ANALISIS KESTABILAN PERSAMAAN LOGISTIK PADA PERTUMBUHAN TUMOR DENGAN WAKTU TUNDA

SKRIPSI

Oleh:
RIZKI AMALIATUL ANDIFA
NIM. 09610034

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS KESTABILAN PERSAMAAN LOGISTIK PADA PERTUMBUHAN TUMOR DENGAN WAKTU TUNDA

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
RIZKI AMALIATUL ANDIFA
NIM. 09610034

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS KESTABILAN PERSAMAAN LOGISTIK PADA PERTUMBUHAN TUMOR DENGAN WAKTU TUNDA

SKRIPSI

Oleh:
RIZKI AMALIATUL ANDIFA
NIM. 09610034

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 26 Desember 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Usman Pagalay, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP.19650414 200312 1 001	NIP.19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS KESTABILAN PERSAMAAN LOGISTIK PADA PERTUMBUHAN TUMOR DENGAN WAKTU TUNDA

SKRIPSI

Oleh:
RIZKI AMALIATUL ANDIFA
NIM. 09610034

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 16 Januari 2014

Penguji Utama	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	________________
Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	________________
Sekretaris Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rizki Amaliatul Andifa

NIM : 09610034

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Januari 2014

Yang membuat pernyataan,

Rizki Amaliatul Andifa
NIM. 09610034

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ ١

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱسۡتَعِينُواْ بِٱلصَّبۡرِ وَٱلصَّلَوٰةِۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ

ٱلصَّٰبِرِينَ ١٥٣

"Hai orang-orang yang beriman, Jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, Sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar."

(Qs. Al-Baqoroh: 153)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ رَبِّ ٱلۡعَٰلَمِينَ

Dengan iringan do'a serta rasa syukur yang tidak terbatas, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Ibunda (Farida Y) dan Ayahanda (Ismanto) yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberikan dukungan, motivasi, dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk Kakak Tercinta (Zahrotul Faizah, Ahmad Al Hakim, Irmawati, dan A. Muzakki), adik tersayang (A'am Choirotul Cholidia), Keponakan Terkasih (M. Azhar Firmansyah), calon imam (Mahbub Junaidi) dan semua keluarga serta kerabat yang selalu memberikan doa dan motivasinya kepada penulis.

Dewan Guru di Lembaga MI. Mambaul-Ulum yang selalu menjadi inspirasi dan penyemangat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada ucapan yang lebih utama selain syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Sempurna, Allah SWT, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring doa dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu penulis terutama dalam penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Sri Harini, M.Si, sebagai dosen wali yang telah memberikan arahan di setiap langkah mulai awal hingga akhir keberadaan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, sebagai dosen pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, dan kesabarannya, serta pengalaman yang berharga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
6. Fachrur Rozi, M.Si sebagai dosen pembimbing agama yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.
7. Segenap sivitas akademika Seluruh Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
8. Kepada ibunda dan ayahanda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya, serta dukungan moral maupun material kepada penulis dalam menuntut ilmu. Kakak-kakak tercinta dan adik tersayang, seluruh keluarga dan kerabat yang telah memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.
9. Sahabat-sahabat terbaik Mahatva Cahyaning T, Khusnul Khamidiyah, Deri Ismawati, Raudatul Khoiriyah, Amanatul Husnia, Evi Mufarida, Ifa Noviyanti, Lailatul Fitriyah, dan Ani Afidatul, serta seluruh teman-teman seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009. Terima kasih atas doa, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.
10. Sahabat-sahabat di ma'had khususnya ma'had Asma' Binti Abu Bakar kamar 17 tahun 2009, Ma'had Khodijah Al-Kubro kamar 30 tahun 2010 dan Ma'had Khodijah Al-Kubro kamar 21 tahun 2011 serta teman yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

lainnya yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih untuk semua dukungan dan semangatnya dalam menuntut ilmu bersama.

Akhirnya semoga skripsi ini dapat menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Aamiin Yaa Rabbal'Alamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2014

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Andifa, Rizki Amaliatul. 2014. **Analisis Kestabilan Persamaan Logistik pada Pertumbuhan Tumor dengan Waktu Tunda.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata kunci: Persamaan Logistik, Waktu Tunda, Kestabilan, Tumor

Persamaan logistik merupakan salah satu persamaan populasi yang diperkenalkan oleh *Verhulst*. Pada awalnya persamaan logistik tumbuh monoton (naik atau turun). Waktu tunda merupakan penundaan pertumbuhan persamaan logistik agar tidak tumbuh monoton (naik atau turun). Salah satu pertumbuhan populasi yang tidak tumbuh monoton adalah penyakit yang sedang atau dalam keadaan di obati, misalnya penyakit tumor.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui analisis kestabilan, selain itu dalam penelitian ini juga diberikan simulasi dengan waktu tunda yang berbeda untuk perbandingan.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa:

1. Persamaan logistik dengan waktu tunda akan mengalami pertumbuhan yang tidak stabil pada titik tetap pertama $x^* = 0,$ sehingga populasi sel tumor juga akan mengalami pertumbuhan yang tidak stabil. Persamaan logistik dengan waktu tunda mengalami kestabilan pada titik tetap kedua $x^* = K + \tau,$ maka pertumbuhan populasi sel tumor juga akan mengalami pertumbuhan yang stabil. Tumor sebaiknya diberikan pengobatan pada saat mengalami pertumbuhan yang stabil.
2. Terdapat perbedaan simulasi pada persamaan logistik tanpa waktu tunda dengan simulasi persamaan logistik dengan waktu tunda. Simulasi persamaan logistik tanpa waktu tunda tidak mengalami osilasi sedangkan pada persamaan logistik dengan waktu tunda mengalami osilasi, semakin besar nilai tunda yang diberikan maka semakin besar pula osilasi yang dihasilkan. Besar nilai tunda yang diberikan akan mempengaruhi kestabilan persamaan logistik dengan waktu tunda. Simulasi persamaan logistik dengan waktu tunda $0 \le \tau \le 1.5$ mengalami pertumbuhan yang stabil sehingga sel tumor juga akan tumbuh secara stabil. Sedangkan jika $\tau \ge 1.6$ maka persamaan logistik dengan waktu tunda akan mengalami pertumbuhan yang tidak stabil sehingga sel tumor juga akan tumbuh tidak stabil dengan $\tau \ge 1.6$.

Bagi peneliti selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian untuk mengetahui bifurkasi persamaan logistik dengan waktu tunda atau mengaplikasikan pada persamaan lainnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Andifa, Rizki Amaliatul. 2014. **Analyze The Stability of Logistics Equation of Tumor Growth with Time Delay.** Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Keywords: Logistics Equation, Time Delay, Stability, Tumor.

Logistics equation represent one of population equation which is introduced by Verhulst. Initially logistics equation grow the remain (go up or descend). Time delay represent the postponement of growth of logistics equation in order not to grow the remain (go up or descend). One of population growth which barren of the remain is disease which is or in a state of is curing, for example tumor disease.

This research target to know the stability analysis, others in this research is also given simulation with the different time delay for the comparison.

Pursuant to solution result, obtained that:

1. Logistics equation with the time delay will experience of the unstable growth at dot remain to be first $x^* = 0,$ so that population of tumor cell also will experience of the unstable growth. Logistics equation with the time delay experience of the stability dot remain to be second $x^* = K + \tau,$ hence growth of population of tumor cell also will experience of the stable growth. Tumor better be given by medication at the time of experiencing of stable growth.
2. There are simulation difference of logistics equation without time delay with the simulation of logistics equation with the time delay. Simulation of logistics Equation without time delay not experience of the fluctuate of while at logistics equation with the time delay experience of the fluctuate, ever greater assess to delay given ever greater hence also yielded fluctuate. Assess to delay given will influence the stability of logistics equation with time delay. Simulation of logistics Equation with the time delay $0 \le \tau \le 1.5$ experiencing of stable growth so that tumor cell also will grow stablely. While if $\tau \ge 1.6$ hence logistics equation with the time delay will experience of the unstable growth so that tumor cell also will grow unstable with $\tau \ge 1.6.$

For researcher hereinafter, suggested to continue the research to know the bifurcation of logistics equation with the time delay or application at other equation.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

انظيفة، رزقي عملية. ٢٠١٤. **تحليل استقرار المعادلة اللوجستية على نمو الأورام مع تأخير الوقت** . البحث الجامعى. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا . جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.

المشرف: (١) شيخ عثمان فكالاي، الماجستير

(٢) فخر الرازي، الماجستير

كلمات البحث: المعادلة اللوجستية، تأخير وقت، والاستقرار، و ورم.

المعادلة هي معادلة واحدة اللوجستي الذي قدمه السكان فورلوس .في البداية المعادلة اللوجستية ينمو رتابة (صعودا أو هبوطا) . تأخير الوقت هو تأخير معادلة النمو المتزايد لوجستي من رتابة (صعودا أو هبوطا) . واحدة من تزايد عدد السكان لا ينمو رتابة أو المرض يعالجون في الظروف، مثل مرض الورم.

تهدف هذه الدراسة إلى تحديد تحليل الاستقرار، بالإضافة إلى ذلك، قدمت هذه الدراسة أيضا محاكاة مع تأخير زمنية مختلفة للمقارنة.

استنادا إلى نتائج المناقشة، وجدت أن:

١ . سوف المعادلة اللوجستية مع تأخير الوقت تشهد نموا في نقطة ثابتة مستقرة من أولى $x^* = 0$ ، حتى يتسنى لل سكان الخلية السرطانية ستشهد نموا غير مستقرة .سوف المعادلة اللوجستية مع تأخير الوقت شهدت على استقرار نقطة ثابتة $x^* = K + \tau$ ، من كل من نمو السكان الخلايا السرطانية أيضا تجربة النمو المطرد . وينبغي إيلاء الأورام العلاج عندما تشهد نموا مطردا.

٢ . هناك اختلافات في المحاكاة دون تأخير وقت المعادلة اللوجستية مع المعادلة اللوجستية محاكاة مع تأخير الوقت. محاكاة المعادلة اللوجستية دون تأخير وقت لا تعاني من التذبذب في حين أن المعادلة اللوجستية مع تأخير الوقت شهدت التذبذب، وزيادة تعطى قيمة تأخير ، وزيادة التذبذبات الناتجة عن ذلك .سوف تعطى قيمة كبيرة التأخير يؤثر على استقرار المعادلة اللوجستية مع تأخير الوقت $0 \leq \tau \leq 1.5$ شهدت محاكاة المعادلة اللوجستية مع تأخير الوقت نموا مطردا بحيث الخلايا السرطانية كما ينمو باطراد .وفي الوقت نفسه، إذا $\tau \geq 1.6$ المعادلة اللوجستية مع تأخير الوقت سوف تشهد نموا غير مستقرة بحيث الخلايا السرطانية سوف تنمو أيضا غير مستقرة مع $\tau \geq 1.6$

للباحث المقبل، فإنه من المستحسن لمواصلة البحث لمعرفة التشعب المعادلة اللوجستية مع تأخير الوقت أو في تطبيق المعادلات الأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada matematika terdapat suatu kajian tentang model matematika yang merupakan suatu usaha untuk menguraikan beberapa bagian yang berhubungan dengan dunia nyata ke dalam bentuk persamaan matematika. Persamaan tersebut merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik dan persamaan yang paling banyak digunakan untuk menggambarkan fenomena fisik adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Finizio dan Ladas, 1988).

Salah satu cabang pada ilmu matematika adalah model dan pemodelan. Menurut Usman Pagalay (2009), model dan pemodelan telah membantu manusia memahami sistem alam yang kompleks, mulai dari yang mikroskopik sampai yang makroskopik. Model tidak lain adalah representasi suatu realitas dari seorang model. Dengan kata lain, model adalah jembatan antara dunia maya (*real world*) dengan dunia berpikir (*thinking*) untuk memecahkan suatu masalah. Proses penjabaran atau merepresentasikan ini disebut sebagai *modelling* atau pemodelan yang tidak lain merupakan proses berpikir melalui sekuen yang logis.

Dengan menggunakan model matematika dan penalaran matematika sebagai alat bantu untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan nyata. Terdapat beberapa permasalahan yang diselesaikan dengan menggunakan model matematika seperti dalam bidang sains, ekonomi, teknik dan lain sebagainya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan menggunakan matematika diharapkan dapat memperoleh solusi akhir yang akurat, tepat dan dapat diterima secara ilmiah oleh dunia ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu cabang ilmu matematika yang digunakan untuk memperoleh solusi akhir adalah dengan menggunakan pemodelan matematika.

Dalam pemodelan matematika dikenal Model logistik adalah suatu modifikasi model Malthus. Pada 1830 PF. Verhults memperkenalkan suatu model pertumbuhan yang sering disebut model pertumbuhan logistik. Pada model pertumbuhan logistik ini diasumsikan bahwa tidak ada penundaan waktu pada proses pertumbuhan populasi.

Waktu tunda (perlambatan) atau penyimpangan waktu penting untuk mempertimbangkan model populasi di mana laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada ukuran populasi pada waktu t tetapi juga bergantung pada ukuran populasi di masa lalu.

Dalam Al-Qur'an yang merupakan pedoman hidup bagi seluruh umat manusia khususnya bagi umat Islam menjelaskan adanya penyakit yang diberikan kepada manusia sejak beberapa tahun silam. Salah satunya firman Allah dalam Al-Qur'an yang menjelaskan tentang adanya penyakit adalah pada surat Al-Anbiya' ayat 83 yang berbunyi :

۞ وَأَيُّوبَ إِذْ نَادَىٰ رَبَّهُۥٓ أَنِّى مَسَّنِىَ ٱلضُّرُّ وَأَنتَ أَرْحَمُ ٱلرَّٰحِمِينَ ﴿٨٣﴾

Artinya : "Dan (ingatlah kisah) Ayub, ketika ia menyeru Tuhannya: (Ya Tuhanku), sesungguhnya aku telah ditimpa penyakit dan Engkau adalah Tuhan Yang Maha Penyayang di antara semua penyayang" (Qs. Al-Anbiya' :83)

Ayat di atas menyeru kepada manusia di waktu sakit untuk tetap berusaha (ikhtiyar) mencari kesembuhan atau setidaknya dapat mengurangi sakit, salah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

satunya dengan berdoa. Ketika ditimpa penyakit Nabi Ayyub berseru dan berdoa serta menggambarkan dirinya dengan sesuatu yang karenanya dia berhak mendapatkan kasih sayang dan menyifati Tuhan dengan Maha Penyanyang tanpa menyebutkan dengan terang-terangan apa yang dimintanya. Hal ini menunjukkan bahwa Tuhan Maha Mengetahui tentang keadaannya (Al-Maraghi, 1993).

Selain berusaha dalam dengan berdoa, Nabi Muhammad juga memerintahkan kepada umatnya untuk berusaha menyembuhkan atau berobat dikala sakit melalui haditsnya, hadits tersebut dari Fatimah Binti Al-Mundzir berkata:

"Asma Binti Abu Bakar ra. Apabila dibawa kepadanya seorang perempuan yang demam, selalu berdoa untuknya. Beliau mengambil air lalu menuang ke atas bagian-bagian badan yang terbuka. Beliau berkata : Rasulullah saw selalu menyuruh kami mendinginkan demam dengan air" (Al-Bukhari 76:28; Muslim 39:26; Al-Lu'luu Wal Marjan 3:38)

Pemakaian air dalam hadits di atas bukanlah dengan memandikan orang yang sedang demam dan demam yang dimaksud di sini, bukanlah semua macam demam. Asma' hanya menuang sedikit air ke atas dada bagian yang dekat dengan leher si sakit, tidak memandikannya (Ash-Shiddieqy, 2003).

Di zaman ini terdapat berbagai penyakit yang dapat menimpa manusia, salah satunya adalah penyakit tumor. Dalam bahasa medis, tumor dikenal sebagai *neoplasia*. *Neo* berarti baru, *plasia* berarti pertumbuhan/pembelahan, jadi *neoplasia* mengacu pada pertumbuhan sel yang baru, yang berbeda dari pertumbuhan sel-sel di sekitarnya yang normal. Fungsi perkembangbiakan sel tumor diatur oleh inti sel, akibatnya pada sel tumor dijumpai inti sel yang membesar karena tuntutan kerja yang meningkat. Tumor dibagi menjadi 2

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

golongan besar yaitu tumor jinak *(benign)* dan tumor ganas *(malignant)* atau yang popular dengan sebutan kanker. Terdapat perbedaan sifat yang nyata di antara dua jenis tumor ini dan memang membedakannya merupakan tuntutan wajib bagi praktisi medis. Perbedaan utama di antara keduanya adalah bahwa tumor ganas lebih berbahaya dan fatal (Anonimus, 2009).

Semakin bertambahnya waktu sel tumor akan terus berkembang sehingga penderita penyakit ini harus segera mencegah perkembangan tumor agar sel tumor tidak berkembang dengan pesat dengan cara apapun, di antaranya dengan terapi, operasi dan lain sebagainya. Pada pencegahan pertumbuhan tumor tersebut terjadi penundaan waktu perkembangan sel tumor yang disebut dengan waktu tunda.

Pada penelitian sebelumnya oleh Vivi Aida Fitria (2009) yang berjudul "Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator Prey Dengan Perlambatan". Pada penelitian tersebut terdapat beberapa simulasi dengan bantuan Matlab yang menunjukkan bahwa adanya perbedaan yang signifikan dari simulasi tanpa perlambatan dengan simulasi menggunakan perlambatan. Sedangkan jurnal yang membahas tentang persamaan pertumbuhan logistik dengan waktu tunda telah diteliti oleh Timunemo dkk dengan judul "Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda". Dalam jurnal tersebut telah diketahui titik kesetimbangan dengan menggunakan formulasi waktu diskret model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda. Adapun persamaan populasi dengan waktu tunda yang disertai simulasi belum banyak dikaji.

Sehingga dalam penulisan skripsi ini, akan diteliti kestabilan titik tetap persamaan logistik dengan waktu tunda. Kemudian akan dilakukan analisis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kestabilan untuk mengetahui titik kestabilan persamaan logistik dengan waktu tunda serta akan dilakukan simulasi persamaan logistik tanpa waktu tunda dan persamaan logistik dengan waktu tunda dengan menggunakan Matlab 2008b. Dari latar belakang tersebut maka penulis akan mengkaji dan meneliti dengan judul ***"Analisis Kestabilan Persamaan Logistik Pada Pertumbuhan Tumor Dengan Waktu Tunda".***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, penulis dapat mengemukakan rumusan masalah meliputi:

1. Bagaimana analisis kestabilan persamaan logistik pada pertumbuhan tumor dengan waktu tunda?
2. Bagaimana simulasi model persamaan logistik tanpa waktu tunda dan persamaan logistik dengan waktu tunda?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini meliputi:

1. Mengetahui analisis kestabilan persamaan logistik pada pertumbuhan tumor dengan waktu tunda.
2. Mensimulasikan model persamaan logistik tanpa waktu tunda dan persamaan logistik dengan waktu tunda.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.4 Batasan Masalah

Berdasarkan luasnya permasalahan yang terkait dengan pemodelan matematika, maka dalam penulisan penelitian akan dibatasi pada:

1. Diberikan model logistik dengan waktu tunda sebagai berikut :

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t)\left(1 - \frac{X(t-\tau)}{K}\right)$$

Keterangan:

$X(t)$ = jumlah populasi pada saat t

r = laju pertumbuhan

K = daya dukung lingkungan

τ = waktu perlambatan dan diasumsikan positif

2. Penyakit yang dibahas dalam penelitian ini adalah penyakit tumor yang telah atau sedang menjalani pengobatan dengan parameter $r = 1$ dan $K = 100$ (Muslikh dkk,-).

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan memberikan manfaat bagi penelitian-penelitian di lapangan yang menggunakan analisis kestabilan model logistik dengan waktu tunda. Analisis kestabilan model logistik dengan waktu tunda yang dihasilkan dalam penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan dalam bidang kedokteran, pemodelan matematika dan bidang lainnya yang menggunakan model logistik dengan waktu tunda dalam penelitiannya. Selain itu,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

penelitian ini diharapkan mampu mengembangkan keilmuwan khususnya dalam bidang pemodelan matematika.

1.6 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan diterapkan penulis dengan membahas penelitian ini secara rinci dijabarkan sebagai berikut:

1. Konstruksi model persamaan logistik dengan waktu tunda
2. Mencari titik tetap *(fixed point)*
3. Melinearisasi persamaan logistik dengan waktu tunda
4. Mencari matriks Jacobian, nilai eigen dan vektor eigen
5. Menganalisis kestabilan di sekitar titik tetap
6. Menginterpretasi hasil gambar analisis kestabilan
7. Membuat kesimpulan

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tuisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu definisi persamaan diferensial, bentuk persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial tak linier, penyelesaian persamaan diferensial linier orde satu, persamaan diferensial dengan waktu tunda, definisi model matetamtika, pengertian model logistik, persamaan logistik dengan waktu tunda, kajian mencari titik tetap, linierisasi, nilai eigen dan vektor eigen, analisis kestabilan titik tetap, jenis-jenis kestabilan, penyakit tumor dan penyembuhan penyakit dalam Al-Qur'an.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini dipaparkan hasil penelitian yang mengkaji tentang titik tetap, linierisasi, nilai eigen, vektor eigen, dan analisis kestabilan persamaan logistik dengan waktu tunda serta simulasi numerik persamaan logistik tanpa waktu tunda dan simulasi numerik persamaan logistik dengan waktu tunda.

Bab IV Penutup

Pada bab ini dikemukakan kesimpulan dari pembahasan dan beberapa saran yang berkaitan dengan penelitian.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 1.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Meskipun persamaan seperti itu seharusnya disebut "persamaan turunan", namun istilah "persamaan diferensial" (*aeoquatio differentialis*) yang diperkenalkan oleh Leibniz dalam tahun 1676 sudah umum digunakan (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial (Pamuntjak dan Widiarti, 1990).

Variabel bebas adalah variabel yang nilainya tidak bergantung pada nilai variabel yang lain, sedangkan variabel terikat adalah variabel yang nilainya bergantung pada nilai variabel yang lain.

Berdasarkan bentuk diferensial yang dikandungnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua macam, yaitu:

1. Persamaan diferensial biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu peubah bebas (Pamuntjak dan Widiarti, 1990).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t)\left(1 - \frac{X(t-\tau)}{K}\right) \qquad (2.1)$$

Cara untuk mengklasifikasikan persamaan diferensial adalah menurut orde atau tingkatnya. Orde (tingkat) suatu persamaan diferensial adalah orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan itu, yang tingkatnya paling tinggi. Bila suatu persamaan diferensial berbentuk polinom dalam peubah bebas dan turunan-turunannya, persamaan diferensial itu dapat dicirikan menurut pangkat atau derajatnya.

2. Persamaan diferensial parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas (Pamuntjak dan Widiarti, 1990).

Satu cara untuk mengklasifikasikan persamaan diferensial adalah menurut orde (tingkat) nya. Bila suatu persamaan diferensial biasa berbentuk polinom dalam peubah bebas beserta turunan turunannya, persamaan diferensial itu dapat dicirikan menurut pangkat (derajat) nya.

Definisi 3

Pangkat (derajat) suatu persamaan diferensial biasa yang berbentuk polinom dalam fungsi (peubah tak bebas) beserta turunan-turunannya adalah pangkat (derajat) polinom itu, yakni pangkat tertinggi dari perkalian peubah tak bebas beserta turunan-turunannya yang terdapat dalam persamaan diferensial itu (Pamuntjak dan Widiarti, 1990).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

$$\frac{dx}{dy} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) \qquad \text{(persamaan diferensial orde satu)}$$

2.2 Persamaan Diferensial Linier dan Tak linier

Definisi 4

Persamaan diferensial linier ialah persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah tak bebas dan turunan-turunannya, yaitu persamaan diferensial yang berbentuk:

$$a_m(x)\frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = r(x) \qquad (2.2)$$

Dengan $a_i(x), i = 1, 2, \ldots, m$ didefinisikan pada selang I. Jika $\exists x \in I \ni a_i(x) \neq 0$ maka persamaan di atas ialah persamaan linier tingkat m.

Selanjutnya persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linier disebut persamaan tak linier.

Dengan demikian menurut Pamuntjak dan Widiarti (1990) persamaan diferensial $F(x, y, y', \ldots, y^m) = 0$ adalah persamaan tak linier, jika salah satu dari yang berikut ini dipenuhi oleh F :

a. F tak berbentuk polinom dalam $y, y', \ldots, y^m$

b. F berbentuk polinom berpangkat ≥ 2 dalam $y, y', \ldots, y^m$

Suatu persamaan diferensial linier orde n adalah persamaan yang berbentuk:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)=r(x) \quad (2.3)$$

Di sini selalu memisalkan bahwa koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x),..., a_0(x),$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada selang I dan bahwa koefisien pertama $a_n(x)\neq 0$ untuk setiap $x\in I$. Selang I disebut *selang definisi* (selang asal) *dari persamaaan diferensial* itu. Jika fungsi F identik dengan nol, disebut persamaan (2.3) *homogen.* Jika $f(x)$ tak identik dengan nol, persamaan (2.3) disebut *tak homogen.* Bila semua koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x),..., a_0(x)$ adalah tetap, persamaan (2.3) dikatakan sebagai persamaan diferensial linier *koefisien konstanta,* di lain pihak, adalah persamaan diferensial dengan koeofisien-koefisien peubah. Istilah linier berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah $y, y^{'},..., y^n$ berderajat satu atau nol (Finizio dan Ladas, 1988).

Sebuah persamaan diferensial dikatakan linier bila memenuhi 2 hal berikut:

1. variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi pangkat satu.
2. Tak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan (Kusumah, 1989:4).

Contoh persamaan tak linier adalah pesamaan pendulum

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{t}\sin\theta=0 \quad (2.4)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

persamaan (2.4) tak linier karena suku $\sin\theta$. Contoh lain persamaan diferensial adalah

$$y'' + 2e^t y' + yy' + y^2 = t^4 \tag{2.5}$$

dimana persamaan (2.4) juga merupakan persamaan diferensial tak linier karena suku yy' dan y^2 (Waluya, 2006).

2.3 Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Untuk mencari solusi analitik persamaan logistik tanpa waktu tunda dapat menggunakan persamaan diferensial linier orde satu.

Definisi 5

Persamaan diferensial linier orde satu adalah persamaan diferensial yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.6}$$

dimana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi kontinu dari x pada interval (daerah) dimana P dan Q terdifinisi.

Faktor integrasi dari persamaan diferensial (2.6) adalah fungsi dari x berbentuk

$$e^{\int P(x)dx}$$

dengan konstanta integrasi dipilih nol. Dengan mengalikan kedua ruas (2.6) dengan faktor $e^{\int P(x)dx}dx$ akan diperoleh

$$e^{\int P(x)dx}dx + (P(x)y - Q(x))e^{\int P(x)dx}dx = 0 \tag{2.7}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

koefisien dari dx dan dy dalam (2.7) berturut-turut diberikan oleh $(P(x)-Q(x))e^{\int P(x)dx}$ dan $e^{\int P(x)dx}$. Sekarang diferensialkan koefisien dx terhadap y untuk mendapatkan

$$P(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.8}$$

dan koefisien dy terhadap x untuk mendapatkan

$$P(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.9}$$

(Darmawijoyo, 2011).

Contoh:

Diketahui persamaan logistik adalah:

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{k}\right) \tag{2.10}$$

mencari solusi analitik dengan menggunakan persamaan diferensial linier orde satu akan dihasilkan solusi sebagai berikut

$$s(t) = \frac{k}{1+ce^{-rt}} \tag{2.11}$$

2.4 Persamaan Diferensial dengan Waktu Tunda

Salah satu bagian dari persamaan diferensial yang masih dipertimbangkan sampai sekarang adalah persamaan diferensial dengan waktu tunda atau *delay differential equations* (DDEs). Waktu perlambatan sangat penting untuk diperhitungkan dalam dunia pemodelan karena keputusan dibuat berdasarkan suatu realita. Merupakan suatu hal yang penting untuk mempertimbangkan model populasi dengan waktu tunda dimana laju pertumbuahn populasi tidak hanya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bergantung pada waktu t tetapi juga bergantung pada waktu $(t-\tau)$ dimana τ adalah waktu perlambatan atau waktu tunda.

Misalkan x adalah variabel terikat, t adalah variabel bebas dan τ adalah sebarang konstanta positif. Untuk sebarang persamaan yang mempunyai bentuk

$$F(x(t), x'(t), x(t-\tau), x'(t-\tau), t) = 0 \qquad (2.19)$$

Disebut sebagai persamaan diferensial dengan waktu tunda orde pertama dengan sebuah konstanta tunda. Jika persamaan tidak tergabung dengan $x'(t-\tau)$ maka disebut persamaan diferensial yang diperlambat. Jika persamaan tergabung dengan $x'(t-\tau)$ maka disebut persamaan diferensial netral.

Persamaan (2.19) disebut orde pertama karena pada persamaan tersebut terdapat turunan tertingginya adalah turunan orde pertama dan disebut memiliki sebuah konstanta karena pada kenyataannya persamaan hanya memiliki satu waktu tunda saja yaitu τ (Cain dan Reynold, 2010).

Definisi 6

Menurut Kuang (1993) persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t-\tau) + = 0, m \leq n \qquad (2.12)$$

dengan τ adalah waktu tunda, $m \leq n$, dan $\frac{d^0}{dt^0} x(t) = x(t)$, misalkan $x(t) = e^{\lambda t}$ maka

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$e^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k e^{-\lambda\tau}\right) = 0$$

karena $e^{\lambda t} \neq 0$ maka

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k e^{-\lambda\tau} = 0 \qquad (2.13)$$

persamaan (2.13) disebut karakteristik dari persamaan (2.12) misalkan $p_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ dan $p_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ maka persamaan (2.13) dapat ditulis sebagai:

$$p_1(\lambda) + p_2(\lambda) e^{\lambda t} = 0 \qquad (2.14)$$

Salah satu contoh persamaan diferensial dengan waktu tunda adalah persamaan logistik dengan waktu tunda adalah sebagai berikut :

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t)\left(1 - \frac{X(t-\tau)}{K}\right) \qquad (2.15)$$

2.5 Model Matematika

Model adalah suatu konsep atau objek yang digunakan untuk menggambar suatu kenyataan untuk mendapatkan suatu bentuk yang dapat dipahami (Mayer, 1985).

Secara umum tahapan dalam membangun sebuah model adalah meliputi proses menetapkan masalah yang akan dimodelkan, identifikasi masalah meliputi identifikasi variabel-variabel yang akan digunakan dalam pemodelan, menetapkan hukum-hukum yang berpengaruh pada hubungan dan sifat dari vaariabel-variabel, mentranslasikan hukum-hukum dan data lain kedalam bentuk notasi matematika,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

menyelesaikan persamaan yang dihasilkan, mengaplikasikan solusi kedalam sistem fisik, menguji untuk mengetahui apakah solusi yang dihasilkan dapat diterima, meninjau kembali model atau permasalahan jika diperlukan (Boyce dan DilPrima, 1999).

Definisi 7:

Model matematika adalah sebuah model yang bagian–bagiannya merupakan konsep matematika, seperti konstanta, variabel, fungsi, persamaan pertidaksamaan dan sebagainya (Mayer, 1985).

Dari definisi di atas dapat disimpulkan bahwa model matematika yang dapat menggambarkan perilaku dari persamaan. Dalam menyusun sebuah model harus mengetahui hubungan antara matematika dengan persamaan yang akan didekati, khususnya faktor-faktor yang berkaitan dengan persamaan tersebut. Pendekatan model yang digunakan sangat bergantung pada pendekatan yang ingin di capai. Sedangkan secara umum model dapat dikategorikan berdasarkan skala waktu dan tingkat kompleksitas yang dicerminkan dari aspek ketidakpastian (Pagalay, 2009).

1. Jika model tidak mempertimbangkan aspek waktu, model tersebut dinamakan model statis.
2. Jika aspek waktu dipertimbangkan, maka model tersebut dinamakn model dinamik.
3. Jika model yang dibangun mempertimbangkan aspek ketidakpastian yang lebih menggambarkan realitas dunia nyata, model tersebut merupakan model yang bersifat deterministik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4. Jika ketidakpastian dimasukkan ke dalam model interaksi antara skala waktu dan ketidakpastian akan menghasilkan model yang lebih kompleks lagi

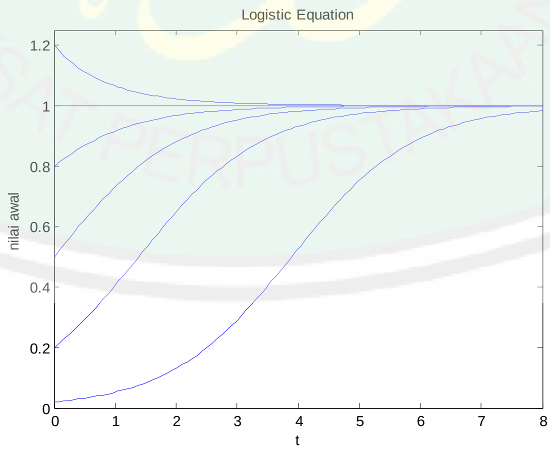
2.6 Model Logistik

Model logistik (persamaan logistik) atau model *Verhulst* adalah sebuah model pertumbuhan populasi pada spesies tunggal. Model tersebut dideskripsikan sebagai

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \tag{2.16}$$

Dimana r merupakan laju pertumbuhan populasi dan k adalah daya kapasitas atau kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum. Persamaan diferensial biasa ini dapat dengan mudah diselesaikan secara analitik dengan menggunakan metode pemisahan variabel (Cain dan Reynold, 2010).

Simulasi model logistik ditunjukkan pada gambar 2.1



Gambar 2.1. Gambar Model Logistik
dengan K=1, r =1 dan Lima Kondisi Awal Masing Masing
$x(0) = 0.02, x(0) = 0.2, x(0) = 0.5, x(0) = 0.8$ dan $x(0) = 0.12$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Persamaan (2.18) merupakan fungsi logistik kontinu dengan solusi persamaan logistik yaitu:

$$s(t) = \frac{k}{1 + ce^{-rt}} \tag{2.17}$$

2.7 Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda

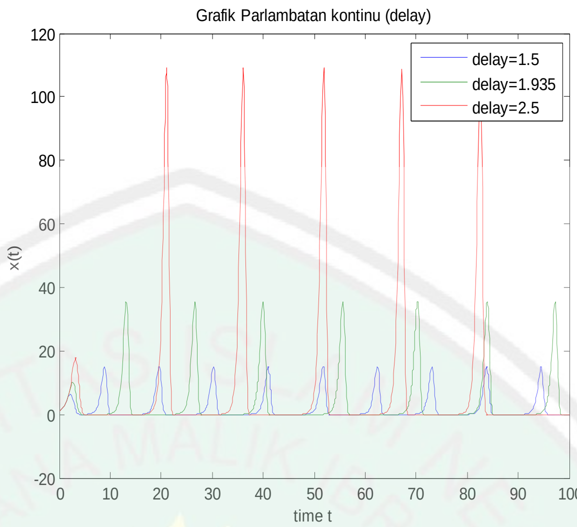
Persamaan logistik tunggal dengan perlambatan adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \tag{2.18}$$

dimana τ adalah sebuah waktu perlambatan dan dianggap positif. Suatu titik ekuilibrium positif dari model ini adalah K. Hal ini diusulkan oleh Hutchinson di Gopalsamy, model (2.18) tersebut dapat digunakan pada model pertumbuhan populasi jenis dinamik tunggal terhadap ketahanan level K, dengan sebuah konstanta laju pertumbuhan intrinsik r. Bentuk $\left(1 - \frac{X(t-\tau)}{K}\right)$ pada model (2.18) merupakan sebuah kepadatan tergantung pada mekanisme pengaruh arus balik yang mengambil τ satuan waktu untuk menanggapi perubahan pada kepadatan populasi diwakili pada model (2.18) oleh x. Model logistik dengan perlambatan (2.18) dikenal sebagai persamaan perlambatan Verhulst atau persamaan Hutchinson (Toaha, 2006).

Berikut adalah kurva solusi model logistik dengan beberapa nilai perlambatan berbeda:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 2.2. Gambar Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda dengan K= 100 ,r=1 dan Tiga Nilai Perlambatan Yaitu $\tau = 1.5$, $\tau = 1.935$ dan $\tau = 2.5$

Menurut Timunemo (2008) model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda setimbang pada jumlah populasi nol dan pada jumlah populasi yang sama dengan *carrying capacity*. Pada jumlah populasi nol, keadaan setimbangnya tidak stabil. Secara umum semakin besar waktu tunda dalam pertumbuhan populasi menyebabkan ketidak-stabilan terhadap pertumbuhan, dalam hal ini terjadi ledakan populasi dan juga populasi dapat berkurang hingga akhirnya mengalami kepunahan.

2.8 Titik Tetap atau *Fixed Point*

Satu karakteristik dari persamaan linier mengidentifikasi banyak solusi ke arah asal. Asumsikan bahwa sistem persamaan diferensial $\dot{x} = F(x)$ memiliki turunan parsial komponen dari F, ini adalah solusi yang unik. Diberikan $\emptyset(t; x_0)$ maka (Robinson, 2004):

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{d}{dt}\emptyset(t;x_0) = F(\emptyset(t;x_0)) \text{ dan } \emptyset(0;x_0) = x_0$$

Definisi 8

Satu titik x^* di sebut satu titik tetap, jika $f(x^*)=0$. Solusi mulai pada satu titik tetap mempunyai percepatan nol dan $\emptyset(t,x^*)=x^*$ bagi seluruh t, ini adalah titik tetap. Di sebut titik keseimbangan, jika kekuatan berada di dalam keseimbangan dan berkumpul pada titik tersebut (Robinson, 2004).

2.9 Linierisasi

Linearisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial taklinier dengan persamaan diferensial linier untuk membantu memahami persamaan diferensial taklinier. Suatu persamaan autonomous dimana f adalah taklinier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier disekitar (x^*) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor disekitar (x^*) dan menghilangkan suku takliniernya sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*) + \frac{df}{dx}(x^*)(x-x^*) \tag{2.19}$$

Bila dilakukan substitusi $(x-x^*)=u$ dan maka $\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}$ pada keadaan setimbang $f(x^*)=0$ sehingga diperoleh persamaan linier sebagai berikut

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dx}(x^*)u \tag{2.20}$$

Persamaan (2.30) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt}(u) = A_0(u) \text{ dimana } A_0 = [f_x] \tag{2.21}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dimana A_0 pada $x = x^*$. Matriks tersebut disebut matriks Jacobian (Boyce dan DilPrima, 1999)

2.10 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen merupakan nilai yang didapatkan sebagai solusi dari persamaan karakteristik dari matriks Jacobi. Nilai eigen dapat menyimpulkan bentuk kestabilan (Neuhauser, 2004)

Jika A adalah sebuah matriks $n \text{ x } n$ maka sebuah vektor tak nol v pada R^n disebut vektor eigen *(eigen vector)* dari A jika Av adalah sebuah kelipatan skalar dari v, atau dapat ditulis

$$Av = \lambda v \tag{2.22}$$

Untuk sebarang skalar λ. Maka skalar λ disebut nilai eigen *(eigen value)* dari A dan v disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton dan Rores, 2004).

Andaikan bahwa λ adalah sebuah nilai eigen dari matriks A, dan v adalah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen λ. Maka $Av = v = Iv$, dimana I adalah matriks identitas $n \text{ x } n$, sedemikian sehingga $(A - I)v = 0$ karena $v \in \mathbb{R}^n$ tidak kosong, maka:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.23}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Atau dengan kata lain

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) adalah persamaan polinomial. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, diberikan nilai eigen dari matriks A. Atau, untuk sebarang nilai eigen λ dari matriks A, himpunan $\{v \in \mathbb{R}^n : (A-I)=0\}$ adalah ruang nul dari matriks $(A-\lambda I)$ (Chen, 2008).

Persamaan (2.23) disebut persamaan karakteristik *(characteristic equation)* matriks A. Apabila diperluas lagi, determinan $(A-\lambda I)$ adalah sebuah polinomial p dalam variable λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik.

Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1. Secara umum, polinomial karakteristik $p(v)$ dari sebuah matriks n x n memiliki bentuk

$$p(v)=\det(A-I)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+...+c_n \tag{2.25}$$

Berdasarkan teorema dasar Aljabar, bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+...+C_n=0 \tag{2.26}$$

memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga sebuah matriks n x n memiliki sebnyak-banyaknya n nilai eigen yang berbeda (Anton dan Rores, 2004).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk setiap pasangan nilai eigen dan vektor eigen $(\lambda_i, \lambda v^i)$ maka ada suatu vektor solusi yang bersesuaian $v^i e^{\lambda_i t}$ untuk matriks A. Jika nilai eigennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan semuanya berbeda, maka akan ada n solusi yaitu:

$$v^1 e^{1\,t}, ..., v^n e^{n\,t}$$

Pada kasus ini, solusi umum dari matriks A adalah kombinasi linier dari

$$x = C_1 v^1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v^2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n v^n e^{\lambda_n t} \qquad (2.27)$$

dimana konstanta $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dapat diperoleh dengan memberikan sebuah nilai awal (Boyce dan DilPrima, 2001)

2.11 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Menurut Boyce (1986) misalkan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen persamaan otonomous linear yang berkaitan dengan persamaan *almost* linear kestabilan titik kesetimbangan (0.0) sistem persamaan dan persamaan *almost* linear ditunjukkan pada tabel 2.1 berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 2.1 Kestabilan Titik Tetap Dinamik Linier

No.	Nilai Eigen	Kestabilan
1	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	-
2	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil
3	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik
4	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak Stabil
5	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil
6	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik
7	$\lambda_{1.2} = a \pm bi \ \in C$	-
8	$a > 0$	Tidak Stabil
9	$a < 0$	Stabil Asimtotik
10	$a = 0$	Stabil

2.12 Jenis-jenis Kestabilan

Penentuan kestabilan titik tetap didapat dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu $\lambda_1, i = 1,2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari A, yaitu $(A - \lambda I)\, x = 0$.

Secara umum menurut Lara (2009) kestabilan titik tetap mempunyai tiga perilaku sebagai berikut:

1. Stabil, jika
   a. Setiap nilai eigen adalah negatif ($\lambda_1 < 0,1,2, \dots, n$).
   b. Setiap komponen nilai eigen kompleks bagian realnya lebih kecil atau sama dengan nol, ($Re(\lambda_1) \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Tidak stabil, jika
   a. Setiap nilai eigen adalah positif ($\lambda_1 > 0{,}1{,}2, \ldots, n$).
   b. Setiap komponen nilai eigen kompleks bagian realnya lebih besar dari nol, ($Re(\lambda_1) > 0$ untuk setiap $i = 1{,}2, \ldots, n$).
3. Saddle, jika

   Perkalian dua nilai eigen real adalah negative $\lambda_i \lambda_j < 0$ untuk setiap i dan j sembarang).

2.13 Penyakit Tumor

Tumor merupakan sekelompok sel-sel abnormal yang terbentuk hasil proses pembelahan sel yang berlebihan dan tak terkoordinasi. Dalam bahasa medisnya, tumor dikenal sebagai *neoplasia*. *Neo* berarti baru, *plasia* berarti pertumbuhan/pembelahan, jadi *neoplasia* mengacu pada pertumbuhan sel yang baru, yang berbeda dari pertumbuhan sel-sel di sekitarnya yang normal. Yang perlu diketahui, sel tubuh secara umum memiliki 2 tugas utama yaitu melaksanakan aktivitas fungsionalnya serta berkembang biak dengan membelah diri. Namun pada sel tumor yang terjadi adalah hampir semua energi sel digunakan untuk aktivitas berkembangbiak semata. Fungsi perkembangbiakan ini diatur oleh inti sel *(nucleus)*, akibatnya pada sel tumor dijumpai inti sel yang membesar karena tuntutan kerja yang meningkat (Anonimus, 2009).

Untuk menangani penyakit tumor yang berbahaya telah dikembangkan teknologi medis baru oleh para ilmuwan seperti terapi gen dan imunoterapi, tetapi teknik tersebut masih dalam masa perkembangan dan banyak negara yang belum menggunakannya. Oleh karena itu, teknik pengobatan tradisional seperti

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kemoterapi masih diterapkan. Dokter merekomendasikan bagi pasiennya untuk menjalani kemoterapi yaitu dengan menginjeksikan obat-obatan beracun atau *sitotoksik* melalui selang infus atau selang oral dengan alasan agar tumor tidak cepat menyebar. Kemoterapi dilakukan dengan beberapa alasan seperti untuk mengontrol pertumbuhan kanker, mengurangi gejala-gejala yang timbul seperti nyeri dan menyusutkan kanker sebelum dilakukan operasi (Patoppoi, 2012).

2.14 Penyembuhan Penyakit dalam Al-Qur'an

Salah satu penyakit yang diturunkan Allah kepada umatnya adalah penyakit tumor. Terdapat beberapa ayat Al-Qur'an memberikan bahasan dan penjelasan bahwa setiap penyakit yang diturunkan kepada manusia terdapat pula obatnya. Salah satu obat dari penyakit adalah madu yang diproduksi oleh lebah, firman Allah surat An-Nahl ayat 69

ثُمَّ كُلِى مِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِ فَٱسْلُكِى سُبُلَ رَبِّكِ ذُلُلًا ۚ يَخْرُجُ مِنۢ بُطُونِهَا شَرَابٌ مُّخْتَلِفٌ أَلْوَٰنُهُۥ فِيهِ شِفَآءٌ
لِّلنَّاسِ ۗ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ لَأٓيَةً لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ﴿٦٩﴾

Artinya: "Kemudian makanlah dari tiap-tiap (macam) buah-buahan dan tempuhlah jalan Tuhanmu yang telah dimudahkan (bagimu). dari perut lebah itu ke luar minuman (madu) yang bermacam-macam warnanya, di dalamnya terdapat obat yang menyembuhkan bagi manusia. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda (kebesaran Tuhan) bagi orang-orang yang memikirkan."

Ayat ini mengarahkan kepada Nabi Muhammad saw. dengan menyatakan: *kemudian makanlah yakni hisaplah dari setiap* macam kembang *buah-buahan, lalu tempuhlah jalan-jalan* yang telah diciptakan oleh *Tuhanmu* pemeliharamu *dalam keadaan mudah* bagimu.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan perintah Allah swt. kepada lebah yang mengantarnya memiliki naluri yang demikian mengagumkan, lebah dapat melakukan aneka kegiatan yang bermanfaat dengan sangat mudah, bahkan bermanfaat bagi manusia. Manfaat itu antara lain adalah senantiasa *keluar dari* dalam *perutnya* setelah menghisap sari kembang-kembang, sejenis *minuman* yang sungguh lezat yaitu madu *yang bermacam-macam* sesuai dengan waktu dan jenis sari kembang yang dihisapnya. *Di dalamnya* yakni pada madu itu *terdapat* obat *penyembuh bagi manusia* walaupun kembang yang dimakannya ada yang berbahaya bagi manusia. *Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda* kekuasaan dan kebesaran Allah *bagi orang-orang berfikir.*

Firman Allah pada surat An-Nahl ayat 69 terdapat kata *di dalamnya terdapat* obat *penyembuh bagi manusia* dijadikan alasan oleh ulama untuk menyatakan bahwa madu adalah obat dari segala macam penyakit. Mereka juga menunjukkan hadits yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari bahwa salah satu sahabat Rasul saw. mengadu bahwa saudaranya sedang sakit perut. Rasul saw. menyarankan agar memberinya madu. Saran Rasul saw. dia laksanakan, tetapi sakit perut saudaranya belum juga sembuh. Sekali lagi mengadu, sekali lagi juga Rasul saw. menyarankan hal yang sama. Hal serupa berulang untuk ketiga kalinya, Rasul saw. kali ini bersabda: “Allah Maha Benar, perut saudaramu berbohong. Beri minumlah madu.” Sang sahabat kembali memberinya madu, dan kali ini ia sembuh (HR. Bukhari dan Muslim, melalui Abu Sa’id al-Khudri) (Shihab, 2002).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan skripsi ini menyajikan kestabilan persamaan logistik dengan waktu tunda serta dianalisis kestabilannya. Dengan menganalisis kestabilannya maka akan diketahui titik-titik tetap yang mengalami kestabilan sehingga pada titik tersebut sel tumor juga akan berkembang stabil. Setelah dianalisis kestabilan skripsi ini juga akan menyajikan simulasi dengan menggunakan bantuan Matlab dengan parameter tertentu kemudian diberikan kesimpulan serta dapat diketahui perbedaan simulasi persamaan logistik pada pertumbuhan tumor dengan waktu tunda. Pada simulasi tersebut akan diberikan waktu tunda yang berbeda dan selang waktu tertentu.

3.1 Identifikasi Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda

Model logistik tunggal dengan perlambatan adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \tag{3.1}$$

dimana τ adalah sebuah waktu perlambatan dan dianggap positif. Suatu titik ekuilibrium positif dari model ini adalah K.

3.2 Titik Tetap Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda

Untuk mencari titik tetap persamaan (3.1), maka akan digunakan nilai parameter sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$r = 1$$
$$K = 100 \tag{3.2}$$

(Muslikh dkk,-)

Titik tetap persamaan (3.1) akan diperoleh dengan mencari nilai $x^*(t)$ sehingga $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ maka persamaan (3.1) menjadi:

$$0 = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \tag{3.3}$$

Pada saat titik tetap didapat maka laju pertumbuhan dari persamaan (3.1) akan tetap. Dengan kata lain, tidak terdapat perubahan jumlah populasi lagi (keadaan setimbang).

Pada kasus ini akan ditentukan $x^*{}_1$ untuk titik tetappertama dari $\frac{dx(t)}{dt} = 0.$ Pada persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$0 = rx(t) - \frac{r}{K}x(t)x(t-\tau) \tag{3.4}$$

Ketika $x = 0$ (tidak ada populasi), maka persamaan (3.4) menjadi

$$0 = r(0) - \frac{r}{K}(0)x(t-\tau)$$

Dengan memasukkan nilai parameter persamaan (3.2) maka persamaan di atas dapat ditulis

$$0 = 1(0) - \frac{1}{100}(0)x(t-\tau) \tag{3.5}$$

Persamaan (3.5) artinya pada saat $x = 0$ maka persamaan (3.1) tidak mempunyai perubahan jumlah populasi. Sehingga titik tetap pertama dari persamaan (3.1)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

adalah $x^*_1 = 0$. Dapat dikatakan bahwa tanpa adanya perubahan populasi sel tumor maka populasi sel tumor dalam keadaan setimbang.

Titik tetap yang kedua persamaan (3.1) akan ditentukan x^*_2 sehingga $\frac{dx(t)}{dt} = 0$. Pada persamaan (3.4) akan diberikan parameter pada persamaan (3.2), sehingga:

$$0 = 1x(t) - \frac{1}{100}x(t)x(t-\tau) \tag{3.6}$$

Persamaan (3.6) dapat ditulis

$$x(t) = \frac{1}{100}x(t)x(t-\tau) \tag{3.7}$$

Sehingga persamaannya menjadi

$$x(t)x(t-\tau) = 100x(t) \tag{3.8}$$

Dari persamaan (3.8) dapat diperoleh

$$x(t-\tau) = 100 \tag{3.9}$$

Maka diperoleh

$$x(t) = 100 + \tau \tag{3.10}$$

Sehingga titik tetap kedua yang memenuhi persamaan (3.1) untuk x^*_2 adalah $(100+\tau) = K + \tau$. Jadi meskipun tanpa adanya populasi sel tumor maka daya kapasitas atau kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum, masih bisa dilakukan untuk menjaga populasi dari kepunahan.

Jadi titik tetap yang memenuhi persamaan (3.1) adalah $x^* = 0$ dan $x^* = K + \tau$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.3 Linierisasi Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda

Pada bagian sebelumnya telah diperoleh titik tetap dari persamaan logistik dengan waktu tunda. Diperoleh dua titik tetap yaitu $x^*_1 = 0$ dan pada saat $x^*_2 = K + \tau.$

Untuk memperoleh analisis kestabilan pada titik tetap tersebut dilakukan dengan menganalisis kestabilan melalui linierisasi persamaan (3.1).

Liniearisasi adalah proses aproksimasi persamaan diferensial tak linier dengan persamaan diferensial linier. Proses ini dilakukan dengan cara menghilangkan bagian tak linier dari persamaan diferensial tak linier dengan menggunakan deret taylor disekitar titik-titik tetapnya.

Definisi fungsi untuk persamaan (3.1) dimisalkan

$$f(x(t)) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{k}\right)$$

Prosedur linierisasi di sekitar titik-titik tetap x_i^* dimana untuk setiap $i = 1, 2$ dengan deret Taylor adalah sebagai berikut:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(x_i^*) + \frac{df(x_i^*)}{dx}(x(t) - x^*) + \ldots$$

dimana setiap $u(t) = x(t) - x^*$. Pada keadaan ini selalu berlaku $f(x_i^*) = 0$ sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{df(x_i^*)}{dx} u(t) \tag{3.11}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Persamaan (3.10) tersebut dapat ditulis

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dx}(x_i^*)\ (u)$$

Sehingga persamaan linear pada titik tetap x^*_i diberikan dengan

$$(u) = \frac{df\,(t)}{dx}$$

Persamaan (3.10) adalah persamaan yang terlinierisasi. Kemudian disubstitusikan fungsi $f\,(x)$ ke persamaan (3.1) sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{df\,(t)}{dt} = \frac{d\left(rx(t)\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)\right)}{dx} \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.12) didapatkan

$$\frac{df\,(t)}{dt} = r\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)-\frac{rx(t)}{K} \quad (3.13)$$

Untuk mendapatkan vektor kolom pada matriks Jacobian, maka persamaan (3.13) dapat dijadikan matriks 1x1 sebagai berikut:

$$\frac{df\,(t)}{dt} = \left[r\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)-\frac{rx(t)}{K}\right] \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) merupakan komponen vektor kolom pada matriks Jacobian untuk persamaan logistik dengan waktu tunda.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.4 Nilai Eigen dan Vektor eigen

Dari Persamaan (3.14) di atas dapat dicari nilai eigennya. Untuk mencari nilai eigen dari titik tetap pertama $x(t)=0$, maka subtitusikan titik tetap pertama ke dalam matriks Jacobian (3.14) maka dapat diketahui

$$J_{E_1} = \left[r\left(1+\frac{\tau}{K}\right)\right][x] \tag{3.15}$$

dengan memasukkan nilai parameter pada persamaan (3.2), sehingga didapatkan

$$J_{E_1} = \left[1+\frac{1}{100}\tau\right][x] \tag{3.16}$$

Selanjutnya mencari nilai eigen dari titik tetap pertama, nilai eigen dapat dicari dengan menggunakan

$$\det(A-\lambda I)=0$$

Sehingga dengan mensubtitusikan persamaan (3.16), akan diperoleh

$$J_{E_1} = \left|\left[1+\frac{1}{100}\tau\right]-\lambda I\right| = 0 \tag{3.17}$$

persamaan (3.17) dapat ditulis

$$J_{E_1} = \left|\left[1+\frac{1}{100}\tau\right]-[\lambda]\right| = 0 \tag{3.18}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk titik tetap pertama $x(t)=0$ adalah $\lambda_1 = 1+\frac{1}{100}\tau$. Nilai eigen pada titik pertama ini dapat menunjukkan pola yang tidak stabil karena nilai eigen bernilai positif, sehingga pertumbuhan populasi sel tumor juga tidak stabil.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya vektor eigen untuk nilai eigen pada titik tetap pertama dapat dicari dengan

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v}^{(1)} = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\left|\left[1+\frac{1}{100}\tau\right]-\left[1+\frac{1}{100}\tau\right]\vec{v}^{1}\right| = 0 \quad (3.19)$$

persamaan (3.19) dapat ditulis

$$\left[1+\frac{1}{100}\tau\right]=\left[1+\frac{1}{100}\tau\right]\vec{v}^{1} \quad (3.20)$$

Sehingga diperoleh vektor eigen untuk λ_1, yaitu

$$\vec{v}^{(1)} = [x] = [1]$$

Dengan demikian solusi umum untuk persamaan (3.16) yaitu

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)}$$

Solusi umum untuk persamaan (3.16) adalah

$$\vec{x} = C_1 e^{\left(1+\frac{1}{100}\tau\right)t}[1] \quad (3.21)$$

Sedangkan untuk mencari nilai eigen dari titik tetap kedua $x(t) = K+\tau$, maka masukkan titik tetap kedua ke dalam matriks Jacobian (3.14) maka dapat diketahui

$$J_{E_2} = \left[-\frac{r(K+\tau)}{K}\right][x] \quad (3.22)$$

dengan memasukkan nilai parameter pada persamaan (3.2), maka diperoleh

$$J_{E_2} = \left[-1-\frac{1}{100}\tau\right][x] \quad (3.23)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Nilai eigen untuk titik tetap kedua dapat dicari dengan

$$\det(A-\lambda I)=0$$

Sehingga dengan mensubtitusikan persamaan (3.23), didapatkan

$$J_{E_2}=\left|\left[-1-\frac{1}{100}\tau\right]-\lambda I\right|=0 \tag{3.24}$$

dari persamaan (3.24) diperoleh

$$J_{E_2}=\left|\left[-1-\frac{1}{100}\tau\right]-[\lambda]\right|=0 \tag{3.25}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk titik tetap kedua $x(t)=K+\tau$, adalah $\lambda_2=-1-\frac{1}{100}\tau$. Nilai eigen pada titik kedua menunjukkan pertumbuhan populasi yang stabil karena nilai eigen bernilai negatif, sehingga pertumbuhan populasi sel tumor juga mengalami pertumbuhan yang stabil.

Selanjutnya vektor eigen untuk nilai eigen pada titik tetap kedua dapat dicari dengan

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}^{(1)}=0$$

Sehingga diperoleh

$$\left|\left[-1-\frac{1}{100}\tau\right]-\left[-1-\frac{1}{100}\tau\right]\vec{v}^{1}\right|=0 \tag{3.26}$$

dari persamaan (3.26) didapatkan

$$\left[-1-\frac{1}{100}\tau\right]=\left[-1-\frac{1}{100}\tau\right]\vec{v}^{1} \tag{3.27}$$

maka persamaan (3.27) memilikivektor eigen untuk λ_2, yaitu

$$\vec{v}^{(1)}=[x]=[1]$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga solusi umum untuk persamaan (3.23) yaitu

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)}$$

Solusi umum untuk persamaan (3.23) adalah

$$\vec{x} = C_1 e^{\left(-1-\frac{1}{100}\tau\right)t} [1] \tag{3.28}$$

3.5 Analisis Kestabilan di Sekitar Titik tetap

Titik tetap persamaan (3.1) adalah $x^* = 0$ dan $x^* = K + \tau$. Sehingga analisis kestabilan akan dilakukan pada titik-titik tetap tersebut.

3.5.1 Analisis Kestabilan $x^* = 0$

Pada bagian ini, akan dianalisis kestabilan pada saat $x^* = 0$. Diketahui pada persamaan (3.18) dimana dari persamaan tersebut diperoleh nilai eigen untuk titik tetap pertama adalah $\lambda_1 = 1 + \frac{1}{100}\tau$. Nilai eigen pada titik pertama ini dapat menunjukkan perubahan yang tidak stabil karena nilai eigen bernilai positif, sehingga pertumbuhan populasi sel tumor pada titik tetap pertama $x^* = 0$ juga akan mengalami perkembangan populasi yang tidak stabil.

3.5.2 Analisis Kestabilan $x^* = K + \tau$

Selanjutnya akan dilakukan analisis kestabilan pada titik tetap $x^* = K + \tau$. Dari persamaan (3.25) diperoleh nilai eigen untuk titik tetap kedua $x^* = K + \tau$ yaitu $\lambda_2 = -1 - \frac{1}{100}\tau$. Nilai eigen persamaan (3.1) pada titik tetap kedua ini menunjukkan pertumbuhan populasi yang stabil karena nilai eigen bernilai

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

negatif, sehingga pertumbuhan populasi sel tumor juga mengalami pertumbuhan yang stabil.

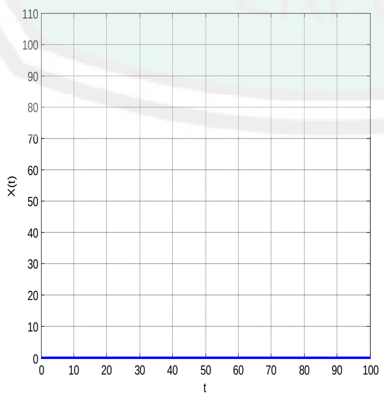
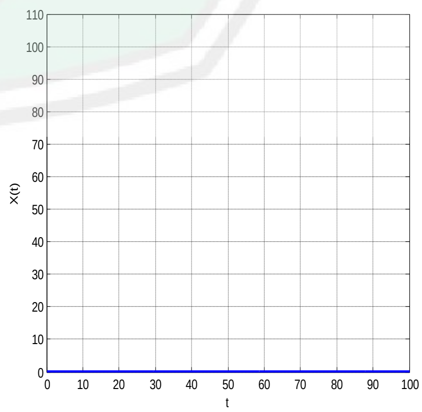
Untuk mengetahui titik tetap kedua $x^{*} = K + \tau$ mengalami kestabilan sampai pada nilai τ maksimal maka akan di lakukan simulasi numerik.

3.6 Simulasi Numerik

Pada bagian ini, akan ditampilkan gambar solusi numerik dari sistem persamaan (3.1) dengan menggunakan bantuan program matlab dan menggunakan nilai parameter pada persamaan (3.2).

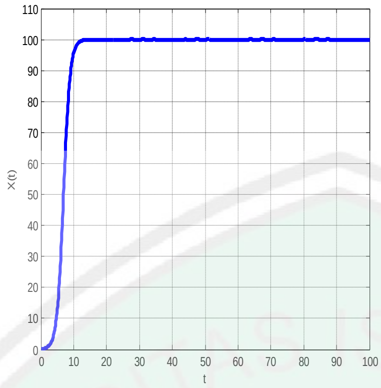
Sebagai perbandingan, akan diberikan beberapa perubahan kondisi untuk perlambatan waktu. Pada skripsi ini akan membandingkan simulasi logistik tanpa waktu dan simulasi persamaan logistik dengan waktu tunda.

Besar τ yang diberikan pada skripsi ini adalah $\tau = 0, 0.1, 0.5, 1, 1.5, 1.6,$ dan 2.

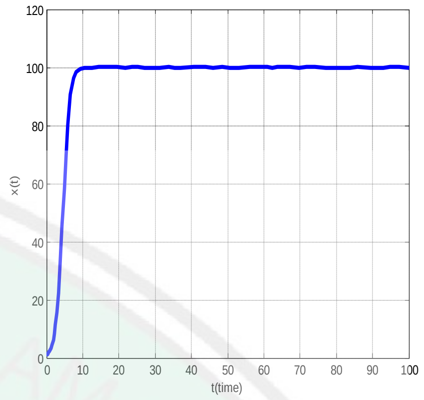
Nilai τ	Persamaan Logistik tanpa waktu tunda	Persamaan Logistik dengan waktu tunda
$\tau = 0$	 (a.1)	 (a.2)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\tau = 0.1$

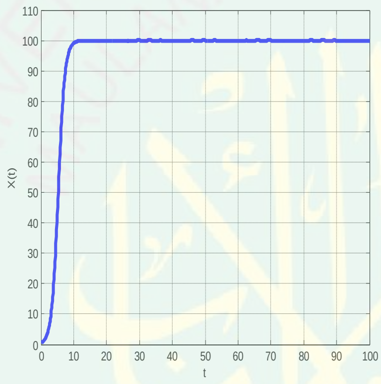


(b.1)

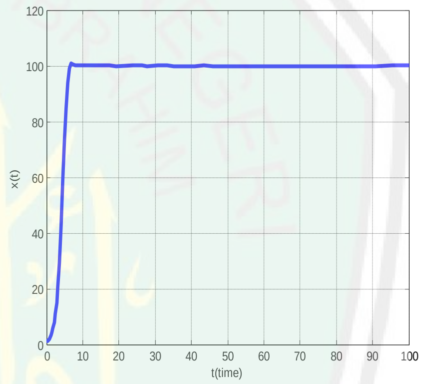


(b.2)

$\tau = 0.5$

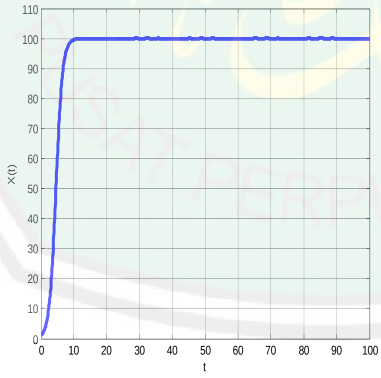


(c.1)

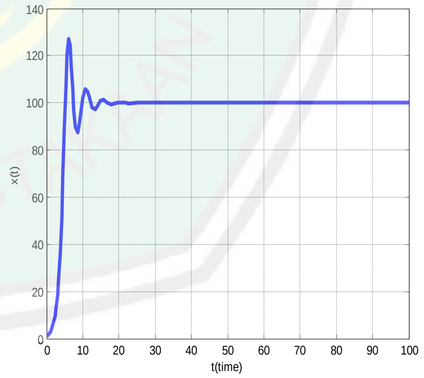


(c.2)

$\tau = 1$

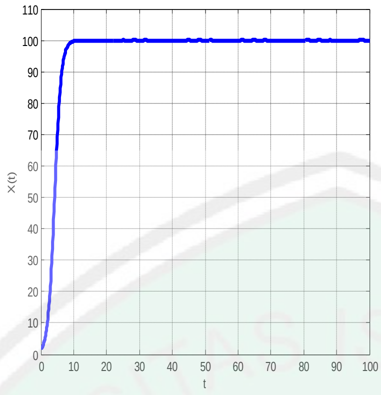
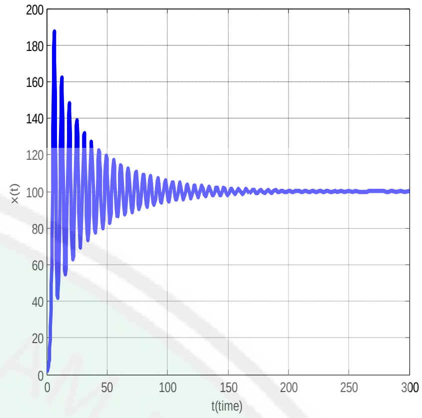
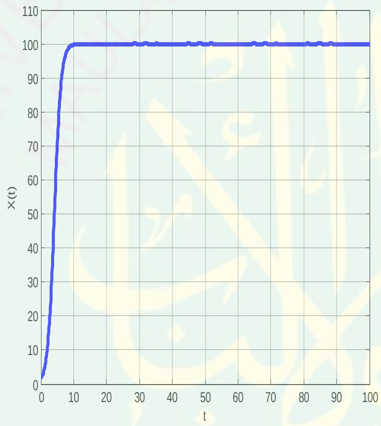
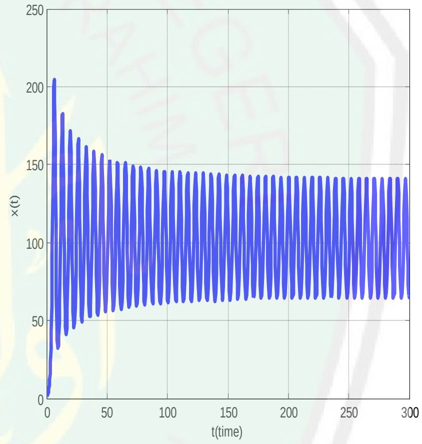
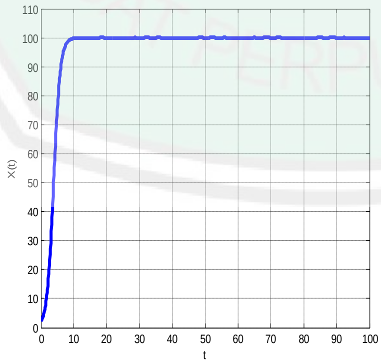
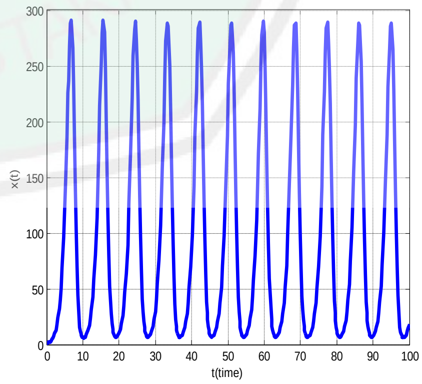


(d.1)



(d.2)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\tau = 1.5$	 (e.1)	 (e.2)
$\tau = 1.6$	 (f.1)	 (f.1)
$\tau = 2$	 (g.1)	 (g.2)

Gambar 3.1. Gambar Persamaan Logistik Tanpa Waktu Tunda dan Gambar Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda dengan Nilai Parameter yang diberikan pada (3.2)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pola perkembangan logistik terlihat pada gambar (3.1). Gambar pada bagian (a.1) merupakan pola perkembangan persamaan logistik tanpa waktu tunda dan pada bagian (a.2) merupakan pola perkembangan logistik dengan waktu tunda $\tau = 0$ dengan nilai parameter pada persamaan (3.2). Pada kondisi ini, pola perkembangan sel tumor mendekati 0 sehingga kondisi ini dapat dikatakan kondisi yang stabil.

Pada gambar persamaan logistik tanpa waktu tunda pada bagian (b.1) dan diberikan parameter pada persamaan (3.2) perkembangan sel tumor mengalami kenaikan hingga pada $x(t) = 100$ kemudian perkembangan sel tumor mencapai kestabilan. Pada persamaan logistik dengan waktu tunda $\tau = 0.1$ pada bagian (b.2) kondisi perkembangan sel tumor tidak jauh berbeda dengan kondisi pola perilaku (b.1) dimana pada persamaan ini belum terjadi osilasi, perkembangan mencapai kenaikan hingga pada disekitar titik tetap $x(t) = 100$ dan akhirnya mencapai kestabilannya.

Sedangkan pola perkembang sel tumor pada gambar (c.1) dan (c.2) atau persamaan logistik dengan waktu tunda $\tau = 0.5$ dengan diberikan parameter yang sama yakni persamaan (3.2) sel tumor mengalami kenaikan disekitar titik tetap hingga mencapai $x(t) = 100$ dan diakhiri dengan pola perkembangan yang mencapai kestabilan persamaan tersebut.

Pola perkembangan sel tumor mulai berbeda pada gambar bagian (d.1) yang merupakan persamaan logistik tanpa waktu tunda dan bagian (d.2) yang merupakan persamaan logitik dengan waktu tunda dengan perlambatan sebesar 1 dan parameter pada persamaan (3.2). Sel tumor pada gambar (d.1) mengalami

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kenaikan dan terus tumbuh tanpa berhenti (penundaan) hingga titik $x(t)=100$ kemudian mencapai kestabilannya. Sedangkan pada gambar (d.2) sel tumor mengalami kenaikan atau perkembangan hingga mencapai titik $x(t)=127$ kemudian mengalami perkembangan sel tumor mengalami penurunan (penundaan) karena pemberian rangsangan obat atau usaha lainnya hingga titik $X(t)=87.31.$ Pola perkembangan sel tumor pada gambar (d.2) mengalami osilasi hingga $t=27.95$ kemudian mencapai titik kestabilan disekitar titik tetap yaitu pada $x(t)=100.$

Pada gambar (3.1) dengan parameter pada persamaan (3.2) dan $\tau=1.5$ pada persamaan logistik tanpa waktu tunda atau gambar bagian (e.1) dan persamaan logistik dengan waktu tunda pada gambar bagian (e.2) terjadi perubahan yang signifikan yakni pada gambar bagian (e.1) pertumbuhan sel tumor sama seperti pada persamaan logistik tanpa waktu tunda lainnya yaitu mengalami kenaikan hingga $x(t)=100$ kemudian mencapai kestabilan di sekitar titik tersebut. Sedangkan pada gambar bagian (e.2) perkembangan sel tumor mengalami osilasi (kenaikan dan penuruan) disekitar $x(t)=100$ hingga $t=250.5$ kemudian mencapai kestabilan disekitar titik $x(t)=100.$

Pola pertumbuhan pada gambar (f.1) hampir sama dengan pola persamaan logistik tanpa waktu tunda sebelumnya, sedangkan pada gambar (f.2) dimana persamaan logistik dengan waktu tunda $\tau=1.6$ perkembangan gambar menjauhi titik tetap sehingga tidak stabil. Sehingga dapat dikatakan perkembangan sel tumor pada titik tetap ini juga tidak akan stabil.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Perilaku persamaan logistik tanpa waktu tunda gambar (3.1) bagian (g.1) mengalami pola yang hampir sama dengan gambar persamaan logistik tanpa waktu tunda yang sebelumnya, yakni mengalami kenaikan atau pertumbuhan tanpa penundaan hingga $x(t) = 100$ dan selanjutnya mencapai kestabilannya. Pola perkembangan sel tumor pada bagian (g.1) berbeda dengan pola perkembangan persamaan logistik dengan waktu tunda sebesar $\tau = 2$. Dengan waktu tunda yang diberikan dan parameter pada persamaan (3.2) perkembangan sel tumor mengalami osilasi teratur dan menyebar tidak hanya di sekitar titik $x(t) = 100$ tetapi menjauhi titik kestabilan. Waktu osilasi perilaku sel tumor ini dapat dilihat dalam tabel berikut :

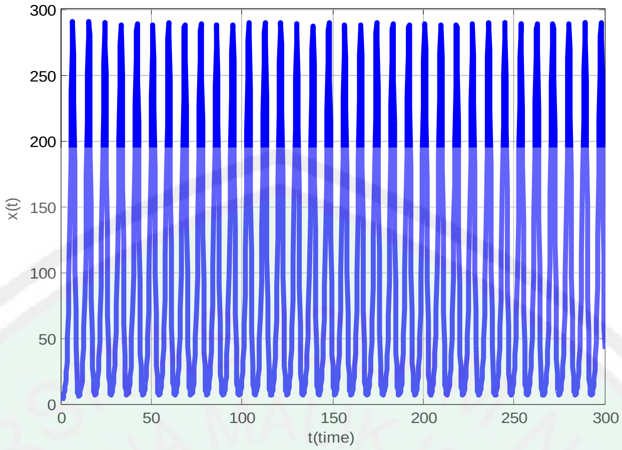
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.1 Waktu Osilasi Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda dengan Menggunakan Parameter $r = 1$ dan $K = 100$ serta Perlambatan $\tau = 2$ mulai $t = 0$ sampai $t = 100$.

Osilasi ke	t pada saat $x(t)$ maksimal	t pada saat $x(t)$ minimal
1	6. 88	10.16
2	15.66	19.07
3	24.55	28.02
4	33.21	36.78
5	42.20	45.60
6	51.07	54.40
7	59.72	63.22
8	68.69	72.02
9	77.45	80.80
10	86.06	89.60
11	85.11	98.40

Pola gambar seperti bagian (g.2) tidak mencapai kestabilan dan terus mengalami osilasi meskipun pada t yang lebih lama misalnya diberikan $t = 300$, seperti gambar berikut :

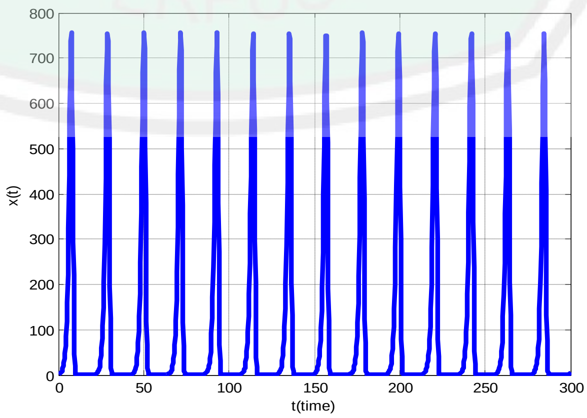
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.2. Gambar Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda $\tau = 2$ dengan Nilai Parameter yang diberikan pada (3.2)

Gambar (3.2) persamaan (3.1) dan parameter pada persamaan (3.2) dengan perlambatan $\tau = 2$ dan $t = 300$ pola perkembangan sel tumor mengalami osilasi terus menerus yang menjauhi titik tetap, sehingga pola perkembangan tersebut disebut pola perkembangan sel tumor yang tidak stabil.

Untuk perbandingan, persamaan (3.1) dengan parameter pada persamaan (3.2), persamaan logistik dengan waktu tunda akan diberikan waktu tunda sebesar 3, Seperti gambar berikut:



Gambar 3.3. Gambar Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda $\tau = 3$ dengan Nilai Parameter yang diberikan pada (3.2)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar (3.3) persamaan (3.1) dan parameter yang sama yakni pada persamaan (3.2) dan waktu tunda sebesar 3 mengalami osilasi yang menjauhi titik tetap dan tidak mencapai titik tetap sehingga gambar (3.3) merupakan pola perkembangan sel tumor yang tidak stabil.

Ini membuktikan bahwa semakin besar nilai tunda maka semakin besar pula simpangan osilasinya sehingga mempengaruhi kestabilan titik tetap. Osilasi terjadi pada persamaan logistik yang diberikan waktu tunda. Hasil gambar (3.1) dapat ditulis sebagai berikut:

Tabel 3.2 Kestabilan Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda dengan Parameter $r=1$ dan $K=100$ serta Nilai Tunda yang Berbeda

Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda sebesar	Perkembangan Gambar	Perkembangan Sel Tumor
$\tau = 0$	Stabil	Stabil
$\tau = 0.1$	Stabil	Stabil
$\tau = 0.5$	Stabil	Stabil
$\tau = 1$	Stabil	Stabil
$\tau = 1.5$	Stabil	Stabil
$\tau = 1.6$	Tidak Stabil	Tidak Stabil
$\tau = 2$	Tidak Stabil	Tidak Stabil

Waktu tunda maksimal pada persamaan (3.1) yang mengalami kestabilan yakni pada nilai $0 \le \tau \le 1.5$. Maka dapat dikatakan pada waktu tunda tersebut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pertumbuhan sel tumor juga akan stabil. Sedangkan jika nilai waktu tunda yang diberikan pada persamaan (3.1) $\tau \geq 1.6$ maka pola perkembangan gambar tidak akan stabil. Sehingga dapat dikatakan pertumbuhan sel tumor juga akan tidak stabil pada waktu tunda $\tau \geq 1.6$.

3.7 Kesehatan Tubuh dalam Pandangan Islam

Islam adalah agama yang sempurna, memberikan batasan dan aturan-aturan yang menguntungkan bagi umat manusia. Salah satu ajaran dalam Islam yakni menjaga kesehatan tubuh dari segala macam penyakit yang diturunkan Allah Swt. Begitu banyak faktor untuk menjaga kesehatan tubuh, diantaranya faktor jasmani seperti makanan, minuman dan lingkup kehidupan secara jasmani. Tetapi tak semua tubuh dapat menjaga kesehatan dan dapat terkena penyakit. Modern ini terdapat bermacam-macam jenis penyakit yang setiap waktu dapat menyerang tubuh manusia.

Tubuh manusia yang terkena penyakit harus berusaha untuk dapat mengurangi atau menyembuhan penyakit tersebut karena Allah telah menurunkan obat pada setiap penyakit yang diturunkan-Nya. Salah satu obat dari segala penyakit yang ada dalam Al-Qur’an adalah madu yang dihasilkan oleh lebah. Tetapi modern ini menurut ibn ‘Asyur, telah mengisyaratkan bahwa madu bukanlah obat semua penyakit. Kalimat pada ayat *di dalamnya* yakni di dalam madu *terdapat* obat *penyembuhan* menunjukkan bahwa obat itu berada di dalam madu. Seakan-akan madu adalah wadah dan obat berada dalam wadah itu. Wadah biasanya lebih luas dari apa yang ditampungnya. Ini berarti tidak semua obat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berada dalam madu. Dengan demikian, tidak semua penyakit dapat diobati dengan madu, karena tidak semua obat ada di dalamya (Shihab, 2002:285).

Pengobatan penyakit biasanya tidak hanya dilakukan dengan minum obat, ada beberapa penyakit yang dapat berkurang dengan alternatif lainnya, misalnya terapi hormon, terapi radiasi, operasi, kemoterapi dan lain-lain. Tetapi pada dasarnya pengobatan adalah cara untuk menunda atau menghilangkan pertumbuhan penyakit. Kombinasi pengobatan tersebut diharapkan mampu mengurangi atau menghilangkan penyakit yang menyerang manusia. Seperti pada penyakit tumor, secara umum tumor yang menyerang manusia sel tumor akan membelah tak teratur. Dalam penundaan penyakit kadang kala tepat pada saat stabil dimana penyakit yang akan diberikan penanganan merupakan penyakit yang masih bersifat jinak atau mendekati ganas. Sehingga jika diberikan penanganan maka penyakit tersebut berkemungkinan berkurang atau sembuh.

Pengobatan atau penanganan pada penyakit adalah salah satu usaha manusia untuk menjadikan diri kembali menjadi manusia yang sembuh dan sehat. Adapun sabda Nabi saw "Setiap penyakit ada obatnya", merupakan motivasi bagi jiwa orang yang sakit dan seorang dokter sebagai seorang yang membantu menyembuhkan orang lain. Ini juga merupakan anjuran untuk mencari tahu dan menganalisa obat dari penyakit tersebut, karena pada saat itu orang sakit tahu bahwa ada obat yang menyembuhkan penyakitnya, akan timbul harapan dalam hatinya, dan padamlah keputusasaan dalam hatinya, sehingga terbukalah pintu harapan (Al-Jauziyyah, 2010).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tetapi segala sesuatu hanyalah Allah Sang Kholik yang berhak menghendaki, seperti Firman Allah pada surat Yasin ayat 82 yang berbunyi:

إِنَّمَآ أَمۡرُهُۥٓ إِذَآ أَرَادَ شَيۡـًٔا أَن يَقُولَ لَهُۥ كُن فَيَكُونُ ﴿٨٢﴾

Artinya: "Sesungguhnya keadaan-Nya apabila Dia menghendaki sesuatu hanyalah berkata kepadanya: "Jadilah!" Maka terjadilah ia." (Yasin: 82)

Sesungguhnya, kebiasaan Allah dalam mengadakan sesuatu, tak lain hanyalah berkata kepada sesuatu yang hendak Dia adakan itu, "jadilah", maka sesuatu itupun jadi dan terbentuk seketika tanpa tangguh. Hal ini tidak diragukan, merupakan perumpamaan dari berpengaruhnya kekuasaan Allah terhadap apa yang Dia kehendaki diumpamakan sebagai perintah dari Dzat yang ditaati kepada orang yang mentaati-Nya tentang terjadinya sesuatu yang diperintahkan, tanpa tertangguhkan dan tanpa memerlukan dilaksanakannya suatu pekerjaan, dan tanpa menggunakan sesuatu alat pula (Al-Maraghi,1989).

Oleh sebab itu, selain berusaha mengobati penyakit, seharusnya disertai dengan berdoa dan memohon kepada Allah agar diberikan kesembuhan dan kesehatan karena hanya Allah yang Maha Menentukan dalam segala urusan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan logistik pada pertumbuhan tumor dengan waktu tunda yaitu:

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t)\left(1 - \frac{X(t-\tau)}{K}\right)$$

dimana τ adalah sebuah waktu perlambatan dan dianggap positif. Suatu titik ekuilibrium positif dari model ini adalah K pada saat setimbang mempunyai dua titik tetap, pada saat $x^* = 0$ dan pada saat $x^* = K + \tau$.

Persamaan logistik dengan waktu tunda akan mengalami pertumbuhan yang tidak stabil pada titik tetap yang pertama yaitu $x^* = 0$, sehingga pertumbuhan populasi sel tumor pada saat $x^* = 0$ juga akan mengalami pertumbuhan populasi sel tumor yang tidak stabil. Persamaan logistik dengan waktu tunda mengalami kestabilan pada titik tetap kedua $x^* = K + \tau$, maka pertumbuhan populasi sel tumor juga akan mengalami pertumbuhan yang stabil. Tumor sebaiknya diberikan pengobatan pada saat mengalami pertumbuhan yang stabil.

2. Hasil gambar untuk persamaan logistik dengan waktu tunda menggunakan bantuan program matlab R2008b dengan berbagai nilai waktu tunda

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

menunjukkan bahwa waktu tunda mempengaruhi kestabilan persamaan tersebut. Terdapat perbedaan simulasi pada persamaan logistik tanpa waktu tunda dengan simulasi persamaan logistik dengan waktu tunda. Simulasi persamaan logistik tanpa waktu tunda tidak mengalami osilasi dan gambar monoton naik sedangkan pada persamaan logistik dengan waktu tunda mengalami osilasi, semakin besar nilai tunda yang diberikan maka semakin besar pula osilasi yang dihasilkan. Besar nilai tunda yang diberikan akan mempengaruhi kestabilan persamaan logistik dengan waktu tunda. Simulasi persamaan logistik dengan waktu tunda $0 \leq \tau \leq 1.5$ mengalami pertumbuhan yang stabil sehingga sel tumor juga akan tumbuh secara stabil. Sedangkan jika $\tau \geq 1.6$ maka persamaan logistik dengan waktu tunda akan mengalami pertumbuhan yang tidak stabil sehingga sel tumor juga akan tumbuh tidak stabil dengan $\tau \geq 1.6$.

4.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan salah satu persamaan populasi yang diberikan nilai tunda yakni persamaan logistik dengan waktu tunda dan melakukan analisis kestabilan untuk penyakit tumor yang sedang mengalami penundaan pertumbuhan sel tumor. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini melanjutkan penelitian untuk mengetahui bifurkasi persamaan logistik dengan waktu tunda atau mengaplikasikan pada persamaan lainnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Al-Jauziyyah. 2008. *Pengobatan Ala Nabi.* -: Penerbit Syaifa

Al-Maraghi, A.M.. 1993. *Tafsir Al-Maraghi.* Semarang: CV Toha Putra

Al-Maraghi, A.M.. 1989. *Tafsir Al-Maraghi.* Semarang : CV Toha Putra

Aninomus. 2009. *Tumor dan Definisinya*, (online), (www.detak.org/articles.php?ic=12, di akses 17 januari 2009)

Anton, H. dan Rores, C.. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga

Ash-Shiddieqy, T.M.H.. 2003. *Mutiara hadits 6.* Semarang: PT Pustaka Rizki Putra

Boyce, W.E.. 1986. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Amerika: Di Prima

Boyce, W.E. dan DilPrima, R.C.. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.

Boyce, W.E. dan DilPrima, R.C.. 2001. *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems*. New York: John Willey & Sons, Inc.

Cain, J.W. and Reynolds, A.M.. 2010. *Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical System*. Virginia: Center for Teaching Excellence

Chen. 2008. *Linear Algebra*. London: Imperial College

Darmawijoyo. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa (Suatu Pengantar).* Jakarta: Erlangga

Fanizio, N. dan Ladas, G.. 1982. *Persamaan Deferensial Biasa.* Jakarta: Erlangga

Finizio, N. dan Ladas, G.. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga

Fitria, V. A.. 2009. Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator-Prey dengan Perlambatan. *Skripsi S1* Tidak Dipublikasikan. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kuang, Y.. 1993. *Delay Differensial Equations with Aplication in Population Dynamics.* London: Academic Press: Inc.

Kusumah, Y.S.. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan

Lara, N.Y.D.. 2009. Dinamika Model Penyembuhan Sel Darah Putih Karena Adanya Virus HIV Dengan Terapi Protease Inhibitor. *Skripsi S1* Tidak Dipublikasikan. Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Bogor: Institut Pertanian Bogor

Mayer, J.W.. 1985. *Concepts of Mathematical Modeling.* New York: Mcgrow—Hill Book Company

Muslikh, M., Suryanto, A. dan Sari, R.K.. -. *Analisis Dinamik Persamaan Logistik Diskret dengan Waktu Tunda.* Skripsi S1 tidak dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Malang: Universitas Brawijaya

Neuhaunser, C.. 2004. *Calculus for Biology and Medicine Second Edition*. London: Prentice-Hall Internasional

Pagalay, U.. 2009. *Mathematical Modelling: Aplikasi pada Kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan.* Malang: UIN-Malang Press

Pamuntjak, R.J., dan Widiarti, S.. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB

Patoppoi, B.. 2012. *Pencegahan dan Pengobatan Penyakit Kanker dengan Keladi Tikus*. Jakarta: PT. Prestasi Pustakaraya.

Robinson, R.C.. 2004. *Dynamical Systems Continuous and Discrete*. London: Prentice-Hall Internasional

Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir Al-Misbah 7.* Jakarta: Lentera Hati

Timuneno, H.M., Utomo, R.H.S., dan Widowati. 2008. Model Pertumbukan Logistik dengan Waktu Tunda. *Jurnal Matematika Vol. 11*: Semarang

Toaha, S.. 2006. *Stability Analysis of Sum Population Model with Time Delay and Harvesting.* Makasar: Department of Mathematics Hasanuddin University

Waluya, S.B.. 2006. *Persamaan Diferensial.* Yogyakarta: Graha Ilmu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rizki Amaliatul Andifa
NIM : 09610034
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Persamaan Logistik pada Pertumbuhan Tumor dengan Waktu Tunda
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	18 Maret 2013	Konsultasi Bab I	1.
2	25 Maret 2013	Revisi Bab I	2.
3	1 April 2013	Konsultasi Bab I Agama	3.
4	22 Mei 2013	ACC Bab I Agama	4.
5	28 Mei 2013	ACC Bab I	5.
6	17 Juli 2013	Konsultasi Bab II	6.
7	20 Agustus 2013	ACC Bab II	7.
8	4 September 2013	Konsultasi Bab III	8.
9	4 September 2013	Konsultasi Bab III Agama	9.
10	5 September 2013	Revisi Bab III Agama	10.
11	7 November 2013	Revisi Bab III	11.
12	12 November 2013	Konsultasi Bab IV	12.
13	12 November 2013	ACC Keseluruhan Agama	13.
14	26 Desember 2013	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 26 Desember 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran

Lampiran 1

Program Matlab Model Logistik Tanpa Waktu Tunda

```
function Untitled
t=0:0.1:100;
initial_x=0.1;% x=0.5,x=1,x=1.5,tau=1.6,dan x=2
[t,x]=ode45(@kk,t,initial_x);

plot(t,x(:,1),'LineWidth',3);
xlabel('t');ylabel('N(t)');
grid on
axis ([0 20 0 110])

function dxdt=kk(t,x)
dxdt=1*x*(1-(x/100));
end
end
```

Lampiran 2

Program Matlab Model Logistik Dengan Waktu Tunda

```
function sol=aa
global tau
tau=1.5; ;% tau=0.5,tau=1,tau=1.5,tau=1.6,dan tau=2
sol=dde23(@ddes1,tau,1,[0,100]);
plot(sol.x,sol.y,'LineWidth',3)
grid on
xlabel('t(time)')
ylabel('N(t)')

function dydt=ddes1(t,y,Z)
global tau
N=y(1);
Ntau=Z(1,1);
dNdt=1*N*(1-(Ntau/100));
dydt=dNdt;
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 3

Program Maple Model Logistik Dengan Waktu Tunda

```
> restart;
> r:=1; k:=100;
> dx:=r*x*(1-(x-tau)/k);
> titiktetap:=solve({dx},{x});
> with(plots):
> with(linalg):
> jac:=jacobian([dx],[x]);
> titiktetap1:=titiktetap[1];
> jac1:=subs(titiktetap1,evalm(jac));
> eigenvals(jac1);
> eigenvectors(jac1);
> titiktetap2:=titiktetap[2];
> jac2:=subs(titiktetap2,evalm(jac));
> eigenvals(jac2);
> eigenvectors(jac2);
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG