mencari Rumus Pr_n^*	43
3.2 Pewarnaan Simpul.....	44
3.2.1 Graf Dual Pr_1^*	45
3.2.2Graf Dual Pr_2^*	45
3.2.3Graf Dual Pr_3^*	46
3.2.4Graf Dual Pr_4^*	47
3.2.5Graf Dual Pr_5^*	48
3.2.6Graf Dual Pr_6^*	49
3.3 Mencari Pola Bilangan Kromatik Pewarnaan Simpul Graf Dual ..	51
3.4Pewarnaan dalam Prespektif Islam.....	53
BAB IV PENUTUP	57
DAFTAR PUSTAKA	59

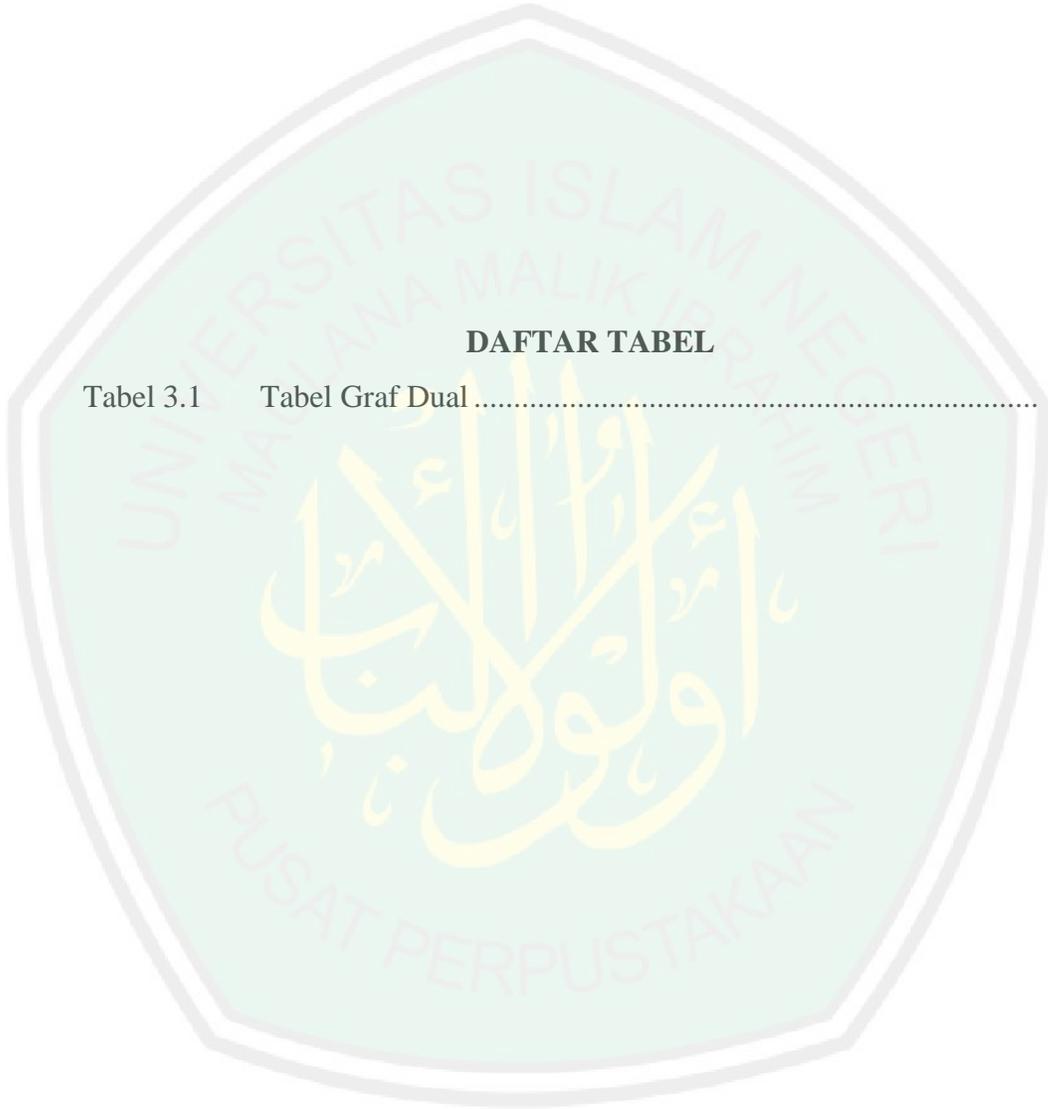
DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Graf Piramid Pr_1	5
Gambar 1.2	Ilustrasi <i>Hablumminallah</i> dan <i>Hablumminannas</i>	5
Gambar 2.1	Graf G Himpunan Titik V dan Himpunan Sisi E	12
Gambar 2.2	<i>Multigraph</i>	13
Gambar 2.3	GrafG	14
Gambar 2.4	GrafG Beraturan-1 dan Graf G Beraturan-2	14
Gambar 2.5	Graf Lengkap	15
Gambar 2.6	Graf G_6	15
Gambar 2.7	Jalan pada Graf	16
Gambar 2.8	Graf <i>Sikel</i>	17
Gambar 2.9	GrafPlanar dan Graf Bidang	17
Gambar 2.10	Muka Dalam dan Muka Luar	18
Gambar 2.11	Graf Dual	19
Gambar 2.12	Pewarnaan Titik	20
Gambar 2.13	Graf	22
Gambar 2.14	Graf Ular Panjang n	23
Gambar 2.15	GrafPiramid Pr_1	24
Gambar 2.16	GrafPiramid Pr_2	24
Gambar 2.17	GrafPiramid Pr_n	24
Gambar 2.18	Ilustrasi <i>Hablumminallah</i> dan <i>Hablumminannas</i>	28
Gambar 3.1	Graf Piramid Pr_1	29
Gambar 3.2	Graf Dual Pr_1^*	30
Gambar 3.3	Graf Dual Pr_2^*	33
Gambar 3.4	Graf Dual Pr_3^*	34
Gambar 3.5	Graf Dual Pr_4^*	36
Gambar 3.6	Graf Dual Pr_5^*	38
Gambar 3.7	Graf Dual Pr_6^*	41
Gambar 3.8	PewarnaanGraf Dual Pr_1^*	45
Gambar 3.9	PewarnaanGraf Dual Pr_2^*	45
Gambar 3.10	PewarnaanGraf Dual Pr_3^*	46
Gambar 3.11	PewarnaanGraf Dual Pr_4^*	47

Gambar 3.12	PewarnaanGraf Dual Pr ₅ [*]	48
Gambar 3.13	PewarnaanGraf Dual Pr ₆ [*]	49

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Tabel Graf Dual	43
-----------	-----------------------	----



ABSTRAK

Muhib.2013. Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik pada Graf Dual dari Graf Piramid (Pr_n^*).Skripsi.Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Wahyu Hengky Irawan, M.Pd.(II) Abdul Azis, M.Si.

Kata Kunci: Pewarnaan simpul, bilangan kromatik, graf dual, graf piramida, Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang sehingga tidak ada sisi yang saling berpotongan.Graf planar yang sudah digambar pada bidang disebut graf bidang (plane graph). Graf bidang G akan mempartisi bidang ke dalam sejumlah wilayah (*region*) yang saling terhubung. Wilayah-wilayah ini dapat disebut muka/wajah (*face*) dari graf G . batas (*boundary*) dari suatu muka adalah titik-titik dan sisi-sisi yang membatasi wilayah tersebut.contoh dari graf planar adalah graf piramida.

Graf dual adalah graf yang diperoleh dari suatu graf bidang dengan cara setiap daerah diwakili dengan satu titik, dan antar titik akan terhubung langsung jika daerah tersebut saling berbatasan langsung. Dari hasil pembahasan maka diperoleh teorema graf dual dari graf piramid adalah

$$\chi(V(Pr_n^*)) = n^2 + 1$$

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian warna untuk setiap titik pada graf sehingga tidak ada dua titik yang terhubung langsung berwarna sama. Langkah-langkah yang dilakukan adalah; a. Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus, b. Menentukan pola dari bilangan kromatik dan memberikan warna. c. Pola yang diperoleh diasumsikan sebagai teorema, dan d. Teorema dibuktikan. Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf dual dari graf piramid adalah :

$$\chi(Pr_n^*) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ABSTRACT

Muhib.2013. Chromatic Number Vertex Coloring a Dual Graph of Graph Pyramids (Pr_n^*). Thesis. Departmen of Mathematics, Faculty of Science and Technology University of Islam Maulana Malik Ibrahim Malang,. Supervisor (I) H. Wahyu Hengky Irawan,M.Pd (II) Abdul Azis, M.Si

A planar graph is a graph that can be plotted on the field so that there are no sides which intersected each other. Planar graph which already drawn on the field called plane graph. Graf field of G will partitioned the area into a number of regions which connected each other. These territories may be called face of the graph of G . A boundary of a face is the vertexs and sides which restrict the area. An example of a planar graph is a graph of pyramid. The dual graph is a graph that obtained from a graph of field by representing one vertex in each area, and each vertex will be connected directly if the area bordered each other directly. From the result of disscussion, retrieve the dual graph theorem from graph pyramid is

$$\chi(Pr_n^*) = n^2 + 1$$

Coloring vertex on the graph G is giving the color for each vertex on the graph, so there are no two vertex which has same color that connected directly. The measures taken are (a). Determine the chromatic number in some case. (b) Determine patterns of chromatic number and coloring it. (c) The pattern which obtained is assumed as a theorem, and (d) Theorem is proved. According the results of discussion, can be retrieved the chromatic number of vertexs coloration on dual graph from the graph of pyramid is:

$$\chi(Pr_n^*) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Keywords: Vertex Coloring, Chromatic Number, Graf Pyramid, Dual Graph

الملخص

مهيب. 2013. تشير أرقام تلطيخ لوني لغراف من ثنائي الهرم أطروحة. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج الدولة. المشرف (1) وهيو هغكي إروان الماجستير، (2) عبد العزيز، الماجستير

كلمات البحث: القمم التلوين، وعدد لوني، والرسم البياني المزدوج، الأهرامات الرسم البياني، الرسم البياني مستو هو الرسم البياني الذي يمكن استخلاصه على متن الطائرة بحيث لا الجانب المتقاطعة. يسمى الرسم البياني مستو رسمها بالفعل في مجال الرسم البياني حقل (رسم بياني الطائرة). وسيتم تقسيم حقل G الرسم البياني إلى عدد من مناطق الإقليم (المنطقة) التي ترتبط. هذه المناطق يمكن أن يسمى الوجه / الوجه (الوجه) من الرسم البياني G الحدود (حدود) من وجهه هو النقاط والحواف التي تحد المنطقة. مثال على الرسم البياني مستو هو هرم الرسم البياني. الرسم البياني المزدوج يتم تمثيل الرسم البياني تم الحصول عليها من منطقة الرسم البياني لكل منطقة بفارق نقطة واحدة، وسوف تكون مرتبطة مباشرة بين نقطة عند المنطقة المجاورة مباشرة لبعضها البعض. من المناقشة، ويتم

الحصول عليه من نظرية الرسم البياني الرسم البياني المزدوج الهرم

$$|V(\text{Pr}_n^*)| = n^{2+1}$$

تلوين النقاط على الرسم البياني G تعطي اللون إلى كل نقطة على الرسم البياني بحيث لا نقطتين من نفس اللون ترتبط مباشرة. الخطوات يؤديها هي: أ. تحديد عدد لوني في بعض الحالات، ب. تحديد نمط لوني، وتوفير عدد الألوان. ج. ويفترض نمط الحصول عليها النظريات، ود. ثبت نظرية. واستنادا إلى نتائج المناقشة يمكن الحصول على نقطة من تلوين عدد من لوني رسم بياني ثنائي هرم الرسم البياني هو:

$$\chi(\text{Pr}_n^*) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Graf merupakan salah satu cabang ilmu khususnya matematika terapan. Graf sebenarnya sudah dikenal sejak tahun 1736, yaitu ketika graf digunakan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss. Masalah yang sering kali muncul di tengah-tengah kehidupan masyarakat Leonardo Euler, untuk menyelesaikan jembatan *Königsberg*. Graf telah memberikan banyak peran dalam perkembangan matematika terapan, karena graf dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan (Purwanto, 1998:1). Seringkali membutuhkan selesaian dari disiplin ilmu, dengan bantuan bahasa lambang pada matematika, permasalahan tersebut lebih mudah untuk dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian.

Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya. Matematika diskrit adalah cabang matematika yang mengkaji tentang obyek-obyek secara diskrit. Diskrit artinya terdiri dari elemen-elemen yang sejenis yang berbeda atau tidak terhubung (Munir, 2001:5). Dalam matematika diskrit sendiri mempunyai cabang, di antaranya: himpunan, relasi dan

fungsi, induksi matematika, kombinatorial, pohon, aljabar boolean, kompleksitas algoritma, dan graf. Pada intinya matematika diskrit mempelajari tentang kombinatorial dan teori graf.

Teori graf adalah salah satu dari cabang ilmu matematika. Teori graf merupakan suatu pokok bahasan yang mendapat banyak perhatian karena model-modelnya sangat berguna untuk diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, diantaranya adalah digunakan dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan masih banyak aplikasi lainnya. Graf dipakai diberbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan graf diberbagai bidang tersebut adalah untuk memodelkan persoalan. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut digunakan rumusan atau model teori grafnya, sehingga permasalahan akan menjadi jelas dan mudah menganalisisnya. Menurut catatan sejarah, graf diperkenalkan seorang ahli matematika Swiss yaitu Leonardo Euler pada tahun 1736. Beliau berhasil menyelesaikan permasalahan jembatan *Königsberg* dengan menggunakan graf. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , yang dalam hal ini V melambangkan himpunan tidak kosong dari titik-titik yang dapat ditulis $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan E melambangkan himpunan sisi yang menghubungkan titik yang dapat ditulis $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Penulisan graf dapat ditulis singkat dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *erces*) yang menghubungkan sepasang titik, dan graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut (Wijaya, 2009:71).

Dengan demikian dinyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu yang dapat disebut sebagai graf kosong. Sedangkan jika sebuah graf yang mempunyai sisi minimal satu buah, dan mempunyai titik minimal dua dapat disebut graf tak kosong.

Salah satu macam bentuk graf adalah graf planar. Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling memotong (bersilangan). Sedangkan jika graf tersebut saling memotong (bersilangan), maka graf tersebut graf tak-planar (Wijaya, 2008:81).

Pada kesempatan ini, penulis mencoba membahas mengenai bilangan kromatik pewarnaan titik graf dual dari graf piramid (Pr_n^*). Masalah pewarnaan di dalam graf memiliki banyak variasi dengan tipe yang berbeda. Ada bilangan kromatik dan pewarnaan dengan algoritma *Welch Powell* (permasalahan pewarnaan titik).

Banyak persoalan yang mempunyai karakteristik seperti pewarnaan graf sehingga membuat pewarnaan pada graf ini menarik untuk dikaji lebih dalam. Misalnya dalam mengatur sejumlah saluran frekuensi ke beberapa pemancar sehingga interferensi dapat dijaga pada level yang dapat diterima. Contoh yang mungkin dapat dilihat langsung misalnya menentukan jadwal ujian sedemikian sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian setiap mata kuliah yang diambilnya dengan waktu ujian yang tidak bertabrakan antara satu mata kuliah dengan mata kuliah yang lain.

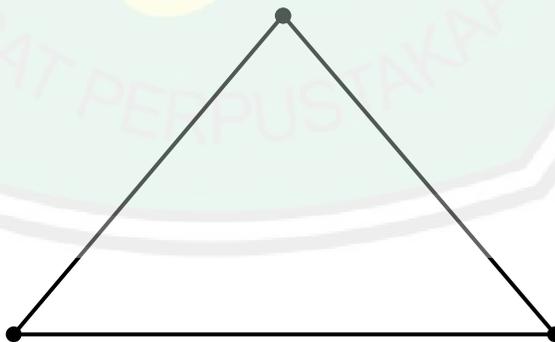
Bahasan mengenai pewarnaan pada graf tidak hanya difokuskan pada beberapa jenis graf itu sendiri, akan tetapi juga dapat diaplikasikan pada kehidupan

sehari-hari yang dapat membantu dan memudahkan. Di antaranya pada pemasangan kabel telpon, pada masalah penjadwalan, pewarnaan peta dan masih banyak lagi.

Beberapa kajian terdahulu tentang pewarnaan pada graf tertentu telah dibahas pada skripsi yang lain seperti Pewarnaan Titik dan Aplikasinya pada Penjadwalan Mata Kuliah Jurusan Matematika oleh Khotimah (2006), Pewarnaan Minimal Graf Piramida dan Berlian oleh Yusuf Afandi (2009), Pemetaan Region dari Graf Piramida dan Graf Berlian oleh Istiqomatul Khoiriyah (2009).Kajian ini difokuskan pada pencarian bilangan kromatik dalam pewarnaan titik graf dual dari graf piramid (Pr_n^*).

Pemilihan judul “Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik pada Graf Dual dari Graf Piramid (Pr_n^*),” didasari untuk melanjutkan penelitian sebelumnya dan membuktikan bahwa untuk mewarnai suatu graf dapat menggunakan warna yang minimal.

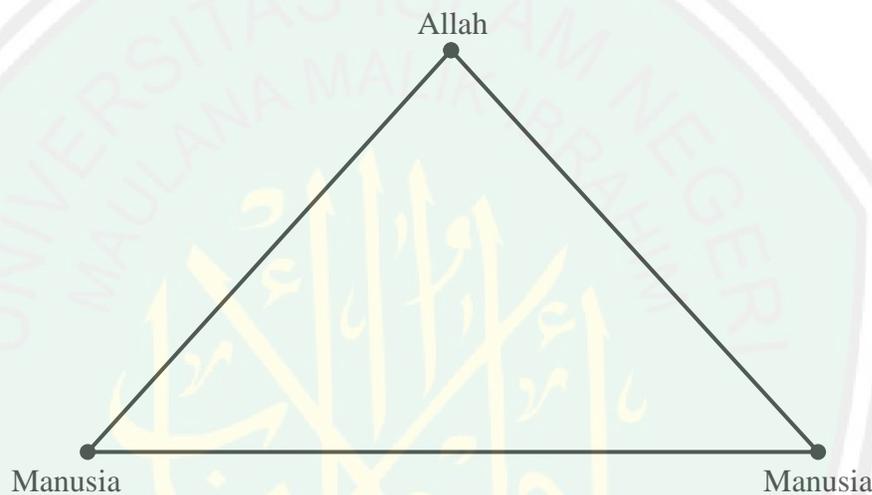
Graf piramida dengan 3 titik, dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 1.1 Graf Piramid (Pr_1)

Dalam agama Islam, diajarkan *hablumminallah wa hablumminannas*, yaitu hubungan antara tuhan (Allah) dengan manusia dan hubungan manusia dengan

manusia (sosial). Hal itu adalah sebuah tuntutan, manusia membutuhkan Allah karena tiada tempat berserah hanya kepada Allah SWT, dan hubungan manusia dengan manusia sebagaimana manusia adalah makhluk sosial yang tidak mungkin akan hidup sendirian, semuanya saling membutuhkan untuk berinteraksi satu dengan yang lainnya. Jika digambarkan dalam bentuk graf maka akan didapat,



Gambar

1.2 Ilustrasi Hablumminallah Hablumminannas

Dalam surat An-Nisa' ayat 36 Allah SWT berfirman :

وَالْجَارِ وَالْمَسْكِينِ وَالْيَتَامَى الْقُرْبَىٰ وَبِذِي إِحْسَانًا وَالْبَالِغِينَ شَيْئًا بِهِ تَشْرِكُوا وَلَا اللَّهُ وَاعْبُدُوا ﴿٣٦﴾
 مَنْ تَحِبُّ لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْ أَيْمَنُكُمْ مَلَكَتُمْ مَا السَّيْلِ وَأَبْنِ بِالْجَنْبِ وَالصَّاحِبِ الْجَنْبِ وَالْجَارِ الْقُرْبَىٰ ذِي
 ﴿٣٦﴾ فَخُورًا مُخْتَلًا كَانَ

Artinya: “Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu bapak, karib kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang - orang yang sombong dan membanggakan diri” (An-Nisa’: 36).

Nabi Muhammad SAW bersabda:

عن أبي حمزة انس بن مالك راع خادم رسول الله ص م عن النبي ص م قال :
لا يؤمن أحدكم حت يجب لأخيه ما يجب لنفسه (رواه البخار ومسلم)

Artinya “Diriwayatkan dari Abu Hamzah Anas bin Malik ra, pelayan Rasulullah SAW bahwa Nabi SAW bersabda, “salah seorang dari kalian tidaklah beriman (secara sempurna) sehingga dia mencintai kebaikan saudaranya, sebagaimana dia mencintai kebaikan untuk dirinya sendiri.” (HR. Al-Bukhari dan Muslim)

Hadits diatas menerangkan bahwa hubungan Allah dengan manusia tidak akan sempurna sehingga manusia itu saling menghargai dan menyayangi satu sama lain. Hubungan tersebut tidak akan terjalin, kalau Allah dengan manusia tidak terjalin dengan baik, atau hubungan antara manusia yang satu dengan yang lain tidak ada interaksi dan hubungan yang baik. Maka dapat dikatakan bahwa ibadah seseorang itu tidak akan dianggap sempurna jika seseorang itu masih mempunyai kejahatan atau prasangka buruk terhadap sesama manusia. Allah SWT Maha Mendengar serta Maha Melihat, Dia selalu mendengar serta melihat, beribadah kepada Allah bisa dimana saja, jika seorang manusia berbuat dosa maka manusia itu bisa bertaubat langsung meminta ampunan kepada Allah, akan tetapi jika manusia itu berbuat dosa atau aniaya terhadap manusia lainnya, maka untuk bertaubat tidaklah cukup hanya meminta maaf kepada Allah. Karena Allah tidak akan memaafkan manusia yang menyakiti saudaranya sehingga manusia yang disakiti tersebut memaafkannya (Ghozali, 2004:229)

1.2. Rumusan Masalah

Dari uraian di atas maka rumusan masalah skripsi ini adalah :

1. Bagaimana membangun graf dual dari graf piramid (Pr_n^*) ?
2. Bagaimana memberikan warna titik pada graf dual dari graf piramid (Pr_n^*) dan menentukan bilangan kromatiknya?

1.3. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Mendeskripsikan cara membangun graf dual dari graf piramid (Pr_n^*).
2. Mendeskripsikan cara menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik graf dual dari graf piramid (Pr_n^*).

1.4. Manfaat Penulisan

Manfaat yang berhubungan dengan penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Bagi Lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan ke pustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

- b. Penulis

Kegunaan bagi peneliti adalah dapat pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya, khususnya dalam bidang graf.

c. Bagi Pengembang Ilmu Pengetahuan

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menambah kepustakaan bagi pembaca dan peneliti lainnya yang ingin melakukan penelitian berhubungan dengan ini, dan mempertegas peranan matematika terhadap perkembangan teknologi dan berbagai disiplin ilmu.

1.5. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan materi yang terdapat dalam perpustakaan seperti buku-buku, jurnal, artikel dan lain-lain. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang graf dual.

Adapun langkah-langkah umum yang dilakukan peneliti adalah :

1. Merumuskan masalah yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan sumber-sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan graf dual, graf piramida serta pewarnaan titik.
3. Menganalisis permasalahan yang telah diperoleh dengan mendeskripsikan permasalahan mengenai graf dual graf dual, graf piramida serta pewarnaan titik.
4. Selanjutnya memberikan contoh langkah-langkah dalam membuat graf dual dan bilangan kromatik pewarnaan titiknya.

5. Langkah selanjutnya membuat kesimpulan berupa hasil graf dual dan bilangan kromatik pewarnaan graf dual.

Adapun langkah langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah :

1. Menggambar beberapa graf hasil fungsi pada piramida Pr_n , dari Pr_1 ke Pr_6 .
2. Membangun graf dual dari graf piramida Pr_n , dari Pr_1 ke Pr_6 .
3. Setelah dibangun graf dualnya, kemudian memberikan warna pada titik dari graf dualnya dengan menentukan bilangan kromatiknya.

1.6. Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I : Pada bab ini membahas tentang pendahuluan yang meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II : Pada bab ini teori-teori yang berhubungan dengan pokok-pokok kajian pustaka yang mendasari dan digunakan dalam penelitian, diantaranya adalah definisi dari graf, teori graf dalam Al-Qur'an, pengertian graf, graf terhubung, operasi pada graf, graf sikel, graf piramid, graf dual, pewarnaan pada graf dan kajian graf dalam Islam.

Bab III : Pada bab Pembahasan ini penulis menjelaskan cara. Bagaiman membangun graf dual dari graf piramid. Setelah dibangun graf

dualnya kemudian memberikan warna pada titik dari graf dualnya dengan menentukan bilangan kromatiknya. Kajian Agama Islam tentang aplikasi pewarnaan pada graf akan dibahas juga dalam bab ini.

Bab IV : Bab ini penulis mengkaji tentang kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

1.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan berurutan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, sedangkan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q .

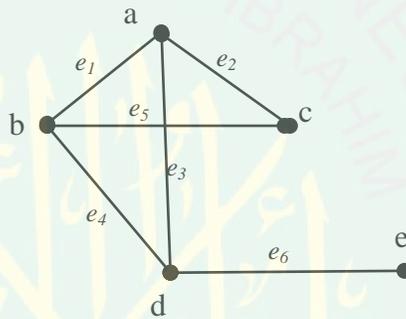
Dari uraian di atas, maka suatu graf tidak boleh mempunyai sisi rangkap dan *loop*. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan *loop* adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Suryanto dan Fitria, 2007:6). Graf yang mempunyai sisi rangkap dan *loop* disebut *multigraph*.

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}.$$

Maka graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G Himpunan Titik V dan Himpunan Sisi E

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p=5$. Graf G mempunyai 6 sisi sehingga size graf G adalah $q = 6$.

Graf G dengan:

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$$

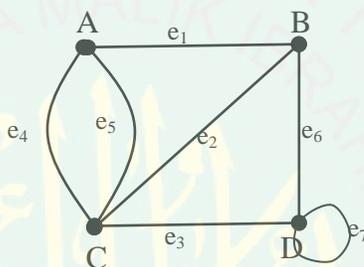
Dapat juga ditulis dengan:

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{e_1 = (a, b), e_2 = (a, c), e_3 = (a, d), e_4 = (b, d), e_5 = (b, c), e_6 = (d, e)\}$$

Dari uraian di atas, maka suatu graf tidak boleh mempunyai sisi rangkap dan *loop*, sisi rangkap dalam suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi, sedangkan yang disebut dengan *loop* adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Suryanto dan Fitria, 2007:6).

Graf yang mempunyai sisi rangkap dan *loop* ini disebut dengan *Multigraph*. *Multigraph* dapat digambarkan sebagai berikut:

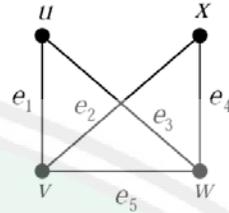


Gambar 2.2 Multigraph

Gambar tersebut G mengandung *multigraphedge* e_4 dan e_5 , yang menghubungkan dua *vertex* yang sama yaitu A dan C , juga G mengandung sebuah *loop* e_7 yang titik-titik ujungnya sama yaitu *vertex* D .

1.2 *Adjacent dan Incident*

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4). Sebagai contoh, perhatikan graf G yang memuat himpunan $V = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut ini.



Gambar 2.3 Graf G

Dari Gambar 2.3 tersebut, titik u dan v serta u dan w adalah *incident* (terkait langsung) dan titik u dan v adalah *adjacent* (terhubung langsung).

1.3 Graf Beraturan-r

Graf beraturan- r adalah graf yang semua titiknya berderajat r , atau $\deg v=r$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh:

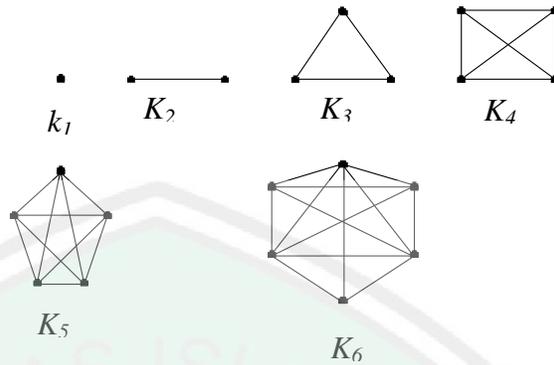


Gambar 2.4 Graf G beraturan-1 dan graf G beraturan-2

1.4 Graf Komplit

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:9 dan Purwanto, 1998:21).

Contoh:

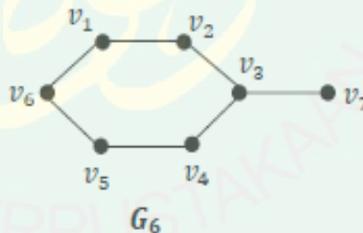


Gambar 2.5 Graf Lengkap

1.5 Graf Terhubung

Jika u dan v titik yang berbeda pada graf G , maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*) apabila terdapat lintasan $u-v$ di G , sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:35).

Contoh



Gambar 2. 6 Graf G_6

Graf G_6 pada Gambar 2.6, menurut definisi merupakan graf terhubung, karena setiap sisi yang terdapat pada graf tersebut terhubung satu sama lain.

a. Definisi Walk

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak-kosong).

$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_n, e_n = v$ yang berselang-seling antara titik dan sisi, yang dimulai dengan titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 \leq i \leq n$.

Dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G , v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, v_1, v_2, \dots, v_{n-1} disebut titik interval dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26)

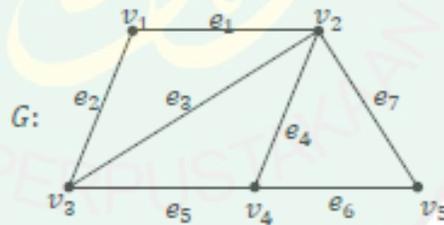
b. Definisi *Trail*

Jalan $u-v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u-v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26)

c. Definisi *Path*

Jalan $u - v$ yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26)

Contoh



Gambar 2.7 Jalan pada graf

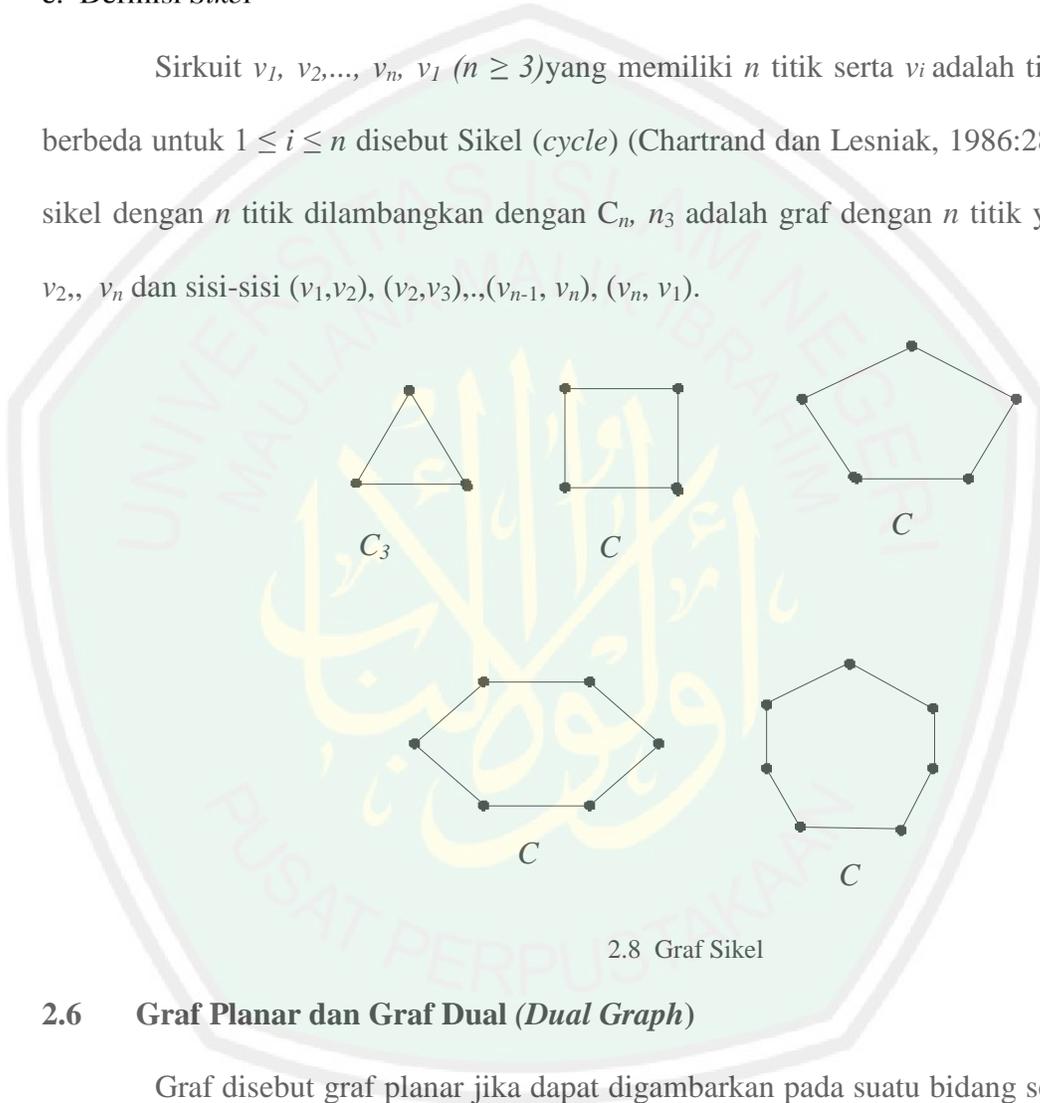
Dari graf pada gambar 2.7 $v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_5, v_4, e_6, v_5$, disebut sebagai *trail*, sedangkan $v_1, e_1, v_1, e_4, v_4, e_6, v_5$, disebut sebagai lintasan.

d. Definisi Sirkuit

Jalan kecil tertutup (*closed trail*) dan tak *trivial* pada graf G disebut Sirkuit G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

e. Definisi *Sikel*

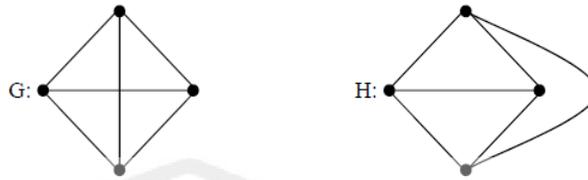
Sirkuit $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ ($n \geq 3$) yang memiliki n titik serta v_i adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28). Graf sikel dengan n titik dilambangkan dengan C_n , $n \geq 3$ adalah graf dengan n titik yaitu v_1, v_2, \dots, v_n dan sisi-sisi $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$.



2.8 Graf Sikel

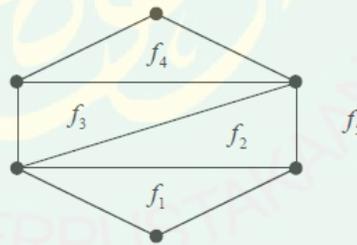
2.6 Graf Planar dan Graf Dual (*Dual Graph*)

Graf disebut graf planar jika dapat digambarkan pada suatu bidang sehingga antara dua sisi berbeda hanya akan bersekutu pada titik ujung (Bondy dan Murty, 1976:135). Dengan kata lain, graf planar adalah graf yang dapat digambar pada bidang sehingga tidak ada sisi yang saling berpotongan. Graf planar yang sudah digambar pada bidang disebut graf bidang (*plane graf*).



Gambar 2.9 G adalah Planar dan H adalah Graf Bidang dari G.

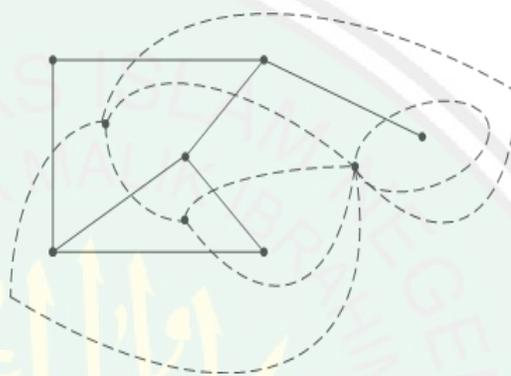
Graf bidang G akan mempartisi bidang ke dalam sejumlah wilayah (*region*) yang saling terhubung. Wilayah-wilayah ini dapat disebut muka / wajah (*face*) dari graf G. Batas (*boundary*) dari suatu muka adalah titik-titik dan sisi-sisi yang membatasi wilayah tersebut. Setiap graf bidang mempunyai satu muka yang tidak terbatas yang disebut muka luar (*exterior face*). Graf bidang G berikut mempunyai lima muka yaitu $f_1, f_2, f_3, f_4,$ dan f_5 . Muka $f_1, f_2, f_3,$ dan f_4 adalah muka dalam (*interior face*) dan f_5 adalah muka luar.



Gambar 2.10 Muka dalam dan muka luar Graf G

Misalkan G adalah suatu graf bidang. Didefinisikan graf baru G^* sebagai berikut. Masing-masing muka pada G diwakili oleh titik pada G^* . Dua titik a dan b pada G^* akan saling terhubung langsung jika dan hanya jika muka yang diwakili oleh dua titik itu saling berbatasan langsung di G. Dua titik a dan b akan terhubung

langsung oleh sebanyak sisi yang terdapat pada perbatasan (*boundary*) dua muka yang diwakilinya pada G . Graf G^* ini kemudian disebut graf dual (*Dual Graph*) dari G . Graf dual dari graf bidang selalu berbentuk graf bidang. Pada gambar di bawah ditunjukkan oleh garis putus-putus.



Gambar 2.11 Graf Dual

2.7 Pewarnaan Pada Graf

Pewarnaan pada graf dibedakan menjadi tiga, pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan peta.

1. Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

Pewarnaan titik dari graf G adalah sebuah proses pemberian warna pada titik – titik suatu graf sehingga tidak ada dua buah titik yang bertetangga pada graf tersebut berwarna sama. Graf G berwarna n jika terdapat sebuah pewarnaan dari G yang menggunakan n warna (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

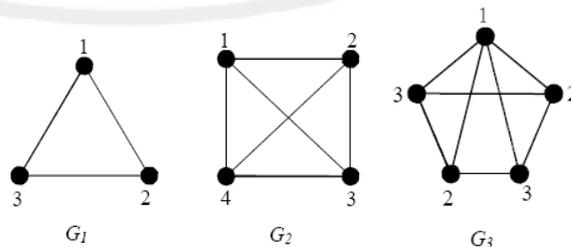
Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai

titik – titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda (Purwanto, 1998:73).

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G , dinyatakan dengan $\chi(G)$, adalah bilangan n terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan n warna. Biasanya warna – warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan $1, 2, 3, \dots, n$. Jelas bahwa $\chi(G) \leq |V(G)|$ (Purwanto, 1998:73).

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G) = 1$, karena semua titik tidak terhubung langsung. Jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf komplit K_n memiliki $\chi(K_n) = n$ sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan n warna (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

Pada gambar 2.13, untuk graf G_1 , karena $|V(G_1)| = 3$, maka $\chi(G_1) \leq 3$. Untuk G_2 , karena $|V(G_2)| = 4$, maka $\chi(G_2) \leq 4$. Karena semua titik pada G_1 dan G_2 saling terhubung langsung, akibatnya $\chi(G_1) \geq 3$ dan $\chi(G_2) \geq 4$. Jadi, $\chi(G_1) = 3$ dan $\chi(G_2) = 4$. Untuk graf G_3 , $\chi(G_3) \leq 3$, karena 3 warna untuk mewarnainya seperti pada gambar. Karena graf G_3 memuat graf komplit K_3 , maka $\chi(G_3) \leq 3$, akibatnya $\chi(G_3) = 3$.



Gambar 2.12 Pewarnaan Titik

2. Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

Definisi

Suatu pewarnaan sisi k untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan sisi n , maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan n warna. Indeks kromatik G dinotasikan dengan $\chi'(G)$ adalah bilangan n terkecil sehingga sisi di G dapat diwarnai dengan n warna (Purwanto, 1998:80).

2.8 Algoritma *Welsh-Powell*

Algoritma *Welsh-Powell* ini memberikan cara mewarnai sebuah graph dengan memberi label titik-titiknya sesuai dengan derajatnya. ini hanya memberikan batas atas untuk $\chi'(G)$. Jadi algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai G (Wijaya, 2009:48).

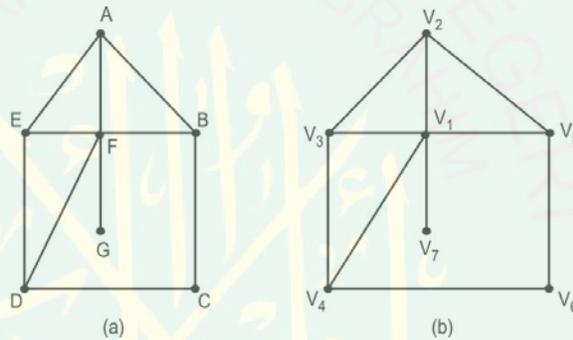
Langkah-langkah dalam algoritma *Welsh-Powell* :

1. Urutkan titik-titik dari G dalam urutan derajat yang menurun. Urutan ini mungkin tidak unik karena beberapa titik mungkin mempunyai derajat yang sama.
2. Gunakan satu warna tertentu untuk mewarnai titik pertama. Secara berurutan, setiap titik dalam daftar yang tidak berelasi dengan titik sebelumnya diwarnai dengan warna ini.
3. Ulangi langkah 2 di atas untuk titik dengan urutan tertinggi yang belum diwarnai.

4. Ulangi langkah 3 di atas sampai semua titik dalam daftar terwarnai.

Contoh .

Untuk graph pada Gambar 2.19 (a), titik F memiliki derajat terbesar, yaitu 4 sehingga F diberi label V_1 . Titik A, D, dan E berderajat 3 sehingga diberi label V_2 , V_3 , dan V_4 secara random. Demikian pula titik B dan C yang berderajat 2 diberi label V_5 dan V_6 . Titik G yang merupakan satu-satunya titik yang tersisa, diberi label V_7 . Hal ini diperlihatkan pada Gambar 2.19 (b).



Gambar 2.13 Graf

Penyajian dalam bentuk daftar berdekatan sangat mudah digunakan dengan algoritma *Welsh -Powell* ini. Untuk graf pada Gambar 2.19 (b), penyajian daftar berdekatnya adalah sebagai berikut.

$$V_1 : V_2, V_3, V_4, V_5, V_7$$

$$V_2 : V_1, V_3, V_5$$

$$V_3 : V_1, V_2, V_4$$

$$V_4 : V_1, V_3, V_6$$

$$V_5 : V_1, V_2, V_6$$

$$V_6 : V_4, V_5$$

$$V_7 : V_1$$

Pada Algoritma *Welsh - Powell* ini, titik belum berwarna pertama dalam daftar adalah V_1 yang diberi warna merah. Kemudian dicari titik berikut yang tidak berdekatan dengan V_1 pada daftar, yaitu titik di bawah V_1 yang tidak mengikuti V_1 . Diperoleh titik V_6 , yang diberi warna merah. Dilanjutkan dengan melihat bagian bahwa daftar untuk mencari titik berikutnya yang tidak berdekatan dengan V_1 maupun V_6 . Karena titik seperti itu tidak ada, maka kembali dilihat bagian atas daftar dan ditentukan lagi titik belum berwarna yang pertama, yaitu V_2 , yang diberi warna biru. Kemudian, titik belum berwarna berikutnya ditentukan yang tidak berdekatan dengan V_2 . Diperoleh titik V_4 dan diberi warna biru. Cara ini dilanjutkan lagi, dan diperoleh titik V_7 yang belum berwarna dan tidak berdekatan dengan V_2 maupun V_4 , sehingga V_7 diwarnai biru, bagian atas daftar dilihat kembali dan ditentukan titik belum berwarna berikutnya, yaitu V_3 , yang diberi warna hijau. Karena V_5 belum diwarnai dan tidak berdekatan dengan V_3 , yang diberi warna hijau. Dengan demikian maka graph pada Gambar 2.19(b) dapat diwarnai dengan tiga warna.

Penyajian daftar berdekatan membuat algoritma *Welsh - Powell* mudah digunakan, karena titiknya dapat ditandai ketika diwarnai, sehingga tinggal memperhatikan titik belum berwarna sisanya dalam proses perwarnaan itu.

2.9 Graf Piramid

Definisi Graf Piramid

Misalkan terdapat suatu pengubinan pada bidang menggunakan segitiga sama sisi. Dua segitiga dikatakan terhubung jika ia bersekutu pada satu sisi. Jika T

adalah kumpulan segitiga- segitiga yang terhubung, maka T adalah graf *planar* terhubung dengan *sikel* terpendek 3 dan masing-masing segitiga bersekutu pada paling sedikit satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut *triomino*. Jadi T disebut *n-triomino* jika T adalah pengubinan dari n segitiga yang terhubung. (Afandi, 2009:18)

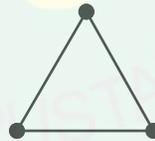
Graf ular dengan panjang n adalah *1-triomino*, dengan menempatkan n segitiga sama sisi dengan cara berikut.



Gambar 2.14. Graf Ular Panjang n

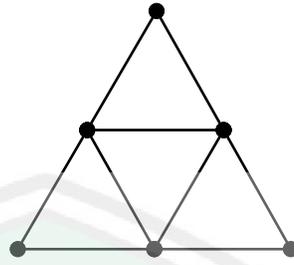
Contoh.

Graf piramid dengan tinggi n , dinotasikan dengan Pr_n adalah *1-triomino*, yang dibentuk dengan menempatkan graf ular n dengan cara berikut,



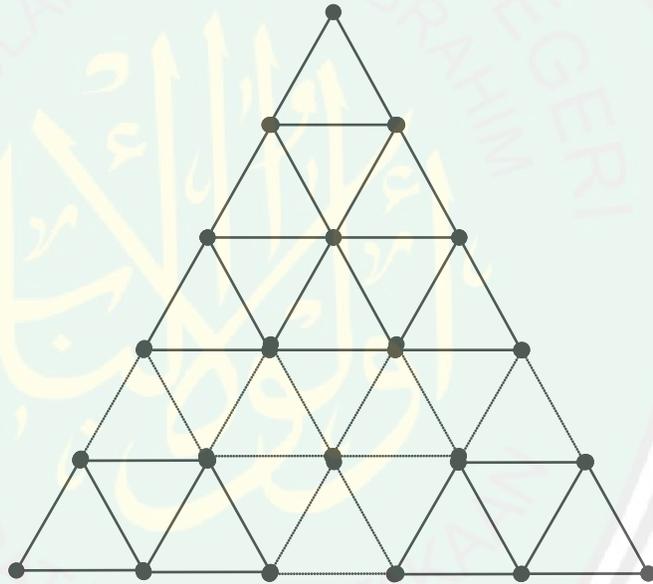
Gambar 2.15 Graf Piramid Pr_1

Pr_1 adalah graf ular panjang 1 dengan $|V| = 3$

Gambar 2.16 Graf Piramid Pr_2

Pr_2 adalah graf ular panjang 1 dan graf ular panjang 3 yang ditumpuk dengan $|V| =$

6. Secara umum Pr_2 dapat diketahui sebagai berikut.

Gambar 2.17 Graf Piramid (Pr_n)

Dengan $|V| = \frac{1}{2}n(n+1)$ merupakan bentuk umum banyaknya titik dari graf piramid Pr_n dengan $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

2.10 Kajian Keagamaan

Manusia diciptakan oleh Allah untuk berbakti dan mengabdikan kepada-Nya. Allah mengutus nabi-nabi untuk menjelaskan kepada manusia mengenai tata cara

mengabdikan kepada-Nya dengan firman Allah yang disebut Al-Qur'an sebagai petunjuk dan dasar keimanan. Sebagaimana dijelaskan dalam firman-Nya dalam QS Ad-Dzaariyat:56.

لِيَعْبُدُونِي إِلَّا وَالْإِنْسَ الْجِنَّ خَلَقْتُمْ مَا

“Tidak Aku (Allah) ciptakan jin dan manusia kecuali hanya untuk menyembah kepadaku”.

Dengan jelas firman Allah menjadikan manusia bukan untuk yang lainnya, namun hanya untuk menyembah kepada Allah. Kewajiban ini telah diterima manusia sejak dalam kandungan.

Amal perbuatan manusia di dunia terbangun atas beberapa pola hubungannya yang kesemuanya harus didasarkan pada penghambaan diri terhadap-Nya yaitu:

1. Hubungan antara Allah dengan Manusia (*Hablumminallah*)

Allah berfirman dalam QS Ali Imran :14

الْخَيْلِ وَالْفِضَّةِ وَالذَّهَبِ مِنَ الْمُقَنْطَرَةِ وَالْقَنْطِيرِ وَالْبَيْنِ النَّسَاءِ مِنَ الشَّهَوَاتِ حُبُّ النَّاسِ زِينِ

الْمَغَابِ حَسْبُ عِنْدَهُ وَاللَّهُ الدُّنْيَا الْحَيَاةِ مَتَاعٌ ذَلِكَ وَالْحَرْثِ وَالْأَنْعَامِ الْمُسَوَّمَةِ وَ

“Dijadikan indah pada (pandangan) manusia kecintaan kepada apa-apa yang diingini, yaitu : wanita-wanita, anak-anak, harta yang banyak dari jenis emas, perak,

kuda pilihan, binatang-binatang ternak dan sawah ladang. Itulah kesenangan hidup di dunia, dan di sisi Allah-lah tempat kembali yang baik (surga)”.

Berdasarkan ayat tersebut, dijelaskan bahwa manusia banyak yang terjebak dalam kenikmatan dunia sehingga tergeser dari iman kepada Allah. Tetapi hanya orang-orang yang mempunyai keimanan sehingga bisa memanfaatkan kemilauan dunia hanya untuk di jalan Allah. Sehingga akan memunculkan taqwa dalam diri. Hakikat taqwa sendiri adalah adanya perasaan dan manisnya iman dalam hati yang mendatangkan ketenangan, keselamatan, kelapangan, kekuatan dan kegembiraan. Disamping itu taqwa merupakan perwujudan dari taat kepada Allah, yang didasari keimanan dengan mengharap ridho-Nya, baik itu terhadap perintah maupun larangan-nya (Agustin, 2005:309).

Penjelasan terperinci yang diberikan Nabi Muhammad SAW, mengenai tata carapengabdian misalnya sholat, zakat, puasa, haji, dan lain-lain. Penjelasan yang diberikan nabi tersebut dengan Sunnah Hadits berupa perkataan dan perbuatan atau persetujuan nabi. Dua hal pokok di atas Al-Qur'an dan Sunnah sudah menjadi pedoman pokok manusia berhubungan dengan Penciptanya (Setiawan dalam Ghofur, 2008).

Agama Islam mewajibkan untuk percaya bahwa Tuhan itu ada dan Esa. Eksistensi-Nya ada (wujud) dan diluar nalar manusia, sehingga wujudnya seperti apa tidak boleh diinterpretasikan. Bagaimana umat Islam mengenal Allah (*ma'rifatullah*) adalah lewat ciptaan-Nya (Nawawi, 2011:52). Jadi umat Islam diwajibkan untuk mempelajari ciptaan-Nya (*science*) untuk lebih mengenal-Nya.

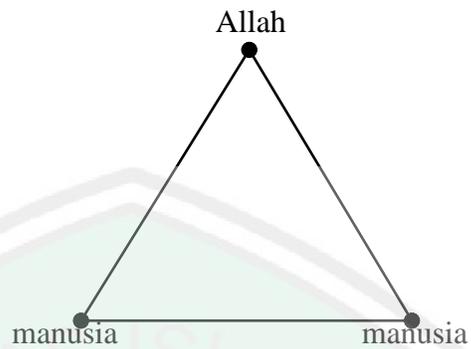
2. Hubungan Manusia dengan Manusia (*Hablumminannas*)

Rasulullah saw. bersabda: *Rahim (tali persaudaraan) itu digantungkan pada arsy, ia berkata: Barang siapa yang menyambungku (berbuat baik kepada kerabat), maka Allah akan menyambungny dan barang siapa yang memutuskan aku, maka Allah pun akan memutuskannya.* (Shahih Muslim No.4635)

Rasulullah saw. bersabda: *Seorang mukmin terhadap mukmin yang lain adalah seperti sebuah bangunan di mana bagiannya saling menguatkan bagian yang lain.* (Shahih Muslim No.4684)

Sabda Rasulullah di atas menerangkan keutamaan dalam berhubungan antara sesama, sebagaimana manusia adalah makhluk sosial yang tidak akan bisa terlepas dengan manusia lainnya. Sehingga diumpamakan seperti bangunan, dimana setiap bagian mempunyai peranan penting dalam memperkuat bangunan itu. Untuk menjalin hubungan yang harmonis maka peneliti dianjurkan untuk bersilaturrehim, karena silaturrehim memperkuat hubungan sesama (Nawawi, 2011:73).

Merujuk dari sabda Rasulullah tersebut maka bisa diperoleh inti dari silaturrehim sebenarnya, yaitu untuk mencapai ketaqwaan kepada Allah SWT. Melalui ilmu pengetahuan peneliti dapat meningkatkan keimanan kepada Allah SWT dari mempelajari dan memahami semua ciptaan-Nya. Termasuk matematika, Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari mengenai hubungan himpunan tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dengan Graf maka sabda tersebut bisa peneliti ilustrasikan dengan sebuah graf piramid sebagai berikut :



Gambar 2.18. Ilustrasi *Hablumminallah* dan *Hablumminannas*

Ilustrasi di atas menyatakan bahwa jika hubungan antar manusia baik maka Allah akan memberikan kebaikan pula, karena dalam silaturrahim akan menciptakan ketentraman dalam beribadah.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang cara menentukan graf dual dari graf piramid. Untuk menentukan graf dual tersebut, mula-mula dibuat percobaan untuk menentukan graf dual dengan beberapa contoh, kemudian menentukan bilangan kromatiknya menggunakan algoritma *welch - powell*. Setelah diketahui bilangan kromatiknya tinggal menentukan banyaknya warna titik graf dual dari graf piramid, sehingga titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda. Pada pembahasan ini, jika G adalah graf, maka graf dual dari G dilambangkan dengan G^* .

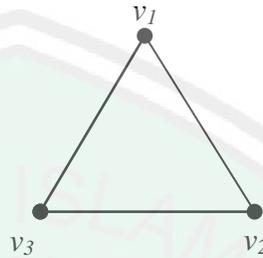
3.1 Graf Dual dari Graf Piramid (Pr_n)

3.1.1 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_1

Dalam menentukan graf dual dari graf Piramida mula-mula yang harus diperhatikan adalah cara membangun graf Piramida. Langkah – langkah membangun graf Piramida sebagai berikut :

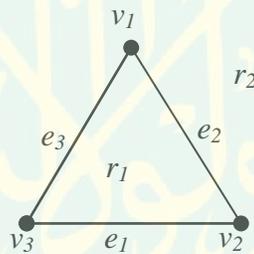
1. Dasar Piramida adalah segitiga atau graf komplit K_3
2. $Pr_{1,2,3,\dots,n}$, adalah segitiga yang mempunyai titik luar dan dalam yang berbeda, dan panjang sisi luar berbeda yang dihubungkan dengan titik.
3. Titik pada K_3 tersebut adalah pola dari graf Piramida, titik tersebut saling dihubungkan dengan garis yang disebut sisi dari graf Piramida.
4. Melihat pola tersebut, maka cara membangun graf Piramida dengan menambah 1 titik sembarang yang dihubungkan dengan 2 titik.

5. Menambah titik lain dan dihubungkan juga dengan 2 titik yang berdekatan sampai membentuk graf Piramida Pr_n .



Gambar 3.1 graf piramid Pr_1

Untuk menentukan graf dual dari graf piramid, perhatikan contoh di bawah ini.



Gambar 3.2 graf piramida Pr_1

Pada gambar 3.1 merupakan graf piramida dengan 3 titik, yang diberinama dengan titik, v_1, v_2, v_3 . Sisi, e_1, e_2, e_3 dan dan pada gambar 3.2 *region* r_1, r_2 .

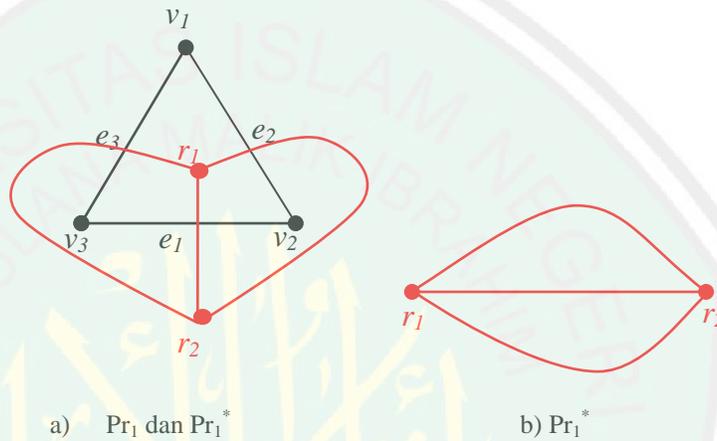
$$V(Pr_1) = \{v_1, v_2, v_3\} \qquad |V(Pr_1)| = 3$$

$$E(Pr_1) = \{e_1, e_2, e_3\} \qquad |E(Pr_1)| = 3$$

$$R(Pr_1) = \{r_1, r_2\} \qquad |R(Pr_1)| = 2$$

Dalam setiap *region* dari graf piramid, pilih sebuah titik. Jika dua buah *region* mempunyai sebuah sisi bersama, maka titik-titik yang terkait dapat dihubungkan

dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. Kurva-kurva ini digambarkan sedemikian hingga agar tidak bersilangan. Dengan demikian kurva-kurva tersebut membentuk sebuah graf yang disebut sebagai graf dual dari graf piramid. Maka dari gambar 3.2 tersebut graf dualnya adalah



Gambar 3.3. Graf Piramid Pr_1

Dari gambar 3.3 di atas, gambar 3.3a menunjukkan gambar graf piramid Pr_1 dan graf dualnya, pada gambar 3.3b adalah gambar graf yang dihasilkan oleh graf dual piramid Pr_1 pada gambar 3.3a.

Perhatikan gambar 3.3a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah piramid mempunyai 3 titik, dalam hal ini disebut piramid Pr_1 . Kemudian jika graf piramid Pr_1 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. dimana titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, titik r_1 dan r_2 .

Jika gambar 3.3a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, seperti tampak pada gambar 3.3b, titik r_1 dihubungkan dengan titik r_2 , maka akan terbentuk gambar baru menjadi 2 titik yaitu r_1 dan r_2 .

Didefinisikan graf dual dari Pr adalah Pr^* , jika g sebagai titik dari graf dual, dan h sebagai sisi yang menghubungkan antar g . Maka diperoleh :

$$V(Pr_1^*) = \{g_1, g_2\} \quad |V(Pr_1^*)| = 2$$

$$E(Pr_1^*) = \{h_1, h_2, h_3\} \quad |E(Pr_1^*)| = 3$$

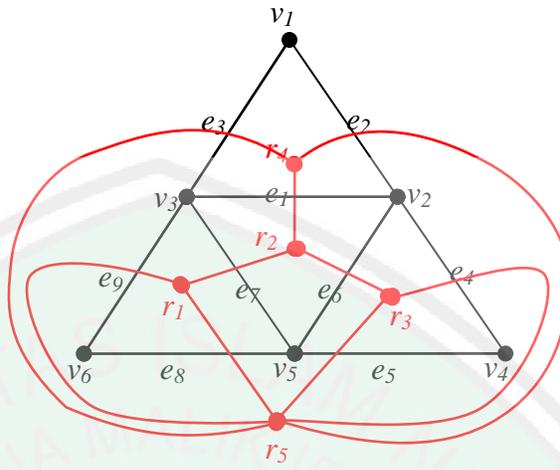
Dari hasil graf dual tersebut, dapat diketahui : $V(Pr_1)$ adalah 3 dan $V(Pr_1^*)$ adalah 2.

3.1.2 Graf Dual dari Graf Piramida Pr_2

Untuk membangun graf piramida Pr_2 , dari graf piramida Pr_1 peneliti tambahkan 3 titik. Titik-titik tersebut diberi nama v_4, v_5, v_6 , dan setiap titik kemudiandihubungkan

- v_4 dihubungkan dengan v_2 dan v_5
- v_5 dihubungkan dengan v_2, v_3, v_4 , dan v_6
- v_6 dihubungkan dengan v_3 dan v_5 .

Sehingga didapat graf piramida Pr_2 sebagai berikut :



Gambar 3.4 graf piramida Pr_2 dan Pr_2^*

$$V(Pr_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$|V(Pr_2)|=6$$

$$E(Pr_2) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$$

$$|E(Pr_2)|= 9$$

$$R(Pr_2) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$$

$$|R(Pr_2)|=5$$

Dari gambar 3.4 di atas menunjukkan gambar graf piramid Pr_2 dan graf dualnya. Perhatikan gambar 3.4 yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah piramid mempunyai 6 titik, dalam hal ini disebut piramid Pr_2 . Kemudian jika graf piramid Pr_2 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik, dimana titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka r_1, r_2, r_3, r_4 , dan r_5 , dimana muka r_5 sebagai titik luar.

Mula-mula titik r_5 sebagai muka luar dihubungkan r_1, r_3 dan r_4 kemudian ketiga titik tersebut dihubungkan pada titik r_2 , maka akan terbentuk graf dual dari graf piramid dengan jumlah titik dari graf dual tersebut adalah 5 titik.

Dari graf hasil dual tersebut maka diperoleh :

$$V(\text{Pr}_2^*) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} \quad |V(\text{Pr}_2^*)| = 5$$

$$E(\text{Pr}_2^*) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9\} \quad |E(\text{Pr}_2^*)| = 9$$

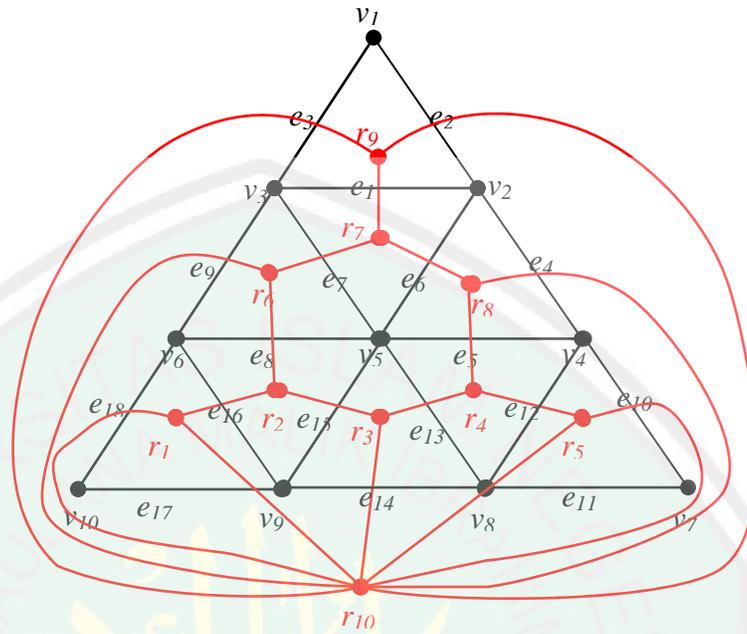
Sehingga diketahui bahwa : $V(\text{Pr}_2)$ adalah 6 dan $V(\text{Pr}_2^*)$ adalah 5

3.1.3 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_3

Untuk membangun graf piramida Pr_3 , dari graf piramida Pr_2 peneliti tambahkan 4 titik. Titik-titik tersebut diberi nama v_7, v_8, v_9 , dan v_{10} setiap titik kemudian dihubungkan

- v_7 dihubungkan dengan v_4 dan v_8
- v_8 dihubungkan dengan v_7, v_5, v_4 , dan v_9
- v_9 dihubungkan dengan v_8, v_5, v_6 , dan v_{10}
- v_{10} dihubungkan dengan v_6 dan v_9 .

Sehingga didapat graf piramida Pr_3 sebagai berikut :



Gambar 3.5 Graf Piramid Pr_3 dan Pr_3^*

$$V(Pr_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\} \quad |V(Pr_3)|=10$$

$$E(Pr_3) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}\} \quad |E(Pr_3)|=18$$

$$R(Pr_3) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}\} \quad |R(Pr_3)|=10$$

Dari gambar 3.5 di atas menunjukkan gambar graf piramid Pr_3 dan graf dualnya, Perhatikan gambar 3.5 yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah piramid mempunyai 10 titik, dalam hal ini disebut piramid Pr_3 . Kemudian jika graf piramid Pr_3 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik, dimana titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9$ dan r_{10} , dimana muka r_{10} sebagai titik luar.

Mula-mula titik r_{10} sebagai muka luar dihubungkan r_1, r_3, r_5, r_6, r_8 dan r_9 , kemudian masing-masing titik tersebut dihubungkan pada titik yang bersisian langsung, maka akan terbentuk graf dual dari graf piramid dengan jumlah titik dari graf dual tersebut adalah 10 titik.

Dari graf hasil dual tersebut maka diperoleh :

$$\begin{aligned} V(\text{Pr}_3^*) &= \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}\} & |V(\text{Pr}_3^*)| &= 10 \\ E(\text{Pr}_3^*) &= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, \\ & \quad , h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}\} & |E(\text{Pr}_3^*)| &= 18 \end{aligned}$$

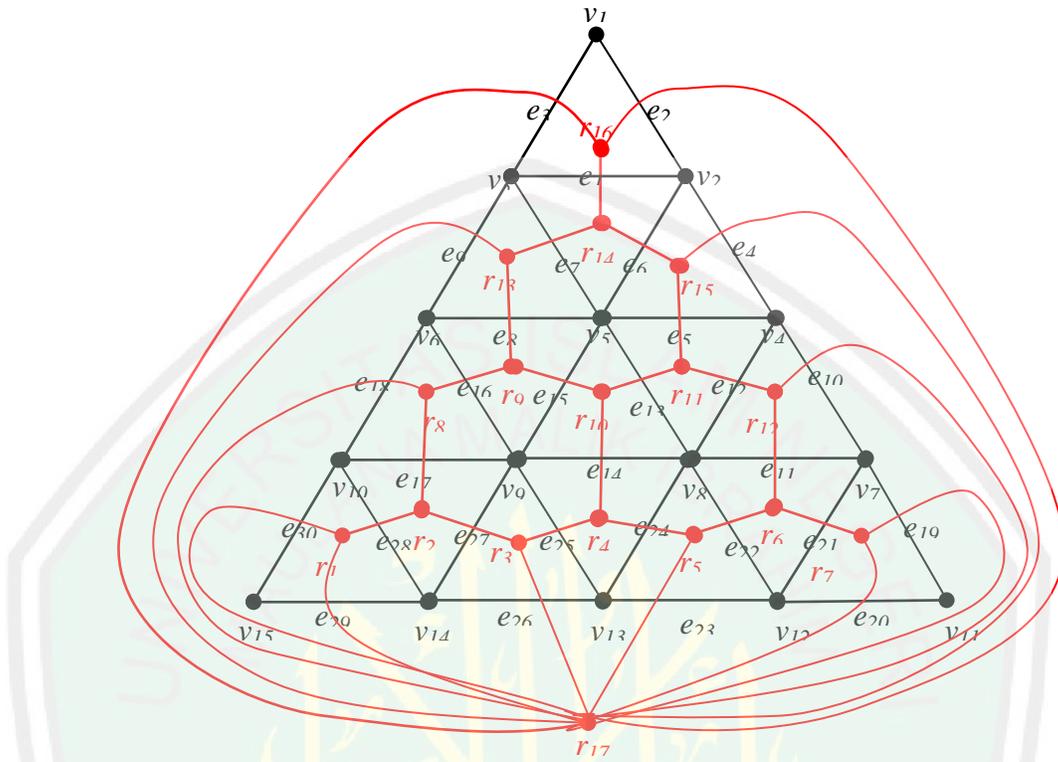
Sehingga diketahui bahwa $|V(\text{Pr}_3)|$ adalah 10 dan $|V(\text{Pr}_3^*)|$ juga sama dengan titik awalnya yaitu 10.

3.1.4 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_4

Untuk membangun graf piramida Pr_4 , caranya sama dengan membangun graf piramid sebelumnya, yaitu dari graf piramida Pr_3 peneliti tambahkan 5 titik. Titik-titik tersebut diberi nama $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}$ dan v_{15} selanjutnya setiap titik kemudian dihubungkan.

- v_{11} dihubungkan dengan v_{12} dan v_7
- v_{12} dihubungkan dengan v_7, v_{11}, v_{13} , dan v_8
- v_{13} dihubungkan dengan v_8, v_{11}, v_9 , dan v_{14}
- v_{14} dihubungkan dengan v_{13}, v_{10}, v_9 , dan v_{15}
- v_{15} dihubungkan dengan v_{14} dan v_{10} .

Sehingga didapat graf piramida Pr_4 sebagai berikut :



Gambar 3.6 Graf Piramida Pr_4 dan Pr_4^*

$$V(Pr_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\} \quad |V(Pr_4)| = 15$$

$$E(Pr_4) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$$

$$e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{29}, e_{30}\} \quad |E(Pr_4)| = 30$$

$$R(Pr_4) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{16}, r_{17}\} \quad |R(Pr_4)| = 17$$

Dari gambar 3.6 di atas menunjukkan gambar graf piramid Pr_4 dan graf dualnya, Perhatikan gambar 3.6 yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah piramid mempunyai 15 titik, dalam hal ini disebut piramid Pr_4 . Kemudian jika graf piramid Pr_4 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. dimana titik-titik yang

terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14},$ dan v_{15} , dimana muka v_{15} sebagai titik luar.

Mula-mula titik r_{15} sebagai muka luar dihubungkan $r_1, r_3, r_5, r_8, r_7, r_{13}, r_{16}, r_{15}$, dan r_{12} , kemudian masing-masing titik tersebut dihubungkan pada titik yang bersisian langsung, maka akan terbentuk graf dual dari graf piramida dengan jumlah titik dari graf dual tersebut adalah 15 titik.

Dari graf hasil dual tersebut maka diperoleh :

$$V(\text{Pr}_4^*) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16}, g_{17}\} \quad |V(\text{Pr}_4^*)| = 17$$

$$E(\text{Pr}_4^*) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, h_{25}, h_{26}, h_{27}, h_{28}, h_{29}, h_{30}\} \quad |E(\text{Pr}_4^*)| = 30$$

Sehingga diketahui bahwa $V(\text{Pr}_4)$ adalah 15 dan $V(\text{Pr}_4^*)$ lebih banyak yaitu 17.

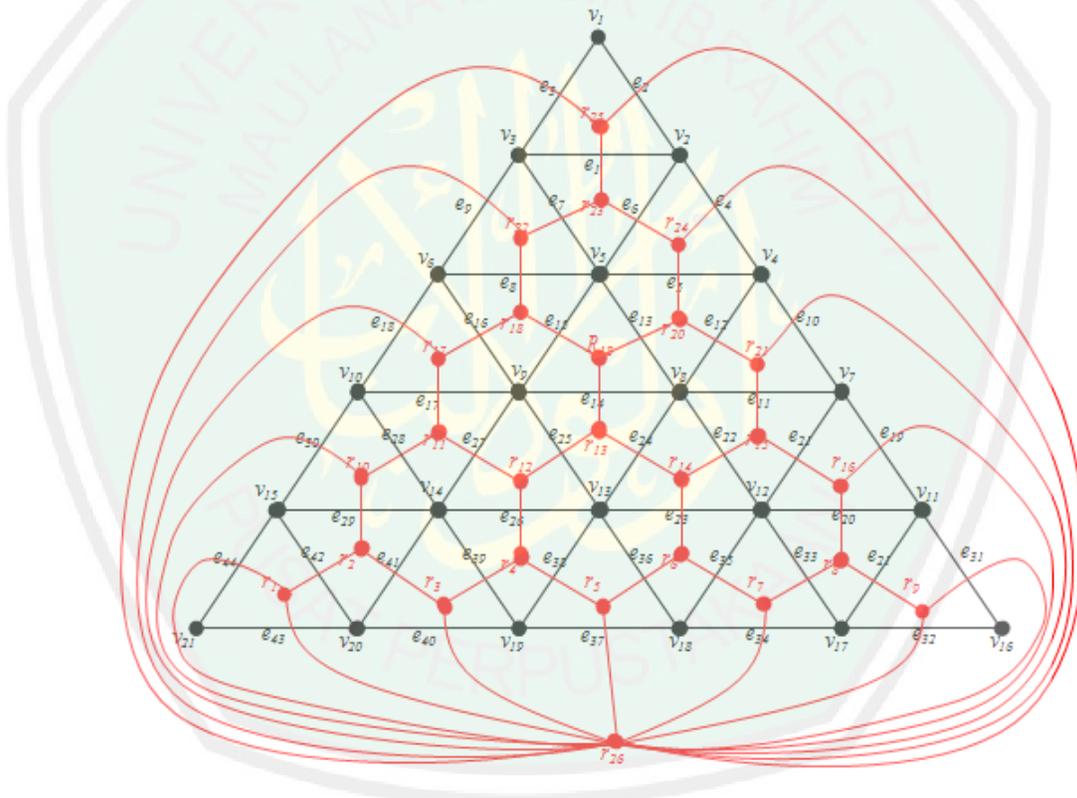
3.1.5 Graf Dual dari Graf Piramid Pr_5

Untuk membangun graf piramida Pr_5 , caranya sama dengan membangun graf piramid sebelumnya, yaitu dari graf piramida Pr_4 peneliti tambahkan 6 titik. Titik-titik tersebut diberi nama $v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$ dan v_{21} selanjutnya setiap titik kemudian dihubungkan

- v_{21} dihubungkan dengan v_{15} dan v_{20}
- v_{20} dihubungkan dengan v_{21}, v_{15}, v_{14} , dan v_{19}

- v_{19} dihubungkan dengan v_{20}, v_{14}, v_{13} , dan v_{18}
- v_{18} dihubungkan dengan v_{19}, v_{13}, v_{12} , dan v_{17}
- v_{17} dihubungkan dengan v_{18}, v_{12}, v_{11} dan v_{16}
- v_{16} dihubungkan dengan v_{17} dan v_{11} .

Sehingga akan didapat graf piramida Pr_5 sebagai berikut :



Gambar 3.7 Graf Piramida Pr_5 dan Pr_5^*

$$V(Pr_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\} \quad |V(Pr_5)| = 21$$

$$v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}, \}$$

$$E(Pr_5) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$$

$$e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}$$

$$e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{29}, e_{30}, \quad e_{31}, e_{32}, e_{33} \quad |E(\text{Pr}_5)| = 44$$

$$e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{37}, e_{38}, e_{39}, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{43}, e_{44}$$

$$R(\text{Pr}_5) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{16}, r_{17}, \quad |R(\text{Pr}_5)| = 26$$

$$r_{18}, r_{19}, r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{26}\}$$

Dari gambar 3.6 di atas menunjukkan gambar graf piramid Pr_5 dan graf dualnya, Perhatikan gambar 3.6 yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah piramid mempunyai 21 titik, dalam hal ini disebut piramid Pr_5 . Kemudian jika graf piramid Pr_5 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik, dimana titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{16}, r_{17}, r_{18}, r_{19}, r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{26}$, dan muka v_{26} sebagai titik luar.

Mula-mula titik r_{26} sebagai muka luar dihubungkan $r_1, r_3, r_5, r_7, r_9, r_{16}, r_{10}, r_{17}, r_{21}, r_{22}, r_{24}$, dan r_{25} , kemudian masing-masing titik tersebut dihubungkan pada titik yang bersisian langsung, maka akan terbentuk graf dual dari graf piramida dengan jumlah titik dari graf dual tersebut adalah 26 titik.

Dari graf hasil dual tersebut maka diperoleh :

$$V(\text{Pr}_5^*) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16},$$

$$g_{17}, g_{18}, g_{19}, g_{20}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{24}, g_{25}, g_{26}\} \quad |V(\text{Pr}_5^*)| = 26$$

$$E(\text{Pr}_5^*) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}$$

$$, h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, h_{25}, h_{26}, \quad |E(\text{Pr}_5^*)| = 44$$

$h_{27}, h_{28}, h_{29}, h_{30}, h_{31}, h_{32}, h_{33}, h_{34}, h_{35}, h_{36}, h_{37}, h_{38},$

$h_{39}, h_{40}, h_{41}, h_{42}, h_{43}, h_{44} \}$

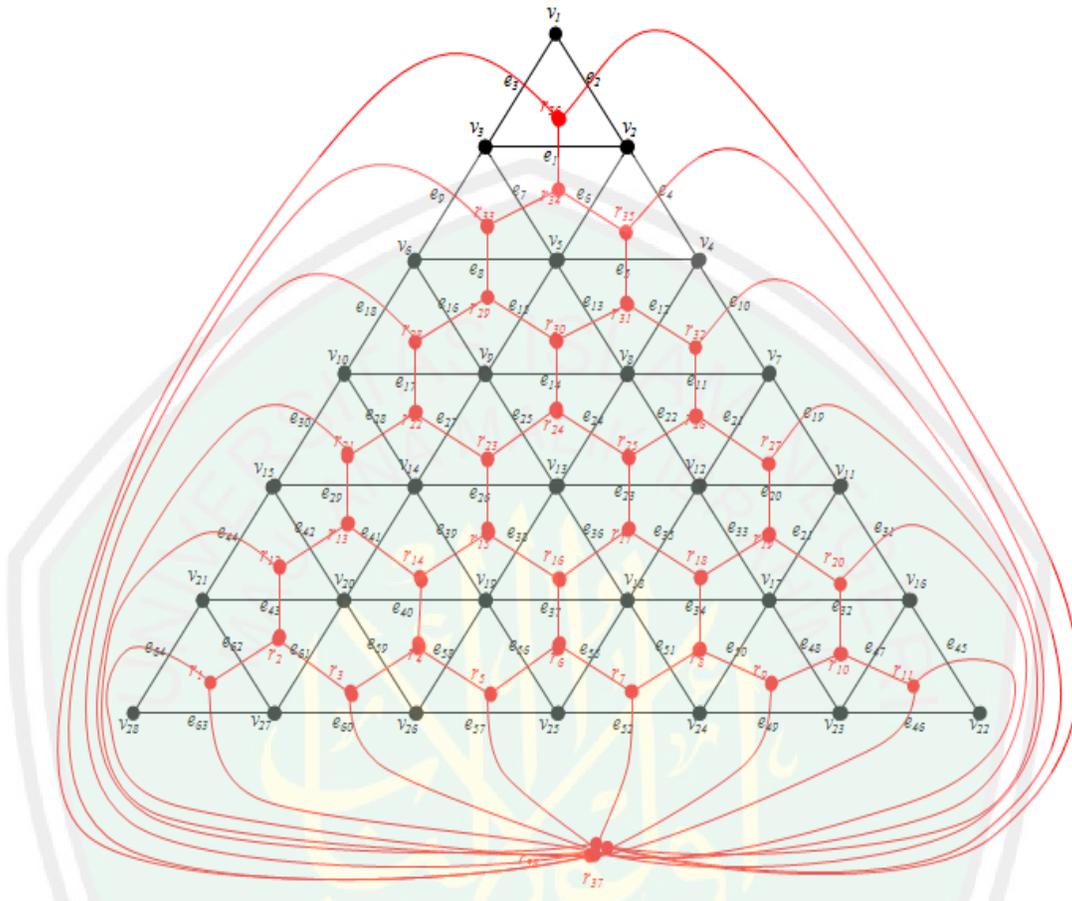
Sehingga diketahui bahwa $V(\text{Pr}_5)$ adalah 21 dan $V(\text{Pr}_5^*)$ lebih banyak yaitu 26.

3.1.6 Graf Dual dari Graf Piramida Pr_6

Untuk membangun graf piramida Pr_6 , caranya sama dengan membangun graf piramida sebelumnya, yaitu dari graf piramida Pr_5 peneliti tambahkan 7 titik. Titik-titik tersebut diberi nama $v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}, v_{26}, v_{27},$ dan v_{28} selanjutnya setiap titik kemudian dihubungkan

- v_{22} dihubungkan dengan v_{16} dan v_{23}
- v_{23} dihubungkan dengan $v_{22}, v_{16}, v_{17},$ dan v_{24}
- v_{24} dihubungkan dengan $v_{23}, v_{17}, v_{18},$ dan v_{25}
- v_{25} dihubungkan dengan $v_{24}, v_{18}, v_{19},$ dan v_{26}
- v_{26} dihubungkan dengan $v_{19}, v_{25}, v_{20},$ dan v_{27}
- v_{27} dihubungkan dengan v_{26}, v_{20}, v_{21} dan v_{28}
- v_{28} dihubungkan dengan v_{27} dan v_{21} .

Sehingga akan didapat graf piramida Pr_6 sebagai berikut :



Gambar 3.8 Graf Piramida Pr_6 dan Pr_6^*

$$V(Pr_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}, v_{26}, v_{27}, v_{28}\} \quad |V(Pr_6)| = 28$$

$$E(Pr_6) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{37}, e_{38}, e_{39}, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{43}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{51}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\}$$

$$e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}$$

$$e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{33} \quad |E(Pr_6)| = 54$$

$$e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{37}, e_{38}, e_{39}, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{43}, e_{44}, e_{45}, e_{46},$$

$$e_{47}, e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{51}, e_{52}, e_{53}, e_{54}$$

$$R(Pr_6) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{16}, r_{17}, r_{18}, r_{19}, r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{26}, r_{27}, r_{28}, r_{29}, r_{30}, r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}, r_{35}, r_{36}, r_{37}\} \quad |R(Pr_6)| = 37$$

$$\{r_{19}, r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{26}, r_{27}, r_{28}, r_{29}, r_{30}, r_{31}, r_{32}, r_{33}, \\ r_{34}, r_{35}, r_{36}, r_{37}\}$$

Dari gambar 3.7 di atas menunjukkan gambar graf piramid Pr_6 dan graf dualnya, Perhatikan gambar 3.7 yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah piramid mempunyai 28 titik, dalam hal ini disebut piramid Pr_6 . Kemudian jika graf piramid Pr_6 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik, dimana titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{16}, r_{17}, r_{18}, r_{19}, r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{26}, r_{27}, r_{28}, r_{29}, r_{30}, r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}, r_{35}, r_{36}, r_{37}$ dan muka r_{37} sebagai titik luar.

Mula-mula titik r_{37} sebagai muka luar dihubungkan $r_1, r_3, r_5, r_7, r_9, r_{16}, r_{10}, r_{17}, r_{21}, r_{22}, r_{24}, r_{25}, r_{26}, r_{27}, r_{28}, r_{29}, r_{30}, r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}, r_{35}$, dan r_{36} , kemudian masing-masing titik tersebut dihubungkan pada titik yang bersisian langsung, maka akan terbentuk graf dual dari graf piramida dengan jumlah titik dari graf dual tersebut adalah 37 titik.

Dari graf hasil dual tersebut maka diperoleh :

$$V(Pr_6^*) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, \\ g_{16}, g_{17}, g_{18}, g_{19}, g_{20}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{24}, g_{25}, g_{26}, g_{27}, g_{28}, |V(Pr_6^*)| = 37 \\ g_{29}, g_{30}, g_{31}, g_{32}, g_{33}, g_{34}, g_{35}, g_{36}, g_{37}\}$$

$$E(Pr_6^*) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, \\ h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, h_{25}, h_{26}, \\ h_{27}, h_{28}, h_{29}, h_{30}, h_{31}, h_{32}, h_{33}, h_{34}, h_{35}, h_{36}, h_{37}, h_{38}\}$$

$$h_{39}, h_{40}, h_{41}, h_{42}, h_{43}, h_{44}, h_{45}, h_{46}, h_{47}, h_{48}, h_{49}, h_{50}, \quad |E(\text{Pr}_6^*)| = 54$$

$$h_{51}, h_{52}, h_{53}, h_{54}\}$$

Sehingga diketahui bahwa : $V(\text{Pr}_6)$ adalah 28 dan $V(\text{Pr}_6^*)$ lebih banyak yaitu

54.

3.1.7 Tabel Graf Dual dari Pr_1^* ke Pr_n^*

Dari hasil dual Pr_1 sampai Pr_6 tersebut, dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1. Tabel Graf Dual

	$ V $	$ V^* $
Pr_1	3	2
Pr_2	6	5
Pr_3	10	10
Pr_4	15	17
Pr_5	21	26
Pr_6	28	37
Pr_n		$ V \text{Pr}_n^* = n^2 + 1$

Dari tabel diatas maka dapat dapat diketahui Banyak titik pada graf dual pada graf piramid Pr_n adalah 2, 5, 10, 17, 26, 37..... n^2+1 sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa jumlah titik pada graf dual adalah $|V \text{Pr}_n^*| = n^2 + 1$

Akan dibuktikan :

$(n^2+1) \geq 2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$

Ambil $|V Pr_n^*| = (n^2+1)$

$|V Pr_n^*|$ benar, sebab $(n^2+1) = (1^2+1) \leftrightarrow (1+1) = 2 \geq 2$

Anggap $|V Pr_n^*|$ benar, yaitu $(|V Pr_m^*| = (m^2+1)) \geq 2$

Akan ditunjukkan benar bahwa $|V Pr_{m+1}^*|$, yaitu :

$|V Pr_{m+1}^*| = ((m+1)^2+1) \geq 2$

Misal $n-1 = m \leftrightarrow n = m+1$

$|V Pr_n^*| = n^2+1 \geq 2$

$|V Pr_n^*| = n^2+1 \leftrightarrow n = m+1$

Maka $|V Pr_{m+1}^*| = ((m+1)^2+1) \geq 2$

$|V Pr_{m+1}^*| = ((m^2 + 2m + 1) + 1) \geq 2$

$$= ((m+1)(m+1)) + 1 \geq 2$$

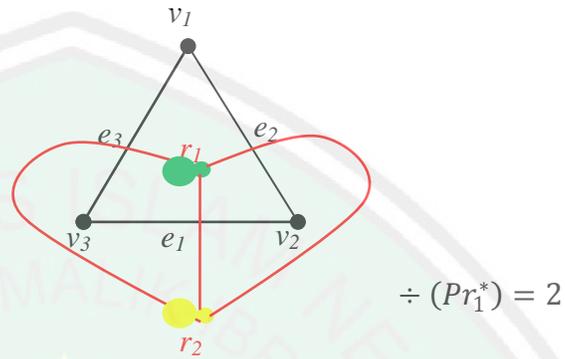
$$= |((m+1)^2+1) \geq 2$$

Jadi $|V Pr_n^*|$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$

3.2 Pewarnaan Titik Graf Dual dari Graf Piramid

Dalam pewarnaan titik pada graf Piramida yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu, Bilangan kromatik suatu graf lengkap- n (K_n) adalah n . Hal ini disebabkan karena setiap titik pada graf lengkap adalah bertetangga. Jadi $\chi(K_n) = n$, pada graf dual dari graf piramida maka $\chi(Pr_n^*) = n$, sehingga dua titik yang terhubung langsung akan mempunyai warna yang berbeda,

3.2.1 Graf Dual (Pr_1^*)

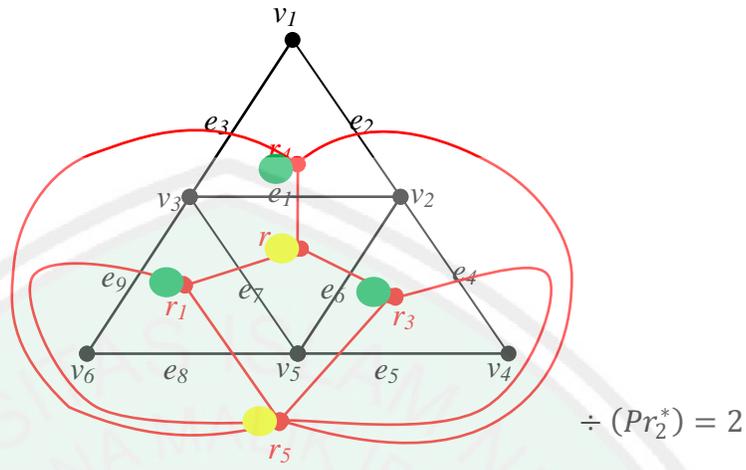


Gambar 3.9 Pewarnaan graf Pr_1^*

Langkah-langkah pewarnaan titik pada graf dual (Pr_1^*) dari graf piramid adalah sebagai berikut :

Pada graf dual (Pr_1^*) bilangan kromatiknya K_2 , yang mana semua titik dan sisinya saling terhubung maka pilih warna yang berbeda yaitu warna 1 (hijau) pada r_1 dan warna 2 (kuning) pada r_2 . Maka akan diperoleh warna minimal pada graf dual dari graf piramid yaitu dua warna.

3.2.2 Graf Dual (Pr_2^*)



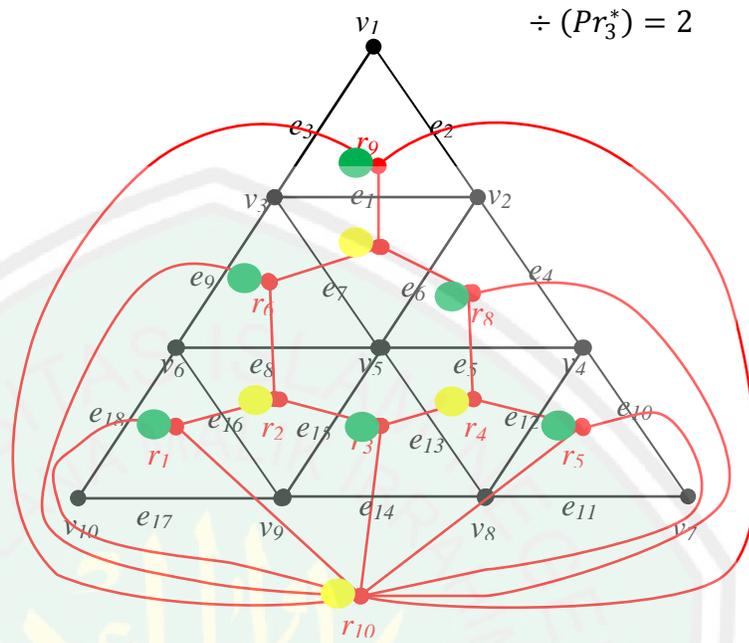
Gambar 3.10 Pewarnaan graf Pr_2^*

Langkah-langkah pewarnaan titik pada graf dual (Pr_2^*) dari graf piramid adalah sebagai berikut :

Menentukan dan memberi warna pada titik yang terhubung langsung dengan titik terluar pada graf dual Pr_2 , titik r_5 adalah titik terluar maka titik r_3 , r_1 , dan r_4 tidak boleh berwarna sama dengan titik r_5 , untuk titik r_2 boleh berwarna sama dengan titik r_5 karena tidak terhubung langsung.

Maka pada graf dual (Pr_2^*) bilangan kromatiknya K_2 , yang mana untuk pemberian warna maka dapat dipilih warna 1 (hijau) pada titik yang saling terhubung dengan titik terluar yaitu r_1 , r_3 , r_4 , dan warna 2 (kuning) pada r_2 , r_5 . maka akan diperoleh warna minimal pada graf dual (Pr_2^*) dari graf piramid yaitu dua warna.

3.2.3 Graf Dual (Pr_3^*)



Gambar 3.11 Pewarnaan graf Pr_2^*

Langkah-langkah pewarnaan titik pada graf dual (Pr_3^*) dari graf piramid adalah sebagai berikut :

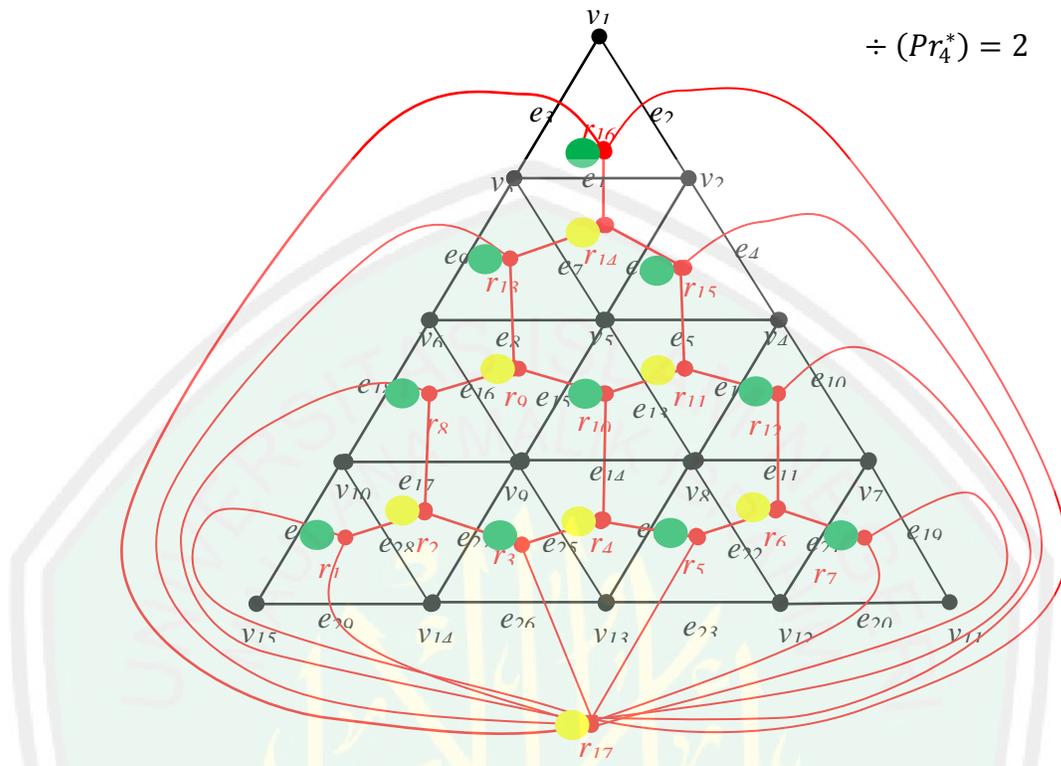
Menentukan dan memberi warna pada titik yang terhubung langsung dengan titik terluar pada graf dual Pr_3 , titik r_{10} adalah titik terluar maka titik $r_1, r_3, r_5, r_6, r_8,$ dan r_9 tidak boleh berwarna sama dengan titik r_{10} , untuk titik r_2, r_4, r_7 boleh berwarna sama dengan titik r_{10} karena tidak terhubung langsung.

Maka pada graf dual (Pr_3^*) bilangan kromatiknya K_2 , yang mana untuk pemberian warna maka dapat dipilih warna 1 (hijau) pada titik yang saling terhubung dengan titik terluar yaitu $r_1, r_3, r_5, r_6, r_8,$ dan r_9 , untuk warna 2 (kuning) pada r_{10}, r_2, r_4, r_7 maka akan diperoleh warna minimal pada graf dual (Pr_3^*) dari graf piramid yaitu dua warna.

3.2.4 Graf Dual (Pr_4^*)

Langkah-langkah pewarnaan titik pada graf dual (Pr_4^*) dari graf piramid adalah sebagai berikut :

Menentukan titik yang terhubung langsung dengan titik terluar pada graf dual Pr_4 , titik r_{17} adalah titik terluar pada graf dual (Pr_4^*), maka titik yang tidak terhubung langsung adalah $r_2, r_4, r_6, r_9, r_{11}, r_{14}$. Dan yang terhubung langsung adalah $r_1, r_3, r_5, r_7, r_8, r_{12}, r_{13}, r_{15}, r_{16}$, untuk titik yang tidak terhubung langsung diberi warna yang sama dengan r_{17} , kecuali pada titik r_{10} meskipun tidak terhubung langsung dengan titik terluar tetapi diberi warna yang berbeda, hal ini dikarenakan titik r_{10} berhubungan langsung dengan titik r_9, r_{11} , dan r_4 yang mana warna keduanya sudah sama dengan warna titik terluar. Maka akan didapatkan bilangan kromatiknya yaitu K_2 , yang mana semua titik yang terhubung dengan titik terluar diberi warna yang tidak sama yaitu pada titik $r_1, r_3, r_5, r_7, r_8, r_{10}, r_{12}, r_{13}, r_{15}, r_{16}$, diberi warna 1 (hijau), dan warna 2 (kuning) pada $r_2, r_4, r_6, r_9, r_{11}, r_{14}, r_{17}$, maka akan diperoleh warna minimal pada graf dual (Pr_4^*) dari graf piramid yaitu dua warna.



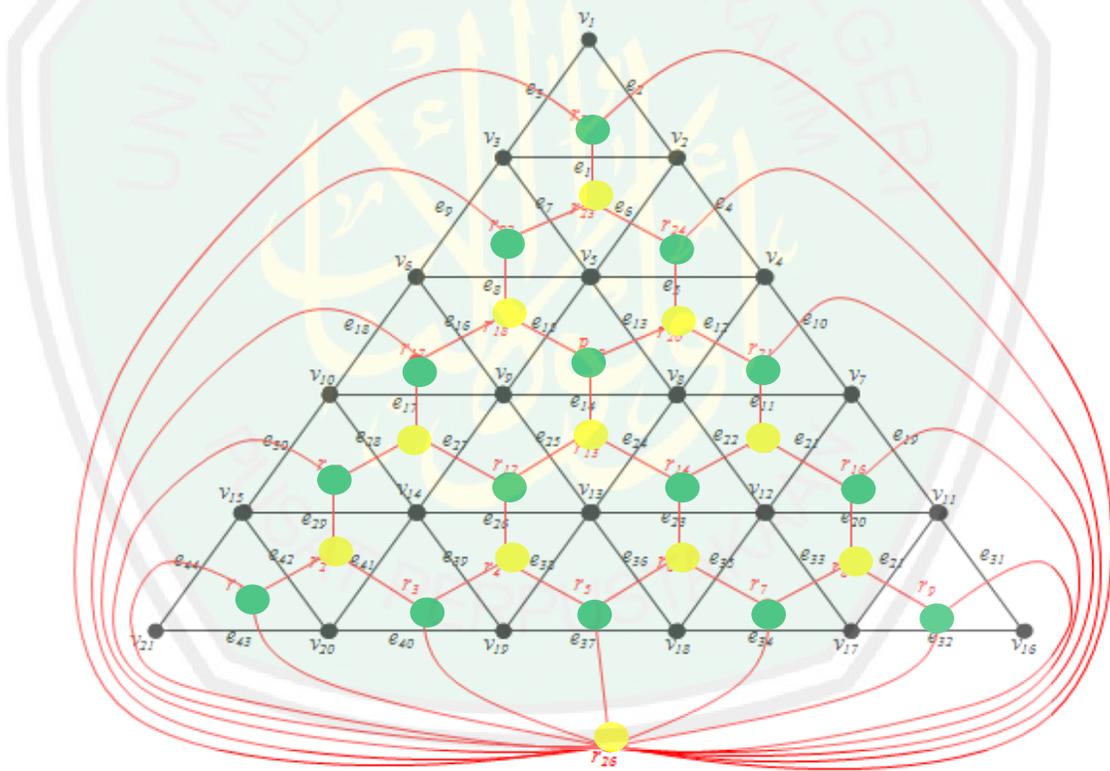
Gambar 3.12 Graf Piramida Pr_4^*

3.2.5 Graf Dual (Pr_5^*)

Langkah-langkah pewarnaan titik pada graf dual (Pr_5^*) dari graf piramid adalah sebagai berikut :

Menentukan titik yang terhubung langsung dengan titik terluar pada graf dual Pr_5 , titik r_{26} adalah titik terluar pada graf dual (Pr_5^*), maka titik yang tidak terhubung langsung adalah $r_2, r_4, r_6, r_8, r_{11}, r_{13}, r_{15}, r_{18}, r_{20}, r_{23}, r_{26}$. Dan yang terhubung langsung adalah $r_1, r_3, r_5, r_7, r_9, r_{10}, r_{12}, r_{14}, r_{16}, r_{17}, r_{19}, r_{21}, r_{22}, r_{24}, r_{15}$, untuk titik yang tidak terhubung langsung diberi warna yang sama dengan r_{26} , kecuali pada titik r_{12}, r_{14}, r_{19} meskipun tidak terhubung langsung dengan titik terluar tetapi diberi warna yang

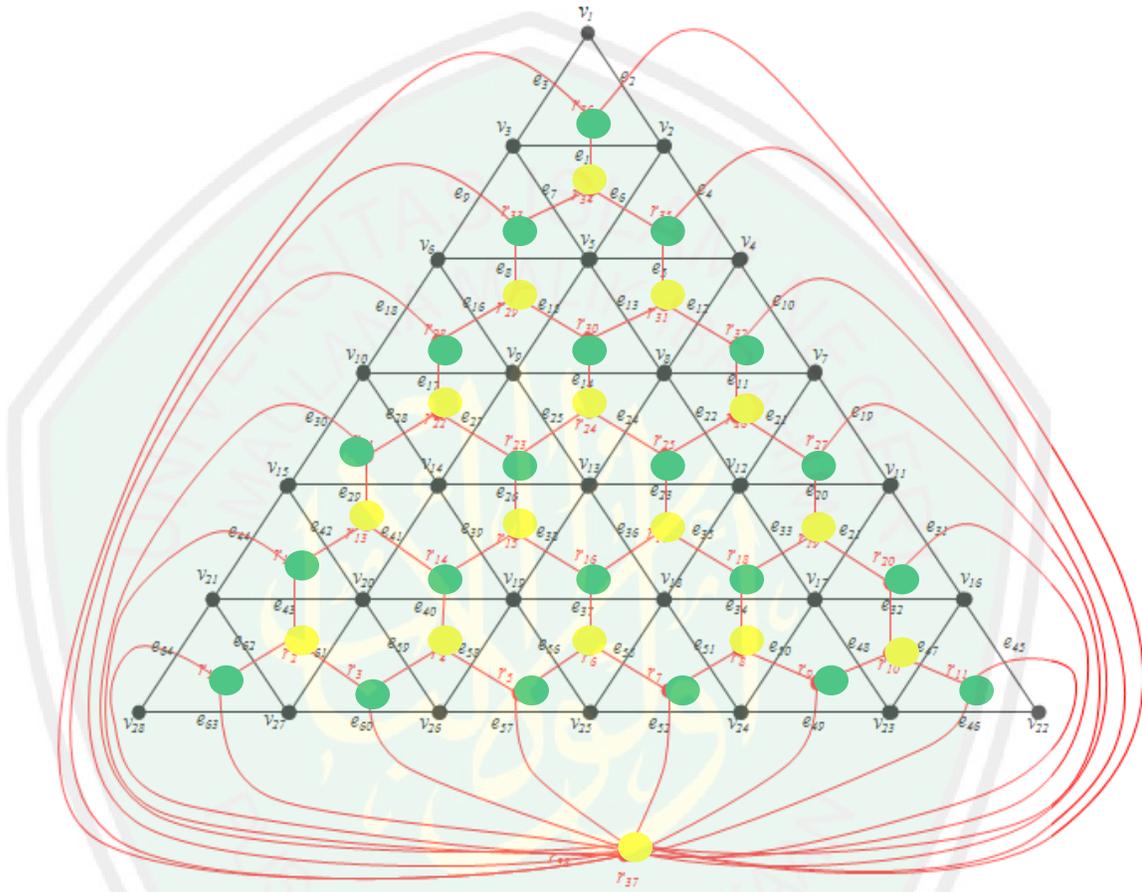
berbeda, hal ini dikarenakan titik r_{12}, r_{14}, r_{19} terhubung langsung dengan titik-titik yang warnanya sudah sama dengan warna titik terluar. Maka akan didapatkan bilangan kromatiknya yaitu K_2 , yang mana titik yang terhubung langsung yaitu pada titik $r_1, r_3, r_5, r_7, r_9, r_{10}, r_{12}, r_{14}, r_{16}, r_{17}, r_{19}, r_{21}, r_{22}, r_{24}, r_{15}$, diberi warna 1 (hijau), yang tidak terhubung langsung diberi warna 2 (kuning) pada $r_2, r_4, r_6, r_8, r_{11}, r_{13}, r_{15}, r_{18}, r_{20}, r_{23}, r_{26}$, maka akan diperoleh warna minimal pada graf dual (Pr_5^*) dari graf piramida yaitu dua warna.



Gambar 3.13 Graf Piramida Pr_5^*

3.2.6 Graf Dual (Pr_6^*)

Graf dual dari graf piramida Pr_6^* adalah :



Gambar 3.14 Graf Piramida Pr_6

Langkah-langkah pewarnaan titik pada graf dual (Pr_6^*) dari graf piramid adalah sebagai berikut :

Menentukan titik yang terhubung langsung dengan titik terluar pada graf dual Pr_6 , titik r_{37} adalah titik terluar pada graf dual (Pr_6^*), maka titik yang terhubung langsung adalah $r_1, r_3, r_5, r_7, r_9, r_{11}, r_{12}, r_{14}, r_{16}, r_{18}, r_{20}, r_{21}, r_{23}, r_{25}, r_{27}, r_{28}, r_{30}, r_{32}, r_{33}, r_{35}, r_{36}$ dan yang tidak terhubung langsung adalah $r_2, r_4, r_6, r_8, r_{10}, r_{13}, r_{15}, r_{17}, r_{19}, r_{22}, r_{24}, r_{26}$,

r_{29}, r_{31}, r_{34} untuk titik yang tidak terhubung langsung diberi warna yang sama dengan r_{37} , kecuali pada titik $r_{14}, r_{16}, r_{18}, r_{23}, r_{25}, r_{30}$ meskipun tidak terhubung langsung dengan titik terluar tetapi diberi warna yang berbeda, hal ini dikarenakan titik $r_{14}, r_{16}, r_{18}, r_{23}, r_{25}, r_{30}$ terhubung langsung dengan titik-titik yang warnanya sudah sama dengan warna titik terluar. Maka akan didapatkan bilangan kromatiknya yaitu K_2 , yang mana titik yang terhubung langsung yaitu pada titik $r_1, r_3, r_5, r_7, r_9, r_{11}, r_{12}, r_{14}, r_{16}, r_{18}, r_{20}, r_{21}, r_{23}, r_{25}, r_{27}, r_{28}, r_{30}, r_{32}, r_{33}, r_{35}, r_{36}$ diberi warna 1 (hijau), yang tidak terhubung langsung diberi warna 2 (kuning) pada $r_2, r_4, r_6, r_8, r_{10}, r_{13}, r_{15}, r_{17}, r_{19}, r_{22}, r_{24}, r_{26}, r_{29}, r_{31}, r_{34}$, maka akan diperoleh warna minimal pada graf dual (Pr_6^*) dari graf piramid yaitu dua warna.

Dari sini diperoleh pewarnaan minimal titik pada graf dual dari graf piramid adalah 2 warna.

3.3 Mencari Pola Bilangan Kromatik pada Pewarnaan Titik Graf Dual

$$\chi(Pr_1^*) = 2$$

$$\chi(Pr_2^*) = 2$$

$$\chi(Pr_3^*) = 2$$

$$\chi(Pr_4^*) = 2$$

$$\chi(Pr_5^*) = 2$$

$$\chi(Pr_6^*) = 2$$

Maka diperoleh pola bahwa graf dual dari graf piramid

$$\chi(Pr_n^*) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pola yang diperoleh tersebut dinyatakan sebagai konjektur. Konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika. Tetapi bisa dibuktikan.

Teorema

Bilangan kromatik pada graf dual dari graf piramid adalah

$$\chi(Pr_n^*) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bukti :

Jika $n=1$, Pr_1^* berorder 2 atau K_2 .

$$\chi(Pr_1^*) = \chi(K_2^*) = 2$$

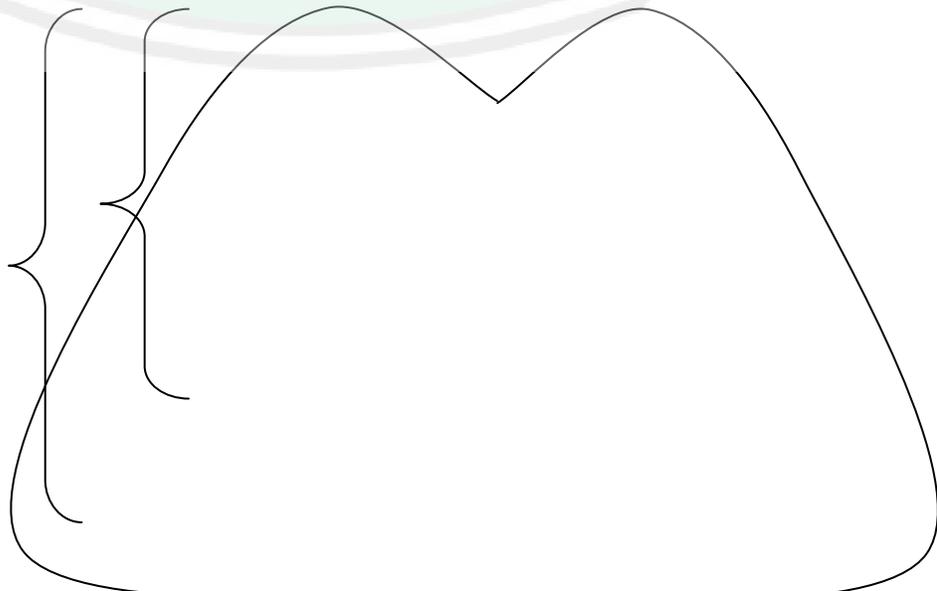


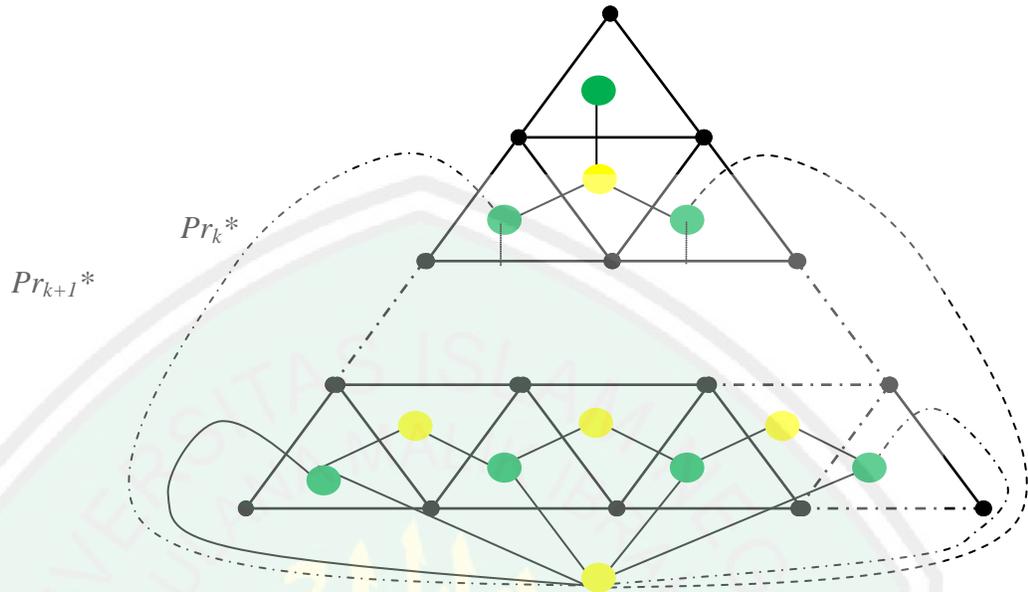
Gambar 3.15 Graf Piramida Pr_2^*

Jadi benar untuk $n=1$

Asumsikan benar untuk $n = k$, artinya $\chi(Pr_k^*) = 2$

Graf dual dari piramid Pr_{k+1}^* adalah sebagai berikut :





gambar 3.15 pewarnaan graf dual

Telah diketahui bahwa $V(Pr_k^*) = 2$. Maka $\chi(Pr_k^*) = 2$. Tanpa mengurangi keumuman, maka pewarnaan titik pada graf dual berselang-seling 2 warna, yaitu 1,2,1,2,1,2.....

Dengan demikian, maka bagian bawah $\chi(Pr_{n+1}^*)$, dapat diwarnai dengan 2 warna tersebut dengan cara mengatur agar titik yang saling terhubung langsung tidak berwarna sama. Jadi Sesuai dengan prinsip induksi matematika, maka dapat dititikkan $\chi(Pr_n^*) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3.4 Pewarnaan dalam Prespektif Islam

Allah mengutus nabi - nabi untuk menjelaskan kepada manusia mengenai tata cara mengabdikan kepada-Nya dengan firman Allah yang disebut Al-Qur'an sebagai petunjuk dan dasar keimanan. Sebagaimana dijelaskan dalam firman-Nya dalam QS Ad-Dzaariyat:56.

لِيَعْبُدُونِ إِلَّا وَالْإِنْسَ الْجِنَّ خَلَقْتُمْ مَا

“Tidak Aku (Allah) ciptakan jin dan manusia kecuali hanya untuk menyembah kepadaku”.

Ayat tersebut menerangkan kewajiban beribadah hanya kepada Allah. Penjelasan terperinci yang diberikan Nabi Muhammad SAW, mengenai tata cara pengabdian misalnya sholat, zakat, puasa, haji, dan lain-lain. Penjelasan yang diberikan nabi tersebut dengan Sunnah Hadits berupa perkataan dan perbuatan atau persetujuan nabi. Dua hal pokok di atas AlQur'an dan Sunnah sudah menjadi pedoman pokok manusia berhubungan dengan Penciptanya (Setiawan dalam Ghofur, 2008).

Agama Islam mewajibkan untuk percaya bahwa Tuhan itu ada dan Esa. Eksistensi-Nya ada (wujud) dan diluar nalar manusia, sehingga wujudnya seperti apa tidak boleh diinterpretasikan. Bagaimana umat Islam mengenal Allah (*ma'rifatullah*) adalah lewat ciptaanNya (Imam Nawawi, 2011: 52). Jadi umat Islam diwajibkan untuk mempelajari ciptaan-Nya (*science*) untuk lebih mengenal-Nya.

Selain itu Rasulullah juga bersabda *“Rahim (tali persaudaraan) itu digantungkan pada arsy, ia berkata: Barang siapa yang menyambungku (berbuat baik kepada kerabat), maka Allah akan menyambungny dan barang siapa yang memutuskan aku, maka Allah pun akan memutuskannya”*:. (Shahih Muslim No.4635)

“Seorang mukmin terhadap mukmin yang lain adalah seperti sebuah bangunan di mana bagiannya saling menguatkan bagian yang lain”. (Shahih Muslim No.4684)

Dari Abu Hamzah, Anas bin Malik radiallahuanhu, “*pembantu Rasulullah dari Rasulullah, beliau bersabda: Tidak beriman salah seorang diantara kamu hingga dia mencintai saudaranya sebagaimana dia mencintai dirinya sendiri*”. (Riwayat Bukhori dan Muslim)

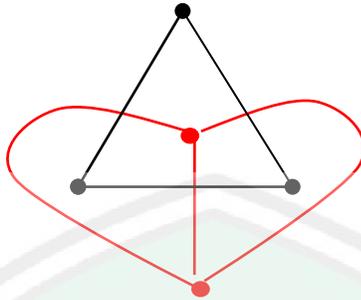
Pelajaran yang terdapat dalam hadits

Seorang mu'min dengan mu'min yang lainnya bagaikan satu jiwa, jika dia mencintai saudaranya maka seakan-akan dia mencintai dirinya sendiri.

1. Menjauhkan perbuatan hasad (dengki) dan bahwa hal tersebut bertentangan dengan kesempurnaan iman.
2. Iman dapat bertambah dan berkurang, bertambah dengan ketaatan dan berkurang dengan kemaksiatan.
3. Anjuran untuk menyatukan hati.

Sabda Rasulullah diatas menerangkan keutamaan berhubungan kepada Allah dan juga hubungan baik antar sesama, karena sesama muslim adalah saudara dan saling menguatkan. Untuk menjalin hubungan yang harmonis maka manusia dianjurkan untuk bersilaturahmi, karena silaturahmi memperkuat hubungan sesama (Imam Nawawi, 2011: 73).

Sehingga manusia itu akan bisa dikatakan Islam yang sesungguhnya, dalam matematika bisa peneliti umpamakan :



Muslim dengan muslim lainnya saling menguatkan, perhatikan garis dan titik yang berwarna hitam, peneliti umpamakan hubungan manusia dengan manusia dan Allah dengan manusia, sedangkan titik merah dan garis merah adalah hubungan Allah dengan manusia. Jika hubungan manusia dengan manusia itu terjalin sangat erat maka manusia akan merasa tentram dan aman, sehingga ibadah manusia tersebut akan lebih khusu'. Hal ini sesuai dengan sabda Rasulullah dalam hadits Arba'in An Nawawi pada hadits ke 31

Dari Abu Abbas Sahl bin Sa'ad Assa'idi radhiallahuanhu dia berkata : Seseorang mendatangi Rasulullah shallallohu 'alaihi wa sallam, maka beliau berkata : Wahai Rasulullah, tunjukkan kepadaku sebuah amalan yang jika aku kerjakan, Allah dan manusia akan mencintaiku, maka beliau bersabda: Zuhudlah terhadap dunia maka engkau akan dicintai Allah dan zuhudlah terhadap apa yang ada pada manusia maka engkau akan dicintai manusia.

(Hadits hasan riwayat Ibnu Majah dan lainnya dengan sanad hasan) .

Hadits tersebut mengandung makna bahwa dibalik sesuatu yang dirasakan dengan kelima indra ada kesukaan yang dinikmati yaitu dengan mata hati, karena mata hati yang batin lebih kuat dari pada mata hati yang lahir. Seperti zuhud pada apa

yang ada di dunia dan apa yang ada pada manusia, zuhud adalah menjauhkan diri dari sesuatu yang memperbudak manusia dari kesenangan dunia. Hal itu sangat sulit karena yang paling disukai manusia adalah kelangsungan hidupnya yang sesuai dengan dirinya. Manusia juga menyukai setiap orang yang berbuat baik kepadanya, karena manusia memang budak kebaikan. Terkadang menyukai sesuatu karena bagus dan baik untuk kelangsungan hidupnya tanpa memikirkan kelangsungan hidup saudara-saudaranya. Maka zuhud itulah yang dipesankan nabi kepada para pengikutnya sehingga Allah SWT mencintai hambanya (Ghozali, 2004:192).



BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang terdapat pada bab sebelumnya mengenai Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik pada Graf Dual dari Graf Piramid (Pr_n^*), maka dapat disimpulkan bahwa :

- a. Membangun sebuah graf dual dari graf piramid dengan menjadikan setiap region dari graf piramid, pilih sebuah titik. Jika dua buah region mempunyai sebuah sisi bersama, maka titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. Kurva-kurva ini digambarkan sedemikian hingga agar tidak bersilangan. Banyaknya titik pada graf dual dari graf piramid dapat dirumuskan $\chi(Pr_n^*) = n^2 + 1$
- b. Untuk menentukan pewarnaan titik pada graf Piramida yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu, Bilangan kromatik suatu graf lengkap- n (K_n) adalah n . Hal ini disebabkan karena setiap titik pada graf lengkap adalah bertetangga. Jadi $\chi(K_n) = n$ maka dalam graf dual dari graf piramid adalah $\chi(Pr_n^*) = n$:
 - a) Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus khusus yaitu pada $Pr_1, Pr_2, Pr_3, \dots, Pr_6$
 - b) Menentukan dan memberi warna pada titik yang terhubung langsung dengan titik terluar pada graf dual.

- c) Untuk pemberian warna maka dapat dipilih warna 1 (hijau) pada titik yang tidak saling terhubung, dan warna 2 (kuning) pada titik yang ter.
makaakandiperoleh warna minimal pada graf dual
- d) Berdasarkan langka-langkah di atas diperoleh:

$$\chi(P_{r_n}^*) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4.2 Saran

Masih banyak lagi penelitian tentang graf dual yang dapat dilakukan. Untuk penelitian selanjutnya dapat melakukan penelitian graf dual pada graf yang lainnya. Dan pewarnaan region pada graf dualnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Afandi, Y.. 2009. Pewarnaan Minimal Graf Piramida dan Berlian. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Program Sarjana UIN Malang.
- Agustina, A.G.. 2005. *ESQ*. Jakarta: Penerbit AGRA
- Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 1976. *Graf Theory with Applications*. London: The Macmillan, Inc.
- Bukhori.M.. 2008. *Shohih Bukhori Muslim*.Penj.Al-Bayan. Bandung: Jabal
- Chartrand, G.dan Lesniak, L.. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: Pacivic Grove California.
- Fajriyah, S..2009. Graf Dual (Dual Graph) dari Graf Roda (w_n) dan Graf Helm Tertutup (cH_n).*Skripsi* Tidak diterbitkan. Malang: Program Sarjana Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Jaluddin, I.. 2011. *Lubabul Hadist*. Penj. Ahmad Sunarto. Surabaya: Al-Miftah
- Khoiriyah, I..2009. Pemetaan Region dari Graf Piramida dan Berlian, *Skripsi* Tidak diterbitkan. Malang:Program Sarjana Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Khotimah, S..2006. Pewarnaan Titik dan Aplikasinya pada Penjadwalan Kuliah Jurusan Matematika, *Skripsi* Tidak diterbitkan. Malang: Program Sarjana Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Nawawi, I.. 2011. *Arbainul Nawwiyah*.Penj. Ahmad Sunarto. Surabaya: Al-Miftah
- Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- Salusiningsih, R.. 2009. Face Colouring pada Limas, Prisma, dan Gabungan Limas dan Prisma. *Skripsi*.Tidak diterbitkan. Malang: Program Sarjana Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang..
- Siang, J.J..2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*.Yogyakarta: Andi Yogyakarta.
- Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press

Suryanto.dan Fitria. 2006. *Materi Pokok Pengantar Teori Graf*. Jakarta: Karunia Universitas Terbuka

Wijaya, A.. 2009. *Matematika Diskrit*. {Book on-line} Bandung: Politeknik Telkom

Wilson, R.J.. 1992. *Graf Pengantar 1-2*. Surabaya: University Press IKIP Surabaya.





KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana N0. 50 Dinoyo Malang Telp. /Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhib
NIM : 06510020
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik Graf Dual dari Graf Piramid (Pr_n^*)
Pembimbing I : H. Wahyu Hengky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Azis, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	9 Mei 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	10 Mei 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	2.
3.	16 Mei 2013	ACC Bab I dan Bab II	3.
4.	22 Mei 2013	Konsultasi Bab I, II dan III	4.
5.	05 Juni 2013	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	11 Juni 2013	Konsultasi Bab I, II dan III	6.
7.	12 Juni 2013	ACC Bab I, II, III dan Agama	7.
8.	18 Juni 2013	ACC Bab I, II dan III	8.
9.	03 Juli 2013	ACC Keseluruhan	9.

Malang, 13 Juli 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001