

SPEKTRUM DARI GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT $K(n)(n+1)_\alpha$

SKRIPSI

Oleh:
MOH. ZAINAL ARIFANDI
NIM. 09610029



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

SPEKTRUM DARI GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT $K(n)(n+1)_\alpha$

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
MOH. ZAINAL ARIFANDI
NIM. 09610029**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

SPEKTRUM DARI GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT $K(n)(n+1)_\alpha$

SKRIPSI

Oleh:
MOH. ZAINAL ARIFANDI
NIM. 09610029

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
 Tanggal: 07 Juni 2014

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Dr. Abdussakir, M.Pd
 NIP. 19751006 200312 1 001

Achmad Nashichuddin, M.A
 NIP. 19730705 2000031 002

Mengetahui,
 Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
 NIP. 19751006 200312 1 001

SPEKTRUM DARI GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT $K(n)(n+1)_\alpha$

SKRIPSI

Oleh:
MOH. ZAINAL ARIFANDI
NIM. 09610029

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
 dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
 untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
 Tanggal: 02 Juli 2014

Penguji Utama	: <u>H. Wahyu H. Irawan, M.Pd</u> NIP. 19710420 200003 1 003	_____
Ketua Penguji	: <u>Evawati Alisah, M.Pd</u> NIP. 19720604 199903 2 001	_____
Sekretaris Penguji	: <u>Dr. Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	_____
Anggota Penguji	: <u>Achmad Nashichuddin, M.A</u> NIP. 19730705 2000031 002	_____

Mengesahkan,
 Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
 NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Moh. Zainal Arifandi

NIM : 09610029

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul skripsi : Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 07 Juni 2014
Yang membuat pernyataan

Moh. Zainal Arifandi
NIM. 09610029

MOTTO

***“Belajarliah dari pengalaman,
karena pengalaman adalah guru yang terbaik”***



HALAMAN PERSEMBAHAN



*Teriring do'a dan rasa syukur
atas nikmat, rahmat, berkah, dan karunia Allah,
maka penulis persembahkan karya tulis ini
kepada:*

*Kedua orang tua tercinta
(Bapak Zaini dan Ibu Musliha)*

*Adik-adik tersayang
(Miftahul Hasan dan Rini Arifah Nur Fadhilah)
dan seseorang yang selalu menemani
(Sri Winarni)*

KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “SPEKTRUMDARI GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT $K(n)(n+1)_\alpha$ ” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang .
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, nasihat, dan motivasi yang berharga selama penulisan skripsi ini.

4. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan selama penulisan skripsi ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Bapak dan Ibu tercinta, bapak Zaini dan ibu Musliha yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Adik-adik tersayang, Miftahul Hasan dan Rini Arifah Nur Fadhilah, seluruh keluarga besar, dan abah kyai Syaiful yang telah memberikan semangat dan doanya selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Sri Winarni yang telah setia menemani dalam suka maupun duka dan selalu memberikan motivasi dan doanya untuk semangat dalam mengerjakan skripsi.
9. Saudara-saudaraku yang tergabung dalam UKM Seni Religius yang selalu memberikan motivasi, saran serta doa juga keceriaan yang selalu menemaniku dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
10. Teman-teman angkatan 2009 Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terima kasih atas doa serta kenangan yang diberikan.

11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, Juni 2014

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
ملخص	xviii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
 BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Teori Graf	8
2.1.1 Definisi Graf	8
2.1.2 Derajat Titik	10
2.1.3 Graf Terhubung	12
2.1.4 Graf Komplit	15
2.1.5 Graf Bipartisi	15
2.1.6 Graf Bipartisi Komplit	16
2.1.7 Graf Multipartisi Komplit	17
2.2 Matriks	17
2.2.1 Definisi Matriks	17
2.2.2 Macam-Macam Matriks	18
2.2.3 Determinan	22
2.2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	23
2.3 Teori Spektrum Graf	24
2.3.1 Definisi Spektrum Graf	25
2.4 Pola Keseimbangan Alam dalam Al-Qur'an	26
 BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Spektrum Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$	30
3.1.1 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_2$	30

3.1.2 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_3$	34
3.1.3 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_4$	39
3.1.4 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$	45
3.2 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_\alpha$	48
3.3 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_\alpha$	51
3.4 Polinomial Karakteristik Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$	55
3.5 Spektrum Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$	57
3.6 Integrasi Al-Qur'an dengan Pola pada Spektrum Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$	59
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	64
4.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf G	8
Gambar 2.2	Graf <i>Trivial</i> dan <i>Non Trivial</i>	9
Gambar 2.3	Graf G	10
Gambar 2.4	Graf dengan Sisi $e = (u, v)$	12
Gambar 2.5	Graf G dengan Order 4 dan Size 4	12
Gambar 2.6	Jalan pada Graf.....	13
Gambar 2.7	Jalan, Lintasan, Trail, dan Sikel	14
Gambar 2.8	Graf Komplit	15
Gambar 2.9	Graf Bipartisi	16
Gambar 2.10	Graf Bipartisi Komplit	16
Gambar 2.11	Graf Multipartisi Komplit	16
Gambar 3.1	Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_2$	27
Gambar 3.2	Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_3$	31
Gambar 3.3	Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_4$	35

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$.45

Tabel 3.2 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_\alpha$.46

Tabel 3.3 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_\alpha$.51

Tabel 3.4 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ 55

Tabel 3.5 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ 57



DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran 1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$
- Lampiran 2. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_\alpha$
- Lampiran 3. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_\alpha$



ABSTRAK

Arifandi, Moh. Zainal. 2014. **Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$** . Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: spektrum, matriks keterhubungan titik, nilai eigen, vektor eigen dan graf multipartisi komplit

Graf multipartisi komplit dapat dinyatakan dalam bentuk matriks keterhubungan titik. Ketika graf sudah dinyatakan dalam bentuk matriks, maka dapat didekati secara aljabar untuk mencari nilai eigen dan vektor eigennya. Matriks baru yang memuat semua nilai eigen pada baris pertama dan banyaknya vektor eigen yang bersesuaian pada baris kedua disebut spektrum. Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum keterhubungan titik.

Tujuan dari penelitian ini adalah mencari pola yang nantinya dijadikan suatu teorema dari spektrum dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$. Hasil dari penelitian menghasilkan bahwa spektrum keterhubungan titik graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ adalah:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + ((2n^2-2))\alpha + (n+1)^2} & 0 & -(n+1) \\ 1 & 1 & n\alpha + (n-1) & \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan untuk melanjutkan penelitian dengan mencari teorema dari berbagai macam spektrum yang dapat diperoleh dari graf multipartisi.

ABSTRACT

Arifandi, Moh. Zainal. 2014. **Vertex Adjacency Spectrum of Complete Multipartite Graph $K(n)(n+1)_\alpha$** . Thesis. Department of Mathematic, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M. Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M. A.

Keyword: spectrum, vertex adjacency matrix, eigen value, eigen vector and complete multipartite graph

Complete multipartite graph can be shown in the form of vertex adjacency matrix. When a graph is shown in the matrix form. It can be approached algebraically to determine the eigen values and the eigen vectors. The new matrix which contains all of eigen values in the first row and the number of the corresponding eigen vektors in the second row is called spectrum. Spectrum from adjacency matrix $A(G)$ is called vertex adjacency spectrum.

The aim of this research is to find a formula which will be used as a theorem of the vertex adjacency spectrum of complete multipartite graph $K(n)(n+1)_\alpha$. From this research we obtain that the spectrum of complete multipartite graph $K(n)(n+1)_\alpha$ is:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & 0 & -(n+1) \\ 1 & 1 & n\alpha + (n-1) & \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

For further research the author suggests are search studying other spectrum of other multipartite.

ملخص

عارفاندي، محمد زينل. 2014. الطيف لتجاورالرئيس من مخططة متعددة الأجزاء الكاملة $K(n)(n+1)_\alpha$ (1). البحث الجامعي، لشعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيممالانج. تحت إشراف: (1) الدكتور عبد الشكير الماجستير، (2) أحمد ناصح الدين الماجستير.

الكلمة: الرأسالجوارالطيف، وحيد القيمة، آيغناالناقل والرسم البياني متعدد الأجزاءكاملة

يمكن أن تظهرمخططة متعددةالاجزاءالكاملة في شكلالمصفوفة. عندما تظهرمخططة شكل مصفوفة، يمكن اقترابالجبرتحديدالقيمةآيغناالناقلات إيجناالجبرية. المصفوفة الجديدة الذي يحتوي على كافة قيمةآيغناالصف الأول وعددالمقابلة آيغناالصف الثاني يسمى الطيف. الطيف يحصة من مصفوفة الجوار. $A(G)$ يسمى بطيعة لتجوزالرئيس. الهدف من هذا البحث هو إيجاد صيغة التي سيتم استخدامها بوصفها نظرية من الطيف قيمة الجوار من الرسم البيانيمتعدد الأجزاءكاملة $K(n)(n+1)_\alpha$ من هذا البحث حصل علأن الطيف لتجاورالرئيس من مخططة متعددة الأجزاء الكاملة $K(n)(n+1)_\alpha$ هو:

$$\left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{(n+1)^2 \alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) - \frac{1}{2} \sqrt{(n+1)^2 \alpha^2 + ((2n^2-2)\alpha + (n+1)^2)} & 0 \\ 1 & 1 & n\alpha + (n-1) \end{array} \right] \begin{array}{c} -(n+1) \\ \alpha-1 \end{array}$$

لمزيد من البحوثيقترح المؤلفمن البحثدراسةالطيفالآخر منمخططة متعددة الأجزاء الكاملة $K(n)(n+1)_\alpha$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Furqaan ayat 2 sebagai berikut:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۝

Artinya: “Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (Q.S. Al-Furqaan:2)

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada perhitungan-perhitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:80).

Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkan pada berbagai bidang. Matematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain, khususnya ilmu-ilmu sains. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang masih menarik untuk dibahas

karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumus, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan (Purwanto, 1998:1).

Teori graf aljabar adalah cabang dari matematika yang mempelajari graf dengan menggunakan sifat-sifat aljabar dari matriks. Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matriks keterhubungan titik dari graf G , dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $n \times n$ dengan unsure baris ke- i dan kolom ke- j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan v_j . Dengan kata lain matriks keterhubungan titik dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$. Matriks keterhubungan titik suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya (Chartrand & Lesniak, 1996:1).

Penelitian aljabar dalam teori graf merupakan topik dari matematika yang mengkaji graf melalui sifat-sifat aljabar dari representasi graf dalam matriks. Pada umumnya, studi tentang graf didasari pada nilai eigen dari representasi matriks. Salah satu kendala dalam penelitian tentang spektrum graf adalah menentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik matriks. Jenis-jenis graf yang sulit ditemukan bentuk umum matriks, sehingga tidak diperoleh bentuk umum nilai eigen dari graf tersebut.

Graf komplit (*complete graph*) adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinotasikan sebagai $K(n)$ (Wilson dan Watkins, 1990:36). Graf bipartisi (*bipartite graph*)

adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi himpunan M dan N sedemikian sehingga setiap sisi graf menghubungkan titik di M ke titik di N . Graf bipartisi komplit adalah graf bipartisi yang setiap titik di partisi M dihubungkan dengan tepat satu sisi ke setiap titik di partisi N . Graf bipartisi komplit dengan m titik pada M dan n titik pada N , dilambangkan dengan $K(m, n)$ dan jumlah sisi pada graf bipartisi komplit adalah m, n (Wilson dan Watkins, 1990:38).

Adapun penelitian tentang spektrum graf yaitu Ayyaswamy dan Balachandran (2010) dengan judul *On Detour Spectra of Some Graphs*, Bayu Tara Wijaya (2011) dengan judul *Spektrum Detour Graf m -Partisi Komplit*, Nurul Faizah (2012) dengan judul *Spektrum Adjacency, Spektrum Detour dan Spektrum Laplace pada Graf Türan*. Nirmala Sari (2012) dengan judul *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace dan Spektrum Signess-Laplace dari graf multipartisi komplit $K(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dengan $\alpha_i, n \in N$* .

Dari berbagai penelitian spektrum yang sudah dilakukan oleh para ilmuwan, belum ada di antara mereka yang meneliti spektrum dari suatu graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$. $K(n)(n+1)_\alpha$ menyatakan graf multipartisi komplit dengan 1 partisi memuat sebanyak n titik dan sebanyak α partisi memuat sebanyak $(n+1)$ titik.

Maka dari itu penulis merasa perlu untuk melakukan penelitian tentang spektrum dari suatu graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$. Sehingga dalam hal ini, penulis akan mengkaji tentang spektrum dengan mengambil judul **“Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ ”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimanakah bentuk umum spektrum dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini yaitu untuk menentukan bentuk umum spektrum dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada suatu penelitian sangat diperlukan agar objek yang diteliti tidak melebar. Sehingga dalam penelitian ini peneliti membatasi spektrum pada matriks keterhubungan titik dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan peneliti mengenai spektrum dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$.
2. Sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang spektrum pada suatu graf sehingga dapat dikembangkan oleh peneliti lain dengan mengkaji lebih dalam tentang karakteristik suatu graf.

3. Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini. Prosedur pencarian dan perhitungan pola dilakukan dengan menggunakan program komputer yaitu Maple 12 untuk perhitungan matriks dengan menggunakan simbol maupun masukan numerik.

Adapun tahapan-tahapan dalam penelitian ini adalah:

1. Menggambarkan pola graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$
2. Menentukan matriks keterhubungan titik dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$
3. Mencari nilai eigen dari matriks keterhubungan titik dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$
4. Mencari vektor eigen dari matriks keterhubungan titik dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$

5. Setelah mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks keterhubungan titik dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$, kemudian akan dicari spektrum dari matriks-matriks tersebut
6. Merumuskan pola spektrum matriks keterhubungan titik dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$
7. Pola yang didapatkan masih dianggap dugaan
8. Dugaan yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan dugaannya sebagai teorema yang dilengkapi dengan bukti
9. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah serta dipahami, digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Teori

Bab kajian teori meliputi konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang teori graf, graf multipartisi komplit, definisi matriks, spektrum matriks keterhubungan titik serta keterkaitan matematika dengan Al-Qur'an.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang simulasi hasil dari penelitian yang dilakukan dan representasi hasil yang didapat dari penelitian yang dilakukan.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.



BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 2.1

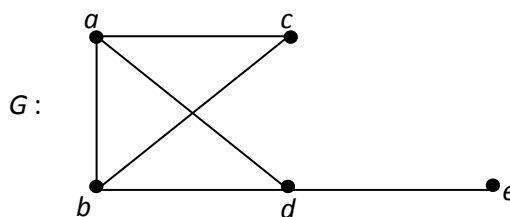
Suatu graf G adalah sebuah himpunan (V, E) dan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik (*vertex*) dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (*edge*). Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan dari sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Dan banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G yang dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand & Lesniak, 1986:4).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$$V = \{ a, b, c, d, e \}$$

$$E = \{ (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e) \}.$$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 6 sisi sehingga size graf G adalah $q = 6$. Graf G dengan

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$$

Dapat juga ditulis dengan

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

dengan

$$e_1 = (a, b)$$

$$e_2 = (a, c)$$

$$e_3 = (a, d)$$

$$e_4 = (b, d)$$

$$e_5 = (b, c)$$

$$e_6 = (d, e)$$

Definisi 2.2

Graf *trivial* adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Chartrand dan Lesniak, 1986:6).

Contoh 2.1



Gambar 2.2 Graf *Trivial* dan *Non Trivial*

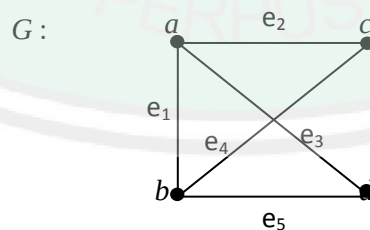
Berdasarkan gambar 2.2, G_1 merupakan graf *trivial* karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf *non trivial* karena berorder lebih dari satu.

2.1.2 Derajat Titik

Definisi 2.3

Derajat dari titik v di graf G , ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v . Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*) (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.



Gambar 2.3 Graf G

Berdasarkan gambar, diperoleh bahwa

$$\deg(a) = 3$$

$$\deg(b) = 3$$

$$\deg(c) = 2$$

$$\deg(d) = 2$$

Titik a dan b adalah titik ganjil, titik c dan d adalah titik genap. Karena tidak ada yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q , adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$,
maka $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan size q . Dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G . Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

Definisi 2.4

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari definisi di atas, maka dapat digambarkan sebagai berikut :

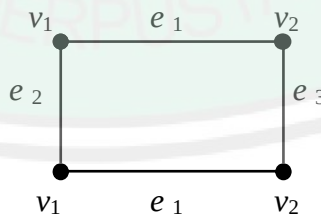


Gambar 2.4 Sisi $e = (u, v)$ yang menghubungkan titik u dan v .

Karena $e = (u, v)$ sisi di G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan e dan u serta e dan v disebut terkait langsung (*incident*).

Definisi 2.5

Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh 2.2

Gambar 2.5 Graf G dengan Order 4 dan Size 4

2.1.3 Graf Terhubung**Definisi 2.6**

Sebuah jalan (*walk*) u - v di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) W : $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan

sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v , dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sisi di G . u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 2.7

Jalan $u-v$ disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

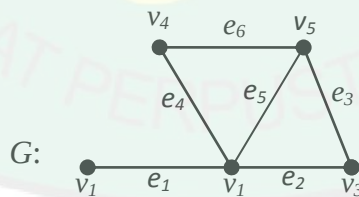
Definisi 2.8

Jalan $u-v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u-v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 2.9

Jalan $u-v$ yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u-v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh 2.3



Gambar 2.6 Jalan pada Graf

Dari graph di atas $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3$ disebut sebagai trail, sedangkan $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4$ disebut sebagai path (lintasan).

Definisi 2.10

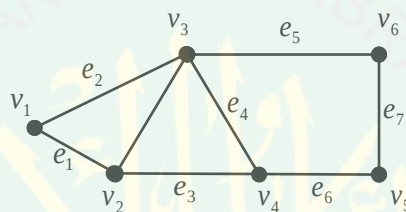
Suatu titik u yang membentuk lintasan (*path*) $u-u$ disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 2.11

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada graf G disebut sirkuit G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 2.12

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut siklus (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh 2.4

Gambar 2.7 Jalan, Lintasan, Trail, dan Sikel

Dari gambar 2.7, $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2, v_1$ disebut jalan tertutup dengan panjang 6 dan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1, v_2$ disebut jalan terbuka dengan panjang 7. $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2$ adalah trail tetapi bukan lintasan, sedangkan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2$ disebut sebagai *path* (lintasan) dan v_1, v_2, v_3, v_1 adalah siklus.

Definisi 2.13

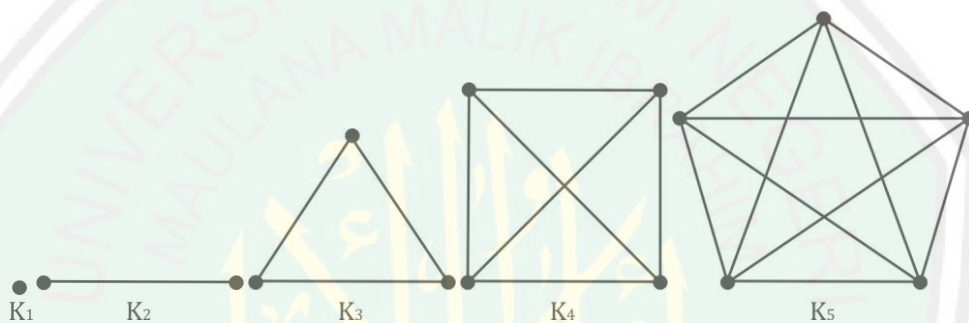
Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G . Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G . Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

2.1.4 Graf Komplit

Definisi 2.14

Graf komplit (*complete graph*) adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinotasikan sebagai K_n (Wilson dan Watkins, 1992:36).

Contoh 2.6



Gambar 2.8 Graf Komplit

Gambar di atas merupakan contoh graf komplit dengan jumlah titik sebanyak 1 sampai 6, setiap dua titik yang berbeda dalam masing-masing graf di atas dihubungkan oleh satu sisi, dengan demikian graf-graf tersebut merupakan graf komplit.

2.1.5 Graf Bipartisi

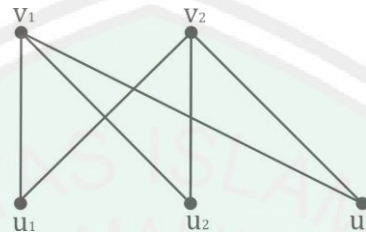
Definisi 2.15

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi himpunan M dan N sedemikian sehingga setiap sisi graf menghubungkan titik di M ke titik N (Wilson dan Watkins, 1990:38).

Berdasarkan pengertian di atas, simbol M untuk partisi yang pertama atau dapat ditulis $M = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Sedangkan simbol N untuk partisi yang

kedua atau dapat ditulis $N = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$. Himpunan titik dalam satu partisi tidak boleh saling terhubung langsung.

Lebih jelasnya dapat dilihat pada contoh di bawah ini:



Gambar 2.9 Graf Bipartisi

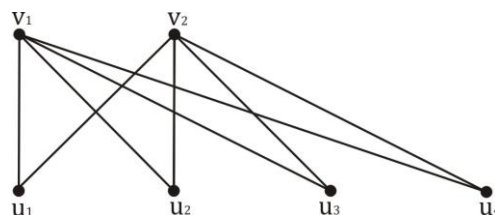
Graf G pada gambar 2.10 adalah graf bipartisi karena himpunan titik di G dapat dipecah menjadi dua himpunan, yaitu $M = \{v_1, v_2\}$ dan $N = \{u_1, u_2, u_3\}$. Masing-masing sisi di G mempunyai ujung di M dan di N .

2.1.6 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 2.16

Suatu graf G dikatakan bipartisi komplit jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9)

Contoh 2.7



Gambar 2.10 Graf Bipartisi Komplit

Pada gambar 2.11, $K_{2,4}$ adalah graf bipartisi komplit dengan $M = \{v_1, v_2\}$ dan $N = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Karena jumlah titik di M dinotasikan dengan m , maka $m = 2$. Sedangkan jumlah titik di N dinotasikan dengan n , maka $n = 4$. Sedemikian hingga sisi yang menghubungkan titik di M dan titik di N ada 8 sisi.

2.1.7 Graf Multipartisi Komplit

Definisi 2.17

Suatu graf G m -partisi komplit adalah suatu graf m -partisi dengan himpunan partisi $V_1, V_2, \dots, V_m$ mempunyai syarat tambahan bahwa jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$, maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = \alpha_i$, maka graf ini dinotasikan $K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:10).

Dalam penelitian ini, graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ menyatakan graf multipartisi komplit dengan 1 partisi memuat sebanyak n titik dan sebanyak α partisi lainnya memuat sebanyak $(n+1)$ titik.

2.2 Matriks

2.2.1 Definisi Matriks

Definisi 2.18

Matriks adalah susunan segi empat dan siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan unsur dalam matriks (Anton, 1997:22).

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Susunan di atas disebut matriks m kali n (ditulis $m \times n$) karena memiliki m baris dan n kolom. Sebagai aturan, kurung siku [] digunakan untuk mengurungi susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan tersebut. Harus dicatat bahwa suatu matriks tidak memiliki nilai numerik. Ini adalah suatu cara sederhana untuk menyajikan suatu susunan (tabel) dari bilangan-bilangan.

Matriks tidak mempunyai nilai tetapi ukuran. Ukuran matriks disebut *ordo* yang ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom, maka matriks A berordo $m \times n$.

Suatu matriks yang terdiri dari n baris dan 1 kolom disebut sebagai vektor kolom dengan ukuran n atau vektor, sedangkan matriks yang terdiri dari 1 baris dan n kolom disebut sebagai vektor baris dengan ukuran n . Matriks yang berukuran $1 \times n$ atau $n \times 1$ dinotasikan sebagai R^n (Jain dan Gunawardena, 2004:17).

2.2.2 Macam-Macam Matriks

Adapun macam-macam matriks antara lain:

1. Matriks Baris

Matriks baris adalah suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris, atau matriks berordo $1 \times n$. Matriks baris disebut juga vektor baris. Secara umum dapat ditulis dengan $[a_{ij}]$ dengan $i = 1; j = 1, 2, 3, \dots, n$

Contoh 2.8

$$A_{1 \times 3} = [1 \ 5 \ 3]$$

2. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom, atau matriks berordo $m \times 1$. Matriks baris disebut juga vektor kolom. Secara umum dapat ditulis dengan $[a_{ij}]$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1$

Contoh 2.9

$$A_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua unsurnya nol (Gazali, 2005:7)

Contoh 2.10

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, yang dinyatakan dengan $A_{m \times n}$, dimana $m=n$, dapat ditulis dengan $A_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n}$. Matriks berordo $n \times n$ disebut juga matriks bujur sangkar ordo n .

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Unsur-unsur matriks bujur sangkar tersebut yaitu

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ disebut diagonal utama,

$a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{n(n-1)}$, disebut elemen diagonal kedua.

Dalam hal ini hanya matriks bujur sangkar yang mempunyai elemen diagonal utama dan elemen diagonal kedua.

Contoh 2.11

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Segitiga

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen yang terletak di bawah elemen diagonal utama semua nol. Bentuk umumnya adalah (a_{ij}) dengan $a_{ij} = 0; \forall i > j$ (Ayres, 1985:10).

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen yang terletak di atas elemen diagonal utama semua nol. Bentuk umumnya adalah (a_{ij}) dengan $a_{ij} = 0; \forall i < j$ (Ayres, 1985:10).

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.12

$$\text{Matriks segitiga atas } A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriks segitiga bawah } A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks bujur sangkar dengan semua elemen-elemen yang bukan elemen diagonal utama adalah nol. Dengan kata lain suatu matriks A berorde $n \times n$ disebut matriks diagonal, jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adapun elemen-elemen diagonalnya boleh nol dan boleh tidak nol.

Contoh 2.13

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Matriks Skalar

Matriks skalar adalah matriks diagonal dengan semua elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan k , dimana $k \neq 0$. Bentuk umum matriks skalar adalah $a_{ij} = k$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

Contoh 2.14

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks skalar dengan elemen-elemen diagonal utama semuanya sama dengan satu (Gazali, 2005:4). Bentuk umum matriks identitas dinyatakan dengan $A = (a_{ij}), i = j = 1, 2, 3, \dots, n$ dengan $(a_{ij}) = 1$ untuk $i = j$; $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Contoh 2.15

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Determinan

Definisi 2.22

Determinan matriks persegi $A = |A|$ atau $\det A$ adalah jumlah semua perkalian elementer matriks A . Bila inversnya genap tanda (+), bila inversnya ganjil tanda (-) (Gazali, 2005:34).

Contoh 2.16

Diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Maka determinan dari A adalah $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Definisi 2.23

Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinan matriks A didefinisikan sebagai berikut:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det(M_{1j})$$

$$\text{dan } \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ (Cullen, 1993:106).}$$

2.2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.24

Misalkan A adalah sebuah matriks $n \times n$. Sebuah matriks bukan nol X yang berukuran $n \times 1$ sedemikian rupa sehingga $AX = \lambda X$ dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) bagi A , sedangkan skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) bagi A yang terkait dengan X (Cullen, 1993:134).

Teorema 4

Misalkan A adalah sebuah matriks $n \times n$. Bilangan λ adalah nilai eigen jika dan hanya jika $\det(\lambda I - A) = 0$, dimana I notasi dari matriks identitas $n \times n$ (Jain dan Gunawardena, 2004:151).

Contoh 2.17

Tentukan nilai eigen dari matriks diagonal berikut ini:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui nilai eigen dari matriks diatas, maka:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

satu-satunya hasil kali elementer dari $A_{n \times n}$ yang dapat berupa bilangan tak nol adalah $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$, kemudian diperoleh persamaan karakteristik:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

sehingga nilai-nilai eigennya adalah $\lambda = a_{kk}$ dengan $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

2.3 Teori Spektrum Graf

2.3.1 Definisi Spektrum Graf

Definisi 2.25

Spektrum dari graf berhingga didefinisikan dengan spektrum dari matriks keterhubungan titik A yang merupakan himpunan dari nilai eigen bersamaan dengan multiplisitas dari nilai eigen tersebut (Brouwer dan Haemers, 2010:2)

Misalkan $\lambda_0 > \lambda_1 \dots > \lambda_{\delta-1}$ adalah nilai-nilai eigen berbeda dari A , dengan $\lambda_0 > \lambda_1 \dots > \lambda_{\delta-1}$, dan misalkan $m(\lambda_0), m(\lambda_1) \dots m(\lambda_{\delta-1})$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i , maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_0 > \lambda_1 \dots > \lambda_{\delta-1}$ pada baris pertama dan $m(\lambda_0), m(\lambda_1) \dots m(\lambda_{\delta-1})$ pada baris kedua disebut spektrum graf G . Norman Biggs (1974) menotasikannya dengan $Spec(G)$. Jadi spektrum graf G dapat ditulis dengan:

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.20

Diberikan graf komplit K_3 , maka akan diperoleh matriks keterhubungan titik berikut ini:

$$A(K_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan nilai eigen dari $A(K_3)$ menggunakan persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ diperoleh:

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda^3 - 2)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$

Untuk $\lambda_1 = 2$, maka

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks yang diperluas dari persamaan

Homogennya ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris yaitu,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh, $x_1 - x_3 = 0$ dan $x_2 - x_3 = 0$

Diperoleh vektor eigen,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_1 = 2$

Untuk $\lambda_2 = -1$, maka

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akan diperoleh suatu persamaan tunggal yaitu,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

diperoleh vektor eigen,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_1 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_2 = -1$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ serta $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$ maka spektrum graf (K_3) adalah

$$\text{spec}(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4 Pola Keseimbangan Alam dalam Al-Qur'an

Bumi yang dipijak, bulan yang bercahaya di malam hari dan matahari yang memancarkan sinarnya menerangi dan menjadi sumber energi kehidupan manusia merupakan bagian yang teramat kecil dari alam semesta yang luas dalam keterbatasan pandangan mata. Bagaimana Dia meninggikan langit tanpa tiang dan dan meluaskan alam semesta. Sesungguhnya keteraturan yang teramat menakjubkan. Tercantum dalam firman Allah surat Al-Mulk ayat 3-4.

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوتٍ ۚ فَأَرْجِعِ
الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ۚ ثُمَّ أَرْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا
وَهُوَ حَسِيرٌ ۝

Artinya : “3. yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, Adakah kamu Lihat sesuatu yang tidak seimbang? 4. kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam Keadaan payah.(Q.S. Al-Mulk:3-4)

Ayat di atas menyatakan: *sab'a samawat* dipahami oleh para ulama dalam arti planet-planet yang mengitari tata surya (selain bumi) karena itulah yang dapat terjangkau oleh pandangan mata serta pengetahuan manusia, paling tidak saat turunnya Al-Qur'an. *Thibaqan* dapat dipahami sebagai bentuk jamak dari *thabaq*, yang berarti ketujuh langit itu memiliki persamaan antara lain bahwa ketujuhanya bergerak dan beredar sangat serasi sehingga tidak terjadi tabrakan antara satu dengan yang lain. *Tafwut*, pada mulanya berarti kejauhan. Dari sini kata tersebut diartikan tidak seimbang. Bahwa Allah menciptakan langit bahkan seluruh makhluk dalam keadaan seimbang sebagai rahmat-Nya (Shihab, 2002:345-346).

Seandainya ciptaan-Nya tidak seimbang, maka tentulah akan terjadi kekacauan antara yang satu dengan yang lain. Syukur bahwa Allah mengatur kebutuhan manusia untuk menghirup udara yang berbeda dengan kebutuhan udara tumbuhan. Tumbuhan mengeluarkan oksigen agar manusia dapat menghirupnya, dan sebaliknya manusia mengeluarkan karbondioksida agar tumbuhan dapat menghirupnya. Itu berarti bahwa adanya hubungan yang satudengan yang lainnya, yang bisa dikatakan sebagai sesuatu yang seimbang

“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis”, yakni sebagian darinya berada di atas sebagian yang lain tanpa saling bersentuhan “engkau tidak akan melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih”, untuk langit dan lain-lain. “suatu ketimpangan”, maksudnya sesuatu yang tidak seimbang dan tidak selaras. “maka kembalikanlah pandangan mata”, maksudnya lihatlah berulang-ulang ke langit. “Adakah engkau melihat sesuatu yang retak”, yakni sesuatu yang pecah dan berlubang. ”kemudian pandanglah kembali dua kali” sekali lagi dan

sekali lagi. “niscaya penglihatanmu akan berbalik”, maksudnya kembali. “kepadamu dengan kecewa”, maksudnya dalam keadaan hina karena tidak menemukan celah sama sekali. “dan ia menyesal”, maksudnya putus asa untuk menemukan cela.

Dia-lah Allah yang menciptakan tujuh langit dan menghiasinya bagi setiap orang yang melihatnya. Dia juga meninggikan langit itu tanpa tiang dan menjadikannya berlapis-lapis. Sebagai salah satu wujud kasih sayang-Nya, Allah membangun, membaguskan dan meninggikan langit. Kalian tidak akan melihat adanya ketidakseimbangan pada langit tersebut.

Allah telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis, kemudian diikuti penegasan bahwa tidak ada ketidakseimbangan pada ciptaan. Langit sangat setimbang sehingga tidak runtuh ke bumi. Pengamatan terus-menerus pada langit juga tidak menemukan bagian-bagian yang rusak atau cacat dan tidak mampu membedakan antara satu titik dengan titik lain di hamparan langit luas. Langit, bumi, sistem tata surya mempunyai bentuk dan pola sangat serasi dan simetri.

Keteraturan ini membuktikan kekuasaan Allah yang abadi, yang menciptakan alam semesta lalu memberinya bentuk. Dengan segala keistimewaan yang ada padanya, bumi diciptakan dengan keseimbangan yang luar biasa stabil, yang membuatnya cocok bagi berlangsungnya kehidupan makhluk hidup. Jarak bumi dari matahari, kemiringan sumbu bumi terhadap orbit, keseimbangan dalam atmosfer, kecepatan rotasi bumi pada sumbunya, kecepatannya mengelilingi matahari, semua ini hanyalah beberapa unsur dari keseimbangan ekologis yang

terdapat di bumi. Kalau dibandingkan dengan planet lain, semakin jelas bahwa bumi secara khusus dirancang bagi manusia.

Kecepatan rotasi bumi pada sumbunya merupakan kecepatan yang paling sesuai bagi makhluk hidup. Planet-planet lain dalam tata surya pun mengalami siang dan malam. Karena perbedaan waktu di planet lain jauh lebih besar dibandingkan dengan di bumi, perbedaan antara suhu siang dan malam pun sangat tinggi. Aktivitas angin di atmosfer planet lain tidak ditemukan di bumi ini, suatu keistimewaan berkatrotasi planet bumi yang seimbang. Keseimbangan yang stabil di bumi memungkinkan terbentuknya gas-gas atmosfer dengan proporsi yang tepat dan selalu konstan. Walaupun demikian, semua contoh di atas pun sudah dapat menunjukkan suatu kenyataan. Bumi diciptakan secara khusus guna berlangsungnya kehidupan berbagai makhluk. Hal ini bukanlah hasil suatu kebetulan, melainkan keteraturan yang disengaja.

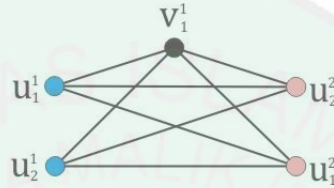
Kesempurnaan dan keteraturan yang terdapat di alam semesta ini hanya ada satu Pencipta yang memiliki kekuatan dan pengetahuan tak terbatas, yaitu Allah, yang memiliki seluruh dunia, dan menciptakan alam semesta.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$

3.1.1 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_2$



Gambar 3.1 Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_2$

Berdasarkan gambar 3.1 yaitu graf multipartisi komplit $K(1)(2)_2$, menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} & v_1^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_1^2 & u_2^2 \\ \begin{matrix} v_1^1 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \lambda & -\lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 + 2\lambda + 4 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $(A(K(1)(2)_2) - \lambda I)$ adalah $\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I) = (1)(\lambda)^2(2 + \lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda + 4)$$

Karena $\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I) = 0$, maka

$$\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I) = (1)(\lambda)^2(2 + \lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0.$$

Dan diperoleh nilai eigennya $\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{5}$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -2$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$.

Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(1+\sqrt{5}) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(1+\sqrt{5}) & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -(1+\sqrt{5}) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -(1+\sqrt{5}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -(1+\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4(20+9\sqrt{5})}{(2\sqrt{5}+5)(7+3\sqrt{5})} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{65+29\sqrt{5}}{(2\sqrt{5}+5)(7+3\sqrt{5})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$ adalah 1.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_2 = 1 - \sqrt{5}$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(1-\sqrt{5}) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(1-\sqrt{5}) & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -(1-\sqrt{5}) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -(1-\sqrt{5}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -(1-\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4(-20+9\sqrt{5})}{(2\sqrt{5}-5)(-7+3\sqrt{5})} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-65+29\sqrt{5}}{(2\sqrt{5}-5)(-7+3\sqrt{5})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1 - \sqrt{5}$ adalah 1.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_3 = 0$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ adalah 2.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_4 = -2$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_2) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

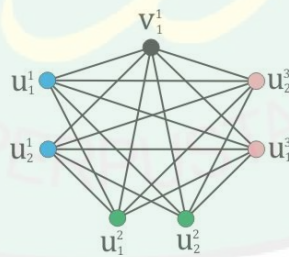
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = -2$ adalah 1.

Sehingga spektrum dari graf multipartisi komplit $K(1)(2)_2$ adalah

$$\text{Spec } A(K(1)(2)_2) = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_3$



Gambar 3.2 Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_3$

Berdasarkan gambar 3.2 yaitu graf multipartisi komplit $K(1)(2)_3$, menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A(K(1)(2)_3) = \begin{matrix} & v_1^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_1^2 & u_2^2 & u_1^3 & u_2^3 \\ \begin{matrix} v_1^1 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Eliminasi* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & -\lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & -\lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda+6 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $(A(K(1)(2)_3) - \lambda I)$ adalah $\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I) = (1)(\lambda)^3(2+\lambda)^2(-\lambda^2+4\lambda+6)$$

Karena $\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I) = 0$, maka

$$\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I) = (1)(\lambda)^3(2+\lambda)^2(-\lambda^2+4\lambda+6) = 0.$$

Dan diperoleh nilai eigennya $\lambda_1 = 2 + \sqrt{10}$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{10}$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -2$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_1 = 2 + \sqrt{10}$.

Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(2+\sqrt{10}) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(2+\sqrt{10}) & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -(2+\sqrt{10}) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -(2+\sqrt{10}) & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -(2+\sqrt{10}) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -(2+\sqrt{10}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -(2+\sqrt{10}) \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2(14+5\sqrt{10})}{(4+\sqrt{10})^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2 + \sqrt{10}$ adalah 1.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_2 = 2 - \sqrt{10}$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(2-\sqrt{10}) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(2-\sqrt{10}) & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -(2-\sqrt{10}) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -(2-\sqrt{10}) & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -(2-\sqrt{10}) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -(2-\sqrt{10}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -(2-\sqrt{10}) \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(-14+5\sqrt{10})}{(-4+\sqrt{10})^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2 - \sqrt{10}$ adalah 1.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_3 = 0$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ adalah 3.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_4 = -2$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_3) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

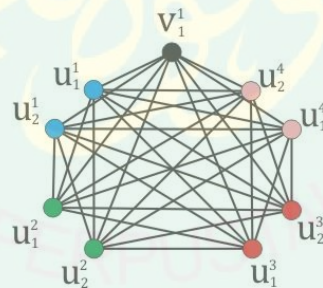
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = -2$ adalah 2.

Sehingga spektrum dari graf multipartisi komplit $K(1)(2)_3$ adalah

$$\text{Spec } A(K(1)(2)_3) = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{10} & 2 - \sqrt{10} & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3.1.3 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_4$



Gambar 3.3 Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_4$

Berdasarkan gambar 3.3 yaitu graf multipartisi komplit $K(1)(2)_4$, menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_1^2 & u_2^2 & u_1^3 & u_2^3 & u_1^4 & u_2^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1^1 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$\det(A(K(1)(2)_4) - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software Maple 12*, maka akan didapatkan:

$$\begin{bmatrix}
1, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \\
0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\
0, 0, 2 + \lambda, -\lambda - 1, -1, 0, 0, 0, 0 \\
0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0 \\
0, 0, 0, 0, 2 + \lambda, -\lambda - 1, -1, 0, 0 \\
0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0 \\
0, 0, 0, 0, 0, 0, 2 + \lambda, -\lambda - 1, -1 \\
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda \\
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\lambda^2 + 6\lambda + 8
\end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $(A(K(1)(2)_4) - \lambda I)$ adalah $\det(A(K(1)(2)_4) - \lambda I)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$\det(A(K(1)(2)_4) - \lambda I) = (1)(\lambda)^4(2 + \lambda)^3(-\lambda^2 + 6\lambda + 8)$$

Karena $\det(A(K(1)(2)_4) - \lambda I) = 0$, maka

$$\det(A(K(1)(2)_4) - \lambda I) = (1)(\lambda)^4(2 + \lambda)^3(-\lambda^2 + 6\lambda + 8) = 0.$$

Dan diperoleh nilai eigennya $\lambda_1 = 3 + \sqrt{17}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{17}$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -2$.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_1 = 3 + \sqrt{17}$.

Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_4) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
-\lambda_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -\lambda_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -\lambda_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -\lambda_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_1
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
-(3 + \sqrt{17}) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -(3 + \sqrt{17}) & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -(3 + \sqrt{17}) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -(3 + \sqrt{17}) & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -(3 + \sqrt{17}) & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -(3 + \sqrt{17}) & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -(3 + \sqrt{17}) & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -(3 + \sqrt{17}) & 0
\end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8(53+13\sqrt{17})}{(5+\sqrt{17})^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3 + \sqrt{17}$ adalah 1.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_2 = 3 - \sqrt{17}$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_4) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(3-\sqrt{17}) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(3-\sqrt{17}) & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -(3-\sqrt{17}) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -(3-\sqrt{17}) & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -(3-\sqrt{17}) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -(3-\sqrt{17}) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -(3-\sqrt{17}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -(3-\sqrt{17}) \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8(-53 + 13\sqrt{17})}{(-5 + \sqrt{17})^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 3 - \sqrt{17}$ adalah 1.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_3 = 0$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2)_4) - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ adalah 4.

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda_4 = -2$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $\det(A(K(1)(2))_4 - \lambda I)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda_4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

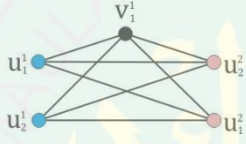
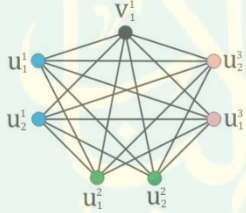
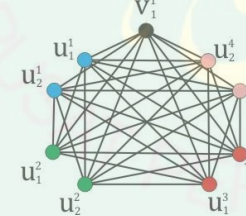
Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = -2$ adalah 3.

Sehingga spektrum dari graf multipartisi komplit $K(1)(2)_4$ adalah

$$\text{Spec } A(K(1)(2)_4) = \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{17} & 3 - \sqrt{17} & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3.1.4 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$

Dalam tabel berikut disajikan beberapa matriks keterhubungan titik graf multipartisi komplit $K(1)(2)_\alpha$, dengan $\alpha \geq 2$.

Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$	Polinomial Karakteristik
$K(1)(2)_2$ 	$(1)(\lambda)^2(2 + \lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda + 4)$
$K(1)(2)_3$ 	$(1)(\lambda)^3(2 + \lambda)^2(-\lambda^2 + 4\lambda + 6)$
$K(1)(2)_4$ 	$(1)(\lambda)^4(2 + \lambda)^3(-\lambda^2 + 6\lambda + 8)$

Tabel 3.1 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$

Teorema 3.1

Polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(1)(2)_\alpha$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^\alpha(2 + \lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + ((2\alpha - 2)\lambda) + (1)(2)\alpha))$$

Bukti

Matriks keterhubungan titik graf multipartisi komplit $K(1)(2)_\alpha$ adalah:

$$A(K(1)(2)_\alpha) = \begin{matrix} & v_1^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_1^2 & u_2^2 & \cdots & u_1^\alpha & u_2^\alpha \\ \begin{matrix} v_1^1 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_1^\alpha \\ u_2^\alpha \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara $\det(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda I) = 0$. Dan diperoleh matriks segitiga atas dari $(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda I)$ sebagai berikut:

$$\det(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software Maple 12*, maka akan didapatkan :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \lambda & -\lambda - 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 + \lambda & \cdots & -\lambda - 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda^2 + ((2 \times -2)\lambda) + 2 \times \alpha \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda I)$ adalah $\det(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda I)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^\alpha (2 + \lambda)^{\alpha-1} ((-\lambda)^2 + ((2 \times -2)\lambda) + (1)(2 \times \alpha))$$

Teorema 3.2

Spektrum dari graf multipartisi komplit $K(1)(2)_\alpha$ adalah:

$$\text{Spec } K(1)(2)_\alpha = \begin{bmatrix} (\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha^2 + 1)} & ((\alpha - 1) - \sqrt{(\alpha^2 + 1)}) & 0 & -2 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Dari teorema 3.1 diperoleh bahwa polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(1)(2)_\alpha$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^\alpha (2 + \lambda)^{\alpha-1} ((-\lambda)^2 + ((2\alpha - 2)\lambda) + (1)(2)\alpha)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = (\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha^2 + 1)}, \lambda_2 = ((\alpha - 1) - \sqrt{(\alpha^2 + 1)}), \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -2$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Multiplisitas itu sama dengan dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sama dengan banyak baris nol pada matriks $(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris.

Untuk $\lambda_1 = (\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha^2 + 1)}$.

Matriks $(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda_1 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak 1 baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_1 = (\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha^2 + 1)}$ adalah 1.

Untuk $\lambda_2 = (\alpha - 1) - \sqrt{(\alpha^2 + 1)}$.

Matriks $(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda_2 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak 1 baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_2 = (\alpha - 1) - \sqrt{(\alpha^2 + 1)}$ adalah 1.

Untuk $\lambda_3 = 0$.

Matriks $(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda_3 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak α baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_3 = 0$ adalah α .

Untuk $\lambda_4 = -2$.

Matriks $(A(K(1)(2)_\alpha) - \lambda_4 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak $\alpha - 1$ baris nol.

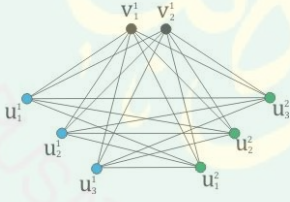
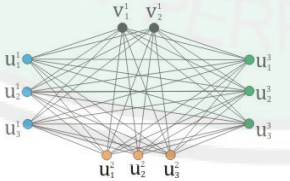
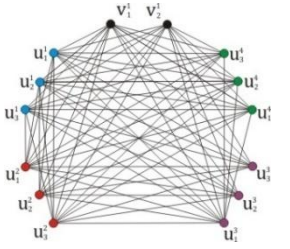
Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_4 = -2$ adalah $\alpha - 1$.

Sehingga terbukti bahwa spektrum dari graf multipartisi komplit $(K(1)(2)_\alpha)$ diperoleh:

$$\text{Spec } K(1)(2)_\alpha = \begin{bmatrix} (\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha^2 + 1)} & ((\alpha - 1) - \sqrt{(\alpha^2 + 1)}) & 0 & -2 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_\alpha$

Dalam tabel berikut disajikan polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(2)(3)_\alpha$, dengan $\alpha \geq 2$.

Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_\alpha$	Polinomial karakteristik
$K(2)(3)_2$ 	$(1)(\lambda)^5(3 + \lambda)(-\lambda^2 + 3\lambda + 12)$
$K(2)(3)_3$ 	$(1)(\lambda)^7(3 + \lambda)^2(-\lambda^2 + 6\lambda + 18)$
$K(2)(3)_4$ 	$(1)(\lambda)^9(3 + \lambda)^3(-\lambda^2 + 9\lambda + 24)$

Tabel 3.2 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_\alpha$

Teorema 3.3

Polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(2)(3)_\alpha$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{2\alpha+1}(3 + \lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + ((3 \times -3)\lambda) + (2)(3) \times))$$

Bukti

Matriks keterhubungan titik graf multipartisi komplit $K(2)(3)_\alpha$ adalah:

$$A(K(2)(3)_\alpha) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1^1 & v_2^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & \dots & u_1^\alpha & u_2^\alpha & u_3^\alpha \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_1^\alpha \\ u_2^\alpha \\ u_3^\alpha \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara $\det(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda I) = 0$. Dan diperoleh matriks segitiga atas dari $(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda I)$ sebagai berikut:

$$\det(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software Maple 12*, maka akan didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 & \dots & 1 & 1 + \lambda & 1 + \lambda & 1 + \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (3 + \lambda)^{\alpha-1} & -\lambda - 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & ((-\lambda)^2 + (3 \times -3)\lambda) + (2)(n + 1) \times)) \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda I)$ adalah $\det(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda I)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{2\alpha+1}(3 + \lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + ((3\alpha - 3)\lambda) + (2)(3)\alpha))$$

Teorema 3.4

Spektrum dari graf multipartisi komplit $K(2)(3)_\alpha$ adalah:

$$Spec K(2)(3)_\alpha = \left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9} & \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9} & 0 \\ 1 & 1 & 2\alpha + 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} -3 \\ \alpha - 1 \end{array}$$

Bukti

Dari teorema 3.3 diperoleh bahwa polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(2)(3)_\alpha$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{2\alpha+1}(3 + \lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + ((3\alpha - 3)\lambda) + (2)(3)\alpha))$$

Sehingga diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9}, \lambda_2 = \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9}, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -3$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Multiplisitas itu sama dengan dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sama dengan banyak baris nol pada matriks $(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris.

Untuk $\lambda_1 = \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9}$.

Matriks $(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda_1 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak 1 baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_1 = \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9}$ adalah 1.

Untuk $\lambda_2 = \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9}$.

Matriks $(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda_2 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak 1 baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_2 = \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9}$ adalah 1.

Untuk $\lambda_3 = 0$.

Matriks $(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda_3 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak $2\alpha + 1$ baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_3 = 0$ adalah $2\alpha + 1$.

Untuk $\lambda_4 = -3$.

Matriks $(A(K(2)(3)_\alpha) - \lambda_4 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak $\alpha - 1$ baris nol.

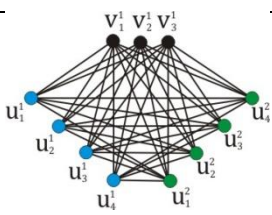
Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_4 = -3$ adalah $\alpha - 1$.

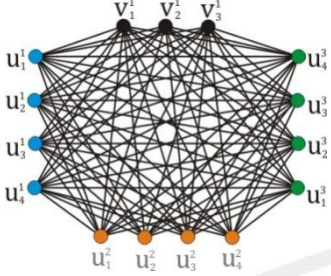
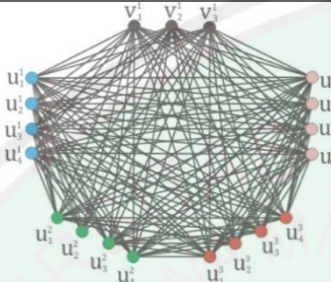
Sehingga terbukti bahwa spektrum dari graf multipartisi komplit $(K(2)(3)_\alpha)$ diperoleh:

$$\text{Spec } K(2)(3)_\alpha = \left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9} & \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9} & 0 \\ 1 & 1 & 2\alpha + 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} -3 \\ \alpha - 1 \end{array}$$

3.3 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_\alpha$

Dalam tabel berikut disajikan beberapa polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(3)(4)_\alpha$, dengan $\alpha \geq 2$.

Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_\alpha$	Polinomial Karakteristik
$K(3)(4)_2$ 	$(1)(\lambda)^9(4 + \lambda)(-\lambda^2 + 4\lambda + 24)$

$K(3)(4)_3$ 	$(1)(\lambda)^{11}(4 + \lambda)^2(-\lambda^2 + 8\lambda + 36)$
$K(3)(4)_4$ 	$(1)(\lambda)^{14}(4 + \lambda)^3(-\lambda^2 + 12\lambda + 48)$

Tabel 3.3 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_\alpha$ **Teorema 3.5**

Polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(3)(4)_\alpha$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{3\alpha+2}(4 + \lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + ((4 \times -4)\lambda) + (3)(4) \times))$$

Bukti

Matriks keterhubungan titik graf multipartisi komplit $K(3)(4)_\alpha$ adalah:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 & \dots & u_1^\infty & u_2^\infty & u_3^\infty & u_4^\infty \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ \vdots \\ u_1^\infty \\ u_2^\infty \\ u_3^\infty \\ u_4^\infty \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara $\det(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda I) = 0$. Dan diperoleh matriks segitiga atas dari $(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda I)$ sebagai berikut:

$$\det (A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software Maple 12*, maka akan didapatkan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1-\lambda^2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1+\lambda & \dots & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 2-\lambda^2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2+\lambda & \dots & 2+\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 4+\lambda & -\lambda-1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & -\lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & ((-\lambda)^2 + ((4 \times -4)\lambda) + ((3)(4) \times)) \end{vmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda I)$ adalah $\det(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda I)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{3\alpha+2}(4+\lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + ((4 \times -4)\lambda) + ((3)(4) \times))$$

Teorema 3.6

Spektrum dari graf multipartisi komplit $K(3)(4)_\alpha$ adalah:

$$\text{Spec } K(3)(4)_\alpha = \left[\begin{matrix} (2 \times -2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1} & (2 \times -2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1} & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \times + 2 & \alpha - 1 \end{matrix} \right]$$

Bukti

Dari teorema 3.5 diperoleh bahwa polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(3)(4)_\alpha$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{3\alpha+2}(4+\lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + ((4 \times -4)\lambda) + ((3)(4) \times))$$

Sehingga diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = (2 \times -2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}, \lambda_2 = (2 \times -2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -4$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Multiplisitas itu sama dengan dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sama dengan banyak baris nol pada matriks $(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda_i I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris.

Untuk $\lambda_1 = (2\alpha - 2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$.

Matriks $(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda_1 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak 1 baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_1 = (2\alpha - 2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$ adalah 1.

Untuk $\lambda_2 = (2\alpha - 2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$.

Matriks $(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda_2 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak 1 baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_2 = (2\alpha - 2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$ adalah 1.

Untuk $\lambda_3 = 0$.

Matriks $(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda_3 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak $3\alpha + 2$ baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_3 = 0$ adalah $3\alpha + 2$.

Untuk $\lambda_4 = -4$.

Matriks $(A(K(3)(4)_\alpha) - \lambda_4 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak $\alpha - 1$ baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_4 = -4$ adalah $\alpha - 1$.

Sehingga terbukti bahwa spektrum dari graf multipartisi komplit $(K(3)(4)_\alpha)$ diperoleh:

$$\text{Spec } K(3)(4)_\alpha = \begin{bmatrix} (2 \times -2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1} & (2 \times -2) + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1} & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \times \alpha + 2 & \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$

Dalam tabel berikut disajikan polinomial karakteristik matriks keterhubungan titik dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$. Untuk $\alpha \geq 2$, $n, \alpha \in \mathbb{N}$.

Matriks	Polinomial Karakteristik
$K(1)(2)_\alpha$, $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{N}$	$p(\lambda) = (1)(\lambda)^\alpha(2 + \lambda)^{\alpha-1}((- \lambda)^2 + ((2 \times -2)\lambda) + (1)(2) \times))$
$K(2)(3)_\alpha$, $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{N}$	$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{2\alpha+1}(3 + \lambda)^{\alpha-1}((- \lambda)^2 + ((3 \times -3)\lambda) + (2)(3) \times))$
$K(3)(4)_\alpha$, $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{N}$	$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{3\alpha+2}(3 + \lambda)^{\alpha-1}((- \lambda)^2 + ((4 \times -4)\lambda) + (3)(4) \times))$

Tabel 3.4 Polinomial Karakteristik dari Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$

Teorema 3.7

Polinomial karakteristik dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{n\alpha+(n-1)}((n+1) + \lambda)^{\alpha-1}((- \lambda)^2 + (((n+1) \times -(n-1))\lambda) + (n)(n+1) \times))$$

Bukti

Matriks keterhubungan titik graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ adalah

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
 0 & \lambda & \lambda & 1-\lambda^2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1+\lambda & \cdots & 1+\lambda & 1+\lambda \\
 0 & 0 & \lambda & 2-\lambda^2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2+\lambda & \cdots & 2+\lambda & 2+\lambda \\
 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (n+1)+\lambda & -\lambda-1 & \cdots & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & \cdots & -\lambda & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ((-\lambda)^2 + ((n+1)\alpha - (n+1))\lambda + ((n)(n+1)\alpha))
 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $(A(K(n)(n+1)_\alpha) - \lambda I)$ adalah $\det(A(K(n)(n+1)_\alpha) - \lambda I)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{n\alpha+(n-1)}((n+1)+\lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + ((n+1)\alpha - (n-1))\lambda + (n)(n+1)\alpha))$$

3.5 Spektrum Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$

Dalam tabel berikut disajikan spektrum dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ dengan $\alpha \geq 2$.

Matriks	Spektrum
$K(1)(2)_\alpha,$ $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{N}$	$ \begin{bmatrix} (\alpha-1) + \sqrt{(\alpha^2+1)} & ((\alpha-1) - \sqrt{(\alpha^2+1)}) & 0 & -2 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha-1 \end{bmatrix} = $ $ \begin{bmatrix} (\frac{2}{2}\alpha - \frac{2}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+4} & ((\alpha-1) - \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+4}) & 0 & -2 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha-1 \end{bmatrix} $
$K(2)(3)_\alpha,$ $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{N}$	$ \begin{bmatrix} (\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2+6\alpha+9} & (\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2+6\alpha+9} & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2\alpha+1 & \alpha-1 \end{bmatrix} = $ $ \begin{bmatrix} (\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2+6\alpha+9} & (\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{9\alpha^2+6\alpha+9} & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2\alpha+1 & \alpha-1 \end{bmatrix} $
$K(3)(4)_\alpha,$ $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{N}$	$ \begin{bmatrix} (2\alpha-2) + 2\sqrt{\alpha^2+\alpha+1} & (2\alpha-2) - 2\sqrt{\alpha^2+\alpha+1} & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3\alpha+2 & \alpha-1 \end{bmatrix} = $ $ \begin{bmatrix} (\frac{4}{2}\alpha - \frac{4}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{16\alpha^2+16\alpha+16} & (\frac{4}{2}\alpha - \frac{4}{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{16\alpha^2+16\alpha+16} & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3\alpha+2 & \alpha-1 \end{bmatrix} $

Tabel 3.5 Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit $K(n)(n+1)_\alpha$

Teorema 3.8

Spektrum dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ adalah:

$$\left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) - \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & 0 \\ 1 & 1 & n\alpha + (n-1) \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \alpha-1 \end{array}$$

Bukti

Dari teorema 3.7 diperoleh bahwa polinomial dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{n\alpha+(n-1)}((n+1)+\lambda)^{\alpha-1}((-\lambda)^2 + (((n+1)\alpha - (n-1))\lambda) + (n)(n+1)\alpha))$$

Sehingga diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2},$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) - \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2}, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -(n+1)$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Multiplisitas itu sama dengan dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sama dengan banyak baris nol pada matriks $(A(K(n)(n+1)_\alpha) - \lambda_i I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris.

$$\text{Untuk } \lambda_1 = \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2}.$$

Matriks $(A(K(n)(n+1)_\alpha) - \lambda_1 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak 1 baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk

$$\lambda_1 = \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} \text{ adalah } 1.$$

$$\text{Untuk } \lambda_2 = \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1) \right) - \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2}.$$

Matriks $(A(K(n)(n+1)_\alpha) - \lambda_2 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak 1 baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk

$$\lambda_2 = \left(\frac{n+1}{2} (\alpha - 1) \right) - \frac{1}{2} \sqrt{(n+1)^2 \alpha^2 + (2n^2 - 2) \alpha + (n+1)^2} \text{ adalah } 1.$$

Untuk $\lambda_3 = 0$.

Matriks $(A(K(n)(n+1)_\alpha) - \lambda_3 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak $n \alpha + (n-1)$ baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_3 = 0$ adalah $n \alpha + (n-1)$.

Untuk $\lambda_4 = -(n+1)$.

Matriks $(A(K(n)(n+1)_\alpha) - \lambda_4 I)$ setelah direduksi menjadi matriks eselon tereduksi baris, menghasilkan sebanyak $\alpha - 1$ baris nol.

Jadi, multiplisitas untuk $\lambda_4 = -(n+1)$ adalah $\alpha - 1$.

Sehingga terbukti bahwa spektrum dari graf multipartisi komplit $(K(n)(n+1)_\alpha)$ adalah:

$$\left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{n+1}{2} (\alpha - 1) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{(n+1)^2 \alpha^2 + (2n^2 - 2) \alpha + (n+1)^2} & \left(\frac{n+1}{2} (\alpha - 1) \right) - \frac{1}{2} \sqrt{(n+1)^2 \alpha^2 + (2n^2 - 2) \alpha + (n+1)^2} & 0 \\ 1 & 1 & n \alpha + (n-1) \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \alpha - 1 \end{array}$$

3.6 Integrasi Al-Quran dengan Pola pada Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit

Pada alam semesta, miliaran bintang dan galaksi yang tak terhitung jumlahnya bergerak dalam orbit yang terpisah. Meskipun demikian, semuanya berada dalam keserasian. Bintang, planet, dan bulan beredar pada sumbunya masing-masing dan dalam sistem yang ditempatinya masing-masing. Terkadang galaksi yang terdiri atas 200-300 miliar bintang bergerak melalui satu sama lain. Selama masa peralihan dalam beberapa contoh yang sangat terkenal yang diamati oleh para astronom, tidak terjadi tabrakan yang menyebabkan kekacauan pada keteraturan alam semesta.

Diseluruh alam semesta, besarnya kecepatan benda-benda langit ini sangat sulit dipahami bila dibandingkan dengan standar bumi. Jarak diruang angkasa sangatlah besar bila bandingkan dengan pengukuran yang dilakukan di bumi. Dengan ukuran raksasa yang hanya mampu digambarkan dalam angka saja oleh ahli matematika, bintang dan planet yang bermassa miliaran atau triliunan ton, galaksi, dan gugus galaksi bergerak di ruang angkasa dengan kecepatan yang sangat tinggi.

Kecepatan orbital bumi mengitari matahari kurang-lebih enam kali lebih cepat dari peluru, yakni 108.000 km/jam. Namun, angka-angka ini baru mengenai bumi saja. Tata surya bahkan lebih menakjubkan lagi. Kecepatan tata surya mencapai tingkat di luar batas logika manusia. Di alam semesta, meningkatnya ukuran suatu tata surya diikuti oleh meningkatnya kecepatan. Tata surya beredar mengitari pusat galaksi dengan kecepatan 720.000 km/jam. Kecepatan Bima Sakti sendiri, yang terdiri atas 200 miliar bintang, adalah 950.000 km/jam di ruang angkasa.

Kecepatan yang luar biasa ini menunjukkan bahwa hidup berada di ujung tanduk. Biasanya, pada suatu sistem yang sangat rumit, kecelakaan besar sangat sering terjadi. Namun, seperti diungkapkan Allah sistem ini tidak memiliki “cacat” atau “tidak seimbang”. Alam semesta, seperti juga segala sesuatu yang ada di dalamnya, tidak dibiarkan “sendiri” dan sistem ini bekerja sesuai dengan keseimbangan yang telah ditentukan Allah (Subsafan, 2008).

Bukti keteraturan ini membuktikan kekuasaan Allah yang abadi, Yang menciptakan alam semesta dari ketiadaan lalu memberinya bentuk. Ketika menjelajahi alam semesta, ditemukan banyak contoh keteraturan. Dunia ini

hanyalah salah satunya. Dengan segala keistimewaan yang ada padanya, bumi diciptakan dengan keseimbangan yang luar biasa stabil, yang membuatnya cocok bagi berlangsungnya kehidupan makhluk hidup.

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49, sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran." (Q.S. Al-Qamar:49)

Menurut Tafsir Al-Misbakh, Kata *Qadar* pada QS Al-Qamar ayat 49 diperselisihkan maknanya oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti "*kadar tertentu*" yang tidak bertambah atau tidak berkurang, atau tidak *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti "*ketentuan*" dan "*sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu*". Tidak hanya terbatas pada salah satu aspek saja.

Manusia misalnya, telah ada kadar yang ditetapkan Allah baginya. Selaku jenis makhluk ia dapat makan, minum, dan berkembang biak melalui sistem yang ditetapkan-Nya. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggung jawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan rasul untuk membimbing mereka. Akal pun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan akurat yang telah ditetapkan sistem dan kadar bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang (Shihab, 2002:481).

Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, termasuk teori graf, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau ilmu *al-hisab*. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti.

Seorang ahli matematika harus mempelajari angka-angka, permutasi, dan sifat-sifatnya. Aspek ini disebut aritmatika atau perhitungan. Ketika berhadapan dengan persamaan atau untuk mengetahui sesuatu yang belum diketahui tetapi dapat disimbolkan dengan rumus dan persamaan, maka lahirlah aljabar. Dan ketika berhadapan dengan format, ukuran, dan posisi, maka lahirlah geometri.

Pada masa-masa mutakhir ini, pemodelan-pemodelan matematika yang dilakukan manusia sebenarnya bukan membuat sesuatu yang baru. Pada hakikatnya, mereka hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena. Bahkan, wabah seperti demam berdarah, malaria, tuberkolosis, bahkan flu burung ternyata mempunyai aturan-aturan yang matematis. Sungguh, segala sesuatu telah diciptakan dengan ukuran, perhitungan, rumus, atau persamaan tertentu yang rapi dan teliti (Abdussakir, 2007:80).

Mempelajari matematika adalah pemecahan masalah, suatu aktivitas untuk menemukan dan mempelajari pola maupun hubungan, cara berpikir dan alat untuk berpikir. Begitu pula dalam pembahasan ini penulis membahas tentang matriks, matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan unsur dalam matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom, misalnya matriks berordo 2×2 , 3×3 dan seterusnya. Makhluk yang ada di alam semesta

ini semua juga mempunyai ukuran tersendiri yang membedakan antara satu dengan lainnya, bentuk dari pohon, daun, bunga, sawah, rumah dll, mempunyai proporsi masing-masing.

Pada penelitian ini graf komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ mempunyai ukuran $((n+1) \times \alpha) + n$ titik dengan α partisi yang akan dicari masing-masing matriks keterhubungan titik sehingga ditemukan pola spektrum dari graf multipartisikomplit $K(n)(n+1)_\alpha$ yaitu

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & 0 & -(n+1) \\ 1 & 1 & n\alpha + (n-1) & \alpha-1 \end{bmatrix}.$$

Kemudian pola tersebut akan dibuktikan kebenarannya. Ini juga merupakan salah satu ukuran yang diciptakan Allah SWT yang kemudian harus diperhatikan, dipikirkan, dipahami, dan dibuktikan kebenaran teorema-teoremanya. Sebagaimana disebutkan dalam firman Allah pada Surat Al-Baqarah ayat 111 berikut:

﴿صَدِّقِينَ كُنْتُمْ إِن يُرْهَنَكُم مَّا تَوَاقَلُونَ﴾

Artinya: Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar" (Q.S. Al-Baqoroh:111).

Ayat tersebut menyatakan bahwa kebenaran harus selalu ada bukti. Oleh karena itu, matematika perlu adanya bukti suatu konsep atau rumus tersebut dikatakan benar.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai spektrum dari graf multipartisi komplit, maka diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum spektrum dari graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ adalah

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & \left(\frac{n+1}{2}(\alpha-1)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2\alpha^2 + (2n^2-2)\alpha + (n+1)^2} & 0 & -(n+1) \\ 1 & 1 & n\alpha + (n-1) & \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis hanya memfokuskan pada spektrum pada matriks keterhubungan titik. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian dengan mencari teorema dari berbagai macam spektrum yang dapat diperoleh dari graf komplit $K(n)(n+1)_\alpha$ dan menemukan program untuk membuat gambar graf komplit.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, Sari, FNK., & Shandya, D.. 2012. *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Abdussakir. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.
- Anton, H. & Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga
- Ayres, F.. 1984. *Matriks*. Bandung: Erlangga.
- Ayyaswamy, S.K. dan Balachandran, S.. 2010. "On Detour Spectra of Some Graphs". *World Academy of Science, Engineering and Technology*. (www.waset.org/journals/waset/v67/v67-88.pdf. diakses 14 november 2014).
- Biggs, Norman. 1974. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Brouwer, A.E. & Haemers, W.H.. 2010. *Spectra of Graphs Theory and Application*. New York: London Academic Press.
- Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Cullen, C.. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*, Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Faizah, N.. 2012. *Spectrum Adjacency, Spectrum Detour dan Spektrum Laplace ada Graf Turan*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Gazali, W.. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Jogjakarta: Graha Ilmu
- Jain, S.K & Gunawardena, A.D.. 2004. *Linear Algebra An Interactive Approach*. Unit States of America: Thomson brooks/Cole
- Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- Shihab, M. Q.. 2002. *Tafsir Al Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati
- Shihab, M. Q.. 2007. *Membumikan Al-Quran, Fungsi dan Peran Wahyu dalam Kehidupan Masyarakat*. Bandung: Mizan.

Subsafan. 2008. Ayat Al-Qur'an dan Alam Semesta (online). Diakses tanggal 12 April. <http://subsafan.blogspot.com/2008/08/ayat-al-quran-dan-alam-semesta.html>

Wijaya, B.T.. 2011. *Spectrum Detour Graf m-Partisi Komplit*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Wilson, R.J & Walkins, J.J.. 1990. *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.



LAMPIRAN

Lampiran 1:
Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_\alpha$ dengan Bantuan Maple 12

Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_2$

> start;

start

> with(linalg) :

> Adj := matrix([[0, 1, 1, 1, 1,], [1, 0, 0, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 0, 0]])

$$Adj := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> eigenvalues (Adj);

$$0, 0, -2, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$$

> nol := matrix([[-λ, 1, 1, 1, 1], [1, -λ, 0, 1, 1], [1, 0, -λ, 1, 1], [1, 1, 1, -λ, 0], [1, 1, 1, 0, -λ]])

$$nol := \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

> (Laplace - λ·Identitas) = 0

$$Laplace - \lambda \text{ Identitas} = 0$$

> satu := matrix([[0, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 0, 0]])

$$satu := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `gaussjord (satu);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `untuk  $\lambda = 1 + \sqrt{5}$ ;`

`untuk  $\lambda = 1 + \sqrt{5}$`

> `dua := matrix([[$-(1 + \sqrt{5})$, 1, 1, 1, 1], [1, $-(1 + \sqrt{5})$, 0, 1, 1],
[1, 0, $-(1 + \sqrt{5})$, 1, 1], [1, 1, 1, $-(1 + \sqrt{5})$, 0], [1, 1, 1, 0, $-(1 + \sqrt{5})$]]])`

$$dua := \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{5} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 - \sqrt{5} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 - \sqrt{5} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 - \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

> `gaussjord (dua);`

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4(20 + 9\sqrt{5})}{(2\sqrt{5} + 5)(7 + 3\sqrt{5})} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{65 + 29\sqrt{5}}{(2\sqrt{5} + 5)(7 + 3\sqrt{5})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `untuk  $\lambda = -2$ ;`

`untuk  $\lambda = -2$`

> `tiga := matrix([[2, 1, 1, 1, 1], [1, 2, 0, 1, 1], [1, 0, 2, 1, 1], [1, 1, 1, 2,
0], [1, 1, 1, 0, 2]])`

$$tiga := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> `gaussjord (tiga);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `empat := matrix([[-(1-√5), 1, 1, 1, 1], [1, -(1-√5), 0, 1, 1], [1, 0, -(1-√5), 1, 1], [1, 1, 1, -(1-√5), 0], [1, 1, 1, 0, -(1-√5)]])`

$$\text{empat} := \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{5} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 + \sqrt{5} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 + \sqrt{5} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 + \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 + \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

> `gaussjord(empat);`

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4(-20 + 9\sqrt{5})}{(2\sqrt{5} - 5)(-7 + 3\sqrt{5})} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-65 + 29\sqrt{5}}{(2\sqrt{5} - 5)(-7 + 3\sqrt{5})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `gausselim(nol);`

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \lambda & -\lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 + 2\lambda + 4 \end{bmatrix}$$

> `eigenvectors(Adj)`

$$\begin{aligned} & [0, 2, \{[0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0], [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1]\}], [-2, 1, \\ & \{[0 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1]\}], [1 + \sqrt{5}, 1, \{[-1 + \sqrt{5} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]\}], [1 \\ & -\sqrt{5}, 1, \{[-1 - \sqrt{5} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]\}] \end{aligned}$$

Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_3$

> start;

start

> with(linalg) :

> Adj := matrix([[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]])

$$Adj := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> eigenvalues (Adj);

$$2 + \sqrt{10}, 2 - \sqrt{10}, -2, -2, 0, 0, 0$$

> nol := matrix([[-λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, -λ, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 0, -λ, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, -λ, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -λ, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, -λ, 0],
[1, 1, 1, 1, 1, 0, -λ]])

$$nol := \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

> (Laplace - λ·Identitas) = 0

$$Laplace - \lambda Identitas = 0$$

> satu := matrix([[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]])

$$satu := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*satu*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *untuk* $\lambda = -2$;

untuk $\lambda = -2$

> *dua* := *matrix*([[2, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 2, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 2, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 2, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 0], [1, 1, 1, 1, 0, 2, 2]])

$$dua := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*dua*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *untuk* $\lambda = 2 + \sqrt{10}$;

untuk $\lambda = 2 + \sqrt{10}$

```
> tiga := matrix([[-(2 + sqrt(10)), 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, -(2 + sqrt(10)), 0,
1, 1, 1, 1], [1, 0, -(2 + sqrt(10)), 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -(2 + sqrt(10)),
0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -(2 + sqrt(10)), 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, -(2
+ sqrt(10)), 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, -(2 + sqrt(10))]])
```

```
tiga := [[-2 - sqrt(10), 1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, -2 - sqrt(10), 0, 1, 1, 1, 1],
[1, 0, -2 - sqrt(10), 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, -2 - sqrt(10), 0, 1, 1],
[1, 1, 1, 0, -2 - sqrt(10), 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, -2 - sqrt(10), 0],
[1, 1, 1, 1, 1, 0, -2 - sqrt(10)]]
```

```
> gaussjrd(tiga);
```

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2(14 + 5\sqrt{10})}{(4 + \sqrt{10})^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> empat := matrix([[-(2 - sqrt(10)), 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, -(2 - sqrt(10)), 0,
1, 1, 1, 1], [1, 0, -(2 - sqrt(10)), 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -(2 - sqrt(10)), 0,
1, 1], [1, 1, 1, 0, -(2 - sqrt(10)), 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, -(2 - sqrt(10)),
0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, -(2 - sqrt(10))]])
```

```
empat := [[-2 + sqrt(10), 1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, -2 + sqrt(10), 0, 1, 1, 1, 1],
[1, 0, -2 + sqrt(10), 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, -2 + sqrt(10), 0, 1, 1],
[1, 1, 1, 0, -2 + sqrt(10), 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, -2 + sqrt(10), 0],
[1, 1, 1, 1, 1, 0, -2 + sqrt(10)]]
```

```
> gaussjrd(empat);
```

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(-14+5\sqrt{10})}{(-4+\sqrt{10})^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gausselim(nol);*

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & -\lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & -\lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda+6 \end{bmatrix}$$

Graf Multipartisi Komplit $K(1)(2)_4$

> *start;*

start

> *with(linalg) :*

> *Adj := matrix([[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]])*

$$Adj := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

>
> *eigenvalues (Adj);*

$$3 + \sqrt{17}, 3 - \sqrt{17}, -2, -2, -2, 0, 0, 0, 0$$

> *nol* := matrix([[-λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, -λ, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, -λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -λ, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -λ, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, -λ, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, -λ, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -λ, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -λ]])

$$nol := \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

> (Laplace - λ·Identitas) = 0

$$Laplace - \lambda \text{ Identitas} = 0$$

> *satu* := matrix([[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]])

$$satu := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> gaussjordan(*satu*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> untuk $\lambda = -2$;

untuk $\lambda = -2$

> $dua := matrix([[2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 2, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 2]])$

$$dua := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> $gaussjordan(dua)$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> untuk $\lambda = 3 + \sqrt{17}$;

untuk $\lambda = 3 + \sqrt{17}$

```
> tiga := matrixmatrix([[-(3 + √17), 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, -(3 + √17), 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, -(3 + √17), 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -(3 + √17), 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -(3 + √17), 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, -(3 + √17), 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, -(3 + √17), 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -(3 + √17), 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -(3 + √17)]]])
```

```
tiga := linalg:-matrix [[-3 - √17, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, -3 - √17, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, -3 - √17, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -3 - √17, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -3 - √17, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, -3 - √17, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, -3 - √17, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -3 - √17, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -3 - √17]]]
```

```
> gaussjordan(tiga);
```

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8(53 + 13\sqrt{17})}{(5 + \sqrt{17})^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> empat := matrix([[-(3 - √17), 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, -(3 - √17), 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, -(3 - √17), 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -(3 - √17), 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -(3 - √17), 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, -(3 - √17), 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, -(3 - √17), 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -(3 - √17), 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -(3 - √17)]]])
```

```
empat := [[ -3 +  $\sqrt{17}$ , 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
           [ 1, -3 +  $\sqrt{17}$ , 0, 1, 1, 1, 1, 1],
           [ 1, 0, -3 +  $\sqrt{17}$ , 1, 1, 1, 1, 1],
           [ 1, 1, 1, -3 +  $\sqrt{17}$ , 0, 1, 1, 1],
           [ 1, 1, 1, 0, -3 +  $\sqrt{17}$ , 1, 1, 1],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, -3 +  $\sqrt{17}$ , 0, 1],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, 0, -3 +  $\sqrt{17}$ , 1],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -3 +  $\sqrt{17}$ , 0],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -3 +  $\sqrt{17}$ ]]
```

```
> gaussjord(empat);
```

```
Warning, unable to find a provably non-zero pivot
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8(-53+13\sqrt{17})}{(-5+\sqrt{17})^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(nol);
```

```
[[ 1, - $\lambda$ , 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [ 0,  $\lambda$ , - $\lambda$ , 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [ 0, 0, 2 +  $\lambda$ , - $\lambda$  - 1, -1, 0, 0, 0, 0],
 [ 0, 0, 0,  $\lambda$ , - $\lambda$ , 0, 0, 0, 0],
 [ 0, 0, 0, 0, 2 +  $\lambda$ , - $\lambda$  - 1, -1, 0, 0],
 [ 0, 0, 0, 0, 0,  $\lambda$ , - $\lambda$ , 0, 0],
 [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2 +  $\lambda$ , - $\lambda$  - 1, -1],
 [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,  $\lambda$ , - $\lambda$ ],
 [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, - $\lambda^2$  + 6 $\lambda$  + 8]]
```

LAMPIRAN

Lampiran 2:

Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_\alpha$ dengan bantuan Maple 12.

Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_2$

> start;

start

> with(linalg):

> Adj := matrix([[0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]])

$$Adj := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> eigenvalues (Adj);

$$0, 0, 0, 0, 0, -3, \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}$$

> nol := matrix([[-λ, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, -λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, -λ, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 0, -λ, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 0, -λ, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, -λ, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -λ], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -λ]])

$$nol := \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

>

> *satu* := matrix([[0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]])

$$\text{satu} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gaussjordan* (*satu*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *untuk* $\lambda = -3$;

untuk $\lambda = -3$

> *dua* := matrix([[3, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 3, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 3, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 3, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 3]])

$$\text{dua} := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

> *gaussjordan* (*dua*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> untuk $\lambda = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}$;

$$\text{untuk } \lambda = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}$$

>

$$\begin{aligned} \text{tiga} := & \text{matrix}\left(\left[\left[-\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}\right), 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\right], \left[0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}\right), 1, 1, 1, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}\right), 0, 0, 1, 1, 1\right], \right. \right. \\ & \left. \left[1, 1, 0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}\right), 0, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, 0, 0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}\right), 1, 1, 1\right], \left[1, 1, 1, 1, 1, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}\right), 0, 0\right], \left[1, \right. \right. \\ & \left. \left. 1, 1, 1, 1, 0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}\right), 0\right], \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{57}\right)\right]\right]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tiga} := & \left[\left[-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\right], \right. \\ & \left[0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}, 1, 1, 1, 1, 1, 1\right], \\ & \left[1, 1, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}, 0, 0, 1, 1, 1\right], \\ & \left[1, 1, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}, 0, 1, 1, 1\right], \\ & \left[1, 1, 0, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}, 1, 1, 1\right], \\ & \left[1, 1, 1, 1, 1, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}, 0, 0\right], \\ & \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}, 0\right], \\ & \left. \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{57}\right]\right] \end{aligned}$$

> `gaussjordan(tiga);`

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{3+\sqrt{57}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{3+\sqrt{57}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>

$$\text{empat} := \text{matrix}\left(\left[\left[-\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}\right), 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\right], \left[0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}\right), 1, 1, 1, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}\right), 0, 0, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, 0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}\right), 0, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, 0, 0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}\right), 1, 1, 1\right], \left[1, 1, 1, 1, 1, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}\right), 0, 0\right], \left[1, 1, 1, 1, 0, 0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}\right), 0\right], \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}\right)\right]\right]\right)$$

$$\text{empat} := \left[\left[-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\right], \left[0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}, 1, 1, 1, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}, 0, 0, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}, 0, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, 0, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}, 1, 1, 1\right], \left[1, 1, 1, 1, 1, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}, 0, 0\right], \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}, 0\right], \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}\right]\right]$$

> `gaussjordan(empat);`

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{3+\sqrt{57}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{3+\sqrt{57}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gausselim(nol);*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda^2 & 1 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3+\lambda & -\lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda+12 \end{bmatrix}$$

Graf Multipartisi Komplit $K(2)(3)_3$

> *start;*

start

> *with(linalg):*

> *Adj := matrix([[0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]])*

$$Adj := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>
 > *eigenvalues* (Adj);
 $3 + 3\sqrt{3}, 3 - 3\sqrt{3}, -3, -3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$

>
 > *nol* := *matrix*([[$-\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0$], [$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0$], [$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0$]]])

$$nol := \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

>
 > *satu* := *matrix*([[$0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$], [$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$]]])

$$satu := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gaussjordan* (*satu*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *untuk* $\lambda = -3$;

untuk $\lambda = -3$

> *dua* := *matrix*([[3, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 3, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 3, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 3, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 3, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 3]])

$$dua := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

> *gaussjordan* (*dua*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *untuk* $\lambda = 3 + 3\sqrt{3}$;

$$\text{untuk } \lambda = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}$$

> *tiga* := *matrix*([[$-(3 + 3\sqrt{3})$], 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, $-(3 + 3\sqrt{3})$], 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, $-(3 + 3\sqrt{3})$]]])


```
tiga := [[-3 - 3*sqrt(3), 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
[0, -3 - 3*sqrt(3), 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, -3 - 3*sqrt(3), 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 0, -3 - 3*sqrt(3), 0, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 0, 0, -3 - 3*sqrt(3), 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, -3 - 3*sqrt(3), 0, 0, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 0, -3 - 3*sqrt(3), 0, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -3 - 3*sqrt(3), 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -3 - 3*sqrt(3), 0, 0],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -3 - 3*sqrt(3), 0],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -3 - 3*sqrt(3)]]
```

```
> gaussjord(tiga);
```

```
Warning, unable to find a provably non-zero pivot
```

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3(4\sqrt{3}+7)}{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{1+\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

```
>
```

```
empat := matrix([[-(3-3*sqrt(3)), 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, -(3-3*sqrt(3)), 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, -(3-3*sqrt(3)), 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, -(3-3*sqrt(3)), 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, -(3-3*sqrt(3)), 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, -(3-3*sqrt(3)), 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, -(3-3*sqrt(3)), 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -(3-3*sqrt(3)), 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -(3-3*sqrt(3)), 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -(3-3*sqrt(3)), 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -(3-3*sqrt(3))]])
```

```
empat := [[ -3 + 3√3, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
           [ 0, -3 + 3√3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
           [ 1, 1, -3 + 3√3, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1],
           [ 1, 1, 0, -3 + 3√3, 0, 1, 1, 1, 1, 1],
           [ 1, 1, 0, 0, -3 + 3√3, 1, 1, 1, 1, 1],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, -3 + 3√3, 0, 0, 1, 1],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, 0, -3 + 3√3, 0, 1, 1],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -3 + 3√3, 1, 1],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -3 + 3√3, 0, 0],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -3 + 3√3, 0],
           [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -3 + 3√3]]
```

```
> gaussjord(empat);
```

```
Warning, unable to find a provably non-zero pivot
```

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3(4\sqrt{3}-7)}{(-1+\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{-1+\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

```
> gausselim(nol);
```



```

      nol :=
      [ 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
        0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
        1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
        1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
        1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
        1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1
        1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1
        1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
        1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
        1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 ]

> gaussjord(nol)

      [ 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]

> satu := matrix([[3, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 3, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 3, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 3, 0, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1,
3, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1,
1, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 0, 0, 1, 1, 1], [1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 3, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 3,
0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 3]])

```

$$satu := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

> *gaussjrd* (*satu*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *untuk* $\lambda = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}$;

$$\text{untuk } \lambda = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}$$

$$\begin{aligned}
dua := & \left[\left[-\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \right. \\
& \left[0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 0, 0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 1, 1, 1, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 0, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 1, 1, 1 \right], \\
& \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 0 \right], \\
& \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0 \right], \\
& \left. \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{177} \right] \right]
\end{aligned}$$

> *gaussjordan* (*dua*);

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$-\frac{288(945+71\sqrt{177})}{(9+\sqrt{177})(15+\sqrt{177})^3}$
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$-\frac{24}{9+\sqrt{177}}$
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	-1
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	-1
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	-1
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	-1
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0	-1
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	-1
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	-1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0	-1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0	-1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	-1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0	-1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1	-1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0

$$\begin{aligned}
 tiga := & \left[\left[-\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \right. \\
 & \left[0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 0, 0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 1, 1, 1, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 0, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 1, 1, 1 \right], \\
 & \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0, 0 \right], \\
 & \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177}, 0 \right], \\
 & \left. \left[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{177} \right] \right]
 \end{aligned}$$

> *gaussjord* (*tiga*);

Warning, unable to find a provably non-zero pivot

[illegible]

detrminan :=

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

> *gausselim(detrminan);*

$$\begin{aligned}
& \left[\left[1, 1, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \right. \\
& \quad \left[0, \lambda, 1 - \lambda^2, 1, 1, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, \right. \\
& \quad \left. 1 + \lambda, 1 + \lambda \right], \\
& \quad \left[0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 3 + \lambda, -\lambda - 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3 + \lambda, -\lambda - 1, -1, -1, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3 + \lambda, -\lambda - 1, -1, -1 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda \right], \\
& \quad \left. \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\lambda^2 + 9\lambda + 24 \right] \right]
\end{aligned}$$

Lampiran 3:
Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_\alpha$ dengan Bantuan Maple 12

Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_2$

> start;

start

> with(linalg) :

>

Adj := matrix([[0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]])

Adj :=

0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

>

> eigenvalues (Adj);

$4 + 2\sqrt{13}, 4 - 2\sqrt{13}, -4, -4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$

> $nol := matrix([[-\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0]]]$

$nol :=$

$$\begin{bmatrix} [-\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \\ [0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \\ [0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0], \\ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda] \end{bmatrix}$$

> $(Laplace - \lambda \cdot Identitas) = 0$

$Laplace - \lambda Identitas = 0$

> $satu := matrix([[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1]])$

$$satu := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*satu*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *untuk* $\lambda = -1$;

untuk $\lambda = -1$

> *dua* := *matrix*([[1, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 1, 1], [1, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 0, 1]])

$$dua := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*dua*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *untuk* $\lambda = -2$;

untuk $\lambda = -2$

> *tiga* := *matrix*([[2, 0, 1, 1, 1], [1, 2, 0, 1, 1], [1, 0, 2, 1, 1], [1, 1, 1, 2, 0], [1, 1, 1, 0, 2]])

$$tiga := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> `gaussjordan(tiga);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `empat := matrix([[ -3, 0, 1, 1, 1], [1, -3, 0, 1, 1], [1, 0, -3, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -3]])`

$$empat := \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

> `gaussjordan(empat);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `gausselim(nol);`

[illegible]

```
> start;
```

> with(linalg) :

[illegible]

```

Adj :=
[ 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 ]

>
> eigenvalues (Adj);
4 + 2√13, 4 - 2√13, -4, -4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
>
nol := matrix([[-λ, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, -λ, 0, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, -λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1,
1, 1, -λ, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -λ, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 0, 0, -λ, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, -λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -λ, 0, 0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -λ, 0, 0, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -λ, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -λ, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -λ, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -λ, 0, 0],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -λ, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -λ, 0],
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -λ]])

```

nol :=

```
[[-λ, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [0, -λ, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [0, 0, -λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, -λ, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 0, -λ, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 0, 0, -λ, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 0, 0, 0, -λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -λ, 0, 0, 0, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -λ, 0, 0, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -λ, 0, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -λ, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -λ, 0, 0, 0],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -λ, 0, 0],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -λ, 0],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -λ]]
```

> $(\text{Laplace} - \lambda \cdot \text{Identitas}) = 0$

Laplace - λ *Identitas* = 0

> *satu* := *matrix*([[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]])

satu :=

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gaussjordan* (*satu*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> untuk $\lambda = -1$;

untuk $\lambda = -1$

> $dua := matrix([[1, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 1, 1], [1, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 0, 1]])$

$$dua := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $gaussjordan(dua);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> untuk $\lambda = -2$;

untuk $\lambda = -2$

> $tiga := matrix([[2, 0, 1, 1, 1], [1, 2, 0, 1, 1], [1, 0, 2, 1, 1], [1, 1, 1, 2, 0], [1, 1, 1, 0, 2]])$

$$tiga := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> $gaussjordan(tiga);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $empat := matrix([[-3, 0, 1, 1, 1], [1, -3, 0, 1, 1], [1, 0, -3, 1, 1], [1, 1, 1, -3, 0], [1, 1, 1, 0, -3]])$

$$\text{empat} := \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*empat*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gausselim*(*nol*);

$$\begin{aligned} & \left[\left[1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \right. \\ & \left[0, \lambda, \lambda, 1 - \lambda^2, 1, 1, 1, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda \right], \\ & \left[0, 0, \lambda, 2 - \lambda^2, 2, 2, 2, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda \right], \\ & \left[0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 + \lambda, -\lambda - 1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 + \lambda, -\lambda - 1, -1, -1, -1 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda \right], \\ & \left. \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\lambda^2 + 8\lambda + 36 \right] \right] \end{aligned}$$

Graf Multipartisi Komplit $K(3)(4)_4$

> *start*;

start

> $nol := matrix([[-\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda]]])$

$nol := [[[-\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -\lambda]]]$

> $gausselim(nol);$

$$\begin{aligned}
& \left[\left[1, 1, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \right. \\
& \quad \left[0, \lambda, \lambda, 1 - \lambda^2, 1, 1, 1, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 \right. \\
& \quad \quad \left. + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda \right], \\
& \quad \left[0, 0, \lambda, 2 - \lambda^2, 2, 2, 2, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 \right. \\
& \quad \quad \left. + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 + \lambda, -\lambda - 1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 + \lambda, -\lambda - 1, -1, -1, -1, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda, 0, 0 \right], \\
& \quad \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda, -\lambda \right], \\
& \quad \left. \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\lambda^2 + 12\lambda + 48 \right] \right]
\end{aligned}$$