TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Oleh:
AMANATUL HUSNIA
NIM. 09610040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
AMANATUL HUSNIA
NIM. 09610040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Oleh:
AMANATUL HUSNIA
NIM. 09610040

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 15 Januari 2014

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Oleh:
AMANATUL HUSNIA
NIM. 09610040

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2014

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	____________
Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	____________
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	____________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	____________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: AMANATUL HUSNIA
NIM	: 09610040
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Teorema Titik Tetap di Ruang Banach

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Januari 2014

Yang membuat Pernyataan,

Amanatul Husnia
NIM. 09610040

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ ۝١

ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَتَطۡمَئِنُّ قُلُوبُهُم بِذِكۡرِ ٱللَّهِۗ أَلَا بِذِكۡرِ ٱللَّهِ
تَطۡمَئِنُّ ٱلۡقُلُوبُ ۝٢٨

"(yaitu) orang-orang yang beriman dan hati mereka manjadi tenteram dengan mengingat Allah. Ingatlah, hanya dengan mengingati Allah-lah hati menjadi tenteram"(Qs. Ar-Ra'ad:28)

PERSEMBAHAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ رَبِّ ٱلۡعَـٰلَمِينَ

Dengan iringan do'a serta rasa syukur yang tidak terbatas, skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Ibunda (Li'ani) dan Ayahanda (Asmudi) yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberikan dukungan, motivasi, dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk Suami Tercinta (Nanang Heri Setyo Dwi Cahyo) yang selalu memberikan doa dan motivasinya kepada penulis.

Teman-teman di PPTQ As-Syifa' yang selalu menjadi inspirasi dan penyemangat

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada ucapan yang lebih utama selain syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Sempurna, Allah SWT, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terimakasih seiring doa dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu penulis terutama dalam penyelesaian skripsi ini. Ucapan terimakasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si sebagai dosen pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, dan

kesabarannya, serta pengalaman yang berharga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

5. Fachrur Rozi, M.Si sebagai dosen pembimbing agama yang telah memberikan banyak arahan dan pengalaman yang berharga.
6. Dr. Sri Harini, M.Si sebagai dosen wali yang telah memberikan arahan di setiap langkah mulai awal hingga akhir keberadaan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Segenap sivitas akademika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
8. Kepada ibunda dan ayahanda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya, serta dukungan moral maupun material kepada penulis dalam menuntut ilmu. Suami tercinta, seluruh keluarga, dan kerabat yang telah memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.
9. Sahabat-sahabat terbaik Evi Mufarida, Mahatva Cahyaning T., Khusnul Khamidiah, Deri Ismawati, Raudatul Khoiriyah, Ika Rahmawati, Rohatul Wardah, dan Ani Afidatul, serta seluruh teman-teman seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009. Terimakasih atas doa, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.
10. Sahabat-sahabat di ma’had putri tercinta, Rofiqoh Indra Y, Nabila Amalia, Indah N., dan teman yang lainnya yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih untuk semua dukungan dan semangatnya dalam menuntut ilmu bersama.

Akhirnya semoga skripsi ini dapat menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Aamiin Yaa Rabbal'Alamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Husnia, Amanatul. 2014. **Teorema Titik Tetap di Ruang Banach.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata kunci: Titik Tetap, Pemetaan Kontraksi, Ruang Metrik Lengkap, Ruang Banach

Ruang Banach merupakan suatu konsep penting dalam analisis fungsional. Pada tahun 1992, seorang ahli matematika berasal dari Polandia membuktikan teorema yang menyatakan ketunggalan titik tetap. Teorema tersebut disebut juga dengan teorema titik tetap Banach.

Teorema titik tetap Banach (teorema kontraksi) merupakan teorema ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut kontraksi dari ruang metrik lengkap ke dalam dirinya sendiri. Pengertian ruang Banach sendiri adalah ruang norm yang lengkap, dikatakan lengkap jika barisan Cauchy tersebut konvergen.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pembuktian titik tetap di ruang Banach dengan kondisi yang diberikan yaitu pada pemetaan Kannan dan pemetaan Fisher.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa pemetaan Kannan dan pemetaan Fisher mempunyai titik tetap yang tunggal $T(x) = x$ dan pemetaan tersebut merupakan pemetaan titik tetap terhadap dirinya sendiri di ruang metrik lengkap.

ABSTRACT

Husnia, Amanatul. 2014. **Fixed Point Theorem in Banach Space.** Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang
Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Key words: Fixed Point, Contraction Mapping, Complete Metric Space, Banach Space

Banach space is an important concept in functional analysis. In 1992, a mathematician from Poland proved the uniqueness of fixed point. The theorem is also called Banach fixed point theorem.

Banach fixed point theorem (contraction theorem) is a unique fixed point theorem on a mapping called the contraction of a complete metric space into itself. The definition of Banach space itself is a complete norm space, to be said complete if the Cauchy sequence is convergent.

This study aims to determine the evidence of fixed point in Banach space with the given conditions, namely Kannan mapping and Fisher mapping.

Based on the results of the discussion, it is obtained that Kannan mapping and Fisher mapping has a single fixed point $T(x) = x$ and the mapping is a fixed point mapping to itself in a complete metric space.

ملخص البحث

حسنيا، أمانتل. عام ٢٠١٤. **نقطة ثابتة في نظرية باناخ الفضاء**. سيك رفسي. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج:

المستشارون: (١) خيرالرحمن الماجستير

(٢) فخرالرازي الماجستير

الكلمات الرئيسية: النقطة الثابتة، تقلص رسم الخرائط، كاملة الفضاء المتري، باناخ الفضاء

فضاء باناخ هو مفهوم هام في التحليل الوظيفي. في عام ١٩٩٢، وهو عالم رياضيات من بولندا أثبت نقطة ثابتة فريدة من نوعها. وتسمى أيضا نظرية باناخ نقطة ثابتة نظرية.

نظرية نقطة ثابتة باناخ (نظرية انكماش) هو نظرية فريدة من نوعها نقطة ثابتة على الخرائط يسمى تقلص مساحة متري كاملة في حد ذاته. تعريف فضاء باناخ نفسه هو مساحة القاعدة كاملة، يمكن أن يقال كاملة إذا كان التسلسل هو كوشي متقاربة.

تهدف هذه الدراسة إلى تحديد الأدلة من نقطة ثابتة في فضاء باناخ مع ظروف معينة، وهي رسم الخرائط كنعان ورسم الخرائط فيشر.

استنادا إلى نتائج المناقشة، تبين أن الخرائط كنعان ورسم الخرائط فيشر لديه نقطة واحدة ثابتة

ورسم الخرائط هو تعيين نقطة ثابتة لنفسها في فضاء متري الكاملة. $T(x) = x$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur’an merupakan sumber pengetahuan dan inspirasi umat Islam dalam segala hal. Berbagai informasi sains dan teknologi telah terkandung di dalamnya sejak ribuan tahun silam. Sebelum masuk pada pembahasan tentang penafsiran ayat-ayat Al-Qur’an tentang ilmu pengetahuan, penulis akan menyuguhkan ayat-ayat yang menunjukkan begitu pentingnya menjadi orang yang berilmu.

Allah SWT berfirman dalam surat Az-Zumar ayat 9:

أَمَّنْ هُوَ قَٰنِتٌ ءَانَآءَ ٱلَّيْلِ سَاجِدًا وَقَآئِمًا يَحْذَرُ ٱلْءَاخِرَةَ وَيَرْجُوا۟ رَحْمَةَ رَبِّهِۦ ۗ قُلْ
هَلْ يَسْتَوِى ٱلَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَٱلَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ ۗ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٩﴾

Artinya : “ (apakah kamu Hai orang musyrik yang lebih beruntung) ataukah orang yang beribadah di waktu-waktu malam dengan sujud dan berdiri, sedang ia takut kepada (azab) akhirat dan mengharapkan rahmat Tuhannya? Katakanlah: "Adakah sama orang-orang yang mengetahui dengan orang-orang yang tidak mengetahui?" Sesungguhnya orang yang berakallah yang dapat menerima pelajaran.”

Imam Al-Qurtubi rahimahullah berkata: ”Menurut Az-Zujaj Radiyallahuanhu, maksud ayat tersebut yaitu orang yang memiliki ilmu pengetahuan berbeda dengan orang yang tidak tahu, demikian juga orang taat tidaklah sama dengan orang bermaksiat. Orang yang mengetahui adalah orang yang dapat mengambil manfaat dari ilmu serta mengamalkannya sedangkan orang yang tidak mengambil manfaat dari ilmu serta tidak mengamalkannya, maka ia berada dalam barisan orang yang tidak mengetahui.”

Dari penafsiran di atas dapat diketahui begitu pentingnya menjadi orang yang berilmu, selain itu Allah juga akan meninggikan derajat orang yang berilmu seperti terdapat daam surat Al-Mujadilah ayat 58 yang artinya,*"Niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantara kalian dan orang-orang yang diberi ilmu."* Di samping itu, ilmu dapat menjadi jalan penerang dalam mencapai petunjuk dan suatu kebaikan. Ilmu juga dapat menjadikan taat kepada Allah yang akan membuat seseorang menjadi tawadhu' dan rendah hati di hadapan orang lain. Ada suatu peribahasa yang mengatakan bahwa "padi yang semakin berisi akan semakin merunduk" dalam artian bahwa semakin bertambah ilmu seseorang semakin bersih pula hatinya dari perbuatan tercela seperti terpeliharanya dari sifat ujub, riya', takabur, dengki, dan sifat tercela lainnya.

Setelah diketahui tentang begitu pentingnya menjadi orang yang berilmu, akan dibahas penafsiran ayat-ayat Al-Qur'an tentang ilmu matematika. Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai keunikan dalam sifat, pemahaman, bahkan mempunyai bahasa sendiri yang membutuhkan ketrampilan khusus untuk mengubah bahasa matematika menjadi lebih mudah untuk dipahami. Matematika mempunyai sifat yang luas yang tidak akan pernah selesai dipelajari dan akan selalu menghasilkan suatu penemuan-penemuan baru, teorema-teorema baru, pola-pola baru, dan juga pendapat baru (Wijaya, 2009:1).

Menurut Nosoetion (1980:12) menyatakan bahwa matematika berasal dari bahasa Yunani *"mathein"* atau *"mantheinein"* yang artinya mempelajari. Orang Belanda, menyebut matematika dengan *"wiskunde"* yang artinya ilmu pasti.

Sedangkan orang Arab, menyebut matematika dengan *"ilmu al hisab"* yang artinya ilmu berhitung.

Meskipun sukar untuk menentukan definisi yang tepat tentang matematika, namun pada dasarnya terdapat sifat-sifat yang mudah dikenali pada matematika. Ciri khas matematika yang tidak dimiliki pengetahuan lain adalah (a) merupakan abstraksi dari dunia nyata, (b) menggunaan bahasa simbol, dan (c) menganut pola pikir deduktif (Abdussakir, 2009)

Matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata. Abstraksi secara bahasa berarti proses pengabstrakan. Abstraksi sendiri dapat diartikan sebagai upaya untuk menciptakan definisi dengan jalan memusatkan perhatian pada sifat yang umum dari berbagai objek dan mengabaikan sifat-sifat yang berlainan. Untuk menyatakan hasil abstraksi, diperlukan suatu media komunikasi atau bahasa. Bahasa yang digunakan dalam matematika adalah bahasa simbol. Penggunaan bahasa simbol mempunyai dua keuntungan yaitu sederhana dan universal. Sederhana di sini berarti sangat singkat dan universal berarti bahwa ahli matematika di belahan bumi manapun akan dapat memahaminya (Abdussakir, 2009).

Telah dijelaskan sebelumnya, bahwa bahasa yang digunakan dalam matematika adalah bahasa simbol. Simbol dalam matematika merupakan hasil abstraksi dari dunia nyata. Dengan demikian, suatu simbol sebenarnya mewakili suatu objek baik objek nyata maupun objek abstrak yang bersifat ide (Abdussakir, 2009).

Berikut ini akan diberikan contoh dengan simbol $x = 3$ yang pada akhirnya dapat memberi gambaran dan analogi khasanah pemikiran Islam, khususnya dalam memahami Al-Qur'an. Ilustrasi pemaknaan terhadap simbol $x = 3$ secara matematis geometris ini akan dianalogikan terhadap penafsiran QS Al-Fajr ayat 1-3 yang berbunyi:

وَٱلۡفَجۡرِ ١ وَلَيَالٍ عَشۡرٖ ٢ وَٱلشَّفۡعِ وَٱلۡوَتۡرِ ٣

Artinya : 1. Demi fajar
2. dan demi malam yang 10
3. dan demi yang genap dan yang ganjil

Dalam tafsir Jalalain, kata *"syaf'i"* hanya diartikan sebagai berpasangan dan kata *"watr"* diartikan sebagai sendirian tanpa penjelasan lebih detail. Dalam tafsir ibnu katsir dan tafsir Al-Qurthubi terdapat banyak penafiran pada kata *"syaf'i"*dan *"watr"* di antaranya (a) sebagai hari arafah (tanggal 9) dan hari nahar (tanggal 10) bulan Dzul Hijjah (b) sebagai sholat shubuh (2 rakaat) dan sholat maghrib (3 rakaat), atau bahkan sholat fardhu keseluruhan. Ada yang berraka'at genap dan berraka'at ganjil (c) sebagai sumpah Allah SWT atas makhluk dan dia sendiri. *Syaf'i* adalah makhluk dan yang *witr* adalah Allah SWT. Allah SWT adalah *witr*, *ganjil*, yaitu wahid (satu) sedangkan makhluk adalah *syaf'i* atau berpasangan. Ada langit dan bumi, ada darat dan laut, dan lainnya (Abdussakir, 2009).

Seseorang yang berpikir matematis geometris dapat mengatakan $x = 3$ sebagai titik pada garis bilangan real ($\mathbb{R}$), karena imajinasinya hanya pada dimensi satu yaitu ($\mathbb{R}$). Seseorang yang imajinasinya lebih tinggi dari dimensi satu ($\mathbb{R}$), yakni pada dimensi dua ($\mathbb{R}^2$) tidak hanya memaknai sebagai titik, tetapi juga dapat memaknainya sebagai garis sejajar sumbu Y yang melalui titik $(3,0)$ (Abdussakir, 2009).

Seseorang yang imajinasinya lebih tinggi dari dimensi dua ($\mathbb{R}^2$), yakni pada dimensi ($\mathbb{R}^3$), tidak hanya dapat memaknai sebagai titik dan garis, tetapi juga dapat memaknainya sebagai bidang sejajar sumbu Y dan sumbu Z yang melalui titik (3,0.0) (Abdussakir, 2009).

Analisis fungsional memusatkan perhatian pada *"ruang"* fungsi yang biasanya tidak hanya terbatas sampai dimensi dua, tetapi masih ada dimensi tiga, empat, dan lima bahkan sampai pada dimensi tak hingga.

Seiring dengan perkembangan teknologi dalam era globalisasi saat ini, konsep matematika juga mengalami perkembangan. Hal ini dikarenakan munculnya berbagai masalah dan fenomena baik dunia fisis maupun abstrak yang semakin kompleks, sehingga dibutuhkan pengembangan konsep-konsep matematis untuk menangani masalah tersebut. Sebagai contohnya adalah teorema titik tetap. Teorema ini telah banyak dikembangkan dalam analisis fungsional untuk menyelidiki ketunggalan titik tetap dengan kondisi tertentu yang diberikan. Misalnya, teorema titik tetap dalam ruang metrik, ruang hasil kali dalam, ruang bernormaa, ruang Hilbert, ruang Banach, serta perluasan pada masing-masing konsep ruang tersebut.

Analisis fungsional merupakan cabang matematika abstrak yang berasal dari analisis klasik. Pengembangannya dimulai sekitar delapan puluh tahun yang lalu, dan saat ini metode analsisis fungsional sangat penting dalam berbagai bidang matematika dan aplikasinya (Kreyzig, 1978:1).

Menurut Kreyzig (1978:1-2) misalnya dalam analisis fungsional memusatkan perhatian pada *"ruang"*. Hal ini merupakan dasar penting untuk mengkaji ruang Banach, ruang norma, ruang metrik, dan ruang Hilbert dengan sangat rinci. Dalam hubungan ini konsep "ruang" yang digunakan dalam ruang Banach mempunyai arti yang sangat luas. Ruang Banach adalah ruang norma yang lengkap, artinya bahwa ruang Banach adalah ruang norma, ruang yang memenuhi sifat-sifat ruang norma, dikatakan lengkap bahwa barisan Cauchy tersebut konvergen (Wilde, 2003:84).

Ruang Banach merupakan suatu konsep penting dalam analisis fungsional. Pada tahun 1992, seorang ahli matematika berasal dari Polandia membuktikan teorema yang menyatakan keberadaan dan ketunggalan suatu titik tetap. Teorema tersebut disebut juga dengan teorema titik tetap Banach atau prinsip kontraksi Banach. Teorema ini menyediakan teknik untuk memecahkan berbagai masalah yang diterapkan dalam matematika sains (ilmu matematika) dan ilmu teknik. Teorema titik tetap Banach (teorema kontraksi) merupakan teorema ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut kontraksi dari ruang metrik lengkap ke dalam dirinya sendiri.

Teorema titik tetap Banach menyatakan bahwa jika pemetaan T terhadap dirinya sendiri $T: X \to X$ dari ruang metrik lengkap (X, d) merupakan pemetaan kontraksi $(T_x, T_y) \leq \alpha d(x, y)$ untuk setiap $0 < \alpha < 1$, maka T mempunyai titik tetap tunggal. Misalkan X ruang metrik lengkap dan $T: X \to X$ memenuhi kondisi

$d(T(x), T(y)) \leq \alpha[d(T(x), x) + d(T(y), y) - d(x, y)]$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, kemudian T mempunyai titik tetap tunggal di X, sehingga dapat diketahui bahwa pemetaan kontraksi merupakan dasar utama dalam teorema titik tetap Banach

Dari latar belakang tersebut maka penulis akan mengkaji dan meneliti ruang metrik lengkap dan ketunggalan titik tetap dengan judul *"Teorema Titik Tetap di Ruang Banach"*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah dari skripsi ini adalah bagaimana pembuktian teorema titik tetap di ruang Banach?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah mengetahui pembuktian teorema titik tetap di ruang Banach.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian skripsi ini adalah untuk mengetahui pembuktian teorema titik tetap di ruang Banach dengan kondisi yang telah diberikan berdasarkan definisi yang sudah ditentukan.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian skripsi ini yaitu dengan mengumpulkan informasi yang berhubungan dengan skripsi ini yaitu dengan bantuan buku-buku, jurnal, artikel, dan sumber-sumber lain yang relevan.

Adapun langkah-langkah yang akan diterapkan penulis dalam membahas skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji dan memahami teorema titik tetap.
2. Mengkaji dan memahami ruang norma dan ruang metrik.
3. Mengkaji dan memahami ruang Banach.
4. Mengkaji dan memahami pemetaan kontraksi.
5. Kondisi yang digunakan untuk mewakili dalam mengkaji teorema titik tetap di ruang Banach adalah pemetaan Kannan dengan kondisi

   $$d(T(x),T(y)) \leq [d(T(x),x) + d(T(y),y)]$$

   untuk setiap $x, y \in X$ dan $k \in [0, \frac{1}{2}]$, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X (Kannan, 1969:71-78).

   Dan pemetaan Fisher dengan kondisi

   $$d\big(T(x),T(y)\big) \leq \alpha[d(T(x),x) + d(T(y),y)] + \beta d(x,y)$$

   untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in [0, \frac{1}{2}]$, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X (Fisher, 1976:193-194).
6. Inti dalam pembahasan ini adalah sampai pada titik tetap di ruang Banach.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini dibagi menjadi empat bab, dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : Kajian Pustaka

Pada bab ini akan dibahas kajian teori yang berisi tentang teori-teori yang ada kaitannya dengan hal-hal yang penulis bahas, yaitu ruang metrik (*metric space*), himpunan terbuka dan himpunan tertutup, kekonvergenan dan kelengkapan, ruang vektor bernorma (*norm vector space*), kekonvergenan dalam ruang norma, pemetaan, dan kajian keagamaan.

BAB III : Pembahasan

Pada bab ini akan membahas tentang pembuktian titik tetap di ruang Banach.

BAB IV : Penutup

Pada bab ini berisi kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik

Ruang metrik memperjelas konsep jarak. Definisi dari metrik bermanfaat untuk mengetahui aplikasi yang lebih umum dari konsep jarak. Di dalam kalkulus dipelajari tentang fungsi-fungsi yang terdefinisi dalam garis bilangan real $\mathbb{R}$. Di dalam bilangan real $\mathbb{R}$ terdefinisi fungsi jarak, yaitu memasangankan $d(x,y) = |x-y|$ dengan setiap pasangan titik $x, y \in \mathbb{R}$, jadi $\mathbb{R}$ mempunyai fungsi jarak atau disebut dengan d, dimana jarak $d\,(x,y) = |x-y|$ dengan setiap pasangan titik $x, y \in \mathbb{R}$ (Kreyszig, 1978:2-3).

Ruang metrik adalah pengaturan abstrak dimana pengaturan tersebut bermanfaat untuk membahas konsep-konsep dasar analisis seperti konvergensi urutan dan kelangsungan fungsi. Alat dasar yang diperlukan adalah fungsi jarak "metrik". Definisi berikut merupakan sifat penting dari fungsi jarak (Rynne dan Youngson, 2008:11)

Definisi 2.1.1 Ruang Metrik

Ruang metrik (X, d), dimana X merupakan himpunan dan d merupakan metrik di X (fungsi jarak X) yaitu fungsi yang didefinisikan pada $X \times X$ untuk setiap $x, y, z \in X$, sehingga diperoleh

1. $d(x,y) \geq 0$ (d adalah bernilai real, terbatas, dan tidak negatif)
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri)

4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (ketaksamaan segitiga) (Kreyszig, 1978:3).

Contoh

Didefinisikan fungsi $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yaitu

$$d(a,b) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

dengan $a = (x_1, x_2)$ dan $b = (y_1, y_2)$. Tunjukkan bahwa fungsi d adalah metrik!

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa d adalah metrik

a. $d(a,b) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0$

Jadi $d(a,b) \geq 0$

b. $d(a,b) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0$

$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$

kondisi ini berlaku jika dan hanya jika

$(x_1 - y_1)^2 = 0$ dan $(x_2 - y_2)^2 = 0$

akibatnya

$x_1 - y_1 = 0$ dan $x_2 - y_2 = 0$

$x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$

Jadi $d(a,b) = 0$ jika dan hanya jika $a = b$.

c. $d(a,b) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

$$= \sqrt{(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) + (x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2)}$$

$$= \sqrt{(y_1^2 - 2x_1y_1 + x_1^2) + (y_2^2 - 2x_2y_2 + x_2^2)}$$

$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

$$= d(b,a)$$

Jadi $d(a,b) = d(b,a)$

d. $d(a,b) + d(b,c) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$

$$\geq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$$

$$\geq \sqrt{(x_1^2 - x_1z_1 + z_1^2) + (z_2^2 - 2x_2z_2 + z_2^2)}$$

$$= \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}$$

$$= d(a,c)$$

Jadi

$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$

Berdasarkan penjelasan di atas, terbukti bahwa d adalah metric.

Definisi 2.1.2 (Persekitaran)

Misalkan (X,d) adalah ruang metrik, maka untuk suatu $\varepsilon > 0$, persekitaran titik di $x_0 \in X$ merupakan himpunan

$v_\varepsilon(x_0) = \{x \in X: d(x_0,x) < \varepsilon\}$ (Sherbert dan Bartle, 2000:329).

2.2 Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Definisi 2.2.1

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, untuk sebarang $x \in X$ dan setiap $r > 0$, himpunan-himpunan

1. $B_x(r) = (y \in X \mid d(x, y) < r)$ disebut bola terbuka
2. $B_x(r) = (y \in X \mid d(x, y) \leq r)$ disebut bola tertutup (Rynne dan Youngson, 2008:13).

Contoh

a. Diketahui ruang metrik (X, d) dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$

   $B(0,1) = (y \in X \mid -1 < y < 1)$ disebut bola terbuka berpusat di 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik (X, d).

b. Diketahui ruang metrik (X, d) dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$

   $B(0,1) = (y \in X \mid -1 \leq y \leq 1)$ disebut bola tertutup berpusat di 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik (X, d).

Definisi 2.2.2 (Titik Interior)

Titik p disebut suatu titik interior himpunan E jika terdapat suatu persekitaran dari p yang merupakan subset dari E (Soemantri, 1988).

Definisi 2.2.3 (Himpunan Terbuka)

Himpunan E disebut himpunan terbuka jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan E (Soemantri, 1988).

Definisi 2.2.4 (Titik Limit)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, suatu titik $c \in \mathbb{R}$ disebut titik limit jika untuk setiap $\delta > 0$ terdapat paling sedikit satu titik $x \in A$, $x \neq c$ sedemikian sehingga $|x - c| < \delta$ (Bartle dan Sherbert, 2000:97).

Menurut Soemantri (1988) titik $p \in X$ disebut titik limit himpunan E subset X, bila setiap sekitar titik p memuat paling sedikit satu titik $q \in X$ dan $q \neq p$.

Definisi 2.2.5 (Himpunan Tertutup)

Himpunan E disebut tertutup jika semua titik limitnya termuat di dalam E (Soemantri, 1988).

Definisi 2.2.6 (Himpunan Terbatas)

Himpunan E dalam ruang metrik (X) disebut terbatas jika terdapat titik $p \in X$ dan bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$, maka jarak $d(p, x) \leq M$ (Soemantri, 1988).

2.3 Kekonvergenan dan Kelengkapan

Definisi 2.3.1 (Barisan Terbatas)

Barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik $X = (X, d)$ disebut barisan terbatas jika daerah jangkauan *(range)* dari barisan tersebut merupakan himpunan bagian terbatas di X (Soemantri, 1988).

Definisi 2.3.2 (Barisan Konvergen)

Barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik $X = (X, d)$ dikatakan konvergen jika ada $x \in X$, maka

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

x disebut limit dari $\langle x_n \rangle$ dapat juga ditulis dengan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

atau

$$x_n \to x$$

Barisan $\langle x_n \rangle$ yang tidak konvergen disebut divergen (Kreyszig, 1978:25).

Teorema 2.3.3

Jika barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen di dalam ruang metrik (X, d), maka barisan $\langle x_n \rangle$ tersebut terbatas dan limit barisan $\langle x_n \rangle$ tunggal.

Bukti:

Misalkan barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x dan misalkan E adalah daerah jangkauan barisan $\langle x_n \rangle$.

Ambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < 1$ untuk setiap $n \geq N$.

Pilih $k = maks(1, d(x_1, x), d(x_2, x), \dots, d(x_N, x))$

Sehingga didapatkan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$d(x_n, x) \leq k$$

Berdasarkan **definini 2.2.6**, E adalah himpunan terbatas. Jadi, barisan $\langle x_n \rangle$ terbatas.

Andaikan barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x dan z di dalam X, diberikan $\varepsilon > 0$ karena $x_n \to x$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan karena $x_n \to z$, terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$d(x_n, z) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pilih $M = maks(N, N_1)$, untuk setiap $n \geq M$ berlaku

$$d(x, z) \leq d(x_n, x) + d(x_n, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang dan $0 \leq d(x, z) < \varepsilon$

$d(x, z)$ sehingga haruslah $x = z$

Definisi 2.3.4 (Barisan Cauchy)

Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ (Ghozali, 2010:12).}$$

Contoh

a. Barisan $\langle x_n \rangle$ pada ruang metrik (X, d) dengan $d(x_m, x_n) = |x_m - x_n|$ dan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk setiap $n = 1,2,3, \ldots$ adalah barisan Cauchy

   Keterangan:

   Diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$ untuk semua $m, n > N$ dan untuk $n > N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

b. Barisan $\langle x_n \rangle = n^2$ untuk setiap $n = 1,2,3, \ldots$ adalah bukan barisan Cauchy karena daerah jangkauan *(range)* tidak terbatas dan tidak konvergen.

Teorema 2.3.5

Setiap barisan yang konvergen dalam suatu metrik (X, d) merupakan barisan Cauchy

Bukti:

Misalkan $\langle x_n \rangle \to x$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil $m > n \geq N$, maka berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, maka untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi barisan $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy

Definisi 2.3.6 (Ruang Metrik Lengkap)

Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen di dalam X (Sherbet dan Bartle, 2000:330).

Contoh

a. Sistem bilangan riil $(\mathbb{R})$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ adalah ruang metrik lengkap.

Keterangan

Misalkan barisan $\langle x_n \rangle$ dimana $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ dan $n = 1, 2, 3, \ldots$ adalah barisan Cauchy. Maka menurut **Teorema 2.3.7** barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen yaitu konvergen ke $1 \in \mathbb{R}$, jadi terbukti bahwa (X, d) adalah ruang metrik lengkap.

b. Sistem bilangan rasional $(\mathbb{Q})$ dengan mterik $d(x, y) = |x - y|$ adalah bukan ruang metrik lengkap.

Keterangan

Ambil barisan Cauchy (x_n) di $(\mathbb{Q})$ dengan $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ dan $n = 1, 2, 3, \ldots$ maka barisan Cauchy (x_n) konvegen ke $e \in \mathbb{Q}$ (sesuai dengan **Definisi 2.3.8)** sebab $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ (e bilangan natural)

Jadi $(\mathbb{Q})$ adalah bukan ruang metrik lengkap.

2.4 Ruang Vektor bernorma

Definisi 2.4.1 (Ruang Vektor Bernorma)

Ruang vektor bernorma adalah ruang vektor X dengan pemetaan $\| \ \| : X \to R_+$, dengan sifat-sifat

1. $\| x \| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$ $(x \in X)$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ untuk setiap $x \in X$ dan skalar α
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

Ruang vektor bernorma ini dinotasikan dengan $(x, \| \ \|)$ dan pemetaan ini $\| \ \|$ disebut *"norma"* pada ruang.

Kemungkinan perbedaan antara definisi norma dan ruang vektor X adalah sama. Di sini dapat ditunjukkan dengan contoh $\| \|_1, \| \|_2, \| \|_3, \dots, \| \|_n$ dan kemudian $(X, \| \|_1), (X, \| \|_2), (X, \| \|_3), \dots, (X, \| \|_n)$ merupakan perbedaan pada ruang vektor bernorma. Istilah *"ruang vektor bernorma"* biasanya disingkat dengan ruang *"norma"* (Cohen, 2003:174).

Contoh

Misalkan X merupakan ruang vektor berdimensi hingga di $\mathbb{F}$ dengan basis $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ yang mana $x \in X$ dapat juga ditulis dengan $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ dengan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Maka fungsi $\|x\|: X \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Merupakan norma di X

Penyelesaian:

Misalkan $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ dan $y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$ dan misalkan $\alpha \in \mathbb{F}$. Maka $\alpha x = \sum_{j=1}^{n} \alpha \lambda_j e_j$ dan membuktikan bahwa $\|.\|$ adalah norma.

1. $\|x\| = (\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

2. Jika $x = 0$ maka $\|x\| = 0$ dan sebaliknya jika $\|x\| = 0$ maka $(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ sehingga $\lambda_j = 0$ untuk $1 \leq j \leq n$ sebab itu $x = 0$

3. $\|\alpha x\| = (\sum_{j=1}^{n} |\alpha \lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| (\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|$

4. $\|x + y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j + \mu_j|^2$

$$=\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2+\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j+\mu_j|^2+\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j+\mu_j|^2+\sum_{j=1}^{n}|\mu_j|^2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2+\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j||\mu_j|+\sum_{j=1}^{n}|\mu_j|^2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2+2(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}|\mu_j|^2)^{\frac{1}{2}}+\sum_{j=1}^{n}|\mu_j|^2$$

$$=\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2$$

$$=(\|x\|+\|y\|)^2$$

Sebab itu $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

Jadi terbukti bahwa definisi $\|x\|=(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ merupakan norma di X.

2.5 Kekonvergenan dalam Ruang Norma

Menurut Cohen (2003:178) dalam mempertimbangkan ruang bernorma menjadi ruang metrik dapat diketahui dengan satu cara. Kemudian gagasan yang terkait pada kekonvergenan barisan di ruang metrik dapat dipindahkan ke ruang bernorma. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan dengan barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang norma konvergen jika terdapat bilangan $\varepsilon > 0$ dan terdapat elemen $x \in X$ serta terdapat bilangan bulat positif N seperti

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \text{ dimana } n > N$$

dapat ditulis dengan $x_n \to x$ atau $lim_{x_n} = x$ dan x disebut limit pada barisan.

Definisi 2.5.1 (Ruang Banach)

Setiap ruang vektor bernorma yang lengkap disebut ruang Banach (Cohen, 2003:178).

2.6 Teorema Titik Tetap

Definisi 2.6.1

Misalkan T merupakan pemetaan dari ruang metrik (X, d) ke dalam dirinya sendiri

a. Sebuah titik $x \in X$ sedemikian sehingga $T(x) = x$ maka x disebut titik tetap pada pemetaan T

b. Jika ada α, dengan $0 < \alpha < 1$, maka untuk setiap pasangan dari titik $x, y \in X$ diperoleh

$$d\left(T_x, T_y\right) \leq \alpha\, d(x, y)$$

Kemudian T disebut pemetaan kontraksi atau kontraksi sederhana, sedangkan α disebut kontraksi konstan di T.

T kontraksi di (b) adalah jelas, jika $\alpha < 1$, pengaruh dalam menggunakan pemetaan T adalah untuk meningkatkan jarak antara pasangan manapun dari titik di X. Dalam melihat suatu masalah yang menunjukkan bahwa penyelesaian persamaan $T(x) = x$, jumlah untuk menanyakan titik tetap di T. Teorema titik tetap di bawah mengatakan bahwa selalu ada titik tetap di T, ketika T adalah kontraksi dan ruang X adalah lengkap, sehingga merupakan titik tetap tunggal. Sebelum menyebutkan kedalam bentuk yang lebih formal dan pembuktiannya, akan ditunjukkan bahwa pemetaan kontraksi adalah kontinu (Cohen, 2003:116).

Teorema 2.6.2

Jika T adalah pemetaan kontraksi di ruang metrik X maka T kontinu di X.

Pembuktian yang sederhana

Andaikan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan di (X, d) konvergen di x dan α adalah kontraksi konstan di T, maka:

$$0 \leq d(T_{x_n}, T_x) \leq \alpha\, d(x_n, x) < d(x_n, x)$$

Sehingga $T_{x_n} \rightarrow T_x$ sebab $x_n \rightarrow x$

Teorema 2.6.3 (Teorema Titik Tetap/ Titik Tetap Banach)

Setiap pemetaan kontraksi di ruang metrik lengkap hanya mempunyai titik tetap tunggal.

Bukti

Misalkan T adalah pemetaan kontraksi, dengan kontraksi konstan α dan ruang metrik lengkap (X, d), ambil titik $x_0 \in X$ dan $\langle x_n \rangle$ barisan di X didefinisikan dengan

$$x_n = Tx_{n-1}, \qquad n \in N$$

Maka

$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2x_0,\ x_3 = Tx_2 = T(T^2x_0) = T^3x_0,\ \ldots$

Sehingga dapat ditulis $x_n = T^n x_0$, akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Perhatikan bahwa untuk setiap integer $k > 1$

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k-1}) &= d(T^k x_0, T^{k-1} x_0) \\ &= d(T(T^{k-1}x_0),\ T(T^{k-2}x_0)) \\ &\leq \alpha\, d(T^{k-1}x_0), A(T^{k-2}x_0) \\ &\leq \alpha^2 d(T^{k-2}x_0, T^{k-3}x_0\ ) \end{aligned}$$

.
.
.

$$\leq \alpha^{k-1} d(Tx_0, x_0)$$

Sekarang ambil $1 \leq m \leq n$

$$d(x_n, x_m) = d(T^n x_0, T^m x_0)$$

$$\leq d(T^n x_0, T^{n-1} x_0) + d(T^{n-1} x_0, T^{n-2} x_0) + \cdots + d(T^{m+1} x_0, T^m x_0)$$

$$\leq \alpha^{n-1} d(Tx_0, x_0) + \alpha^{n-2} d(Tx_0, x_0) + \cdots + \alpha^m d(Tx_0, x_0)$$

$$= \alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-m-1})\, d(x_1, x_0)$$

$$< \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\, d(x_1, x_0)$$

Diketahui bahwa $0 < \alpha < 1$ dan $\alpha^m \to 0\ (m \to \infty)$, maka harus mempunyai $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Dengan demikian m dan n adalah yang cukup besar, dimana $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy, dapat diketahui bahwa X adalah ruang metrik lengkap, $x = \lim x_m$ dan akan ditunjukkan bahwa x adalah titik tetap di T. Dinotasikan untuk setiap bilangan bulat positif n

$$0 \leq d(T_x, x) \leq d(T_x, x_n) + d(x_n, x)$$

$$= d(T_x, Tx_{n-1}) + d(x_n, x) \leq \alpha d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x)$$

Sehingga $d(T_x, x) = 0$ ketika $d(x_n, x) \to 0$ dan $d(x, x_{n\to 1}) \to 0$ dengan demikian $T(x) = x$, tentu saja x adalah titik tetap di T. Akhirnya hanya ditunjukkan bahwa $T(x) = x$ mempunyai titik tetap tunggal (Cohen, 2003:116-117).

2.7 Pemetaan

Definisi 2.7.1 (Pemetaan)

Misalkan X dan y adalah ruang metrik. Pemetaan T dari himpunan X ke himpunan Y dinotasikan dengan $T: X \to Y$ adalah suatu pengawanan setiap $x \in X$ dikawankan secara tunggal dengan $y \in Y$ dan ditulis $y = T(x)$.

Definisi 2.7.2 (Pemetaan Kontinu)

Misalkan $X = (X, d_1)$ dan $Y = (Y, d_2)$ adalah ruang metrik. Pemetaan $T: X \to Y$ dikatakan kontinu di titik $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $d_1(x, x_0) < \delta$ maka berlaku

$$d_2(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$$

Pemetaan T dikatakan kontinu pada X jika T kontinu di setiap titik anggota X.

Definisi 2.7.3 (Komposisi Pemetaan)

Misalkan A, B dan C adalah ruang metrik. jika $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ maka komposisi pemetaan gof merupakan pemetaan dari $A \to C$ yang didefinisikan

$$(gof)(x) = g(f(x)) \text{ untuk setiap } x \in X$$

Komposisi $(fof)(x) = f\big(f(x)\big) = f^2(x)$ dan jika komposisi sebanyak n suku, maka $(fofofo \ldots of) = f^n(x)$

Definisi 2.7.4 (Pemetaan Kontraksi)

Misalkan (X,d) merupakan ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraksi, jika ada konstanta c dengan $0 \leq c \leq 1$ berlaku

$$d(T(x)T(y)) \leq cd(x,y) \text{ untuk setiap } x,y \in X$$

Teorema 2.7.5

Misalkan (X,d) adalah ruang metrik. Jika pemetaan $T: X \to X$ adalah kontraksi pada X maka T kontinu pada X

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$, ambil sebarang $x_0 \in X$, pilih $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$, $d(x,x_0) < \delta$

Karena T pemetaan kontraksi maka untuk setiap $x, x_0 \in X$ berlaku

$$d(T(x),T(x_0)) \leq cd(x,x_0)$$

Karena $d(x,x_0) < \delta$ maka

$$d(T(x),T(x_0)) \leq cd(x,x_0) < \varepsilon$$

asalkan dipilih $\delta \leq \frac{\varepsilon}{c}$. Terbukti T kontraksi di $x_0 \in X$, karena x_0 sebarang maka T kontraksi pada X, sehingga menurut **definisi 2.7.2** diperoleh bahwa T merupakan pemetaan yang kontinu.

Teorema 2.7.6

Misalkan (X,d) adalah ruang metrik, jika pemetaan T kontraksi pada X, maka untuk setiap $x,y \in X$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$d\big(T^n(x),T^n(y)\big) \le c^n d(x,y) \text{ dimana } 0 < c < 1$$

Bukti

Diketahui T pemetaan kontraksi pada X, maka untuk setiap $x,y \in X$ berlaku:

$$d\big(T(x)T(y)\big) \le cd(x,y) \text{ dimana } 0 < c < 1 \text{ sehingga diperoleh}$$

$$\begin{aligned}
d\big(T^n(x),T^n(y)\big) &\le d\big(T\big(T^{n-1}(x)\big),T(T^{n-1}(y))\big)\\
&\le cd(T^{n-1}(x),T^{n-1}(y))\\
&\le c^2 d(T^{n-2}(x),T^{n-2}(y))\\
&\le c^3 d(T^{n-3}(x),T^{n-3}(y))\\
&\;\;.\\
&\;\;.\\
&\;\;.\\
&\le c^n d(T^{n-n}(x),T^{n-n}(y))\\
&= c^n d(x,y)
\end{aligned}$$

2.8 Kajian Keagamaan

Allah akan menjanjikan nikmat secara terus menerus yang telah disempurnakan, nikmat pertama dan utama adalah diutusnya Rasulullah SAW, beliau telah menunjukkan kepada kita *"addinul islam"* dan beliaulah yang memimpin perjuangan Islam selama ini. Oleh karena itu tetaplah mengingat kepada Allah dan mendekat kepada Allah, supaya Allah akan ingat dan dekat kepada kita, dan syukurilah atas kenikmatan-Nya, janganlah kalian menjadi orang yang kufur. Tetapi ada syarat utama yang wajib dipenuhi, sebab kejadian-kejadian besar akan diberikan Allah kelak kepada kita, syarat utama yaitu terdapat dalam surat Al-Baqarah ayat 153, Allah berfirman:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱسْتَعِينُوا۟ بِٱلصَّبْرِ وَٱلصَّلَوٰةِ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلصَّـٰبِرِينَ ﴿١٥٣﴾

Artinya:"Wahai orang-orang yang beriman! Mohonlah pertolongan dengan sabar dan sholat; sesungguhnya Allah adalah beserta orang-orang yang sabar".

Menurut Muhammad (2010:114) dalam tafsir Jalalain dijelaskan bahwa orang-orang yang beriman diserukan untuk meminta pertolongan hanya kepada Allah demi mencapai suatu kebahagiaan di akhirat yakni dengan jalan bersabar, taat melakukan ibadah dan sabar dalam menghadapi cobaan-Nya, serta dirikanlah sholat sehingga kalian selalu mengingat Allah dan menyebutkan asma Allah secara berulang-ulang (sesungguhnya Allah bersama orang-orang yang sabar) dalam artian Allah selalu melimpahkan pertolongan-Nya kepada mereka.

Maksud ayat tersebut mempunyai makna yang besar, suatu keinginan yang tinggi. Menegakkan kalimat Allah, memancarkan tauhid, menjauhkan diri dari menyembah kepada selain Allah, serta menjauhkan diri dari penyakit hati. Suatu kebaikan pastilah di dalamnya terdapat banyak cobaan, cobaan itu pasti banyak dan jalannya pasti sulit. Sering kali kita dengar *"bertambahnya mulia dan tinggi derajat seseorang, bertambah pula cobaan yang dihadapi"* atau *"semakin tingginya pohon semakin kencang pula angin yang menerpa"*. Oleh karena itu, kita harus selalu meminta keteguhan hati, semangat yang tinggi, dan dijauhkan dari sifat putus asa atau pengorbanan yang tidak pernah mengenal kata lelah. Meskipun keinginan yang begitu tinggi, tapi jika tidak diiringi dengan keteguhan hati dan semangat yang kuat, keinginan tersebut tidak akan tercapai. Pada jaman terdahulu Nabi-nabi termasuk juga Nabi *"ulul azmi"* semuanya telah menempuh jalan itu dan semuanya menghadapi cobaan yang begitu sulit. Kemenangan mereka hanya terletak pada kesabaran. Maka, jika kalian termasuk orang-orang yang beriman wajib atas kalian untuk bersabar, sabar dalam menderita, sabar dalam kelaparan dan kehausan, sabar dalam menunggu dan lain sebagainya. Jangan merasa sedih, tetaplah meminta yang terbaik kepada-Nya dan yaqinlah bahwa Allah selalu bersama dengan orang-orang yang bersabar.

Dapat diketahui bahwa kata *"sobr"* atau sabar berulang kali disebutkan dalam Al-Quran sebanyak seratus satu kali. Hanya dengan sabar orang akan mencapai derajat keimanan yang tinggi, dengan bersabar orang akan mencapai suatu keinginan yang dimaksud, serta dengan bersabar kebenaran akan dapat ditegakkan.

Tujuan hidup ini sebenarnya adalah hanya untuk Allah dengan mencari keridhaan-Nya. Oleh karena itu, kita harus mendirikan shalat, karena dengan sholat kita akan mengingat Allah, hanya mengingat Allah hati kita akan menjadi tenang. Sebagaimana yang terdapat dalam surat Ar-Ra'ad ayat 28 yang berbunyi

ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَتَطۡمَئِنُّ قُلُوبُهُم بِذِكۡرِ ٱللَّهِۗ أَلَا بِذِكۡرِ ٱللَّهِ تَطۡمَئِنُّ ٱلۡقُلُوبُ ٢٨

Artinya: "(yaitu) orang-orang yang beriman dan hati mereka menjadi tenteram dengan mengingat Allah. Ingatlah, hanya dengan mengingat Allahlah hati menjadi tenteram".

Maka sabar dan sholat keduanya harus sejalan, apabila keduanya telah dijalankan dengan kesungguhan dan keyakinan, pasti dengan berjalannya waktu kita akan terlepas dari kesulitan yang ada dalam diri kita, karena Allah telah berdaulat dalam hati kita. Dapat kita ketahui dalam penggalan surat Al-Baqarah ujung ayat 153 yang berbunyi "إِنَّ اللهَ مَعَ الصَّابِرِيْن" yang artinya *"Sesungguhnya Allah adalah beserta orang-orang yang sabar"* jangan kalian merasa takut untuk menghadapi hidup ini, kalau Allah telah menjamin bahwa Dia selalu beserta kita, jika kalian merasa sedih berpegang teguhlah pada ayat ini, untuk membentengi diri dengan cara sabar dan sholat.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa sebagai umat Islam harus menghadapi cobaan-Nya dengan bersabar dan sholat.

Kesabaran manusia itu tidak ada batasnya begitu juga pada fungsi *"ruang"* yang tidak hanya terdapat pada dimensi satu ($\mathbb{R}$), dimensi dua $(\mathbb{R})^2$, dimensi tiga $(\mathbb{R})^3$ tapi juga terdapat pada dimensi tak terbatas yaitu $(\mathbb{R})^\infty$.

Ruang Banach adalah ruang norma yang lengkap. Lengkap maksudnya bahwa semua barisan Cauchy selalu konvergen, kekonvergenan berkaitan dengan metrik yang digunakan. Jadi, antara ruang Banach, ruang norma, dan ruang metrik mempunyai keterkaitan untuk membuktikan suatu teorema titik tetap di ruang Banach. Begitu juga dengan kesabaran, kesabaran mempunyai keterkaitan yang erat dengan sholat, dengan sholat diri ini akan menjadi tenang. Kita harus belajar untuk menjadi muslim yang lebih sabar dengan keteguhan hati, mudah-mudahan kita akan menerima ganjaran kesabaran itu berupa surga. Seperti dalam surat Al-Baqarah ayat 155

وَلَنَبۡلُوَنَّكُم بِشَيۡءٍ مِّنَ ٱلۡخَوۡفِ وَٱلۡجُوعِ وَنَقۡصٍ مِّنَ ٱلۡأَمۡوَٰلِ وَٱلۡأَنفُسِ وَٱلثَّمَرَٰتِۗ وَبَشِّرِ ٱلصَّٰبِرِينَ ١٥٥

Artinya: "Dan sungguh akan kami berikan cobaan kepadamu dengan sedikit ketakutan, kelaparan, kekurangan harta, jiwa, dan buah-buahan. Dan berikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar".

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Toerema Titik Tetap Banach

Dalam matematika teorema titik tetap Banach juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraksi yang merupakan alat penting dalam teori ruang metrik, untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan diri pada ruang metrik, dan menyediakan metode kontraksi untuk menemukan titik tetap (Banach, 1992:133).

Teorema 3.1.2

Misalkan T adalah pemetaan kontraksi pada ruang metrik (X, d) ke dalam dirinya sendiri. Maka T^n adalah pemetaan Kannan, untuk setiap n adalah bilangan bulat positif (Kannan, 1969:71-78).

Bukti

Menurut definisi pemetaan kontraksi **(definisi 2.7.4)** bahwa misalkan (X, d) merupakan ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraksi, jika ada konstanta c dengan $0 \leq c \leq 1$ sehingga

$$d(T(x)T(y)) \leq cd(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa T^n adalah pemetaan Kannan, jika ada konstanta k dengan $0 \leq k \leq 1$ sehingga

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq k[d(T(x), x) + d(T(y), y)]$$

untuk setiap $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} d\big(T^n(x), T^n(y)\big) &= d(TT^{n-1}(x), TT^{n-1}(y)) \\ &\leq cd(T^{n-1}(x), T^{n-1}(y)) \\ &= cd(TT^{n-2}(x), TT^{n-2}(y)) \\ &\leq c^2 d(T^{n-2}(x), T^{n-2}(y)) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \leq c^n d(x, y) \qquad \textbf{(3.1)}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Karena $d(x, y) \leq d(T^n(x), x) + d\big(T^n(x), T^n(y)\big) + d(T^n(y), y)$

Dengan menggunakan ketaksamaan **(3.1)**, maka diperoleh

$$\begin{aligned} d\big(T^n(x), T^n(y)\big) &\leq c^n d(x, y) \\ &\leq c^n[d(T^n(x), x) + d\big(T^n(x), T^n(y)\big) + d(T^n(y), y)] \\ &= c^n d(T^n(x), x) + c^n d\big(T^n(x), T^n(y)\big) + c^n d(T^n(y), y) \end{aligned}$$

Sehingga mengakibatkan

$$(1 - c^n) d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \leq c^n[d(T^n(x), x) + d(T^n(y), y)]$$

$$d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \leq \frac{c^n}{(1 - c^n)}[d(T^n(x), x) + d(T^n(y), y)] \qquad \textbf{(3.2)}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Karena $c < 1$, maka dapat diambil n sebarang dengan $c^n < \frac{1}{3}$, sehingga

$$(1 - c^n) > 1 - \frac{1}{3}$$

$(1 - c^n) > \frac{2}{3}$ atau $\frac{1}{(1 - c^n)} < \frac{3}{2}$

Oleh karena itu $\frac{c^n}{(1-c^n)} < \frac{1}{2}$

Dimana $\frac{c^n}{(1-c^n)} = k$, dengan menggunakan ketaksamaan **(3.2)** diperoleh

$d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \leq [d(T^n(x), x) + d(T^n(y), y)]$

untuk setiap $x, y \in X$, dimana $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$.

Sehingga terbukti bahwa T^n adalah pemetaan Kannan.

Contoh

Misalkan X adalah himpunan bilangan real dengan $-2 < x < 2$ dan didefinisikan metrik dengan

$$d(x, y) = |x - y|$$

T adalah pemetaan pada ruang metrik (X, d) ke dalam dirinya sendiri dengan

$$Tx = \begin{cases} -\frac{x}{4}, & |x| \leq 1 \\ \frac{x}{4}, & 1 < |x| < 2 \end{cases}$$

Maka

$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty|$

$\qquad \leq |Tx| + |Ty| = \left|\frac{x}{4}\right| + \left|\frac{x}{4}\right|$

Sehingga mengakibatkan

$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{4}|x| + |y|$ **(3.3)**

untuk setiap $x, y \in X$.

$d(x, Tx) = |x - Tx| \geq |x| - |Tx|$ dan

$d(y, Ty) = |y - Ty| \geq |y| - |Ty|$

Sehingga

$$d(x,Tx)+d(y,Ty) \geq |x|-|Tx|+|y|-|Ty|$$

$$= |x| - \left|\frac{x}{4}\right| + |y| - \left|\frac{y}{4}\right|$$

$$= |x|\left(1-\frac{1}{4}\right) + |y|(1-\frac{1}{4})$$

$$= |x|\left(\frac{3}{4}\right) + |y|(\frac{3}{4})$$

$$= \frac{3}{4}(|x|+|y|)$$

Maka

$$d(x,Tx)+d(y,Ty) \geq \frac{3}{4}(|x|+|y|) \quad \textbf{(3.4)}$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan ketaksamaan **(3.3)** dan **(3.4)** diperoleh

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{3}[d(x,Tx)+d(y,Ty)], \text{ untuk setiap } x,y \in X$$

Jadi, terbukti bahwa T adalah pemetaan Kannan.

Dari teorema dan contoh di atas akan ditunjukkan bahwa pemetaan Kannan mempunyai titik tetap yang tunggal.

Pertama akan ditunjukkan bahwa ruang metrik (X,d) adalah lengkap, dapat diketahui bahwa kondisi pemetaan Kannan adalah

$$d(T(x),T(y)) \leq k[d(T(x),x)+d(T(y),y)] \quad \textbf{(3.5)}$$

untuk setiap $x,y \in X$, dimana $0 \leq k < \frac{1}{2}$.

$$d\big(T^n(x),T^{n+1}(x)\big) = d\big(TT^{n-1}(x),TT^n(x)\big)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan **(3.5)**, diperoleh

$$d\big(T^n(x),T^{n+1}(x)\big) \leq k[d\big(T^{n-1}(x),T^n(x)\big) + d\big(T^n(x),T^{n+1}(x)\big)]$$

Mengakibatkan

$$(1-k)d\big(T^n(x),T^{n+1}(x)\big) \leq kd\big(T^{n-1}(x),T^n(x)\big)$$

$$d\big(T^n(x),T^{n+1}(x)\big) \leq \frac{k}{(1-k)} d\big(T^{n-1}(x),T^n(x)\big) \tag{3.6}$$

Dengan mengubah n menjadi $n-1$ dari persamaan di atas, diperoleh

$$d\big(T^{n-1}(x),T^n(x)\big) \leq \frac{k}{(1-k)} d\big(T^{n-2}(x),T^{n-1}(x)\big)$$

Maka dari ketaksamaan **(3.6)**, diperoleh

$$d\big(T^n(x),T^{n+1}(x)\big) \leq \frac{k}{(1-k)}\frac{k}{(1-k)} d\big(T^{n-2}(x),T^{n-1}(x)\big)$$

$$= (\frac{k}{(1-k)})^2 d\big(T^{n-2}(x),T^{n-1}(x)\big)$$

$$\leq (\frac{k}{(1-k)})^n d\big((x),T(x)\big)$$

untuk setiap $x, y \in X$, dimana $0 \leq k < \frac{1}{2}$.

$$d\big(T^n(x),T^{n+r}(x)\big) \leq d\big(T^n(x),T^{n+}(x)\big) + d\big(T^{n+1}(x),T^{n+2}(x)\big) + \cdots +$$

$$d\big(T^{n+r-1}(x),T^{n+r}(x)\big)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$d\big(T^n(x),T^{n+r}(x)\big) \leq \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^n d\big((x),T(x)\big) + \leq \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^{n+1} d\big((x),T(x)\big) +$$

$$\ldots + \leq (\frac{k}{(1-k)})^{n+r-1} d\big((x),T(x)\big)$$

$$= \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^n \left[1 + \left(\frac{k}{(1-k)}\right) + \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^{n+r-1}\right] d\big((x),T(x)\big)$$

$$\leq \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^n \left[1 + \left(\frac{k}{(1-k)}\right) + \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^2 + \cdots + \infty\right] d\big((x),T(x)\big)$$

Dengan rasio $\frac{k}{(1-k)} < 1$, maka barisan tersebut konvergen yaitu konvergen terhadap $\frac{1}{1-(\frac{k}{(1-k)})}$.

Maka $1 + \left(\frac{k}{(1-k)}\right) + \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^2 + \cdots + \infty = \frac{1}{1-\left(\frac{k}{(1-k)}\right)} = \frac{1-k}{1-2k}$

Dari persamaan di atas diperoleh

$$d\big(T^n(x), T^{n+r}(x)\big) \leq \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^n \left(\frac{1-k}{1-2k}\right) d\big((x), T(x)\big)$$

Karena barisan $\langle T^n(x)\rangle$ adalah barisan Cauchy yang konvergen maka x mempunyai titik tetap tunggal yaitu $T(x) = x$.

Teorema 3.1.4

Misalkan $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in [0, \frac{1}{2}]$ dengan

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq \alpha[d(T(x), x) + d(T(y), y) + \beta d(x, y)]$$

Maka T mempunyai titik tetap tunggal di X (Fisher, 1976:193-194).

Bukti

Ambil titik $x_0 \in X$ dan $\langle x_n\rangle$ barisan di X didefinisikan dengan

$$x_n = Tx_{n-1}, \qquad n \in N$$

Maka

$$x_0,\ x_1 = T(x_0),\ x_2 = T(x_1),\ x_3 = T(x_2), \dots, x_{n-1} = T(x_{n-2}), x_n = T(x_{n-1})$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n\rangle$ adalah barisan Cauchy

$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1))$

$\qquad\qquad \leq \alpha[d(T(x_0), x_0) + d(T(x_1), x_1)] + \beta d(x_0, x_1)$

$$= \alpha[d(x_1, x_0) + d(x_2, x_1)] + \beta d(x_0, x_1)$$

$$= \alpha[d(x_1, x_2) + d(x_0, x_1)] + \beta d(x_0, x_1)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0, x_1) + \beta d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2))$$

$$\leq \alpha[d(T(x_1), x_1) + d(T(x_2), x_2)] + \beta d(x_1, x_2)$$

$$= \alpha[d(x_2, x_1) + d(x_3, x_2)] + \beta d(x_1, x_2)$$

$$= \alpha[d(x_2, x_3) + d(x_1, x_2)] + \beta d(x_1, x_2)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_2) + \beta d(x_1, x_2)$$

$$\leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^2 d(x_0, x_1) + \beta^2 d(x_0, x_1)$$

$$d(x_3, x_4) = d(T(x_2), T(x_3))$$

$$\leq \alpha[d(T(x_2), x_2) + d(T(x_3), x_3)] + \beta d(x_2, x_3)$$

$$= \alpha[d(x_3, x_2) + d(x_4, x_3)] + \beta d(x_2, x_3)$$

$$= \alpha[d(x_3, x_4) + d(x_2, x_3)] + \beta d(x_2, x_3)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_2, x_3) + \beta d(x_2, x_3)$$

$$\leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^3 d(x_0, x_1) + \beta^3 d(x_0, x_1)$$

.
.
.

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(T(x_n), T(x_{n-1}))$$

$$\leq \alpha[d(T(x_n), x_n) + d(T(x_{n-1}), x_{n-1})] + \beta d(x_n, x_{n-1})$$

$$= \alpha[d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n+1}, x_n)] + \beta d(x_n, x_{n-1})$$

$$= \alpha[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n-1})] + \beta d(x_n, x_{n-1})$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n-1}) + \beta d(x_n, x_{n-1})$$

$$\leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_n, x_{n-1}) + \beta^n d(x_n, x_{n-1})$$

Secara umum diperoleh jika m merupakan bilangan bulat positif maka berlaku

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^m d(x_0, x_1) + \beta^m d(x_0, x_1)$$

$$= (q)^m d(x_0, x_1) + r^m d(x_0, x_1) \quad \textbf{(3.7)}$$

dengan $q = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ dan $r = \beta$.

Karena $\alpha, \beta \in [0, \frac{1}{2}]$, jelas bahwa $0 < q < 1$ dan $0 < r < 1$

Ambil $\varepsilon > 0$ dan ambil bilangan $n, m \in \mathbb{N}$ dengan sifat ketaksamaan segitiga pada metrik dan jumlah dari barisan geometri, didapatkan untuk $n > m$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_{m+3}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq (q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + q^{m+3} + \cdots + q^{n-1}) d(x_0, x_1) + (r^m + r^{m+1} + r^{m+2} + r^{m+3} + \cdots + r^{n-1}) d(x_0, x_1)$$

$$\leq q^m (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-m-1}) d(x_0, x_1) + r^m (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-m-1})\, d(x_0, x_1)$$

$$= q^m \sum_{i=0}^{n-m-1} q^i \; d(x_0, x_1) + r^m \sum_{i=0}^{n-m-1} r^i \; d(x_0, x_1)$$

$$= q^m \sum_{i=0}^{\infty} q^i \; d(x_0, x_1) + r^m \sum_{i=0}^{\infty} r^i \; d(x_0, x_1) \quad \textbf{(3.8)}$$

Karena $0 < q < 1$ dan $0 < r < 1$, maka deret $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ pada ketaksamaan **(3.8)** konvergen ke $\frac{1}{1-q}$ dan deret $\sum_{i=0}^{\infty} r^i$ konvergen ke $\frac{1}{1-r}$

Sehingga diperoleh

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{q^m}{1-q} d(x_0, x_1) + \frac{r^m}{1-r} d(x_0, x_1)$$

untuk $n > m > N$.

Karena $lim_{m\to\infty} q^m = 0$ dan $lim_{m\to\infty} r^m = 0$, maka $lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$ maka $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Karena X lengkap, maka $\langle x_n \rangle$ konvergen.

Katakan $x_n \to x$. Artinya sedemikian sehingga jika $N \in \mathbb{N}$, untuk setiap $n \geq N$ berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Akan ditunjukkan bahwa x adalah titik tetap dari pemetaan T. Dari sifat ketaksamaan segitiga dan prinsip Fisher, didapatkan

$$\begin{aligned} d\big(x, T(x)\big) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \\ &= d(x, x_n) + (T(x_{n-1}), T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + \alpha[d(T(x_{n-1}), x_{n-1}) + d(T(x), x)] + \beta d(x_{n-1}, x) \end{aligned}$$

Karena $x_n \to x$ diperoleh ketaksamaan

$$\begin{aligned} d\big(x, T(x)\big) &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \alpha[d(T(x_{n-1}), x_{n-1}) + d(T(x), x)] + \beta d(x_{n-1}, x) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + \left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(T(x_{n-1}), x_{n-1}) + \beta d(x_{n-1}, x) \\ &= \tfrac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + \left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(x_{n-1}, x_n) + \beta d(x_{n-1}, x) \end{aligned}$$

Menurut ketaksamaan **(3.8)**

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n-1} d(x_0, x_1) + (\beta)^{n-1} d(x_0, x_1)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d &\leq \tfrac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + \left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n-1} d(x_0, x_1) + \left(\tfrac{\beta}{1-\beta}\right)^{n-1} d(x_0, x_1) + \beta d(x_{n-1}, x) \\ &= \tfrac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + \left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n} d(x_0, x_1) + \left(\tfrac{\beta}{1-\beta}\right)^{n} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + q^n\, d(x_0, x_1) + (r)^{n-1}\, d(x_0, x_1)$$

Untuk $n \to \infty$, maka $q^n \to 0$ dan $r^n \to 0$, sehingga

$$d\big(x, T(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)}$$

Karena ε sebarang, maka $d\big(x, T(x)\big) = 0$ atau $T(x) = x$, dengan demikian terbukti bahwa pemetaan Fisher pada X yang lengkap mempunyai titik tetap tunggal.

Contoh

Misalkan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di l_2

Akan ditunjukkan bahwa barisan di l_2 tersebut konvergen, untuk setiap $n \in N$ dan $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots)$ yang telah didefinisikan pada ruang l_2 atau $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^2$ konvergen terhadap n.

Dimana $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif N, sehingga

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^2} < \varepsilon$$

dengan $m, n > N$. Dengan menggunakan definisi l_2, diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^2 < \varepsilon^2, \quad m, n > N$$

sehingga

$$|x_{nk} - x_{mk}| < \varepsilon, \quad m, n > N$$

untuk setiap $k \in N$. Maka untuk setiap $k, (x_{nk})$ adalah barisan Cauchy di C sehingga $lim_{n\to\infty} x_{nk}$ ada ketika C merupakan ruang metrik lengkap.

$$lim_{n\to\infty} x_{nk} \text{ dimana } x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Akan ditunjukkan bahwa $x \in l_2$ dan $\langle x_n \rangle$ konvergen terhadap x. Maka l_2 dapat dikatakan lengkap

$$\sum_{k=1}^{r} |x_{nk} - x_{mk}|^2 < \varepsilon^2, \quad m, n > N$$

Dapat diperhatikan bahwa $r = 1,2,3, \dots$

Maka n merupakan titik dan $lim_{m\to\infty} x_{mk} = x \cdot k$

$$\sum_{k=1}^{r} |x_{nk} - xok|^2 < \varepsilon^2, \quad n > N$$

Ambil titik

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r), (b_1, b_2, b_3, \dots, b_r), (c_1, c_2, c_3, \dots, c_r) \in C^r$$

dengan menggunakan ketaksamaan segitiga di C^r, diperoleh

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{r} |a_k - c_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |a_k - b_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |b_k - c_k|^2}$$

Misalkan $a_k = x.k$, $b_k = x_{nk}$ dan $c_k = 0$, sehingga diperoleh

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x \cdot k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x \cdot k - x_{nk}|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x_{nk}|^2}$$

$$\leq \varepsilon + \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x_{nk}|^2} \leq \varepsilon + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^2}$$

Jika $n > N$ dan konvergen terhadap $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^2$, tentu $x \in l_2$. Oleh karena itu, dapat dilihat pada ketaksamaan segitiga sebelumnya

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x \cdot k|^2} < \varepsilon, \quad n > N$$

Yang mengakibatkan bahwa barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen terhadap x dan l_2 adalah lengkap.

3.3 Integrasi antara Kesabaran dan Titik Tetap dalam Islam

Hanya dengan sabar semuanya akan dapat diatasi, karena kehidupan ini tidak lepas dari cobaan atau ujian dari Allah. Nabi Muhammad S.A.W dalam peperangan uhud kehilangan pamannya yang sangat dicintai yaitu Hamzah bin Abdul Muthalib. Maka apabila mereka bersabar dalam menghadapi ujian dari Allah, mereka kelak akan merasakan hikmah dari semua itu. Suatu keinginan yang tinggi tidak terlepas dari pengorbanan. Berilah kabar kegembiraan kepada mereka yang bersabar, sebagaimana Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 156

ٱلَّذِينَ إِذَآ أَصَٰبَتۡهُم مُّصِيبَةٞ قَالُوٓاْ إِنَّا لِلَّهِ وَإِنَّآ إِلَيۡهِ رَٰجِعُونَ ١٥٦

Artinya: *"(Yaitu) orang-orang yang apabila menimpa kepada mereka suatu musibah, mereka berkata sesungguhnya kita ini dari Allah, dan sesungguhnya kepadaNya-lah kita semua akan kembali"*

Menurut Imam Al-Qurtubi (1993:39-40) dalam tafsir al-Maraghi "Sampaikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar, yakni orang-orang yang mengatakan perkataan tersebut sebagai ungkapan rasa iman dengan kodrat dan kepastian Allah. Berita gembira tersebut adalah keberhasilan yang akan dicapai oleh orang-orang, sesuai dengan sunnatullah terhadap makhluk-Nya."

Kesedihan yang dilarang adalah kesedihan yang mendorong seseorang berbuat hal-hal yang tercela oleh akal sehat, dan dilarang oleh syari'at agama. Misalnya, banyak yang terjadi di kalangan masyarakat ketika mereka ditimpa musibah seperti kematian anggota keluarga, lalu diratapi.

Imam Muslim meriwayatkan sebuah hadits yang diterima dari Umu Salamah yang mengatakan, saya pernah mendengar Rasulullah bersabda

"Musibah apapun yang menimpa seorang hamba, hendaknya ia mengatakan. Sesungguhnya kita ini kepunyaan Allah dan kita hanya akan kembali kepada-Nya. Ya Allah, berikanlah hamba pahala atas musibah ini dan gantikanlah dengan yang lebih baik, maka Allah akan memberi pahala atas musibah tersebut, dan Allah akan menggantikannya yang lebih baik."

Di dalam firman Allah yang berbunyi "*Innalillahi*" menunjukkan pengakuan hamba terhadap Allah sebagai tuhan yang disembah dan diagungkan. Dan di dalam firman Allah yang berbunyi *"wa inna ilaihi raji'un"*, merupakan pengakuan hamba terhadap Allah, bahwa ia akan mati dan dibangkitkan kembali dari kubur. Juga merupakan ungkapan keyakinan seorang hamba bahwa semua perkara itu kembali hanya kepada Allah.

Begitu juga pada pembahasan tentang teorema titik tetap di ruang Banach pada pemetaan Kannan $d(T(x),T(y)) \leq k[d(T(x),x) + d(T(y),y)]$ dan pemetaan Fisher $d\big(T(x),T(y)\big) \leq \alpha[d(T(x),x) + d(T(y),y) + \beta d(x,y)]$ yang mempunyai titik tetap tunggal yaitu $T(x) = x$.

Sehingga dapat diketahui bahwa sesulit apapun hidup ini harus selalu bertawakkal, kembalikan semuanya hanya kepada Allah. Mereka itulah orang-orang yang sabar di sisi Allah, dan akan mendapatkan ampunan. Mereka juga akan mendapatkan rahmat dari Allah berupa ketenangan hati. Sedikitpun mereka tidak akan merasa kaget di dalam hati. Mereka merasa bahagia karena mendapatkan kebahagian di dunia maupun di akhirat karena kebersihan jiwa yang dihiasi dengan akhlak mulia dan amal-amal shaleh. Sesungguhnya sabar itu indah, sebagaimana Allah berfirman dalam surat Yusuf ayat 83 yang berbunyi

قَالَ بَلْ سَوَّلَتْ لَكُمْ أَنفُسُكُمْ أَمْرًا ۖ فَصَبْرٌ جَمِيلٌ ۖ عَسَى ٱللَّهُ أَن يَأْتِيَنِى بِهِمْ جَمِيعًا ۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلْعَلِيمُ ٱلْحَكِيمُ ﴿٨٣﴾

Artinya : Ya'qub berkata: "Hanya dirimu sendirilah yang memandang baik perbuatan (yang buruk) itu. Maka kesabaran yang baik Itulah (kesabaranku). Mudah-mudahan Allah mendatangkan mereka semuanya kepadaku; Sesungguhnya Dia-lah yang Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana".

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa teorema titik tetap Banach juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraksi, sebelum mencari ketunggalan titik tetap dapat dicari kelengkapan ruang metrik, dikatakan lengkap jika suatu barisan Cauchy tersebut konvergen, sehingga dapat dibuktikan bahwa teorema titik tetap di ruang Banach mempunyai titik tetap yang tunggal. Dalam membuktikan teorema titik tetap di ruang Banach, diperlukan suatu teorema yaitu:

Pemetaan Kannan $d(T(x),T(y)) \leq k[d(T(x),x) + d(T(y),y)]$ untuk setiap $x,y \in X$ dan $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X. Dan Pemetaan Fisher $d\big(T(x),T(y)\big) \leq \alpha[d(T(x),x) + d(T(y),y) + \beta d(x,y)]$ untuk setiap $x,y \in X$ dan $\alpha,\beta \in [0,\frac{1}{2}]$, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X.

4.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan pemetaan Kannan dan pemetaan Fisher untuk membuktikan titik tetap di ruang Banach. Oleh karena itu penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini supaya mengembangkannya dengan menggunakan pada fungsi ruang yang lainnya

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2009. *Pentingnya Matematika dalam Pemikiran Islam*: State Islamic University of Malang. (Online: http://abdussakir.wordpress.com/artikel/ diakses 20 Desember 2013).

Al-Mahali, M.J.A. dan As-Suyuthi, A.J.A.. 2010. *Tafsir Jalalain 1*. Surabaya: Bina Ilmu Surabaya

Al-Maraghi, M.A.. 1993. *Tafsir Al-Maraghi 2*. Mesir: Musthafa Al-Babi Al-Halabi

Banach, S.. 1992. Sur Les Operations Dans Les Ensembles Abstraits Et Leur Application Aux Equations Integrales, *Fund. Math*. 133-181.

Bartle, R.G. and Sherbert, D.R.. (2000). *Introduction to Real Analysis*, Third Edition. New York: John Wiley and Sons.

Cohen, G.. 2003. *A Course in Modern Analysis and Its Applications.* United States of America: Cambridge University Press.

Fisher. 1976. A fixed Point Theorem for Compact Metric space. *Publ. Inst. Math*. 25, 193-194.

Ghozali, M.S.. 2010. *Analisis Real 1*. Bandung. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan

Kreyzig, E.. 1989. *Introductory Functional Analysis with Application*. United States of America.

Kannan, R.. 1969. Some Result on Fixed Point Theorems, *Bull. Calcutta. Math. Soc*, Vol. 60, 71-78.

Nasoetion, A.H.. 1980. *Landasan Matematika*. Jakarta: PT. Bharatara Karya Aksara.

Quth, S.. 2002. *Tafsir Fi Dzilalil Qur'an jilid 24*. Jakarta: Bina Insani

Rynne, B.P. and Youngson, M.A.. 2008. *Linear Functional Analysis*. New York: Springger-Verlag.

Soemantri. 1988. *Analisis Real 1*. Jakarta: Universitas Terbuka

Wijaya, B.T.. 2011. Spectrum Detour Graf m-Partisi Komplit. *Skripsi S1*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Wilde, F.I.. 2003. *Topological Vector Space*. London.