SIFAT-SIFAT FANTASTIK-IDEAL PADA ALJABAR BCI

SKRIPSI

Oleh:

ROHATUL WARDA
NIM. 09610019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

SIFAT-SIFAT FANTASTIK-IDEAL PADA ALJABAR BCI

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ROHATUL WARDA
NIM. 09610019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

SIFAT-SIFAT FANTASTIK-IDEAL PADA ALJABAR BCI

SKRIPSI

Oleh:

ROHATUL WARDA
NIM. 09610019

Telah Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 02 April 2014

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Abdussakir, M.Pd	**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 19751006 200312 1 001	**NIP. 19731212 199803 1 001**

Mengetahui,
Keua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SIFAT-SIFAT FANTASTIK-IDEAL PADA ALJABAR BCI

SKRIPSI

Oleh:
ROHATUL WARDA
NIM. 09610019

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 10 April 2014

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	________________
2. Ketua Penguj	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	________________
3. Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
4. Anggota Penguji	: Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	________________

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: ROHATUL WARDA
NIM	: 09610019
Jurusan	: Matematika
Fakultas/Jurusan	: Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Penelitian	: Sifat-Sifat Fantastik-Ideal pada Aljabar BCI

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa dalam penelitian ini saya membuktikan beberapa proposisi dan teorema yang memang sudah pernah dibuktikan oleh *Arsham Borumand Saeid* yang berjudul Fantastic Ideal in BCI-Algebra dalam *World Applied Sciences* 8(5): 550-554, 2010. Namun hasil penelitian saya ini tidak dapat dikatakan sebagai jiplakan karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, karena saya menggunakan cara saya sendiri dalam membuktikan beberapa proposisi dan teorema dalam penelitian ini, kecuali secara tertulis dikutip dalam naskah ini yang disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 14 April 2014

Yang membuat pernyataan

ROHATUL WARDA

NIM. 09610019

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ

Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri (QS. Ar.Ra'd/13: 11).

PERSEMBAHAN

Bismillâhirrohmânirroḫîm

Alhamdulillâh,

karya ini saya persembahkan

untuk orang-orang yang telah memberikan arti dalam hidup saya

dengan pengorbanan, kasih sayang, dan ketulusan untuk saya.

Kepada kedua orangtua saya

yang paling berjasa dalam hidup saya,

dan selalu memotivasi saya

untuk terus berproses menjadi seseorang yang selalu mengharapkan Ridha Allah SWT,

Ibunda tersayang (Maskanah) dan Ayahanda tercinta (Amanan).

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji syukur bagi Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh sebab itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta sebagai dosen pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.
4. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A sebagai dosen pembimbing agama yang telah bersedia memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi

5. Segenap dosen pengajar Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
6. Seluruh staf karyawan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah membantu kelancaran proses penulisan skripsi.
7. Bapak, Ibu dan segenap keluarga yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
8. Teman-teman Jurusan Matematika, terutama angkatan 2009 beserta semua pihak yang telah memberikan semangat dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada semua pihak yang membaca khususnya bagi penulis. *Âmîn.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, April 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Warda, Rohatul. 2014. **Sifat-sifat Fantastik-Ideal pada Aljabar BCI**. Skripsi Program SI Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: Dr. Abdussakir, M. Pd
Dr. H. Ahmad Barizi, M. A

Kata Kunci: Aljabar BCI, Aljabar BCK, P-semisimple, Ideal, dan Fantastik-Ideal.

Aljabar BCI merupakan bagian dari struktur aljabar dimana di dalamnya terdapat grupoid yang mempunyai elemen khusus dan memenuhi sifat-sifat tertentu. Pada tahun 1966, Y. Imai dan K. Iseki memperkenalkan perkembangan dari struktur aljabar, yaitu Aljabar BCK. Pada tahun yang sama, K. Iseki memperkenalkan gagasan baru, yaitu Aljabar BCI yang merupakan perumuman dari Aljabar BCK sehingga Aljabar BCK termuat di dalam Aljabar BCI. Pada penelitian sebelumnya telah dibahas mengenai ideal-ideal pada Aljabar BCI. *Fantastik*-ideal merupakan salah satu dari ideal-ideal yang ada pada Aljabar BCI. Jika I adalah ideal pada Alabar BCI X, maka I adalah *fantastik*-ideal jika dan hanya jika $x * y \in I$ berkibat $x * \big(y * (y * x)\big) \in I,\ \forall x, y \in X$. Jika I dan G adalah ideal dari Aljabar BCI X dengan $I \subseteq G$ dan I adalah *fantastik*-ideal dari X maka G adalah *fantastik*-ideal dari X. Pada Aljabar BCI X kondisi (i) I *fantastik*-ideal, (ii) $\Big(x * \big(0 * (0 * x)\big)\Big) \in I, \forall x \in X,$ (iii) Jika $u * x \in I$ dan $u * y \in I$ maka $\Big(u * \big(y * (y * x)\big)\Big) \in I, \forall u, x, y \in X$ adalah ekivalen. Dan pada Aljabar BCI X kondisi (i) $x * y = x * \big(y * (y * x)\big)$, (ii) $x * \big(y * (y * x)\big) = y * \big(x * (x * y)\big)$, (iii) X adalah Aljabar BCK komutatif adalah ekivalen, serta ekivalen pada kondisi (i) $\{0\}$ adalah *fantastik*-ideal, (ii) Setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal, (iii) $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$, (iv) X adalah Aljabar BCK komutatif. Penelitian ini menghasilkan bukti dari beberapa proposisi dan teorema *fantastik*-ideal pada aljabar BCI yang berlaku maupun tidak berlaku umum. Akan tetapi penelitian ini hanya fokus pada satu ideal saja, yaitu *fantastik*-ideal. Oleh karena itu untuk penulis skripsi selanjutnya penulis menyarankan untuk membahas ideal-ideal lain yang ada pada Aljabar BCI atau struktur aljabar lain.

ABSTRACT

Warda, Rohatul. 2014. **The Characteristics of Fantastic Ideal in BCI Algebra**. Thesis. Department of Mathematics The Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: Dr. Abdussakir, M. Pd
Dr. H. Ahmad Barizi, M. A

Key Words: BCI Algebra , BCK Algebra, P-semisimple, Ideal, and Fantastic Ideal.

BCI algebra is a part of algebra structure which is consists of grupoid that has specific elements and fulfill one of the certain characteristic. In 1966's, Y. Imai and K. Iseki introduced a development of algebra structure that is BCK algebra. In the same year, K. Iseki introduced the new concept that is BCI Algebra as a generalization of BCK algebra, with the result that BCK Algebra contained in BCI Algebra. In the previous study ideals on BCI algebra had been explained. Fantastic Ideal is on of ideals that contained in BCI algebra. If I is ideal of BCI algebra X then I is fantastic ideal if and only if $x * y \in I$ then $x * \left(y * (y * x)\right) \in I,\ \forall x, y \in X$. if I and G is ideal from BCI algebra X with $I \subseteq G$ and I is fantastic ideal of X then G is fantastic ideal of X. In BCI algebra X, condition (i) I fantastic ideal, (ii) $\left(x * \left(0 * (0 * x)\right)\right) \in I, \forall x \in X$, (iii) if $u * x \in I$ and $u * y \in I$ then $\left(u * \left(y * (y * x)\right)\right) \in I, \forall u, x, y \in X$ is equivalent. In BCI algebra X condition (i) $x * y = x * \left(y * (y * x)\right)$, (ii) $x * \left(y * (y * x)\right) = y * \left(x * (x * y)\right)$, (iii) X is comutative BCK algebra is equivalent, also conditions of (i) $\{0\}$ is fantastic ideal, (ii) each ideal to X is fantastic ideal, (iii) $x * y = x * \left(y * (y * x)\right), \forall x, y \in X$, (iv) X comutative BCK algebra. This research obtains a proof from several proposition and the theorem of fantastic ideal on BCI algebra that is generally valid or not. This reserach focuses on one ideal, that is fantastic ideal. So, to the next researcher, author suggest to explain other ideals that is in BCI algebra or other algebra structure.

الملخص

ورد، رحة. عام ٢٠١٤ خصائص الفنتسطيكية المثالية في الجبر BCI البحث اليكالويا قسم الرياضيات كلية المعلومات التكنولوجية في جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانع

المشريفات : الدكتور عبد الشاكر الماجستير

الدكتور الحاج أحمد برزي الماجستير

مفتاح الكلمة : علم الجبر BCI، الجبرBCK، منتصف البسيط –P، المثالية ، و الفنتسطيكية المثالية.

الجبر BCI هوعنصور من عناصر الجبر الذي فيه غرفيد (grupoid) له عنصور الخاص ويملئ الصفات الخاصة في السنة ١٩٦٦. ي. إمائي وك.اسيكي تنمية هيكال الجبر هو الجبر BCI التي أعم من الجبر BCK حتي يحتوي في الجبر BCI. في البحث القديم قد بحث في المثاليات الجبر BCI. الفنتسطيكية المثالية هوشيء من المثاليات الموجودة في الجبر BCI. إذا $\boldsymbol{I}$ هو المثالي في الجبر BCI ف $\boldsymbol{I}$ هو *الفنتسطيكية المثالية* إذا كان I $x * y \in I$ يحصل $x * \big(y * (y * x)\big) \in I,\ \forall x, y \in X$. إذا $\boldsymbol{I}$ و $\boldsymbol{G}$ هو المثالي في الجبر BCI $\boldsymbol{X}$ ب $I \subseteq G$ و $\boldsymbol{I}$ هو *الفنتسطيكية المثالية* من $\boldsymbol{X}$ ف $\boldsymbol{G}$ هو *الفنتسطيكية المثالية* من $\boldsymbol{X}$. في الجبر BCI $\boldsymbol{X}$ حالة (i) $\boldsymbol{I}$ *الفنتسطيكية المثالية*، (ii) $\Big(x * \big(\cdot * (\cdot * x)\big)\Big) \in I, \forall x \in X$

(iii) إذا $u * x \in I$ و $u * y \in I$ ف $\Big(u * \big(y * (y * x)\big)\Big) \in I, \forall u, x, y \in X$ يسمي **بيعادل**. و الجبر BCI $\boldsymbol{X}$ حال (i) $x * y = x * \big(y * (y * x)\big)$

(ii) $x * \big(y * (y * x)\big) = y * \big(x * (x * y)\big)$ (iii) $\boldsymbol{X}$ هو الجبر BCI التبديلية يسمي بيعادل **ويعادل** في حال (i) $\{0\}$ هو *الفنتسطيكية المثالية*، (ii) كل المثالية في $\boldsymbol{X}$ هو *الفنتسطيكية المثالية*،

(iii) $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$ (iv) هوالجبر BCK التبديلية. هذا البحث يحصل على البرهان من المقترحات وكذالك النظريات المثالية في الجبر BCI الذى يجرى او لايجرى، ولكن هذه البحث يهتم او يتركّز الى مثالية واحد وهي فنتسطيكية المثالية. فلذالك للباحث البعد يقترح على البحث المثالية الأخرى الموجود في الجبر BCI او هيكال الجبر الأخرى

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta dan segala isinya diciptakan Allah dalam ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:79-80).

Banyak sekali ayat-ayat dalam Al-Qur’an yang menjelaskan tentang adanya ilmu matematika, salah satu ayat yang menjelaskan tentang adanya ilmu matematika adalah Al-Qur’an surat Yunus/10 ayat 5, yaitu:

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمْسَ ضِيَآءً وَٱلْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۚ يُفَصِّلُ ٱلْءَايَٰتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ٥

Artinya: “Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui”.

Ayat di atas menegaskan tentang hikmah penciptaan dan peredaran matahari dan bulan, yaitu untuk mengetahui perhitungan waktu $(Lita'lam\hat{u}\ \ 'adad\ al - sin\hat{i}n\ wal\ \underline{h}is\hat{a}b)$. Perhitungan $(al - \underline{h}is\hat{a}b)$ waktu itu selalu mengacu pada peredaran matahari dan bulan. Bagi orang Islam, perhitungan waktu sangat diperhatikan dalam menjalankan syariatnya. Perhitungan waktu yang didasarkan pada peredaran bulan dapat dilakukan oleh siapa saja dengan cukup menyaksikannya seperti syariat puasa, haji, dan iddah thalaq. Namun demikian bukan berarti tidak menganjurkan supaya memanfaatkan perhitungan matahari yang harus dipelajari dengan ilmu hisab. Kedudukan matematika di sini adalah sebagai ilmu dasar yang dapat digunakan sebagai metode ilmu hisab.

Aljabar adalah salah satu cabang ilmu dalam matematika. Aljabar masih terbagi lagi menjadi beberapa cabang ilmu, salah satu di antaranya adalah aljabar abstrak. Pada aljabar abstrak diperkenalkan tentang konsep struktur aljabar dan sifat-sifatnya. Struktur aljabar merupakan himpunan tak kosong dengan satu atau lebih relasi ekuivalensi dan satu atau lebih operasi biner dengan aksioma-aksioma tertentu (Anggrayni, 2010:1).

Grupoid merupakan sub-bab dari struktur aljabar, yaitu himpunan dengan satu operasi biner, dimana dengan grupoid tersebut akan menghasilkan subbab-subbab lain dalam struktur aljabar, seperti monoid, grup, ring, dan sebagainya (Pusawidjayanti, 2011:1). Aljabar BCI merupakan bagian dari struktur aljabar dimana di dalamnya terdapat grupoid yang mempunyai elemen khusus dan memenuhi sifat-sifat tertentu.

Pada tahun 1966, Y. Imai dan K. Iseki memperkenalkan perkembangan dari struktur aljabar, yaitu Aljabar BCK. Pada tahun yang sama, K. Iseki memperkenalkan gagasan baru, yaitu Aljabar BCI yang merupakan perumuman dari Aljabar BCK sehingga Aljabar BCK termuat di dalam Aljabar BCI (Endah, 2011:4).

Syaidah (2011:71) menyatakan bahwa $(M_n, +)$ grup bilangan modulo n dengan $n \in N$, dengan operasi $*$ yaitu $x * y = x + (-y)$ dimana $(-y)$ adalah invers dari y terhadap operasi $+$ adalah Aljabar BCI.

Dari tahun ke tahun aljabar BCI telah berkembang dan kemudian T.D. Lei pada tahun 1982 memperkenalkan aljabar BCI *P-semisimple*. Aljabar BCI *P-semisimple* ini merupakan kelas spesial aljabar BCI dan termuat dalam aljabar BCK (Huang, 2006:33).

Bhatti (1991) dalam thesisnya menyatakan bahwa jika X adalah Aljabar BCI maka X adalah juga Aljabar BCI *P-semisimple*. Hal ini dapat bermakna bahwa aljabar BCI X ekuivalen dengan aljabar BCI *P-Semisimple* karena sesuai dengan definisi aljabar BCI *P-Semisimple*. (Bhatti, 1991:1) misalkan X adalah aljabar BCI dan misalkan ada $M = \{0 * x = 0; x \in X\}$. Kemudian setelah diteliti M hanya memiliki satu anggota, yaitu 0 $(M = \{0\})$ maka X disebut aljabar BCI *P-Semisimple*. Karena aljabar BCI melibatkan himpunan tak kosong, maka sesuai dengan definisi yang dipaparkan Munir (2009:54) himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki satupun elemen atau himpunan dengan kardinal$=$ 0, ini bisa diartikan bahwa himpunan tak kosong adalah himpunan yang memuat minimal satu anggota.

Pada penelitian sebelumnya Lusi Sarwo Endah (2011), telah dibahas mengenai ideal-ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*. Pada penelitian tersebut telah dibuktikan bahwa ideal-ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n* adalah *q*-ideal, *a*-ideal, *p*-ideal dan *fantastik*-ideal. Pada penelitian tersebut belum dirumuskan teorema tentang sifat dari masing-masing ideal yang ada pada aljabar BCI, sehingga pada skripsi ini penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian tersebut mengenai sifat-sifat dari masing-masing ideal pada aljabar BCI yang dibatasi pada *fantastik*-ideal.

Berdasarkan latar belakang di atas penulis tertarik untuk membahas *"Sifat-Sifat Fantastik-Ideal pada Aljabar BCI"*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah apakah sifat-sifat *fantastik*-ideal berlaku pada aljabar BCI?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menguraikan dan menjelaskan sifat-sifat *fantastik*-ideal pada aljabar BCI.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini, yaitu:

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang ideal-ideal yang ada pada Aljabar BCI, khususnya *fantastik*-ideal dan sifat-sifatnya.

2. Bagi Lembaga

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sebagai saran pengembangan wawasan keilmuan khususnya pada jurusan matematika bidang aljabar.

3. Bagi Pengembangan Ilmu

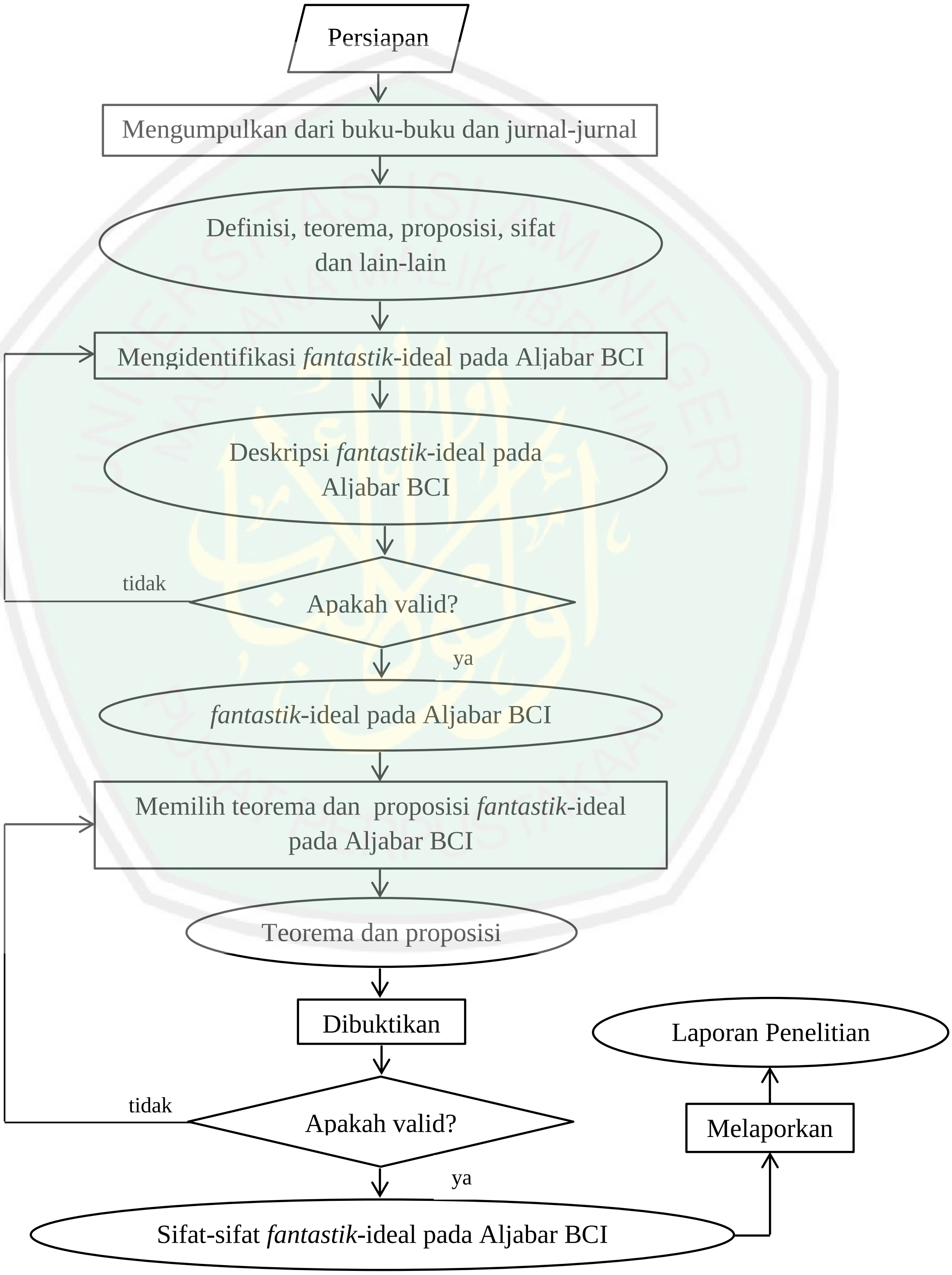
   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan pembanding bagi pihak yang ingin mengetahui lebih banyak tentang sifat-sifat *fantastik*-ideal pada Aljabar BCI.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian skripsi ini adalah studi literatur yang berupa buku-buku dan jurnal-jurnal ilmiah, di antara tahap-tahapnya yaitu:

1. Mengumpulkan kajian dari buku, jurnal-jurnal dan hasil penelitian berupa teorema, dalil, sifat, dan lain-lain yang berhubungan dengan *fantastik*-ideal pada Aljabar BCI.
2. Menjabarkan definisi Aljabar BCI, ideal, dan *fantastik*-ideal.
3. Mengidentifikasi *fantastik*-ideal pada Aljabar BCI.
4. Memilih beberapa teorema dan proposisi *fantastik*-ideal pada Aljabar BCI.
5. Membuktikan beberapa teorema dan proposisi *fantastik*-ideal pada aljabar BCI.
6. Melaporkan hasil pembuktian dari beberapa teorema dan proposisi *fantastik*-ideal pada aljabar BCI.
7. Membuat kesimpulan.

Berikut ini adalah *flowchart* sebagai pendeskripsian dari metode penelitian dalam skripsi ini:



1.6 Sistematika Penulisan

Skripsi ini menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan tentang beberapa definisi yang berhubungan dengan *fantastik*-ideal pada aljabar BCI.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang pembahasan berupa pembuktian dari beberapa teorema *fantastik*-ideal yang ada pada aljabar BCI.

Bab VI Penutup

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penulisan yang telah dibahas dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penulisan ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Definisi 2.1.1

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang mempunyai sifat tertentu dan didefinisikan dengan baik (*well defined*). Objek dalam pembicaraan matematika dapat berupa benda konkret misalnya siswa SMA, buah-buahan, dapat pula berupa benda abstrak misalnya, bilangan, fungsi, matriks (Soebagio dan Sukirman, 1994:2).

Definisi 2.1.2

Dua himpunan A dan B disebut *sama* dan dinotasikan $A = B$, jika dan hanya jika setiap anggota dari A menjadi anggota dari B, dan setiap anggota dari B menjadi anggota dari A. Jadi $A = B \leftrightarrow [(\forall x) x \in A \leftrightarrow x \in B]$ (Soebagio dan Sukirman, 1994:5).

Dua himpunan A dan B yang tidak sama dinotasikan $A \neq B$. Jadi $A \neq B$ jika dan hanya jika ada $x \in A$ tetapi $x \notin B$, atau ada $y \in B$ tetapi $y \notin A$. $A \neq B$ merupakan ingkaran atau negasi dari $A = B$ (Soebagio dan Sukirman, 1994:5).

Contoh 2.1.3

1. Jika $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,2,1\}$, maka $A = B$
2. Jika $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{a, c\}$, maka $A \neq B$

2.2 Himpunan Bagian

Definisi 2.2.1

Himpunan A dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A. Dinotasikan: $A \subseteq B \leftrightarrow x \in A \rightarrow x \in B$. Jika ada anggota A yang bukan himpunan bagian B. Dinotasikan: $A \nsubseteq B \leftrightarrow \exists x \in A \land x \notin B$ (Munir, 2009:54).

Raisinghania dan Aggrawal (1980:3) menambahkan

a. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, maka kita katakan A dan B sama (*equal*) dan ditulis $A = B$.
b. Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, maka kita katakan A adalah *proper subset* dari B dan kita tulis $A \subset B$.
c. Jika A bukan *subset* dari B, maka ditulis $A \nsubseteq B$.
d. Dua himpunan A dan B dengan syarat $A \subseteq B$ atau $B \subseteq A$ maka dikatakan A dan B *comparable*. Namun sebaliknya, jika $A \nsubseteq B$ dan $B \nsubseteq A$ maka dikatakan A dan B *non-comparable*.
e. Himpunan A dan B dikatakan *disjoint* jika tidak ada elemen A yang termuat di B dan tidak ada elemen B yang termuat di A ($A \cap B = \emptyset$).

Contoh 2.2.2

Diketahui himpunan $B = \{a, b, c, d\}$ dan $A = \{a, c\}$. Maka $A \subset B$ karena semua anggota A ada di B dan $B \neq A$.

2.3 Operasi-Operasi terhadap Himpunan

Definisi 2.3.1

Gabungan (*union*) dari dua himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$ adalah himpunan semua elemen A atau B. Dinotasikan: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$ (Raisinghania dan Aggrawal, 1980:3).

Contoh 2.3.2

Jika $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{10,20,30,40\}$, maka $A \cup B = \{1,2,3,4,10,20,30,40\}$.

Definisi 2.3.3

Irisan dua himpunan A dan B adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota A dan juga menjadi angota B. Himpunan baru ini disebut irisan himpunan A dan B dan disajikan dengan tanda $A \cap B$.

$A \cap B = \{x \in S | x \in A \wedge x \in B\}$ (Soebagio, 1993:16).

Contoh 2.3.4

Jika $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{3,4,5,6\}$ maka $A \cap B = \{3,4\}$.

Definisi 2.3.5

Selisih dari dua himpunan A dan B, yang dinyatakan dengan $A - B$, adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen dalam A yang bukan anggota dari B (Soebagio dan Sukirman, 1994:21).

Dinotasikan: $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

Contoh 2.3.6

Jika $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{4,5\}$ maka $A - B = \{1,2,3\}$.

2.4 Relasi

Jika $(a,b) \in R$, dengan menggunakan notasi aRb, artinya a dihubungkan dengan b oleh R. Jika $(a,b) \notin R$, dengan menggunakan $a\not{R}b$, artinya a tidak dihubungkan dengan b oleh R.

Definisi 2.4.1

Relasi biner $\leq$ pada himpunan A dikatakan *Relasi Ekivalen* jika memenuhi aksioma di bawah ini:

$\forall a,b,c \in A$

i. memenuhi sifat *refleksif*: $a \leq a$

ii. memenuhi sifat *anti-simetris*: $a \leq b$ dan $b \leq a$ berakibat $a = b$

iii. memenuhi sifat *transitif*: $a \leq b$ dan $b \leq c$ berakibat $a \leq c$ (Huang, 2006:4).

Contoh 2.4.2

Himpunan $\mathbb{Z}^+$ adalah himpunan bilangan bulat positif. Relasi $\leq$ adalah suatu *relasi ekivalen* pada $\mathbb{Z}^+$.

Jawab:

Jika $a,b \in \mathbb{Z}^+$ jika $a \leq b$,

i. karena setiap bilangan bulat sama dengan dirinya sendiri maka terbukti *refleksif*.

ii. karena $a \leq b$ dan $b \leq a$ sehingga $a = b$ maka terbukti *anti-simetri*.

iii. jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ sehingga $a \leq c$ maka terbukti *transitif*.

2.5 Operasi Biner

Diketahui G adalah himpunan dan $a, b \in G$. Operasi biner $*$ pada G merupakan pengaitan pasangan elemen (a, b) pada G, yang memenuhi dua kondisi berikut:

(i) setiap elemen yang dikaitkan dengan pasangan elemen (a, b) pada G merupakan elemen di G

(ii) setiap pasangan elemen (a, b) pada G dikaitkan dengan tepat satu elemen. (Pusawidjayanti, 2011:18).

Kondisi (i) disebut dengan kondisi tertutup (*closed*), sedangkan kondisi (ii) disebut juga dengan kondisi terdefinisi dengan baik (*well definied*). Untuk selanjutnya jika G merupakan himpunan tak kosong, $*$ merupakan operasi pada G, dan $a, b \in G$, maka $a * b$ menyatakan elemen yang dikaitkan dengan pasangan elemen (a, b) terhadap operasi $*$.

Contoh

1. Diketahui $\mathbb{Z}$, yaitu himpunan semua bilangan bulat, dan $*$ adalah operasi pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat $a, b \in \mathbb{Z}$, $a * b = a + b$. Akan dibuktikan operasi $*$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$

   Jawab:

   (i) Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merpakan operasi yang tertutup. Dapat diperhatikan bahwa sesuai dengan sifat bilangan bulat, maka penjumlahan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat juga. Dengan demikian $a * b = a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi terbukti operasi $*$ merupakan operasi tertutup.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi terdefinisi dengan baik. Dapat diperhatikan bahwa sesuai dengan sifat bilangan bulat, maka setiap dua bilangan bulat dapat dijumlahkan dan menghasilkan bilangan bulat. Jadi terbukti operasi $*$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik.

Jadi, operasi $*$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

2. Didefinisikan operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a * b = \frac{a}{b}$. Apakah operasi $*$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$

Jawab:

Jika $a = 1$ dan $b = 2$ akan berakibat $a * b = 1 * 2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Jadi, operasi $*$ tidak memenuhi sifat tertutup, dan jika $a = 1$ dan $b = 0$ sehingga $a * b = 1 * 0 = \frac{1}{0}$ yang tidak terdefinisikan. Jadi operasi $*$ tidak memenuhi kondisi terdefinisi dengan baik. Jadi, operasi $*$ bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Sifat-sifat Operasi Biner

Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut:

a. Komutatif, jika dan hanya jika $\forall a, b \in S$ berlaku $a * b = b * a$

b. Assosiatif, jika dan hanya jika $\forall a, b, c \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Soebagio dan Sukirman, 1994:109).

Contoh

Jika $X = \mathbb{Z}^+$, operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}^+$ mempunyai sifat:

a. Komutatif, jika $a * b = b * a$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$

b. Assosiatif, jika $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ dengan $a * b = a \times b$

Misal $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$

i. komutatif, $2 \times 5 = 5 \times 2 \in \mathbb{Z}^+$

ii. assosiatif, $(2 \times 5) \times 3 = 2 \times (5 \times 3) = 30 \in \mathbb{Z}^+$

Adakalanya operasi biner pada himpunan berhingga dinyatakan dengan tabel cayley. Tabel cayley merupakan salah satu cara untuk mendefinisikan operasi biner pada himpunan, khususnya himpunan berhingga.

Contoh

Misal himpunan $S = \{x, y, z\}$ dengan operasi $*$ didefinisikan pada tabel di bawah ini:

Tabel 2.1

Definisi Himpunan S Terhadap Operasi $*$

$*$	x	y	z
x	x	x	z
y	x	y	y
z	z	y	z

(Pusawidjayanti, 2011:21)

Anggota yang dioperasikan dicantumkan pada baris pertama (paling atas) dan kolom pertama (paling kiri), hasil operasi S dinyatakan dalam bujur sangkar yang di dalam, mulai baris kedua dalam kolom kedua, cara membacanya anggota yang akan dioperasikan dibaca dari kolom paling kiri, dan anggota yang akan dioperasikan pada sebelah kanan dibaca pada baris paling atas, sebagai contoh perhatikan pada Tabel (2.1) yang diarsir itu adalah hasil dari $z * y = y$.

Untuk mengetahui sifat-sifat operasi biner melalui tabel sebagai berikut:

a. jika hasil operasi $*$ pada S di dalam Tabel (2.1) tersebut hanya terdiri dari anggota S maka bersifat tertutup.

b. jika letak anggota dalam tabel simetris terhadap diagonal utama, maka $(S,*)$ bersifat komutatif. Pada Tabel (2.1) adalah komutatif.

2.6 Grupoid

Definisi 2.6.1

Suatu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner disebut grupoid (Soebagio dan Sukirman, 1994:112).

Contoh 2.6.2

$S = \{x, y, z\}$ dengan operasi $*$ dinyatakan pada Tabel (2.1) dengan memperhatikan tabel tersebut diperoleh $(S,*)$ memenuhi sifat tetutup. Jadi $(S,*)$ adalah grupoid.

2.7 Semigrup

Definisi 2.7.1

Suatu grupoid $(G,*)$ disebut *semigrup* jika $\forall a, b, c \in G$ memenuhi:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Jadi semigrup adalah grupoid yang bersifat assosiatif (Soebagio dan Sukirman, 1994:129).

Contoh 2.7.2

Diberikan $(Z^+,*)$ adalah suatu grupoid, dengan $x * y = x \times y, \forall x, y \in Z^+$. Apakah Z^+ merupakan semigrup?

Jawab:

i) Diketahui $(Z^+,*)$ adalah grupoid, maka Z^+ bersifat tertutup.

ii) Z^+ bersifat assosiatif, sehingga $\forall x, y, z \in Z^+$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Ambil sebarang $x, y, z \in Z^+$, maka:

$$(x * y) * z = x * (y * z) \leftrightarrow (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

Karena Z^+ merupakan grupoid yang memenuhi sifat assosiatif, maka Z^+ adalah semigrup.

2.8 Monoid

Definisi 2.8.1

Suatu semigrup $(G,*)$ disebut monoid jika ada $i \in G$ sedemikian sehingga $\forall a \in G$ memenuhi $i * a = a * i = a$, dengan kata lain semigrup yang mempunyai eleman identitas adalah *monoid* (Soebagio dan Sukirman, 1994:131).

Contoh 2.8.2

Tunjukkan bahwa $(Z,*)$ dengan $a * b = a + b, \forall a, b \in Z$ adalah monoid

i) $a + b \in Z, \forall a, b \in Z$, sehingga penjumlahan terbukti tertutup pada Z

ii) Ambil $a, b, c \in Z$ maka:

$(a * b) * c = a * (b * c) \leftrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$

Jadi operasi penjumlahan bersifat assosiatif di Z, sehingga terbukti semigrup.

iii) Terdapat $0 \in Z$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in Z$

Jadi 0 adalah identitas penjumlahan, sehingga terbukti monoid.

2.9 Grup

Definisi 2.9.1

Suatu himpunan X yang tidak kosong dengan satu operasi $*$ merupakan suatu grup jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut ini:

i) Tertutup terhadap operasi $*$, yaitu $\forall a, b \in X$ sehingga $a * b \in X$

ii) Operasi $*$ bersifat assosiatif, yaitu $\forall a, b \in X$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

iii) X memiliki elemen identitas i, yaitu $a * i = i * a = a, \forall a \in X$

iv) Setiap anggota X memiliki invers, yaitu $\forall a, a^{-1} \in X$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$ (Soebagio dan Sukirman, 1994:142-143).

Dengan kata lain grup adalah suatu monoid yang memiliki invers.

Contoh 2.9.2

Tunjukkan bahwa $(Z,*)$ dengan $a * b = a + b, \forall a, b \in Z$ adalah grup

Jawab:

Pada contoh *2.8.2* telah terbukti monoid, sehingga akan ditunjukkan setiap bilangan pada Z mempunyai invers

Untuk setiap $a \in Z$ terdapat $-a \in Z$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi invers dari a adalah $-a$. Sehingga terbukti bahwa $(Z,*)$ dengan $a * b = a + b, \forall a, b \in Z$ adalah grup.

2.10 Aljabar BCI

Definisi 2.10.1

Misalkan X adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0. Maka struktur aljabar $(X,*,0)$ dikatakan aljabar BCI jika memenuhi:

i) $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$

ii) $(x*(x*y))*y=0$

iii) $x*x=0$

iv) $x*y=0$ dan $y*x=0 \rightarrow x=y$

untuk setiap $x,y,z \in X$ (Saeid, 2010:550).

Contoh 2.10.2

Tunjukkan bahwa $(M_3,*,0)$ adalah aljabar BCI. Definisi $*$ mengikuti tabel di bawah ini:

Tabel 2.2

Grup Modulo 3 Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

(Endah, 2011:27)

Jawab:

i) Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in M_3$, berlaku $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$

Untuk $x=0$, maka diperoleh

$((0*0)*(0*0))*(0*0)=0$

Untuk $x=1$, maka diperoleh

$((1*0)*(1*0))*(0*0)=0$

$((0*0)*(0*1))*(1*0)=0$ $((1*0)*(1*1))*(1*0)=0$

$((0*0)*(0*2))*(2*0)=0$ $((1*0)*(1*2))*(2*0)=0$

$((0*1)*(0*0))*(0*1)=0$ $((1*1)*(1*0))*(0*1)=0$

$((0*1)*(0*1))*(1*1)=0$ $((1*1)*(1*1))*(1*1)=0$

$((0*1)*(0*2))*(2*1)=0$ $((1*1)*(1*2))*(2*1)=0$

$((0*2)*(0*0))*(0*2)=0$ $((1*2)*(1*0))*(0*2)=0$

$((0*2)*(0*1))*(1*2)=0$ $((1*2)*(1*1))*(1*2)=0$

$((0*2)*(0*2))*(2*2)=0$ $((1*2)*(1*2))*(2*2)=0$

Untuk $x=2$, maka diperoleh

$((2*0)*(2*0))*(0*0)=0$ $((2*1)*(2*2))*(2*1)=0$

$((2*0)*(2*1))*(1*0)=0$ $((2*2)*(2*0))*(0*2)=0$

$((2*0)*(2*2))*(2*0)=0$ $((2*2)*(2*1))*(1*2)=0$

$((2*1)*(2*0))*(0*1)=0$ $((2*2)*(2*2))*(2*2)=0$

$((2*1)*(2*1))*(1*1)=0$

Jadi, terbukti bahwa $\forall x,y,z \in M_3$, berlaku $((x*y)(x*z))*(z*y)=0$.

ii) Akan ditunjukkan $\forall x,y \in M_3$, berlaku $(x*(x*y))*y=0$.

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh $(0*(0*0))*0=0$

Untuk $x=0, y=1$ maka diperoleh $(0*(0*1))*1=0$

Untuk $x=0, y=2$ maka diperoleh $(0*(0*2))*2=0$

Untuk $x=1, y=0$ maka diperoleh $(1*(1*0))*0=0$

Untuk $x=1, y=1$ maka diperoleh $(1*(1*1))*1=0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh $\big(1 * (1 * 2)\big) * 2 = 0$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh $\big(2 * (2 * 0)\big) * 0 = 0$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh $\big(2 * (2 * 1)\big) * 1 = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh $\big(2 * (2 * 2)\big) * 2 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in M_3$, berlaku $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$

iii) Dari Tabel 2.2, jelas bahwa $\forall x \in M_3$, berlaku $x * x = 0$

iv) Dari Tabel 2.2, jelas bahwa $\forall x \in M_3$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Terbukti bahwa $(M_3, *, 0)$ adalah Aljabar BCI

Mostafa dkk (2011:17) mendefinisikan aljabar BCI jika memenuhi kondisi di bawah ini:

a. $(x * y) * (x * z) \leq z * y$

b. $x * (x * y) \leq y$

c. $x \leq x$

d. $x \leq y$ dan $y \leq x$ berakibat $x = y$

e. $x \leq 0$ berakibat $x = 0$ dimana $x \leq y$ adalah definisi dari $x * y = 0$

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Menurut penulis definisi di atas sama halnya dengan definisi yang dipaparkan oleh Saeid pada deinisi *2.10.1*. Dimana Saeid menggunakan $x * x = 0$ sedangkan Mostafa menggunakan $x \leq x$ sebagai definisi dari $x * x = 0$ dan seterusnya.

Sifat 2.10.3

Aljabar BCI X memenuhi sifat-sifat di bawah ini $\forall x, y, z \in X$:

i) $x * 0 = x$

ii) $(x * y) * z = (x * z) * y$

iii) $x \leq y$ berakibat bahwa $x * z \leq y * z$ dan $z * y \leq z * x$

iv) $(x * z) * (y * z) \leq x * y$

v) $x * (x * (x * y)) = x * y$

vi) $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$, (Sun dan Xu, 2000:402).

Sifat 2.10.4

Untuk setiap aljabar BCI X memenuhi sifat-sifat di bawah ini:

a1) $(\forall x \in X)(x * 0 = x)$

a2) $(\forall x \in X)(x * y = 0 \rightarrow (x * z) * (y * z) = 0, (z * y) * (z * x) = 0)$

a3) $(\forall x \in X)((x * y) * z = (x * z) * y)$

a4) $(\forall x \in X)((x * z) * (y * z) * (x * y) = 0)$ (Jun dan Lee, 2010:2).

Sifat 2.10.5

Pada Aljabar BCI X mengikuti sifat-sifat di bawah ini:

z1) $(\forall x \in X)(x * 0 = x)$

z2) $(\forall x, y, z \in X)((x * y) * z = (x * z) * y)$

z3) $(\forall x \in X)(0 * (0 * (0 * x)) = 0 * x)$

z4) $(\forall x, y \in X)(0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y))$, (Jun, 2003:109).

Sifat 2.10.6

Aljabar BCI X disebut assosiatif jika memenuhi kondisi:

$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in X$

Contoh 2.10.7

Diberikan $(M_3,*,0)$ adalah aljabar BCI, akan ditunjukkan $(M_3,*,0)$ memenuhi sifat-sifat Aljabar BCI.

i. Akan ditunjukkan $0 * x = x, \forall x \in M_3$

Untuk $x = 0 \rightarrow \ 0 * 0 = 0 = x$

Untuk $x = 1 \rightarrow \ 0 * 1 = 2 \neq x$

Untuk $x = 2 \rightarrow \ 0 * 2 = 1 \neq x$

Terbukti $\forall x \in M_3, 0 * x = x, \rightarrow x = 0$

ii. Akan ditunjukkan $(x * y) * z = (x * z) * y, \forall x, y, z \in M_3$

$(0 * 0) * 0 = (0 * 0) * 0$

$0 * 0 = 0 * 0$

$0 = 0$

$(0 * 0) * 1 = (0 * 1) * 0$

$0 * 1 = 2 * 0$

$2 = 2$

$(0 * 0) * 2 = (0 * 2) * 0$

$0 * 2 = 1 * 0$

$1 = 1$

$(0 * 1) * 1 = (0 * 0) * 1$

$2 * 0 = 0 * 1$

$2 = 2$

$(0 * 1) * 1 = (0 * 1) * 1$

$2 * 1 = 2 * 1$

$(1 * 1) * 2 = (1 * 2) * 1$

$0 * 2 = 2 * 1$

$1 = 1$

$(1 * 2) * 0 = (1 * 0) * 2$

$2 * 0 = 1 * 2$

$2 = 2$

$(1 * 2) * 1 = (1 * 1) * 2$

$2 * 1 = 0 * 2$

$1 = 1$

$(1 * 2) * 2 = (1 * 2) * 2$

$2 * 2 = 2 * 2$

$0 = 0$

$(2 * 0) * 0 = (2 * 0) * 0$

$2 * 0 = 2 * 0$

$$1 = 1$$

$$(0 * 1) * 2 = (0 * 2) * 1$$

$$2 * 2 = 1 * 1$$

$$0 = 0$$

$$(0 * 2) * 0 = (0 * 0) * 2$$

$$1 * 0 = 0 * 2$$

$$1 = 1$$

$$(0 * 2) * 1 = (0 * 1) * 2$$

$$1 * 1 = 2 * 2$$

$$0 = 0$$

$$(0 * 2) * 2 = (0 * 2) * 2$$

$$1 * 2 = 1 * 2$$

$$2 = 2$$

$$(1 * 0) * 0 = (1 * 0) * 0$$

$$1 * 0 = 1 * 0$$

$$1 = 1$$

$$(1 * 0) * 1 = (1 * 1) * 0$$

$$1 * 1 = 0 * 0$$

$$0 = 0$$

$$(1 * 0) * 2 = (1 * 2) * 0$$

$$1 * 2 = 2 * 0$$

$$2 = 2$$

$$(1 * 1) * 0 = (1 * 0) * 1$$

$$2 = 2$$

$$(2 * 0) * 1 = (2 * 1) * 0$$

$$2 * 1 = 1 * 0$$

$$1 = 1$$

$$(2 * 0) * 2 = (2 * 2) * 0$$

$$2 * 2 = 0 * 0$$

$$0 = 0$$

$$(2 * 1) * 0 = (2 * 0) * 0$$

$$1 * 0 = 2 * 1$$

$$1 = 1$$

$$(2 * 1) * 1 = (2 * 1) * 1$$

$$1 * 1 = 1 * 1$$

$$0 = 0$$

$$(2 * 1) * 2 = (2 * 2) * 1$$

$$1 * 2 = 0 * 1$$

$$2 = 2$$

$$(2 * 2) * 0 = (2 * 0) * 2$$

$$0 * 0 = 2 * 2$$

$$0 = 0$$

$$(2 * 2) * 1 = (2 * 1) * 2$$

$$0 * 1 = 1 * 2$$

$$2 = 2$$

$$(2 * 2) * 2 = (2 * 2) * 2$$

$0 * 0 = 1 * 1$ $\qquad$ $0 * 2 = 0 * 2$

$0 = 0$ $\qquad$ $1 = 1$

$$(1 * 1) * 1 = (1 * 1) * 1$$

$$0 * 1 = 0 * 1$$

$$2 = 2$$

Terbukti $x, y \in M_3$ berlaku $(x * y) * z = (x * z) * y$

iii. Akan ditunjukkan $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y). \forall x, y, z \in M_3$

$0 * (0 * 0) = (0 * 0) * (0 * 0)$ $\qquad$ $0 * (1 * 2) = (0 * 1) * (0 * 2)$

$0 * 0 = 0 * 0$ $\qquad$ $0 * 2 = 2 * 1$

$0 = 0$ $\qquad$ $1 = 1$

$0 * (0 * 1) = (0 * 0) * (0 * 1)$ $\qquad$ $0 * (2 * 0) = (0 * 2) * (0 * 0)$

$0 * 2 = 0 * 2$ $\qquad$ $0 * 2 = 1 * 0$

$1 = 1$ $\qquad$ $1 = 1$

$0 * (0 * 2) = (0 * 0) * (0 * 2)$ $\qquad$ $0 * (2 * 1) = (0 * 2) * (0 * 1)$

$0 * 1 = 0 * 1$ $\qquad$ $0 * 1 = 1 * 2$

$2 = 2$ $\qquad$ $2 = 2$

$0 * (1 * 0) = (0 * 1) * (0 * 0)$ $\qquad$ $0 * (2 * 2) = (0 * 2) * (0 * 2)$

$0 * 1 = 2 * 0$ $\qquad$ $0 * 0 = 1 * 1$

$2 = 2$ $\qquad$ $0 = 0$

$$0 * (1 * 1) = (0 * 1) * (0 * 1)$$

$$0 * 0 = 2 * 2$$

$$0 = 0$$

Terbukti $\forall x, y, z \in M_3$ berlaku $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$

Untuk sifat-sifat yang lain dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

2.11 *P-semisimple*

Definisi 2.11.1

Misalkan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI, maka X disebut *P-semisimple* jika $0*(0*x)=x$ untuk setiap $x \in X$ (Saeid, 2010:550).

Contoh 2.11.2

Didefinisikan $(M_3,*,0)$ adalah aljabar BCI, definisi $*$ mengikuti Tabel (2.2) Apakah M_3 adalah aljabar BCI yang *P-semisimple*?

Jawab:

Akan dibuktikan $0*(0*x)=x, \forall x \in M_3$

Untuk $x=0 \rightarrow 0*(0*0)=0$

$$0*0=0$$
$$0=0$$

Untuk $x=1 \rightarrow 0*(0*1)=1$

$$0*2=1$$
$$1=1$$

Untuk $x=2 \rightarrow 0*(0*2)=2$

$$0*1=2$$
$$2=2$$

Karena $\forall x \in M_3$ memenuhi aksioma *P-semisimple*, maka terbukti bahwa M_3 adalah aljabar BCI *P-semisimple*.

2.12 Aljabar BCK

Definisi 2.12.1

Misalkan X adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0. Maka struktur aljabar $(X,*,0)$ dikatakan aljabar BCK jika memenuhi:

i) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

ii) $(x * (x * y)) * y = 0$

iii) $x * x = 0$

iv) $x * y = 0$ dan $y * x = 0 \rightarrow x = y$

v) $0 * x = 0$

untuk setiap $x, y, z \in X$ (Jun dan Lee, 2010:2).

Contoh 2.12.2

Apakah struktur aljabar $(M_3,*,0)$ adalah aljabar BCK.

Jawab:

Pada contoh *2.10.2* telah terbukti bahwa $(M_3,*,0)$ adalah aljabar BCI, maka telah memenuhi empat aksioma aljabar BCK, sehingga akan ditunjukkan $0 * x = 0, \forall x \in M_3$.

Ambil $x = 1 \rightarrow 0 * 1 = 2 \neq 0$

Aksioma tidak terpenuhi, maka $(M_3,*,0)$ bukan aljabar BCK.

Sifat 2.12.3

Aljabar BCK X disebut komutatif jika memenuhi kondisi

$x * (x * y) = y * (y * x), \forall x, y \in X$ (Jun, 2003:109)

Contoh 2.12.4

Diberikan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCK. Dengan $X = \{0, a, b, c, d\}$, definisi $*$ mengikuti tabel di bawah ini:

Tabel 2.3

Uji Tabel Cayley Terhadap Aksioma Aljabar BCK

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
d	d	c	c	a	0

(Jun dkk, 2013:1882)

Apakah $(X,*,0)$ adalah aljabar BCK komutatif?

Akan ditunjukkan $x * (x * y) = y * (y * x), \forall x, y \in X$

Ambil $x = a$ dan $y = b$

$a * (a * b) = b * (b * a)$

$a * 0 = b * b$

$a \neq 0$

Aksioma tidak terpenuhi, karena $a * (a * b) = a$ dan $b * (b * a) = 0$ maka $a * (a * b) \neq b * (b * a)$, sehingga $(X,*,0)$ bukan aljabar BCK komutatif.

2.13 *Fantastik*-Ideal

Definisi 2.13.1

Misal $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI dan terdapat subset tak kosong I pada X. I dikatakan *fantastik*-ideal pada X jika $(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * \big(y * (y * x)\big) \in I$; $\forall x, y, z \in X$ (Saeid, 2010:550).

Contoh 2.13.2

Diberikan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI, dengan $X = \{0,1,a,b,c\}$ dan $I = \{0\}$ definisi " $*$ " mengikuti tabel di bawah ini:

Tabel 2.4

Uji Tabel Caylay Terhadap Aksioma *Fantastik*-Ideal

$*$	0	1	a	b	c
0	0	0	a	a	a
1	1	0	a	a	a
a	a	a	0	0	0
b	b	a	1	0	0
c	c	a	1	1	0

(Saeid, 2010:551)

Apakah I adalah *fantastik*-ideal dari X?

Jawab:

Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$

berlaku $(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * \big(y * (y * x)\big) \in I$

Ambil $x = b, y = c, z = 0$

$(b * c) * 0 = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $b * \big(c * (c * b)\big) = b * (c * 1) = b * a = 1 \notin I$

Aksioma tidak terpenuhi karena $(b * c) * 0 \in I$ tetapi $b * \big(c * (c * b)\big) = 1 \notin I$. Sehingga I bukan *fantastik*-ideal dari X.

2.14 Kajian *fantastik*-ideal dalam Islam

Allah berfirman dalam Surat An-Nuur/24 ayat 39:

وَٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَعۡمَٰلُهُمۡ كَسَرَابِۭ بِقِيعَةٖ يَحۡسَبُهُ ٱلظَّمۡـَٔانُ مَآءً حَتَّىٰٓ إِذَا جَآءَهُۥ لَمۡ يَجِدۡهُ شَيۡـٔٗا وَوَجَدَ ٱللَّهَ عِندَهُۥ فَوَفَّىٰهُ حِسَابَهُۥۗ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٣٩

Artinya: *Dan orang-orang kafir amal-amal mereka adalah laksana fatamorgana di tanah yang datar, yang disangka air oleh orang-orang yang dahaga, tetapi bila didatanginya air itu dia tidak mendapatinya sesuatu apapun. dan didapatinya (ketetapan) Allah di sisi-Nya, lalu Allah memberikan kepadanya perhitungan amal-amal dengan cukup dan Allah adalah sangat cepat perhitungan-Nya.*

Dari ayat di atas dapat diketahui bahwa Allah mengisahkan kisah orang-orang kafir terkait amal dan perbuatan yang mereka kerjakan selama di dunia. Allah menggunakan metode *amtsal* yang berarti permisalan laksana fatamorgana di tanah yang datar (*ka Sarâb Biqî'ah*), dalam menyampaikan ayat ini. *Al-amtsal* adalah salah satu metode Allah dalam menjelaskan beberapa ayat-ayat di dalam Al-Qur'an (Anonim, 2013).

Metode *Al-Amtsal* menjadi metode yang sangat penting bagi para ulama dalam membahas tafsir. Para ulama memberikan perhatian yang besar terhadap metode ini, hal ini dikarenakan Allah menjelaskan perkara-perkara yang besar seperti hal-hal yang berkaitan dengan keimanan, keislaman, orang-orang munafik menggunakan metode ini dengan membuat sebuah perumpamaan-perumpamaan. Contohnya firman Allah, pada surat Al-Hasyr/59 ayat 21:

لَوۡ أَنزَلۡنَا هَٰذَا ٱلۡقُرۡءَانَ عَلَىٰ جَبَلٖ لَّرَأَيۡتَهُۥ خَٰشِعٗا مُّتَصَدِّعٗا مِّنۡ خَشۡيَةِ ٱللَّهِۚ وَتِلۡكَ ٱلۡأَمۡثَٰلُ نَضۡرِبُهَا لِلنَّاسِ لَعَلَّهُمۡ يَتَفَكَّرُونَ ٢١

Artinya: Kalau sekiranya kami turunkan Al-Qur'an Ini kepada sebuah gunung, pasti kamu akan melihatnya tunduk terpecah belah disebabkan ketakutannya kepada Allah. dan perumpamaan-perumpamaan itu kami buat untuk manusia supaya mereka berfikir.

Dalam ayat di atas, Allah memberikan gambaran tentang kedahsyatan Al-Qur'an, sampai-sampai sendainya Al-Qur'an itu diturunkan ke gunung yang besar, maka gunung itu akan hancur.

Pada Surat An-Nuur/24 ayat 39 di atas Allah memberikan misal bagi amal orang-orang kafir yang nampaknya baik dan besar manfaatnya bagi masyarakat, sekalipun amal yang sangat dinjurkan oleh Allah SWT dan dipandang sebagai amal yang besar pahalanya seperti mendirikan panti asuhan bagi anak-anak yatim, poliklinik untuk mengobati orang-orang yang tidak mampu, menolong fakir miskin, mengadakan perkumpulan-perkumpulan sosial atau yayasan, dan lain sebagainya.

Tetapi amal mereka tidak ada nilainya di sisi Allah, karena syarat utama bagi diterimanya suatu amal ialah iman yang murni kepada-Nya dan tidak mempersekutukan-Nya dengan sesuatu apapun, apalagi menganggap makhluk-Nya baik yang bernyawa ataupun benda mati sebagai Tuhan.

Allah menyerupakan amal orang-orang kafir itu sebagai fatamorgana di padang pasir, kelihatan dari jauh seperti air yang jernih yang dapat melepaskan dahaga dan menyegarkan tubuh yang telah lelah ditimpa terik matahari. Dengan bergegas orang melihatnya menuju arah fatamorgana itu, tetapi tatkala mereka sampai di sana, hilanglah semua harapan berganti dengan kecewa dan putus asa karena yang dilihatnya seperti air bening itu tak lain hanyalah bayangan belaka.

Allah berfirman dalam Surat Al-Furqan/25 ayat 23

وَقَدِمۡنَآ إِلَىٰ مَا عَمِلُواْ مِنۡ عَمَلٖ فَجَعَلۡنَٰهُ هَبَآءٗ مَّنثُورًا ٢٣

Artinya: Dan kami hadapi segala amal yang mereka kerjakan, lalu kami jadikan amal itu (bagaikan) debu yang berterbangan.

Dalam skripsi ini, metode yang digunakan menyerupai metode yang digunakan Allah SWT dalam menyampaikan ayat-ayat di dalam Al-Qur'an. Salah satunya pada definisi *fantastik*-ideal dimisalkan struktur aljabar $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI. Tiap-tiap amal manusia harus dilandasi iman yang murni hanya kepada-Nya dan tidak pernah mempersekutukan-Nya. Sebesar apapun amal mereka jika tidak dilandasi iman dan tidak pernah mempersekutukan-Nya maka tidak bernilai di hadapan Allah SWT. Namun jika dilandasi iman dan tidak pernah mempersekutukan-Nya maka semua amal yang mereka kerjakan berlaku di hadapan Allah SWT. Konsep ini menyerupai konsep *fantastik*-ideal, yaitu:

Jika $(x*y)*z \in I$ dan $z \in I$ maka berlaku $x*\big(y*(y*x)\big) \in I$; untuk setiap $x, y, z \in X$ (Saeid, 2010:550). Karena jika $(x*y)*z \notin I$ dan $z \notin I$ atau salah satunya $\notin I$ maka meskipun hasilnya $x*\big(y*(y*x)\big) \in I$, hal ini tidak berlaku atau bukan merupakan *fantastik*-ideal.

BAB III

PEMBAHASAN

Dari penelitian sebelumnya telah dibahas tentang ideal-ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*. Selanjutnya pada skripsi ini penulis ingin melanjutkan penelitian tersebut mengenai sifat-sifat dari masing-masing ideal tersebut yang dibatasi pada *fantastik* ideal.

3.1 *Fantastik*-Ideal pada Aljabar BCI

Setelah diketahui $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI, selanjutnya akan diselidiki sifat-sifat *fantastik*-ideal pada aljabar BCI dengan menggunakan definisi ideal pada aljabar BCI sebagai berikut:

Definisi 3.1.1

Misalkan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI dan terdapat subset tak kosong I pada X. I dikatakan ideal jika $\forall x, y \in X$ berlaku:

i) $0 \in I$

ii) $x * y \in I$ dan $y \in I$ maka $x \in I$ (Saeid, 2010:550).

Menurut penulis definisi *3.1.1* ii) di atas dapat dikontraposisikan dengan $x \notin I$ maka $x * y \notin I$ atau $y \notin I$.

Contoh

Diberikan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI dengan $X = \{0, a, b, c\}$ dan $I = \{0, a\}$, definisi $*$ mengikuti tabel di bawah ini:

Tabel 3.1

Uji Tabel Cayley Terhadap Aksioma Ideal

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

(Jun dkk, 2013:1882)

Apakah I ideal pada X?

Jawab:

(i) Karena 0 adalah anggota I maka terbukti $0 \in I$

(ii) $x, y \in X$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$

Ambil $x = a$ dan $y = 0$, maka:

$a * 0 = a \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = a \in I$

Maka aksioma ii) terpenuhi.

Ambil $x = b$ dan $y = c$, maka:

$x = b \notin I$ maka $y = c \notin I$ atau $b * c = a \in I$

Maka berdasarkan kontraposisi dari definisi *3.1.1* ii) aksioma terpenuhi.

Karena telah memenuhi aksioma (i) dan (ii) definisi ideal maka terbukti I adalah ideal pada X.

Definisi 3.1.2

Misal $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI dan I adalah ideal pada X. Maka I dikatakan *fantastik*-ideal pada X jika $(x*y)*z \in I$ dan $z \in I$ maka berlaku $x*\big(y*(y*x)\big) \in I; \forall x,y,z \in X$ (Saeid, 2010:550).

Menurut penulis definisi *3.1.3* di atas dapat dikontraposisikan dengan jika $x*\big(y*(y*x)\big) \notin I$ maka $(x*y)*z \notin I$ atau $z \notin I$

Contoh

Diberikan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI dengan $X = \{0,1,a,b,c\}$ dan $I = \{0\}$ adalah ideal pada X. Definisi $*$ mengikuti tabel di bawah ini:

Tabel 3.2
Uji Tabel Cayley Terhadap Aksioma Fantastik Ideal

$*$	0	1	a	b	c
0	0	0	c	c	a
1	1	0	c	c	a
a	a	a	0	0	c
b	b	a	1	0	c
c	c	c	a	a	0

(Saeid, 2010:551)

Tunjukkan bahwa I adalah *fantastik*-ideal.

Jawab:

Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in X$

berlaku $(x*y)*z \in I$ dan $z \in I$ maka $x*\big(y*(y*x)\big) \in I$

Ambil $x = 0, y = 1, z = 0$, maka:

$(0 * 1) * 0 = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $0 * \left(1 * (1 * 0)\right) = 0 * (1 * 1) = 0 * 0 = 0 \in I$

Aksioma terpenuhi.

Ambil $x = b, y = c, z = c$

Jika $b * \left(c * (c * b)\right) = 1 \notin I$ maka $(b * c) * c = c * c = 0 \in I$ atau $c \notin I$

Maka berdasarkan kontraposisi dari definisi *3.1.3* aksioma terpenuhi. Sehingga I adalah *fantastik*-ideal.

Contoh

Diberikan $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI, dengan $X = \{0, 1, a, b, c\}$ dan $I = \{0\}$ definisi $*$ mengikuti tabel di bawah ini:

Tabel 3.3
Uji Tabel Cayley Terhadap Aksioma *Fantastik*-Ideal

$*$	0	1	a	b	c
0	0	0	a	a	a
1	1	0	a	a	a
a	a	a	0	0	0
b	b	a	1	0	0
c	c	a	1	1	0

(Saeid, 2010:551)

Apakah I merupakan *fantastik*-ideal dari X?

Jawab:

Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$

berlaku $(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * \left(y * (y * x)\right) \in I$

ambil $x = b, y = c, z = 0$

$(b * c) * 0 = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $b * (c * (c * b)) = b * (c * 1) = b * a = 1 \notin I$

Aksioma tidak terpenuhi karena $(b * c) * 0 \in I$ tetapi $b * (c * (c * b)) = 1 \notin I$. Sehingga I bukan *fantastik*-ideal dari X.

3.2 Sifat-sifat Fantastik Ideal pada Aljabar BCI

Sifat-sifat *fantastik*-ideal pada aljabar BCI dalam skripsi ini meliputi pembuktian dari beberapa proposisi dan teorema *fantastik*-ideal yang ada pada aljabar BCI.

Proposisi 3.2.1

Misal I adalah ideal pada X maka I adalah *fantastik*-ideal jika dan hanya jika $x * y \in I$ berkibat $x * (y * (y * x)) \in I,\ \forall x, y \in X$.

Menurut penulis kontraposisi dari proposisi *3.2.1* adalah jika $x * (y * (y * x)) \notin I$ maka $x * y \notin I$.

Bukti:

$(\rightarrow)$ Akan dibuktikan: I adalah *fantastik*-ideal dan $x * y \in I$ berakibat

$$x * (y * (y * x)) \in I,\ \forall x, y \in I.$$

Diketahui: I adalah *fantastik*-ideal

Akan ditunjukan: $x * y \in I$ berkibat $x * (y * (y * x)) \in I,\ \forall x, y \in I.$

Untuk menunjukkan $x * y \in I$ berkibat $x * \left(y * (y * x)\right) \in I,\ \forall x, y \in I$ adalah dengan menggunakan definisi ideal. Sehingga akan ditunjukkan $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y) = 0 \in I$

$\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y)$

$= \left(x * (x * y)\right) * \left(y * (y * x)\right)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$\leq \left(x * (x * y)\right) * x$ .... def (b) aljabar BCI

$= (x * x) * (x * y)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= 0 * 0 \in I$

$= 0$

Karena $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y) \in I$ dan $x * y \in I$ maka terbukti $x * \left(y * (y * x)\right) \in I$.

(←) Akan dibuktikan: I adalah *fantastik*-ideal jika dan hanya jika $x * y \in I$ berkibat $x * \left(y * (y * x)\right) \in I,\ \forall x, y \in I$.

Diketahui: $x * y \in I$ berkibat $x * \left(y * (y * x)\right) \in I,\ \forall x, y \in I$.

Akan ditunjukan: I adalah *fantastik*-ideal

Ambil $z \in I$

Karena $x * y \in I$ maka

$(x * y) * z \in I$

Dan karena $(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * \left(y * (y * x)\right) \in I$

Sehingga I adalah *fantastik*-ideal.

Contoh:

Dari Tabel (3.2), diketahui $X = \{0, 1, a, b, c\}$ dan $I = \{0\}$

Ambil $x = a, y = b$, maka:

$a * b = 0 \in I$

$a * (b * (b * a)) = a * (b * 1)$

$= a * a = 0 \in I$

Aksioma terpenuhi, karena jika $a * b \in I$ maka $a * (b * (b * a)) \in I$

Ambil $x = b, y = 0$, maka:

$b * 0 = b \notin I$

$b * (0 * (0 * b)) = b * (0 * c)$

$= b * a = 1 \notin I$

Maka berdasarkan kontraposisi dari proposisi *3.2.1* jika $b * (0 * (0 * b)) \notin I$ maka $b * 0 \notin I$, aksioma terpenuhi.

Sehingga I adalah *fantastik*-ideal.

Teorema 3.2.2

Misal I dan G adalah ideal dari X dengan $I \subseteq G$ dan I adalah *fantastik*-ideal dari X maka G adalah *fantastik*-ideal dari X.

Menurut Penulis Teorema *3.2.2* dapat dikontraposisikan dengan:

Misal I dan G adalah ideal dari X dengan $I \subseteq G$, jika G bukan *fantastik*-ideal maka I bukan *fantastik*-ideal dari X.

Bukti:

Akan dibuktikan: $I \subseteq G$ dan I adalah *fantastik*-ideal dari X, maka G adalah *fantastik*-ideal dari X

Diketahui: I adalah *fantastik*-ideal dari X.

Akan ditunjukan: G adalah fantastik-ideal dari X

Untuk membuktikan bahwa G adalah *fantastik*-ideal dari X dimisalkan $x * y \in G$, dan akan dibuktikan bahwa $x * (y * (y * x)) \in G$. Dari aksioma (ii) aljabar BCI $(x * (x * y)) * y = 0 \in I$, maka

$(x * (x * y)) * (y * (y * (x * (x * y)))) \in I$ .... I *fantastik*-ideal.

$(x * (x * y)) * (y * (y * (x * (x * y)))) \in G$ .... $I \subseteq G$

$(x * (y * (y * (x * (x * y))))) * (x * y) \in G$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

Karena G ideal maka berlaku $(x * (y * (y * (x * (x * y))))) * (x * y) \in G$ dan $(x * y) \in G$ maka $(x * (y * (y * (x * (x * y))))) \in G$.

Untuk membuktikan $x * (y * (y * x)) \in G$ maka dengan menggunakan definisi ideal akan dibuktikan bahwa $(x * (y * (y * x))) * (x * (y * (y * (x * (x * y))))) \in G$, sehingga

$(x * (y * (y * x))) * (x * (y * (y * (x * (x * y)))))$

$\leq (y * (y * (x * (x * y)))) * (y * (y * x))$ .. def (a) aljabar BCI

$\leq (y * x) * (y * (x * (x * y)))$ .... def (a) aljabar BCI

$\leq (x * (x * y)) * x$ .... def (a) aljabar BCI

$= (x * x) * (x * y)$ ....sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= 0 * 0$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

$= 0 \in G$

Karena $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * \left(x * \left(y * \left(y * \left(x * (x * y)\right)\right)\right)\right) \in G$ dan $\left(x * \left(y * \left(y * \left(x * (x * y)\right)\right)\right)\right) \in G$ maka sesuai definisi ideal $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) \in G$, sehingga terbukti bahwa G adalah *fantastik*-ideal dari X.

Contoh:

1. Dari Tabel (3.2) diketahui $X = \{0,1,a,b,c\}$.

   Misal $G = \{0,a\}$ dan $I = \{0\}$

   Ambil $x = 1, y = b$ dan $z = a$, maka:

   $(1 * b) * a = c * a = a \in G$

   $1 * \left(b * (b * 1)\right) = 1 * (b * a)$

   $= 1 * 1$

   $= 0 \in G$

   Jika $(1 * b) * a \in G$ dan $a \in G$ berakibat $1 * \left(b * (b * 1)\right) \in G$, sesuai definisi *3.1.2* G adalah *fantastik*-ideal dari X. Sehingga jika $I \subseteq G$ dan I adalah *fantastik*-ideal maka G adalah *fantastik*-ideal dari X.

2. Dari Tabel (3.2) diketahui $X = \{0,1,a,b,c\}$.

   Misal $G = \{0,a\}$ dan $I = \{0\}$

   Ambil $x = c, y = b$ dan $z = a$, maka:

   $(c * b) * a = 1 * a = a \in G$

$c * (b * (b * c)) = c * (b * 0)$

$= c * b$

$= 1 \notin G$

Jika $(c * b) * a \in G$ dan $a \in G$ maka $c * (b * (b * c)) \notin G$ menurut definisi *3.1.2* aksioma tidak terpenuhi, sehingga G bukan *fantastik*-ideal dari X.

Ambil $x = b, y = c$, dan $z = 0$, maka:

$(b * c) * 0 = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $b * (c * (c * b)) = b * (c * 1) = b * a = 1 \notin I$

Aksioma tidak terpenuhi karena $(b * c) * 0 \in I$ dan $0 \in I$ tetapi $b * (c * (c * b)) = 1 \notin I$. Sehingga I bukan *fantastik*-ideal dari X.

Maka sesuai kontraposisi dari teorema *3.2.2* jika $I \subseteq G$ dan G bukan *fantastik*-ideal maka I bukan *fantastik*-ideal dari X.

Teorema 3.2.3

Pada aljabar BCI X kondisi di bawah ini ekivalen:

(i) I adalah *fantastik*-ideal

(ii) $(x * (0 * (0 * x))) \in I, \forall x \in X$

(iii) Jika $u * x \in I$ dan $u * y \in I$ maka $(u * (y * (y * x))) \in I, \forall u, x, y \in X$

Bukti:

(i)→(ii)

Akan dibuktikan: I *fantastik*-ideal maka $(x * (0 * (0 * x))) \in I, \forall x \in X$

Diketahui: I adalah *fantastik*-ideal

Akan ditunjukkan: $(x * (0 * (0 * x))) \in I, \forall x \in X$

Ambil $y = 0$

maka $x * 0 = 0 \in I, \forall x \in X$

karena $x * 0 = 0 \in I$ berakibat $\left(x * \left(0 * (0 * x)\right)\right) \in I, \forall x \in X$, hal ini dikarenakan sesuai proposisi yang telah dibuktikan pada *3.2.1* bahwa $x * y \in I$ berkibat $x * \left(y * (y * x)\right) \in I,\ \forall x, y \in I$.

(ii)→(iii)

Akan dibuktikan: $\left(x * \left(0 * (0 * x)\right)\right) \in I, \forall x \in X$ maka $u * x \in I$ dan $u * y \in I$ maka $\left(u * \left(y * (y * x)\right)\right) \in I, \forall u, x, y \in X$

Diketahui: $\left(x * \left(0 * (0 * x)\right)\right) \in I, \forall x \in X$

Akan ditunjukkan: $u * x \in I$ dan $u * y \in I$ maka $\left(u * \left(y * (y * x)\right)\right) \in I, \forall u, x, y \in X$

Misal $u * x \in I$ dan $u * y \in I$ maka akan dibuktikan $\left(u * \left(y * (y * x)\right)\right) \in I$. Ingat definisi *2.10.1* (iii) aljabar BCI bahwa $x * x = 0 \in I$

Dan diketahui $\left(x * \left(0 * (0 * x)\right)\right) \in I$

Sehingga misal $x' = \left(0 * (0 * x)\right)$, $u' = \left(0 * (0 * u)\right)$ dan $y' = \left(0 * (0 * y)\right)$, maka untuk $\left(u * \left(y * (y * x)\right)\right)$

$\left(0 * (0 * u)\right) * \left(\left(0 * (0 * y)\right) * (y * x)\right)$

$= \left(0 * \left(\left(0 * (0 * y)\right) * (y * x)\right)\right) * (0 * u)$ .. sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= 0 * (((0 * (0 * y)) * (y * x)) * u)$ .... sifat *2.10.3* (vi) aljabar BCI

$= 0 * (((0 * (y * x)) * (0 * y)) * u)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= 0 * ((((0 * y) * (0 * x)) * (0 * y)) * u)$. sifat *2.10.3* (vi) aljabar BCI

$= 0 * ((((0 * y) * (0 * y)) * (0 * x)) * u)$ .. sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= 0 * ((0 * (0 * x)) * u)$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

$= (0 * (0 * (0 * x))) * (0 * u)$ .... def *2.10.3* (vi) aljabar BCI

$= (0 * x) * (0 * u)$ .... sifat *2.10.5* (z3) aljabar BCI

$\leq u * x \in I$ .... def (a) aljabar BCI

Sehingga terbukti bahwa $(0 * (0 * u)) * ((0 * (0 * y)) * (y * x)) \in I$

Kemudian diulangi

$((0 * (0 * u)) * (y * (y * x))) * (0 * (0 * u)) * ((0 * (0 * y)) * (y * x))$

$\leq ((0 * (0 * y)) * (y * x)) * (y * (y * x))$ .. def (a) aljabar BCI

$\leq (0 * (0 * y)) * y$ .... sifat *2.10.3* (iv) aljabar BCI

$\leq y * y$ .... def (b) aljabar BCI

$= 0 \in I$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

Karena $((0 * (0 * u)) * (y * (y * x))) * (0 * (0 * u)) * ((0 * (0 * y)) * (y * x)) \in I$ dan $(0 * (0 * u)) * ((0 * (0 * y)) * (y * x)) \in I$ maka sesuai defnisi ideal $((0 * (0 * u)) * (y * (y * x))) \in I$. Untuk membuktikan $(u * (y * (y * x))) \in I$ maka diulangi lagi

$\left(u*\left(y*(y*x)\right)\right)*\left(\left(0*(0*u)\right)*\left(y*(y*x)\right)\right)$

$\leq u*\left(0*(0*u)\right)$ .... sifat *2.10.3* (iv) aljabar BCI

Karena dari bukti (i)→(ii) diperoleh $\left(x*\left(0*(0*x)\right)\right) \in I, \forall x \in X$ maka $u*\left(0*(0*u)\right) \in I, \forall u \in X,$ oleh karena itu $\left(u*\left(y*(y*x)\right)\right)*\left(\left(0*(0*u)\right)*\left(y*(y*x)\right)\right) \in I.$

Karena $\left(u*\left(y*(y*x)\right)\right)*\left(\left(0*(0*u)\right)*\left(y*(y*x)\right)\right) \in I$ dan $\left(\left(0*(0*u)\right)*\left(y*(y*x)\right)\right) \in I$ sesuai definisi ideal $\left(u*\left(y*(y*x)\right)\right) \in I.$

(iii)→(i)

Akan dibuktikan: $u*x \in I$ dan $u*y \in I$ maka $\left(u*\left(y*(y*x)\right)\right) \in I, \forall u,x,y \in X$ ekivalen dengan I adalah *fantastik*-ideal

Diketahui: $u*x \in I$ dan $u*y \in I$ maka $\left(u*\left(y*(y*x)\right)\right) \in I, \forall u,x,y \in X$

Akan ditunjukkan: I adalah *fantastik*-ideal.

Karena $u*y \in I, \forall u,y \in X$

maka jika $u = x$

berakibat $x*y \in I$

$u*x \in I$ dan $u*y \in I, \forall u \in X$

Ambil $u = x \in X$

Maka $x*x \in I$ dan $x*y \in I$

Jika $x * y \in I$ sesuai proposisi *3.1.6*

$\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) \in I$

Sehingga I adalah *fantastik*-ideal

Lemma 3.2.4

Pada Aljabar BCI X kondisi di bawah ini ekivalen:

(i) $x * y = x * \left(y * (y * x)\right)$

(ii) $x * \left(y * (y * x)\right) = y * \left(x * (x * y)\right)$

(iii) X adalah aljabar BCK komutatif

Bukti:

(i)→(ii)

Akan dibuktikan: jika $x * y = x * \left(y * (y * x)\right)$ maka $x * \left(y * (y * x)\right) = y * \left(x * (x * y)\right)$

Diketahui: $x * y = x * \left(y * (y * x)\right)$

Akan ditunjukkan: $x * \left(y * (y * x)\right) = y * \left(x * (x * y)\right)$

$\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * \left(y * \left(x * (x * y)\right)\right)$

$= (x * y) * \left(y * \left(x * (x * y)\right)\right)$ .... kondisi (i)

$= \left(x * \left(y * \left(x * (x * y)\right)\right)\right) * y$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$\leq \left(x * (y * y)\right) * y$ .... def (b) aljabar BCI

$= (x * y) * (y * y)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= 0 * 0$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

$= 0 \in I$

Karena $\big(x * (y * (y * x))\big) * \big(y * (x * (x * y))\big) = 0$ maka $\big(x * (y * (y * x))\big) \leq \big(y * (x * (x * y))\big)$. Dengan cara yang sama

$\big(y * (x * (x * y))\big) * \big(x * (y * (y * x))\big)$

$= \big(y * (x * (x * y))\big) * (x * y)$ .... kondisi (i)

$= \big(y * (x * y)\big) * \big(x * (x * y)\big)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$\leq \big(y * (x * y)\big) * y$ .... sifat (b) aljabar BCI

$= (y * y) * (x * y)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= 0 * 0$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

$= 0 \in I$

Karena $\big(y * (x * (x * y))\big) * \big(x * (y * (y * x))\big) = 0$ maka $\big(y * (x * (x * y))\big) \leq \big(x * (y * (y * x))\big)$. Karena $\big(x * (y * (y * x))\big) \leq \big(y * (x * (x * y))\big)$ dan $\big(y * (x * (x * y))\big) \leq \big(x * (y * (y * x))\big)$ maka $\big(x * (y * (y * x))\big) = \big(y * (x * (x * y))\big)$.

(ii)→(iii)

Akan dibuktikan: jika $x * \big(y * (y * x)\big) = y * \big(x * (x * y)\big)$ maka X adalah aljabar BCK komutatif

Diketahui: $x * \big(y * (y * x)\big) = y * \big(x * (x * y)\big)$

Akan ditunjukkan: X adalah aljabar BCK komutatif

Karena X adalah aljabar BCK komutatif, maka berlaku $x * (x * y) = y * (y * x)$. Untuk membuktikan $x * (x * y) = y * (y * x)$ maka

$\left(x * (x * y)\right) * \left(y * (y * x)\right)$

$= \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$\leq (x * x) * (x * y)$ .... def (b) aljabar BCI

$= 0 * 0 \in I$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

$= 0$

Karena $x * (x * y) * y * (y * x) = 0$ maka $x * (x * y) \leq y * (y * x)$.

Dengan cara yang sama

$\left(y * (y * x)\right) * \left(x * (x * y)\right)$

$= \left(y * \left(x * (x * y)\right)\right) * (y * x)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$\leq x * \left(x * (x * y)\right)$ .... def (a) aljabar BCI

$= x * y$ .... sifat *2.10.3* (v) aljabar BCI

$= 0 \in I$

Karena $\left(y * (y * x)\right) * \left(x * (x * y)\right) = 0$ maka $\left(y * (y * x)\right) \leq \left(x * (x * y)\right)$.

Karena $x * (x * y) \leq y * (y * x)$ dan $\left(y * (y * x)\right) \leq \left(x * (x * y)\right)$, sehingga terbukti bahwa $x * (x * y) = y * (y * x)$.

(iii)→(i)

Akan dibuktikan: jika X aljabar BCK komutatif maka $x * y = x * \left(y * (y * x)\right)$

Diketahui: X aljabar BCK komutatif maka berlaku $x * (x * y) = y * (y * x)$

Akan ditunjukkan: $x * y = x * \left(y * (y * x)\right)$

$(x * y) * \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right)$

$\leq \left(y * (y * x)\right) * y$ .... def (b) aljabar BCI

$= \left(x * (x * y)\right) * y$ .... kondisi (iii)

$= 0$ .... def *2.10.1* (ii) aljabar BCI

Karena $(x * y) * \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) = 0$, maka $(x * y) \leq \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right)$. Dengan cara yang sama

$\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y)$

$= \left(x * (x * y)\right) * \left(y * (y * x)\right)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= \left(y * (y * x)\right) * \left(y * (y * x)\right)$ .... kondisi (iii)

$= 0$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

Teorema 3.2.5

Pada aljabar BCI X, kondisi di bawah ini ekivalen:

(i) $\{0\}$ adalah *fantastik*-ideal

(ii) Setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal

(iii) $x * y = x * \left(y * (y * x)\right), \forall x, y \in X$

Bukti:

(i)→(ii)

Akan dibuktikan: jika $\{0\}$ *fantastik*-ideal maka Setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal.

Diketahui: $\{0\}$ *fantastik*-ideal

Akan ditunjukkan: setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal

Ambil G sebarang ideal di X.

Karena G ideal, maka $0 \in G$

Berakibat $\{0\} \subseteq G$

Karena $\{0\}$ *fantastik*-ideal dan G ideal, serta $\{0\} \subseteq G$

Sehingga G adalah *fantastik*-ideal

(ii)→(iii)

Akan dibuktikan: jika setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal maka

$$x * y = x * (y * (y * x))$$

Diketahui: setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal

Akan ditunjukkan: $x * y = x * (y * (y * x))$

Karena setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal

Maka setiap $x * y \in I$ berlaku $x * (y * (y * x)) \in I$

Untuk membuktikan $x * y = x * (y * (y * x))$ adalah dengan menggunakan definisi *2.10.1* (iv) aljabar BCI bahwa $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$.

Maka

$(x * y) * (x * (y * (y * x)))$

$\leq (y * (y * x)) * y$ .... def (a) aljabar BCI

$\leq x * y$ .... def (b) aljabar BCI

$= 0 \in I$

dan

$(x * (y * (y * x))) * (x * y)$

$\leq (x * x) * (x * y)$ .... def (b) aljabar BCI

$= 0 * 0 \in I$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

$= 0$

Karena $(x * y) * \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) = 0$ dan $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y) = 0$, maka terbukti $(x * y) = \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) = 0$.

(iii)→(i)

Akan dibuktikan: jika $(x * y) = \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right)$ maka $\{0\}$ *fantastik*-ideal.

Diketahui: $(x * y) = \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right)$

Akan ditunjukkan: $\{0\}$ adalah *fantastik*-ideal

Ambil $x * y \in I$

Maka $x * y = 0$

Karena $0 \in \{0\}$

Maka $x * y \in \{0\}$

Dan telah dibuktikan bahwa $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y) = 0 \in \{0\}$.

Sehingga sesuai definisi ideal jika $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y) \in \{0\}$ dan $x * y \in \{0\}$ maka $x * \left(y * (y * x)\right) \in \{0\}$. Karena $x * y \in \{0\}$ dan berakibat $x * \left(y * (y * x)\right) \in \{0\}$ sesuai proposisi *3.2.1* $\{0\}$ adalah *fantastik*-ideal.

Teorema 3.2.6

Pada aljabar BCI X, kondisi di bawah ini ekivalen:

(a) $\{0\}$ adalah *fantastik*-ideal

(b) Setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal

(c) $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$

(d) X adalah aljabar BCK komutatif

Bukti:

Karena pada teorema *3.2.5*

(a)→(b)

Jika $\{0\}$ adalah *fantastik*-ideal maka setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal telah terbukti, dan

(b)→(c)

Jika setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal maka $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$ telah tebukti, serta

(c)→(a)

Jika $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$ maka $\{0\}$ *fantastik*-ideal, juga telah terbukti maka perlu dibuktikan (c)↔(d).

(c)→(d)

Akan dibuktikan: jika $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$ maka X adalah aljabar BCK komutatif

Diketahui: $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$

Akan ditunjukkan: X adalah aljabar BCK komutatif

$\big(x * (x * y)\big) * \big(y * (y * x)\big)$

$= \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big) * (x * y)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar

$= (x * y) * (x * y)$ .... kondisi (c)

$= 0$

Karena $\big(x * (x * y)\big) * \big(y * (y * x)\big) = 0$ maka $\big(x * (x * y)\big) \leq \big(y * (y * x)\big)$

$\big(y * (y * x)\big) * \big(x * (x * y)\big)$

$= \Big(y * \big(x * (x * y)\big)\Big) * (y * x)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$\leq x * \big(x * (x * y)\big)$ .... definisi (a) aljabar BCI

$= x * y$ .... sifat *2.10.3* (v) aljabar BCI

$= 0$

Karena $\big(y * (y * x)\big) * \big(x * (x * y)\big) = 0$ maka $\big(y * (y * x)\big) \leq \big(x * (x * y)\big)$

Karena $\big(x * (x * y)\big) \leq \big(y * (y * x)\big)$ dan $\big(y * (y * x)\big) \leq \big(x * (x * y)\big)$ sesuai definisi (d) aljabar BCI maka $\big(x * (x * y)\big) = \big(y * (y * x)\big)$.

(d)→(c)

Akan dibuktikan: jika X adalah aljabar BCK komutatif maka $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$

Diketahui: X adalah aljabar BCK komutatif

Akan ditunjukkan: $x * y = x * \big(y * (y * x)\big), \forall x, y \in X$

$(x * y) * \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big)$

$\leq \big(y * (y * x)\big) * y$ .... def (a) aljabar BCI

$= \big(x * (x * y)\big) * y$ .... kondisi (d)

$= (x * y) * (x * y)$ .... sif *2.10.3* ii) aljabar BCIl

$= 0$ .... def *2.10.1* (ii) aljabar BCI

Karena $(x * y) * \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) = 0$ maka $(x * y) \leq \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right)$

$\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y)$

$= \left(x * (x * y)\right) * \left(y * (y * x)\right)$ .... sifat *2.10.3* (ii) aljabar BCI

$= \left(y * (y * x)\right) * \left(y * (y * x)\right)$ .... kondisi (d)

$= 0$

Karena $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) * (x * y) = 0$ maka $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) \leq (x * y)$.

Karena $(x * y) \leq \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right)$ dan $\left(x * \left(y * (y * x)\right)\right) \leq (x * y)$ maka $(x * y) = \left(x * \left(y * (y * x)\right)\right)$.

Proposisi 3.2.7

Jika X aljabar BCI *P-semisimple*, maka setiap ideal tak nol adalah *fantastik*-ideal pada X.

Bukti:

Akan dibuktikan: Jika *X* aljabar BCI *P-semisimple*, maka setiap ideal tak nol adalah *fantastik*-ideal pada *X*

Diketahui: *X* aljabar BCI *P-semisimple*

Akan ditujukkan: setiap ideal tak nol adalah *fantastik*-ideal pada *X*

Karena X adalah aljabar BCI *P-semisimple* maka X memenuhi $0 * (0 * x) = x, \forall x \in X$.

Misal $I \subseteq X$ adalah ideal tak nol

Maka $I = \{i | x * y = i \wedge y = i \rightarrow x = i, \forall x, y \in X, i \neq 0\}$

Karena $x * y = i \in I$ ambil $z \in I$

Sehingga $(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ akan ditunjukkan $x * (y * (y * x)) \in I$

Ambil $y = 0$ maka $x * 0 \in I$

Berdasarkan proposisi *3.1.6* jika $x * y \in I$ berlaku $x * (y * (y * x)) \in I, \forall x, y \in X$

Sehingga untuk $x * 0 \in I$ berlaku $x * (0 * (0 * x)) \in I$

$x * (0 * (0 * x))$

$= x * x$ .... def *2.11.1* aljabar BCI *P-semisimple*

$= 0$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

Karena I adalah ideal tak nol maka $0 \notin I$ sehingga I bukan *fantastik*-ideal. Karena I bukan *fantastik*-ideal maka kontradiksi dengan pernyataan bahwa Jika X aljabar BCI *P-semisimple*, maka setiap ideal tak nol adalah *fantastik*-ideal pada X. Sehingga proposisi ini tidak berlaku umum.

Proposisi 3.2.8

Jika X aljabar BCI assosiatif maka setiap ideal adalah *fantasik*-ideal dari X.

Bukti:

Akan dibuktikan: Jika X aljabar BCI assosiatif maka setiap ideal adalah *fantasik*-ideal dari X

Diketahui: X aljabar BCI assosiatif

Akan ditunjukkan: setiap ideal adalah *fantasik*-ideal dari X

Karena X aljabar BCI assosiatif, X berlaku $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in X$

Ambil $I = \{0\}$ ideal pada X

Maka $x * y \in I$

Untuk menunjukkan I *fantasik*-ideal dari X sesuai proposisi *3.2.1* $x * y \in I$ berlaku $x * (y * (y * x)) \in I$, untuk mengetahui $x * (y * (y * x)) \in I$ akan ditunjukkan dengan menggunakan definisi ideal,

$(x * (y * (y * x))) * (x * y)$

$\leq y * (y * (y * x))$ .... def (a) aljabar BCI

$= (y * y) * (y * x)$ .... sifat aljabar BCI assosiatif

$= 0 * (y * x)$ .... def *2.10.1* (iii) aljabar BCI

$= (0 * y) * (0 * x) \notin I$ .... def *2.10.4* (vi) aljabar BCI

Karena $(x * (y * (y * x))) * (x * y) = (0 * y) * (0 * x) \notin I$ maka tidak terbukti $(x * (y * (y * x))) \in I$. Karena $(x * (y * (y * x))) \notin I$ maka $I = \{0\}$ bukan *fantastik*-ideal, sehingga proposisi di atas tidak berlaku umum.

3.3 Kajian Sifat-sifat Fantastik Ideal dalam Al-Qur'an

Pada pembahasan skripsi ini, penulis menjelaskan tentang sifat-sifat *fantastik*-ideal pada aljabar BCI. Sifat-sifat *fantastik*-ideal pada aljabar BCI merupakan kumpulan beberapa proposisi maupun teorema *fantastik*-ideal yang berlaku pada aljabar BCI. Proposisi maupun teorema tersebut kemudian dibuktikan agar menjadi sifat-sifat *fantastik*-ideal yang berlaku pada aljabar BCI.

Allah berfirman dalam Al-Qur'an Surat Al-Baqarah/2 ayat 23:

وَإِن كُنتُمْ فِي رَيْبٍ مِّمَّا نَزَّلْنَا عَلَىٰ عَبْدِنَا فَأْتُوا بِسُورَةٍ مِّن مِّثْلِهِ وَادْعُوا شُهَدَاءَكُم مِّن دُونِ اللَّهِ إِن كُنتُمْ صَادِقِينَ ﴿٢٣﴾

Artinya: Dan jika kamu (tetap) dalam keraguan tentang Al Quran yang kami wahyukan kepada hamba kami (Muhammad), buatlah satu surat (saja) yang semisal Al Quran itu dan ajaklah penolong-penolongmu selain Allah, jika kamu orang-orang yang benar (Q.S Al-Baqarah: 23).

Ayat Ini merupakan tantangan bagi mereka yang meragukan tentang kebenaran Al-Qur'an itu tidak dapat ditiru walaupun dengan mengerahkan semua ahli sastra dan bahasa Karena ia merupakan mukjizat Nabi Muhammad saw.

Dan jika kamu (tetap) dalam keraguan tentang apa yang Kami wahyukan kepada hamba Kami (*wa in kuntum fî raibin mimmâ nazzalnâ alâ abdinâ*) yakni Al-Qur'an yang diturunkan oleh Allah kepada Muhammad saw. Maka buatlah satu surat (saja) yang semisal Al-Qur'an itu, (*fa'tû bi Sûratin* min *mitslihi*) yakni Allah menantang mereka untuk membuat satu surat saja semisal surat apa saja yang ada di dalam Al-Qur'an, meskipun kecil (sedikit). Dan ajaklah para syuhada' kamu, (*wa d'û syuhadâakum in kuntum shâdiqîn*) yakni, orang-orang yang bersaksi untukmu bahwa apa yang kamu buat itu adalah semisal Al-Qur'an (selain Allah, jika kamu orang-orang yang memang benar) (Anonim, 2014).

Orang Yahudi selalu berusaha menimbulkan keraguan-raguan tentang kebenaran Risalah Nabi Muhammad saw. Dan orang Munafik meragukannya, sebagaimana yang terjadi pada orang-orang Musyrik, mereka selalu menimbulkan keraguan-keraguan di Makah dan lainnya. Maka disini Allah SWT menantang mereka lewat Al-Qur'an agar mereka melakukan tindakan yang nyata untuk menjelaskan urusan itu dengan tidak mempertengkarkannya lagi. Tantangan serupa juga terdapat pada Surat Yunus/10: 38

أَمْ يَقُولُونَ ٱفْتَرَىٰهُ ۖ قُلْ فَأْتُوا۟ بِسُورَةٍ مِّثْلِهِۦ وَٱدْعُوا۟ مَنِ ٱسْتَطَعْتُم مِّن دُونِ ٱللَّهِ إِن كُنتُمْ صَـٰدِقِينَ ﴿٣٨﴾

Artinya: Atau (patutkah) mereka mengatakan "Muhammad membuat-buatnya." Katakanlah: "(Kalau benar yang kamu katakan itu), Maka cobalah datangkan sebuah surat seumpamanya dan panggillah siapa-siapa yang dapat kamu panggil (untuk membuatnya) selain Allah, jika kamu orang yang benar" (Q.S Yunus: 38).

Kedua ayat di atas merupakan tantangan dari Allah kepada orang-orang yang meragukan kebenaran tentang keaslian Al-Qur'an untuk membuktikan keragu-raguan mereka dengan membuat yang serupa dengan Al-Qur'an.

Sedangkan pada skripsi ini terdapat beberapa proposisi maupun teorema yang merupakan suatu pernyataan yang perlu dibuktikan agar menjadi suatu pernyataan yang berlaku untuk umum.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai sifat-sifat *fantastik*-ideal pada Aljabar BCI dalam skripsi ini penulis telah menyelidiki beberapa teorema *fantastik*-ideal yang ada pada Aljabar BCI. Dari penyelidikan tersebut penulis dapat menyimpulkan bahwa:

1. Jika I adalah ideal pada Alabar BCI X maka I adalah *fantastik*-ideal jika dan hanya jika $x * y \in I$ berkibat $x * \big(y * (y * x)\big) \in I,\ \forall x, y \in X$.
2. Jika I dan G adalah ideal dari Aljabar BCI X dengan $I \subseteq G$ dan I adalah *fantastik*-ideal dari X maka G adalah *fantastik*-ideal dari X.
3. Pada Aljabar BCI X kondisi di bawah ini ekivalen:
   (i) I adalah *fantastik*-ideal
   (ii) $\Big(x * \big(0 * (0 * x)\big)\Big) \in I, \forall x \in X$
   (iii) Jika $u * x \in I$ dan $u * y \in I$ maka $\Big(u * \big(y * (y * x)\big)\Big) \in I, \forall u, x, y \in X$
4. Pada Aljabar BCI X kondisi di bawah ini ekivalen:
   (i) $x * y = x * \big(y * (y * x)\big)$
   (ii) $x * \big(y * (y * x)\big) = y * \big(x * (x * y)\big)$
   (iii) X *adalah* Aljabar BCK komutatif

5. Pada Aljabar BCI X, kondisi di bawah ini ekivalen:

    (i) $\{0\}$ adalah *fantastik*-ideal

    (ii) Setiap ideal pada X adalah *fantastik*-ideal

    (iii) $x * y = x * (y * (y * x)), \forall x, y \in X.$

    (iv) X *adalah* Aljabar BCK komutatif

5.2 Saran

Pada skripsi ini penulis hanya fokus pada satu ideal pada Aljabar BCI, yaitu *fantastik*-ideal. Oleh karena itu untuk penulis skripsi selanjutnya penulis menyarankan untuk membahas *q*-ideal, *p*-ideal, dan *a*-ideal pada Aljabar BCI atau struktur aljabar lain. Sehingga menghasilkan teorema-teorema baru untuk mempermudah dalam mempelajari struktur aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press

Anggrayni, D.D.. 2010. Q-Aljabar. *Tugas Akhir* Tidak Diterbitkan. Semarang: Jurusan Matematika F. Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro

Anonymouse. 2013. *Tafsir Surat An-Nuur Ayat 39-40*. http://wikipedia.org/wiki/tafsir. Diakses tanggal 27 November 2013

Anonymouse. 2014. *Tafsir Surat Al-Baqarah Ayat 38*. http://wikipedia.org/wiki/tafsir. Diakses tanggal 24 Maret 2014

Bhatti S.A.. 1991. *Self-Maps And Categorical Aspects Of BCK or BCI Algebras*. Pakistan: University Multan

Endah, L.S.. 2011. *Ideal-ideal pada Aljabar BCI P-Semisimple yang Terbangun dari Karakterisasi Grup Modulo n*. *Tugas Akhir* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Maulana Malik Ibrahim

Enderton, H.B.. 1977. *Elements Of Set Theory*. New York: Academi Press

Huang Y.S.. 2006. *BCI Algebras*. China:Science Press

Jun, Y.B.. 2003. Expansions of Subalgebras and Ideals in BCK/BCI-Algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*. Volume 10. Halaman 109-112

Jun, Y.B., dan Lee, K. L.. 2010. Graphs Based on BCK/BCI Algebras. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Volume 2011. Halaman 1-8

Jun, Y.B., Muhiuddin, G., dan Al-roqi A.M. 2013. Ideal Theory of BCK/BCI-Algebras Based on Double-framed Soft Sets. *Applied Mathematics & Informations Sciences An International Journal*. Volume 7. Halaman 1879-1887

Liu, Y.L., Xu, Y. dan Meng, J.. 2007. *BCI-implicative ideals of BCI Algebras*. Published by Elsevier, Inc.

Mostafa, S.M., Naby, M.A.A., dan Elgendy, O.R.. 2011. Fuzzy TM-Ideals of TM-Algebras. *Journal of American Sciens*. Volume 7. Halaman 17-21

Munir, R.. 2009. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Press

Pusawidjayanti, K.. 2011. Pengembangan Aljabar BCI P-Semisimple dengan Sifat Assosiatif. *Tugas Akhir* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Maulana Malik Ibrahim

Raisinghania, M.D., dan Aggarwal, R.S.. 1980. *Modern Algebra For N.A & M.Sc.Student Of All Indian Universities*. Ram Nagar, New Dplhi: S. Chand & Company ltd.

Saeid, A.B.. 2010. Fantastic Ideals in BCI-Algebra. *World Applied Sciences Journal*. Volume 8. Halaman 550-554

Soebagio, S.. 1993. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka

Soebagio, A., dan Sukirman. 1994. *Metode Pokok Struktur Aljabar*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar Menengah Proyek Peningkatan Mutu Guru SLTP Setara D-III

Sun, D., dan Xu, S.. 2000. A Radical Ideal and The Characteristic of An Is Algebra Without Zero Divisors. *Soochow Journal of Mathematics*. Volume 26. Halaman 401-409

Syaidah, Y.. 2011. Konstruksi Aljabar-BCI Dari Grup. *Tugas Akhir* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Maulana Malik Ibrahim