

**PENYELESAIAN ANALITIK MASALAH NILAI AWAL DAN
MASALAH NILAI BATAS UNTUK PERSAMAAN MAXWELL**

SKRIPSI

Oleh:
ROUDATUL KHAIRIYAH
NIM. 09610018



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**PENYELESAIAN ANALITIK MASALAH NILAI AWAL DAN
MASALAH NILAI BATAS UNTUK PERSAMAAN MAXWELL**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ROUDATUL KHAIRIYAH
NIM. 09610018

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**PENYELESAIAN ANALITIK MASALAH NILAI AWAL DAN
MASALAH NILAI BATAS UNTUK PERSAMAAN MAXWELL**

SKRIPSI

Oleh:
ROUDATUL KHAIRIYAH
NIM. 09610018

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 15 November 2013

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN ANALITIK MASALAH NILAI AWAL DAN
MASALAH NILAI BATAS UNTUK PERSAMAAN MAXWELL**

SKRIPSI

**Oleh:
ROUDATUL KHAIRIYAH
NIM. 09610018**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 25 November 2013

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : ROUDATUL KHAIRIYAH

NIM : 09610018

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penyelesaian Analitik Masalah Nilai Awal dan Masalah
Nilai Batas Untuk Persamaan Maxwell

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 November 2013

Yang membuat Pernyataan,

Roudatul Khairiyah
NIM. 09610018

Motto

*“Life every day as if it’s your last,
embracing each experience
as if it’s your first.”*

“Hadapilah hari-harimu seperti itu adalah hari terakhirmu,
jalanilah setiap pengalamanmu
seperti itu adalah pengalamanmu yang pertama.”

—Jennifer Fertado—

Persembahkan

Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar,
penulis persembahkan karya sederhana ini kepada:

Ibunda tersayang Nor Islamiah, SPd

Ayahanda tersayang Drs. M. Baderun, M.Ag

Kakak tercinta Siti Zulfah, S.S

Adik tersayang Arief Septianur

KATA PENGANTAR



Syukur *alhamdulillah* ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya sehingga skripsi dengan judul **“Penyelesaian Analitik Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas Untuk Persamaan Maxwell”** ini dapat terselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan manusia ke jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun doa. Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd dan Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, dan nasehat kepada penulis serta yang dengan sabar telah meluangkan waktunya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu memberi arahan dan bimbingan kepada penulis.
6. Bapak dan Ibu dosen serta staf Jurusan Matematika maupun Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, dan memberikan ilmu-ilmunya kepada penulis.
7. Kedua orangtua terkasih Drs. M. Baderun, M.Ag dan Nor Islamiah, S.PdI serta kedua saudara tersayang Siti Zulfah, S.S dan Arief Septianur yang selalu memberikan do'a, kasih sayang, dan motivasi kepada penulis sehingga penulis selalu optimis dan semangat dalam penulisan skripsi ini.
8. Sahabat-sahabat terbaik, Lita Dia Irawati, Deri Ismawati, S.Si, Mahatva Cahyaning Tyas, dan Rina Fajaria, S.Si. Terima kasih atas doa, semangat, dukungan, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini serta seluruh teman-teman Jurusan Matematika, khususnya angkatan 2009 yang telah berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka semua. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang analisis terapan dan pemodelan. Amin.

Malang, November 2013

Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|--|------|
| HALAMAN JUDUL | |
| HALAMAN PENGAJUAN | |
| HALAMAN PERSETUJUAN | |
| HALAMAN PENGESAHAN | |
| HALAMAN PERNYATAAN | |
| HALAMAN MOTTO | |
| HALAMAN PERSEMBAHAN | |
| KATA PENGANTAR | viii |
| DAFTAR ISI | x |
| DAFTAR GAMBAR | xii |
| DAFTAR SIMBOL | xiii |
| ABSTRAK | xiv |
| ABSTRACT | xv |
| ملخص | xvi |
| | |
| BAB I PENDAHULUAN | |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 5 |
| 1.3 Batasan Masalah | 6 |
| 1.4 Tujuan Penelitian | 7 |
| 1.5 Manfaat Penelitian | 7 |
| 1.6 Metode Penelitian | 7 |
| 1.7 Sistematika Penulisan | 8 |
| | |
| BAB II KAJIAN TEORI | |
| 2.1 Kajian Teoritik Persamaan Maxwell | 9 |
| 2.2 Masalah Nilai Awal | 21 |
| 2.3 Penyelesaian Masalah Nilai Awal | 23 |
| 2.4 Masalah Nilai Batas | 27 |
| 2.5 Penyelesaian Masalah Nilai Batas | 29 |
| 2.6 Eksistensi dan Ketunggalan Penyelesaian Persamaan Gelombang ... | 36 |
| 2.6.1 Fungsi Kontinu | 36 |
| 2.6.2 Fungsi <i>Lipschitz</i> | 38 |
| 2.7 Kajian Gelombang Elektromagnetik dalam Al-Qur'an | 50 |
| | |
| BAB III PEMBAHASAN | |
| 3.1 Analisis Eksistensi dan Ketunggalan Penyelesaian Untuk Persamaan Maxwell | 55 |
| 3.1.1 Analisis Eksistensi Untuk Persamaan Maxwell | 55 |
| 3.1.2 Analisis Ketunggalan Untuk Persamaan Maxwell | 64 |
| 3.2 Penyelesaian Analitik Persamaan Maxwell | 72 |
| 3.2.1 Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell | 73 |
| 3.2.2 Penyelesaian Masalah Nilai Batas Persamaan Maxwell | 91 |

| | |
|--|------------|
| 3.3 Batas Kemampuan Manusia dalam Al-Qur'an..... | 114 |
| BAB IV PENUTUP | |
| 4.1 Kesimpulan | 118 |
| 4.1 Saran | 119 |
| DAFTAR PUSTAKA | 120 |
| LAMPIRAN | |



DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-------------|---|-----|
| Gambar 2.1 | Skema Penyelesaian Masalah Nilai Batas dan Masalah Nilai Awal dengan Metode Pemisahan Variabel | 31 |
| Gambar 3.1 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu (E_z, t) | 78 |
| Gambar 3.2 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Listrik E_z pada sumbu (E_z, x) | 79 |
| Gambar 3.3 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Listrik E_z pada sumbu (E_z, x, t) | 79 |
| Gambar 3.4 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu x dengan Jarak $0 \leq x \leq 15$ meter dan $0 \leq x \leq 30$ meter..... | 80 |
| Gambar 3.5 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu t dengan Waktu $0 \leq t \leq 1$ detik dan $0 \leq t \leq 2$ detik..... | 81 |
| Gambar 3.6 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, t) | 87 |
| Gambar 3.7 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, x) | 87 |
| Gambar 3.8 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, x, t) | 88 |
| Gambar 3.9 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu x dengan Jarak $0 \leq x \leq 15$ meter dan $0 \leq x \leq 30$ meter | 89 |
| Gambar 3.10 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu t dengan Waktu $0 \leq t \leq 1$ detik dan $0 \leq t \leq 2$ detik..... | 90 |
| Gambar 3.11 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Batas untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu (E_z, x) | 101 |
| Gambar 3.12 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Batas untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu (E_z, x, t) | 102 |
| Gambar 3.13 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Batas untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, x) | 113 |
| Gambar 3.14 | Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Batas untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, x, t) | 113 |

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam penulisan skripsi ini, yaitu:

| | |
|-------------------|---|
| ε | : Permittivitas hampa udara = $\frac{1}{c^2 \mu_0} = 8,854187817 \dots \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ $= 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ |
| μ | : Permeabilitas hampa udara = $1,2566370614 \dots \times 10^{-6} \frac{Tm}{A} \left(\frac{N}{A^2} \right)$ $= 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}$ |
| v | : Kecepatan cahaya = $2,99792458 \times 10^8 \frac{m}{s} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ |
| $E_z(x, t)$ | : Medan listrik |
| $H_y(x, t)$ | : Medan magnet |
| $E(t)$ | : Energi konservasi |
| $KE(t)$ | : Energi kinetik |
| $PE(t)$ | : Energi potensial |
| C^1 | : Kontinu dan terturunkan |
| K | : Konstanta <i>Lipschitz</i> |
| \mathbb{R} | : Bilangan riil |
| \mathcal{O} | : Himpunan terbuka pada bilangan riil |
| $\ DF_x\ $ | : Operator ruang norma |
| X | : Ruang vektor |
| DF_x | : Matriks <i>Jacobian</i> $n \times n$ |
| J | : Interval terbuka atau tertutup pada bilangan riil |
| U_0, U_1, \dots | : Barisan fungsi |

ABSTRAK

Khairiyah, Roudatul. 2014. **Penyelesaian Analitik Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas Untuk Persamaan Maxwell**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd. (II) AbdulAziz, M.Si.

Kata Kunci : Persamaan Maxwell, masalah nilai awal, masalah nilai batas, metode *D'Alembert*, metode pemisahan variabel, eksistensi dan ketunggalan penyelesaian

Persamaan Maxwell adalah persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan hubungan antara medan listrik dan medan magnet. Untuk mengetahui bahwa penyelesaian persamaan Maxwell untuk masalah nilai awal dan masalah nilai batas ada dan tunggal, maka perlu dilakukan analisis eksistensi dan ketunggalan. Analisis eksistensi ini didasarkan pada kekontinuan atau kondisi *Lipschitz*, sedangkan analisis ketunggalan dilakukan dengan menggunakan metode energi konservasi. Berdasarkan analisis eksistensi dan ketunggalan yang telah dilakukan untuk persamaan Maxwell, diperoleh bahwa penyelesaian untuk persamaan Maxwell ada dan mempunyai satu penyelesaian.

Persamaan Maxwell dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *D'Alembert* untuk masalah nilai awal (MNA) dan metode pemisahan variabel untuk masalah nilai batas (MNB). Persamaan ini memerlukan dua kondisi yaitu kondisi awal dan kondisi batas. Berdasarkan hasil pembahasan dalam penelitian ini, penyelesaian persamaan Maxwell untuk medan listrik E_z dan medan magnet H_y dengan masalah nilai awal dan masalah nilai batas dapat diketahui bahwa semakin lama waktu yang diberikan dan semakin besar interval yang diberikan, semakin rendah amplitudo yang diperoleh sedangkan periodenya semakin besar. Semakin besar periodenya, semakin besar pula frekuensinya yang artinya semakin cepat pula sistem berosilasi.

Dalam penelitian ini, peneliti menyarankan untuk penelitian selanjutnya untuk mengembangkannya dengan menganalisis persamaan Maxwell untuk dimensi yang lebih tinggi atau dengan menggunakan metode lain.

ABSTRACT

Khairiyah, Roudatul. 2014. **Analytic Solution of Initial Value Problems and Boundary Value Problems for Maxwell's Equations.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd. (II) AbdulAziz, M.Si.

Keywords : Maxwell's equations, initial value problem, boundary value problem, *D'Alembert* method, method of separation variable, existence and uniqueness of solution

Maxwell's equations, which are a set of partial differential equations describing the relation of electric and magnetic fields. To determine solution of Maxwell's equations for the initial value problems (IVP) and the boundary value problems (BVP) exist and unique, it is necessary to analyze that the existence and uniqueness in the solution were obtained. This analyze the existence of continuity or Lipschitz condition, meanwhile the uniqueness are do by using conservation energy method. Based on the analysis of the existence and uniqueness that has been done for the Maxwell's equation obtained that solution for Maxwell's equation exist and unique.

Maxwell's equation can be solved by using *D'Alembert* method for initial value problems (IVP) and separation variable method for boundary value problems (BVP). This equation requires two condition, initial conditions and boundary conditions. Based on the results of the discussion in this study, Maxwell's equation solutions for the electric field and magnetic fields with initial value problems and boundary value problems are known that the more time and interval which are given, the less amplitude which is resulted while the period is bigger. The bigger period, the bigger the frequency, which means the sooner the system oscillates.

In this study, the researcher suggest for further research to develop it by analyze Maxwell's equation for higher dimension or using other methods.

ملخص

الخيرية، روضة. ٢٠١٤. **الحلول التحليلية من المشاكل القيمة الأولية ومسائل القيمة الحدية للمعادلات ماكسويل**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانخ. المشرف: (١) أري كوسومستوتي، السرجان، الماجستير. (٢) عبد العزيز، الماجستير.

كلمات البحث: معادلات ماكسويل، مشكلة القيمة الأولية، حدود القيمة مشاكل، طريقة دالمبرت، طريقة فصل المتغيرات، وجود وحدانية إتمام.

معادلات ماكسويل هي المعادلات التفاضلية الجزئية التي تصف العلاقة بين المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي. أن تعرف أن حل معادلات ماكسويل لمشاكل القيمة الأولية ومشاكل الحدود وجود لها قيمة فريدة، فمن الضروري تحليل وجود وحدانية. ويستند التحليل على وجود أو حالة من الاستمرارية ييشيز، بينما أجرى التحليل التفرد باستخدام طريقة الحفاظ على الطاقة. استنادا إلى تحليل وجود وحدانية الذي تم القيام به لمعادلات ماكسويل، وجدت أن هناك حلول لمعادلات ماكسويل ولها حل.

يمكن حل معادلات ماكسويل باستخدام طريقة كوت دالمبرت لمشكلة القيمة وطريقة فصل المتغيرات لمشكلة القيمة الحدية (اللواء المتعدد الجنسيات). (يتطلب شرطين هذه المعادلة هي الظروف الأولية وشروط الحدود. استنادا إلى نتائج المناقشة في هذه الدراسة، والانتها من معادلات ماكسويل للحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي مع المشاكل القيمة الأولية ومسائل القيمة الحدية يمكن أن نرى أن كلما طال الوقت المخصص وكلما زاد الفاصل الزمني معين، وانخفاض السعة التي تم الحصول عليها أثناء فترة أكبر. كلما زادت الفترة، وكلما زاد التردد، مما يعني أن أسرع نظام تتأرجح.

في هذه الدراسة، يشير الباحثون إلى إجراء المزيد من البحوث لتطويره من خلال تحليل معادلات ماكسويل إلى أبعاد أعلى أو باستخدام طريقة أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an adalah petunjuk paling lengkap bagi umat manusia sejak turunnya Al-Qur'an 15 abad yang lalu dan akan tetap sesuai dengan perkembangan zaman pada saat ini maupun masa yang akan datang (Wardhana, 2005). Ilmu-ilmu yang terdapat di dalam Al-Qur'an ada yang tersurat langsung melalui ayat-ayatnya dan ada pula yang hanya tersirat melalui ayat-ayatnya. Untuk ilmu yang tersurat melalui ayat-ayat Al-Qur'an mudah untuk dipahami. Akan tetapi untuk ilmu yang hanya tersirat melalui ayat-ayatnya, memerlukan penafsiran yang mendalam disertai pemahaman berbagai disiplin ilmu yang mendukung penafsiran ayat-ayat tersebut (Wardhana, 2005).

Menurut Wardhana (2005), Al-Qur'an dapat dipakai sebagai rujukan ilmu pengetahuan, berarti Al-Qur'an bersifat memayungi dan memandu inspirasi pengembangan berbagai bidang ilmu pengetahuan. Untuk dapat memantapkan pengertian bahwa Al-Qur'an merupakan rujukan utama filosofi bagi ilmu pengetahuan, maka harus dilihat ayat Al-Qur'an yang dapat menjadi dasar filosofi ilmu pengetahuan tersebut yang ada pada saat ini. Sebagai contoh, Al-Qur'an telah lebih dulu memuat tentang gelombang elektromagnetik meskipun hanya secara tersirat, yaitu dalam firman Allah surat As-Sajdah ayat 5 yang berbunyi:

يُدَبِّرُ الْأَمْرَ مِنَ السَّمَاءِ إِلَى الْأَرْضِ ثُمَّ يَعْرُجُ إِلَيْهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ أَلْفَ سَنَةٍ مِّمَّا تَعُدُّونَ ﴿٥﴾

Artinya: *Dia mengatur urusan dari langit ke bumi, kemudian (urusan) itu naik kepadanya dalam satu hari yang kadarnya adalah seribu tahun menurut perhitunganmu.*

Menurut Yahya bin Salam dalam tafsir Al-Qurthubi kalimat “*Kemudian (urusan) itu naik kepada-Nya.*” ditafsirkan bahwa yang naik ke atas langit adalah malaikat Jibril, yaitu setelah ia menyampaikan wahyu. Sedangkan An-Naqqasy berpendapat bahwa yang naik itu adalah malaikat yang ditugaskan untuk mengatur segala urusan yang ada di langit dan di bumi. Sedangkan Ibnu Syajarah berpendapat bahwa yang naik adalah para malaikat dan yang dibawa naik olehnya adalah segala berita para penduduk bumi (Al-Qurthubi, 2009).

Ibnu Abbas berpendapat bahwa makna ayat ini adalah jarak tempuh yang harus dilalui oleh para malaikat adalah satu hari, namun apabila selain malaikat yang melaluinya maka akan berjarak seribu tahun, dimana lima ratus tahun untuk naik ke atas, dan lima ratus tahun lainnya untuk turun kembali ke bumi. Makna yang sama pun disebutkan oleh Al-Mahdawi, karena begitu cepatnya malaikat Jibril naik ke atas langit, ia cukup membutuhkan satu hari saja untuk mencapainya, padahal jika dilakukan oleh manusia jarak itu akan mereka tempuh dalam seribu tahun (Al-Qurthubi, 2009). Oleh karena itu, ayat ini menginformasikan bahwa manusia tidak mungkin menyamai atau mencapai kecepatan cahaya (Wardhana, 2005). Jika ditelaah lebih jauh lagi, berdasarkan ayat tersebut dapat diketahui bilangan kecepatan cahaya, dimana kecepatan cahaya ini sama dengan kecepatan gelombang elektromagnetik. Sehingga cahaya termasuk gelombang elektromagnetik.

Gerak gelombang dapat dipandang sebagai perpindahan energi dan momentum dari satu titik dalam ruang ke titik lain tanpa perpindahan materi (Tripler, 1998). Gelombang adalah getaran yang merambat dengan energi tertentu. Gelombang berasal dari gangguan atau usikan dan gelombang membawa energi, bukan memindahkan partikel atau medium perambatannya itu. Menurut Tripler (1998) pada gelombang mekanik, seperti pada gelombang tali atau gelombang bunyi di udara, energi dan momentum dipindahkan melalui gangguan dalam medium. Sedangkan pada gelombang elektromagnetik, seperti pada cahaya gelombang radio, atau sinar X, energi dan momentum dibawa oleh medan listrik dan magnet yang dapat merambat melalui ruang bebas.

Gelombang elektromagnetik merupakan gelombang transversal yang tidak memerlukan medium untuk perambatannya atau dapat merambat dalam ruang hampa. Gelombang ini dirumuskan oleh James Clerk Maxwell pada tahun 1865 yang menemukan keterkaitan antara medan listrik dan medan magnet. Hukum *Faraday* menyimpulkan bahwa perubahan fluks magnet dapat menimbulkan medan listrik, begitu pula dengan kesimpulan yang diberikan oleh Bio Savart, bahwa medan magnet dapat ditimbulkan oleh medan listrik. Berdasarkan dua kesimpulan ini, Maxwell membuat kesimpulan bahwa jika perubahan medan magnet dapat menimbulkan medan listrik maka sebaliknya, perubahan medan listrik pun dapat menimbulkan medan magnet (Anonim, 2013).

Gejala perambatan gelombang dirumuskan secara matematik sebagai persamaan gelombang. Persamaan gelombang adalah persamaan yang mendeskripsikan bagaimana gerak gelombang. Untuk medan elektromagnetik,

gelombang dapat diturunkan dari persamaan Maxwell dalam ruang bebas yaitu $\nabla \cdot E = 0$ dan $\nabla \cdot B = 0$ dan $\nabla \times E = -\partial B / \partial t$ dan $\nabla \times B = (\mu_0 \epsilon_0) \partial E / \partial t$, dimana persamaan-persamaan tersebut merupakan hukum *Gauss* dalam medan listrik, hukum *Gauss* dalam medan magnet, hukum *Faraday*, dan hukum *Ampere-Maxwell*.

Persamaan Maxwell merupakan persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan hubungan antara medan listrik dan medan magnet (Liang dan Yuan, 2013). Untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial diperlukan syarat awal dan syarat batas yang memenuhi suatu keadaan tertentu dengan fungsi persamaan diferensial parsial yang diketahui. Berbagai bentuk syarat tambahan yang berlaku pada persamaan diferensial parsial, yaitu: (1) Masalah Nilai Awal (MNA), apabila hanya diberikan syarat awal saja; (2) Masalah Nilai Batas (MNB), apabila hanya diberikan syarat batas saja; dan (3) Masalah Nilai Awal dan Batas (MNAB), apabila diberikan syarat awal dan syarat batas (Anggraini, 2008).

Pada penelitian-penelitian sebelumnya, Zhao dan Wei (2004) memaparkan tentang skema *Finite-Difference Time-Domain* (FDTD) orde tinggi untuk menyelesaikan perpindahan elektromagnetik (TEM) antar medium dalam 1D dan 2D. Dengan membuat titik-titik buatan, pendekatan sistematis diperkenalkan untuk menjalankan kondisi lompatan antar medium secara fisika. Begitu pula Gao, Zhang, dan Liang (2007) dalam penelitiannya menjelaskan bahwa persamaan Maxwell dua dimensi dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode *Splitting Finite-Difference Time Domain* (S-FTD). Adapun

metode ini hanya memerlukan dua tingkat untuk masing-masing langkah sehingga komputasi yang dihasilkan sangat sederhana dan efisien. Ghao, Zhang dan Liang juga memberikan analisis skema dengan metode energi dan terbukti bahwa skema stabil tak bersyarat dan konvergen. Sedangkan Liang dan Yuan (2013) dalam penelitiannya mengembangkan lebih lanjut metode S-FDTD yaitu metode S-FDTD ruang orde empat hemat energi untuk menyelesaikan persamaan Maxwell. Teknik *Splitting* digunakan untuk tiga tingkat hemat energi skema *Splitting*. Dimana pada masing-masing langkah menggunakan operator beda ruang orde empat pada node *interior* dengan kombinasi linier dua beda pusat. Skema ini menghasilkan hemat energi, stabil tak bersyarat, keakuratan untuk orde tinggi, dan komputasi yang efisien.

Sejatinya suatu permasalahan dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Meskipun lebih mudah diselesaikan dengan metode numerik karena lebih cepat dan efisien, metode numerik tetap saja mempunyai galat atau *error*. Sedangkan metode analitik memberikan penyelesaian sejati atau tidak mempunyai galat atau *error*. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengangkat permasalahan dengan judul "*Penyelesaian Analitik Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas Untuk Persamaan Maxwell*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat ditarik permasalahan, yaitu:

1. Bagaimana analisis eksistensi dan ketunggalan penyelesaian untuk persamaan Maxwell?

2. Bagaimana penyelesaian analitik masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk persamaan Maxwell?

1.3 Batasan Masalah

Supaya pembahasan lebih terfokus, maka penulis membatasi ruang lingkup permasalahan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Persamaan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah persamaan Maxwell yang diaplikasikan pada kasus perpindahan elektromagnetik (TEM) satu dimensi yang dirumuskan sebagai berikut (Zhao dan Wei, 2004):

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x}\end{aligned}$$

2. Merujuk pada Liang dan Yuan (2013) dan Zauderer (2006) maka pada penelitian ini diberikan kondisi awal dan kondisi batas sebagai berikut:

$$E_z(x, 0) = \sin(x)$$

$$\frac{\partial E_z(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \sin(x)$$

$$H_y(x, 0) = \cos(x)$$

$$\frac{\partial H_y(x, 0)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cos(x)$$

$$(E, 0) \times (\vec{n}, 0) = 0 \quad \text{pada } (0, T] \times \partial\Omega$$

$$(H, 0) \times (\vec{n}, 0) = 0 \quad \text{pada } (0, T] \times \partial\Omega$$

dimana \vec{n} adalah satuan vektor normal pada batas.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengetahui eksistensi dan ketunggalan penyelesaian untuk persamaan Maxwell.
2. Mengetahui penyelesaian analitik dengan masalah nilai awal dan masalah nilai batas persamaan Maxwell.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun hasil dari penelitian ini diharapkan dapat mengetahui perilaku gelombang pada kasus polarisasi perpindahan elektromagnetik (TEM) satu dimensi berdasarkan hasil analisis penyelesaian analitik dan mengetahui ada tidaknya penyelesaian berdasarkan hasil analisis eksistensi dan ketunggalan penyelesaian yang dilakukan.

1.6 Metode Penelitian

Langkah-langkah umum yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1) Menyelesaikan dan menganalisis permasalahan yang telah diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Analisis eksistensi penyelesaian untuk persamaan Maxwell
 - b. Analisis ketunggalan penyelesaian untuk persamaan Maxwell
 - c. Menentukan penyelesaian masalah nilai awal
 - d. Menentukan penyelesaian masalah nilai batas
- 2) Interpretasi dan pembahasan

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penelitian ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisannya sebagai berikut :

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Teori

Pada bab ini menyajikan tentang teori-teori yang mendukung bagian pembahasan. Teori-teori tersebut antara lain membahas tentang analisis dan kajian teoritik persamaan Maxwell, masalah nilai awal, dan masalah nilai batas, analisis eksistensi dan ketunggalan penyelesaian, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti, yang mengemukakan hasil penelitian dan pembahasan mengenai analisis eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan Maxwell dan penyelesaian analitik persamaan Maxwell dengan masalah nilai awal dan masalah nilai batas.

Bab VI Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan dan saran-saran yang berkaitan dengan kesimpulan.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Kajian Teoritik Persamaan Maxwell

Listrik dan magnet pada mulanya merupakan fenomena terpisah. Akan tetapi serentetan penemuan pada akhirnya membawa keterpaduan atau unifikasi keduanya dan lahirlah elektromagnetisme Maxwell. Di dalam elektromagnetisme, medan listrik dan medan magnet muncul sebagai satu kesatuan dalam arti tidak dapat dan tidak mungkin muncul sendiri sebagai medan listrik saja atau medan magnet saja. Cahaya lampu, cahaya matahari, gelombang radio, maupun sinar X merupakan gelombang dari medan listrik dan medan magnet (Purwanto, 2009).

Model persamaan gelombang elektromagnetik dapat dikonstruksi dengan asumsi bahwa adanya pergerakan acak partikel dan setiap partikel mempunyai peluang gerak yang sama baik ke kanan maupun ke kiri. Zauderer (2006) menyebutkan bahwa pergerakan suatu partikel dapat diinterpretasikan dalam bentuk distribusi probabilitas yang dapat dinyatakan dalam persamaan matematis, yaitu:

$$f(x, t + \tau) = pf(x - \delta, t) + qf(x + \delta, t) \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) menyatakan bahwa probabilitas partikel di x pada saat $t + \tau$ sama dengan probabilitas partikel di $x - \delta$ pada saat t dikalikan dengan probabilitas p yang berpindah ke kanan ditambah dengan probabilitas partikel di $x + \delta$ pada saat t dikalikan dengan probabilitas q yang berpindah ke kiri,

sehingga distribusi probabilitas untuk medan listrik pada saat partikel berada di $x - \delta$ pada saat t dan $x + \delta$ pada saat t , dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E_z(x, t + \tau) = pE_z(x - \delta, t) + qE_z(x + \delta, t) \quad (2.2)$$

Ekspansikan persamaan (2.2) dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut:

Untuk $E_z(x, t + \tau)$ dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$E_z(x, t + \tau) = E_z(x, t) + \tau E_{z_t}(x, t) \quad (2.3)$$

Untuk $E_z(x - \delta, t)$ dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$E_z(x - \delta, t) = E_z(x, t) - \delta E_{z_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 E_{z_{xx}}(x, t) \quad (2.4)$$

Untuk $E_z(x + \delta, t)$ dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$E_z(x + \delta, t) = E_z(x, t) + \delta E_{z_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 E_{z_{xx}}(x, t) \quad (2.5)$$

Selanjutnya, substitusi hasil ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.3) sampai persamaan (2.5) pada persamaan (2.1), sehingga diperoleh

$$E_z(x, t) + \tau E_{z_t}(x, t) = p \left[E_z(x, t) - \delta E_{z_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 E_{z_{xx}}(x, t) \right] + q \left[E_z(x, t) + \delta E_{z_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 E_{z_{xx}}(x, t) \right] \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) dapat diuraikan menjadi

$$E_z(x, t) + \tau E_{z_t}(x, t) = pE_z(x, t) - p\delta E_{z_x}(x, t) + \frac{1}{2} p\delta^2 E_{z_{xx}}(x, t) + qE_z(x, t) + q\delta E_{z_x}(x, t) + \frac{1}{2} q\delta^2 E_{z_{xx}}(x, t) \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) dapat disederhanakan menjadi

$$E_z(x,t) + \tau E_{z_t}(x,t) = (p+q)E_z(x,t) + (-p+q)\delta E_{z_x}(x,t) + (p+q)\frac{1}{2}\delta^2 E_{z_{xx}}(x,t) \quad (2.8)$$

Pergerakan partikel adalah kejadian peluang maka nilai dari pergerakan peluang ke kanan dan ke kiri yaitu: $(p+q) = 1$, sehingga persamaan (2.8) menjadi

$$E_z(x,t) + \tau E_{z_t}(x,t) = E_z(x,t) + (-p+q)\delta E_{z_x}(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 E_{z_{xx}}(x,t) \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \tau E_{z_t}(x,t) &= E_z(x,t) - E_z(x,t) + (-p+q)\delta E_{z_x}(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 E_{z_{xx}}(x,t) \\ &= (-p+q)\delta E_{z_x}(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 E_{z_{xx}}(x,t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Selanjutnya, masing-masing ruas dari persamaan (2.10) dibagi dengan τ , sehingga didapatkan

$$E_{z_t}(x,t) = \frac{(-p+q)}{\tau}\delta E_{z_x}(x,t) + \frac{1}{2\tau}\delta^2 E_{z_{xx}}(x,t) \quad (2.11)$$

Jika ruas kanan dipindah ke ruas kiri maka persamaan (2.11) menjadi

$$E_{z_t}(x,t) - \frac{(-p+q)}{\tau}\delta E_{z_x}(x,t) - \frac{1}{2\tau}\delta^2 E_{z_{xx}}(x,t) = 0 \quad (2.12)$$

Dalam bentuk operator diferensial, persamaan (2.12) menjadi

$$\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{(-p+q)\delta}{\tau}\right)\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x} - \left(\frac{\delta^2}{2\tau}\right)\frac{\partial^2 E_z(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) dikenal dengan persamaan difusi satu dimensi, dimana pergerakan gelombangnya ke kanan dan ke kiri. Jika diasumsikan nilai $\lim (-p+q)\delta/\tau \approx 0$ untuk $\delta \rightarrow 0$ dan $\tau \rightarrow 0$, maka didapatkan persamaan difusi satu dimensi dengan mengabaikan kecepatan pergerakan partikel, yaitu:

$$\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\delta^2}{2\tau} \right) \frac{\partial^2 E_z(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.14)$$

Jika persamaan (2.14) dikalikan dengan ε , maka didapatkan

$$\varepsilon \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\varepsilon \delta^2}{2\tau} \right) \frac{\partial^2 E_z(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.15)$$

Jika persamaan (2.15) dikondisikan bersifat tak homogen, dengan mengganti nol di ruas kanan dengan $\partial H_y / \partial x$, maka didapatkan

$$\varepsilon \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\varepsilon \delta^2}{2\tau} \right) \frac{\partial^2 E_z(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.16)$$

Jika diasumsikan nilai $\lim \varepsilon \delta^2 / 2\tau \approx 0$ untuk $\delta \rightarrow 0$ dan $\tau \rightarrow 0$, maka dapat dinyatakan suku $-(\varepsilon \delta^2 / 2\tau) \partial^2 E_z(x,t) / \partial x^2$ dapat diabaikan, sehingga didapatkan

$$\varepsilon \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) menyatakan masalah perpindahan elektromagnetik (TEM) yang sesuai dengan persamaan pertama pada penelitian Zhao dan Wei (2006).

Selanjutnya, penurunan persamaan kedua pada penelitian Zhao dan Wei (2006) dilakukan dengan mengasumsikan bahwa distribusi probabilitas medan magnet pada saat partikel berada di $x - \delta$ pada saat t dan $x + \delta$ pada saat t dapat dinyatakan sebagai berikut (Zauderer, 2006):

$$H_y(x, t + \tau) = pH_y(x - \delta, t) + qH_y(x + \delta, t) \quad (2.18)$$

Ekspansikan persamaan (2.18) dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut:

Untuk $H_z(x, t + \tau)$ dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$H_z(x, t + \tau) = H_z(x, t) + \tau H_{z_t}(x, t) \quad (2.19)$$

Untuk $H_z(x - \delta, t)$ dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$H_z(x - \delta, t) = H_z(x, t) - \delta H_{z_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 H_{z_{xx}}(x, t) \quad (2.20)$$

Untuk $H_z(x + \delta, t)$ dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$H_z(x + \delta, t) = H_z(x, t) + \delta H_{z_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 H_{z_{xx}}(x, t) \quad (2.21)$$

Selanjutnya, substitusi hasil ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.19) sampai persamaan (2.21) pada persamaan (2.18), sehingga diperoleh

$$H_y(x, t) + \tau H_{y_t}(x, t) = p \left[H_y(x, t) - \delta H_{y_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 H_{y_{xx}}(x, t) \right] + q \left[H_y(x, t) + \delta H_{y_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 H_{y_{xx}}(x, t) \right] \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) dapat diuraikan menjadi

$$H_y(x, t) + \tau H_{y_t}(x, t) = p H_y(x, t) - p \delta H_{y_x}(x, t) + \frac{1}{2} p \delta^2 H_{y_{xx}}(x, t) + q H_y(x, t) + q \delta H_{y_x}(x, t) + \frac{1}{2} q \delta^2 H_{y_{xx}}(x, t) \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) dapat disederhanakan menjadi

$$H_y(x, t) + \tau H_{y_t}(x, t) = (p + q) H_y(x, t) + (-p + q) \delta H_{y_x}(x, t) + (p + q) \frac{1}{2} \delta^2 H_{y_{xx}}(x, t) \quad (2.24)$$

Pergerakan partikel adalah kejadian peluang maka nilai dari pergerakan peluang ke kanan dan ke kiri yaitu: $(p + q) = 1$, sehingga persamaan (2.24) menjadi

$$H_y(x, t) + \tau H_{y_t}(x, t) = H_y(x, t) + (-p + q) \delta H_{y_x}(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 H_{y_{xx}}(x, t) \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}\tau H_{y_t}(x,t) &= H_y(x,t) - H_y(x,t) + (-p+q)\delta H_{y_x}(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 H_{y_{xx}}(x,t) \\ &= (-p+q)\delta H_{y_x}(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 H_{y_{xx}}(x,t)\end{aligned}\quad (2.26)$$

Selanjutnya, masing-masing ruas dari persamaan (2.26) dibagi dengan τ , maka didapatkan

$$H_{y_t}(x,t) = \frac{(-p+q)}{\tau}\delta H_{y_x}(x,t) + \frac{1}{2\tau}\delta^2 H_{y_{xx}}(x,t)\quad (2.27)$$

Jika ruas kanan dipindah ke ruas kiri maka persamaan (2.27) menjadi

$$H_{y_t}(x,t) - \frac{(-p+q)}{\tau}\delta H_{y_x}(x,t) - \frac{1}{2\tau}\delta^2 H_{y_{xx}}(x,t) = 0\quad (2.28)$$

Dalam bentuk operator diferensial, persamaan (2.28) menjadi

$$\frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{(-p+q)\delta}{\tau}\right)\frac{\partial H_y(x,t)}{\partial x} - \left(\frac{\delta^2}{2\tau}\right)\frac{\partial^2 H_y(x,t)}{\partial x^2} = 0\quad (2.29)$$

Persamaan (2.29) dikenal dengan persamaan difusi satu dimensi, dimana pergerakan gelombangnya ke kanan dan ke kiri. Jika diasumsikan nilai $\lim (-p+q)\delta/\tau \approx 0$ untuk $\delta \rightarrow 0$ dan $\tau \rightarrow 0$, maka didapatkan persamaan difusi satu dimensi dengan mengabaikan kecepatan pergerakan partikel, yaitu:

$$\frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\delta^2}{2\tau}\right)\frac{\partial^2 H_y(x,t)}{\partial x^2} = 0\quad (2.30)$$

Jika persamaan (2.30) dikalikan dengan μ , maka didapatkan

$$\mu \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\mu\delta^2}{2\tau}\right)\frac{\partial^2 H_y(x,t)}{\partial x^2} = 0\quad (2.31)$$

Jika persamaan (2.31) dikondisikan bersifat tak homogen, dengan mengganti nol di ruas kanan dengan $\partial E_z / \partial x$, maka didapatkan

$$\mu \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\mu \delta^2}{2\tau} \right) \frac{\partial^2 H_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.32)$$

Jika diasumsikan nilai $\lim \varepsilon \delta^2 / 2\tau \approx 0$ untuk $\delta \rightarrow 0$ dan $\tau \rightarrow 0$, maka dapat dinyatakan suku $-(\mu \delta^2 / 2\tau) \partial^2 H_y(x,t) / \partial x^2$ dapat diabaikan, sehingga didapatkan

$$\mu \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.33)$$

Persamaan (2.33) menyatakan masalah perpindahan elektromagnetik (TEM) yang sesuai dengan persamaan kedua pada penelitian Zhao dan Wei (2006). Persamaan (2.17) dan (2.33) membentuk sistem persamaan perpindahan elektromagnetik (TEM) satu dimensi, yaitu:

$$\varepsilon \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial x} \quad (2.34)$$

$$\mu \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x} \quad (2.35)$$

dimana E_z adalah medan listrik dan H_y adalah medan magnet.

Definisi 2.1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984). Menurut Ross (1984) persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Oleh karena itu, persamaan (2.34) dan

(2.35) merupakan persamaan diferensial parsial karena memuat turunan parsial dari dua variabel tak bebas, yaitu E_z dan H_y terhadap dua variabel bebas, yaitu x dan t .

Notasi untuk turunan parsial, jika $z = f(x, y)$, maka

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (2.36)$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (2.37)$$

Dari notasi tersebut di atas, maka dapat diketahui turunan parsial dari $z = f(x, y)$ yaitu:

1. Untuk mencari f_x , pandang y sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x, y)$ terhadap x .
2. Untuk mencari f_y , pandang x sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x, y)$ terhadap y .

Secara umum, jika u adalah fungsi n variabel, dimana $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, turunan parsialnya terhadap variabel x_i ke- n adalah

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n + \Delta x) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x} \quad (2.38)$$

Untuk turunan yang lebih tinggi, jika f adalah fungsi dua variabel, maka turunan parsialnya f_x dan f_y juga fungsi dua variabel. Sehingga, dapat ditinjau turunan parsial dari $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, dan $(f_y)_y$, yang disebut turunan parsial kedua dari f . Jika $z = f(x, y)$, dengan menggunakan notasi tersebut maka:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (2.39)$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (2.40)$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (2.41)$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (2.42)$$

Dari notasi f_{xy} atau $\partial^2 f / \partial y \partial x$ berarti bahwa f didiferensialkan terhadap x dan kemudian terhadap y . Sedangkan dalam menghitung f_{yx} urutannya dibalik (Stewart, 2003).

Persamaan diferensial parsial dikelompokkan menjadi tiga bagian yaitu persamaan diferensial parsial linier, quasilinier, dan tak linier. Persamaan diferensial dengan dua variabel bebas, x dan y dalam fungsi $u(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai berikut (Fong, dkk., 2003):

$$f \left(x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right) = 0 \quad (2.43)$$

dimana f adalah fungsi.

Persamaan (2.43) dikatakan linier jika koefisien-koefisien u dan turunannya hanya tergantung pada variabel bebas x dan y . Jika f hanya linier pada orde tertinggi turunannya maka persamaan (2.43) dikatakan quasilinier. Jika persamaan (2.43) tidak linier atau quasilinier maka disebut tak linier (Fong, dkk., 2003).

Orde suatu persamaan diferensial adalah pangkat turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial (Stewart, 2003). Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Adapun bentuk umum persamaan diferensial parsial linier berorde satu adalah

$$a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c(x,t)u(x,t) + d(x,t) \quad (2.44)$$

dimana a , b , c , dan d adalah fungsi-fungsi dari x dan t . Pada setiap titik (x, t) merupakan vektor $[a(x,t), b(x,t)]$ yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.44) dapat ditulis dalam bentuk $F(x, t, u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)) = 0$, dimana $u_x(x,t) = \partial u(x,t)/\partial x$ dan $u_t(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t$ (Zauderer, 2006).

Persamaan (2.44) disebut quasilinear jika persamaan tersebut linier pada turunan pertama dari fungsi $u(x,t)$. Jadi, bentuk umum persamaan quasilinear, yaitu:

$$a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u) \quad (2.45)$$

dimana a , b , dan c adalah fungsi dari x , t , dan u (Myint-U dan Debnath, 2007).

Persamaan (2.45) disebut semi-linier jika koefisien a dan b tidak tergantung pada u , sehingga bentuk umum persamaan semi-linier, yaitu:

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t = c(x, y, u)$$

Persamaan (2.45) disebut linier jika masing-masing variabel u , u_x , dan u_t linier dan koefisien-koefisien dari variabel ini adalah fungsi yang tidak tergantung pada variabel x dan t . Adapun bentuk umum persamaan linier, yaitu:

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = d(x,t) \quad (2.46)$$

dimana a , b , dan c adalah fungsi dari x dan t dan $d(x,t)$ adalah fungsi yang diberikan (Myint-U dan Debnath, 2007).

Persamaan (2.46) disebut homogen jika $d(x,t) = 0$ dan persamaan (2.46) disebut tak homogen jika $d(x,t) \neq 0$ (Myint-U dan Debnath, 2007).

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde n jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau n (Zauderer, 2006).

Contoh 2.1

Pandang persamaan (2.34) dan (2.35) berikut:

$$\varepsilon \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x}$$

Persamaan (2.34) dan (2.35) disebut linier karena koefisien b yang mana dalam hal ini yaitu ε dan μ tidak tergantung pada variabel x dan t . Persamaan (2.34) dan (2.35) juga disebut tak homogen karena $d(x,t) \neq 0$ yang mana dalam hal ini yaitu $\partial H_y(x,t)/\partial x$ dan $\partial E_z(x,t)/\partial x$. Persamaan (2.34) dan (2.35) dikatakan berorde satu karena turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu, yaitu $\partial E_z/\partial x$, $\partial E_z/\partial t$, $\partial H_y/\partial x$, dan $\partial H_y/\partial t$.

Dari penjabaran di atas, dapat dikatakan bahwa persamaan (2.34) dan (2.35) adalah persamaan diferensial parsial linier tak homogen orde satu.

Sedangkan bentuk umum PDP orde dua dengan dua variabel bebas adalah sebagai berikut:

$$G(x, y) = A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + F(x, y)u(x, y) \quad (2.47)$$

Linieritas dari persamaan (2.47) ditentukan oleh fungsional dari koefisien $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $D(x, y)$, $E(x, y)$, $F(x, y)$, dan $G(x, y)$. Jika koefisien-koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas $[f(x, y) = 0]$, maka persamaan diferensial parsial tersebut linier. Jika koefisien-koefisien tersebut merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua $[F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0]$, maka PDP tersebut adalah tak linier (Zauderer, 2006). Jika $G(x, y) = 0$, persamaan (2.47) dikatakan homogen. Namun, jika sebaliknya, maka persamaan (2.47) dikatakan tak homogen (Zill dan Cullen, 2009).

Contoh 2.2

Pandang persamaan gelombang dimensi satu berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.48)$$

Persamaan (2.48) disebut linier karena koefisien $A(x, t)$ dan $C(x, t)$ konstanta, yaitu $A(x, t) = v^2$, dimana v merupakan kecepatan gelombang dan $C(x, t) = 1$. Persamaan (2.48) juga disebut homogen orde dua karena $G(x, y) = 0$ dan turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, yaitu $\partial^2 u / \partial t^2$ dan $\partial^2 u / \partial x^2$.

Dari penjabaran di atas, dapat dikatakan bahwa persamaan (2.48) adalah persamaan diferensial parsial linier homogen orde dua.

2.2 Masalah Nilai Awal

Setiap persamaan matematika fisika dibangun berdasarkan fenomena atau proses yang hampir sama dimana jumlahnya tak terhingga banyaknya secara kualitatif. Oleh karena itu, persamaan diferensial memiliki tak terhingga penyelesaian partikular. Secara spesifik, penyelesaian yang dijelaskan secara fenomena fisika berdasarkan penelitian berbeda dengan penyelesaian partikular persamaan diferensial dengan berdasarkan kondisi awal dan kondisi batas (Polyanin, 2002).

Secara umum, persamaan diferensial parsial linier orde dua tipe parabolik dengan n variabel, ditulis sebagai berikut (Polyanin, 2002):

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{x,t}[w] = \Phi(x, t) \quad (2.49)$$

dimana

$$L_{x,t}[w] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x, t)w \quad (2.50)$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \sigma \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \sigma > 0$$

Persamaan parabolik dibangun berdasarkan asumsi suhu yang tak stabil, proses difusi, dan fenomena lain yang tergantung pada waktu t . Pada masalah *Cauchy* untuk mencari penyelesaian w yang memenuhi persamaan (2.49) maka diberikan kondisi awal sebagai berikut:

$$w(x, t_0) = f(x)$$

Secara umum, persamaan diferensial parsial linier orde dua tipe hiperbolik dengan n variabel, ditulis sebagai berikut (Polyanin, 2002):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(x, t) \frac{\partial w}{\partial t} - L_{x,t}[w] = \Phi(x, t) \quad (2.51)$$

dimana operator diferensial linier $L_{x,t}[w]$ didefinisikan pada persamaan (2.50).

Persamaan hiperbolik ini dibangun berdasarkan asumsi proses gelombang tak stabil yang bergantung pada waktu t . Pada masalah *Cauchy* untuk mencari penyelesaian w yang memenuhi persamaan (2.51) maka diberikan kondisi awal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w(x, t_0) &= f_1(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t_0) &= f_2(x) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Kondisi awal (2.52) disebut homogen jika $f_1(x) = 0$ dan $f_2(x) = 0$.

Kondisi awal ditentukan dari kondisi fisik pada waktu t_0 . Untuk persamaan difusi kondisi awalnya adalah

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

dimana $\phi(x) = \phi(x, y, z)$ adalah fungsi yang diberikan. Untuk difusi, $\phi(x)$ adalah konsentrasi awal. Untuk aliran panas, $\phi(x)$ adalah suhu awal (Strauss, 2008).

Pada persamaan difusi atau persamaan panas, persamaan diferensial parsial menentukan jejak difusi atau konduksi panas dimana kondisi batas menjelaskan apa yang terjadi pada batas untuk mempengaruhi penyelesaian di domain. Sedangkan, kondisi batas menjelaskan bagaimana keadaan penyelesaian berkembang. Tanpa itu, permasalahan matematika tidak dapat diselesaikan.

Secara fisika, dua balok dengan kondisi batas yang sama dapat memberikan penyelesaian yang berbeda jika diberikan dua nilai awal yang berbeda (Tung, 2013).

Untuk persamaan gelombang yang mempunyai turunan kedua terhadap waktu, membutuhkan dua kondisi awal, yang dapat ditulis sebagai berikut (Tung, 2013):

$$\begin{aligned} u(x, t_0) &= \phi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

dimana $\phi(x)$ adalah posisi awal dan $\psi(x)$ adalah kecepatan awal.

2.3 Penyelesaian Masalah Nilai Awal

Pada persamaan gelombang, masalah nilai awal dapat diselesaikan dengan metode transformasi *Fourier* dan *D'Alembert*. Metode *D'Alembert* diperkenalkan oleh *D'Alembert* pada tahun 1746. Metode ini lebih sederhana namun, hanya berlaku pada persamaan gelombang saja (Tung, 2013).

Contoh 2.3

Pandang persamaan gelombang berikut ini:

$$4u_{xx} + 5u_{xt} + u_{tt} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2.53)$$

dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = \sin(x) \quad (2.54)$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (2.55)$$

Persamaan (2.53) dapat dikerjakan dengan faktorisasi operator diferensial, yaitu:

$$4 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \left(4 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x,t) = 0 \quad (2.56)$$

Jika dimisalkan $(\partial/\partial x + \partial/\partial t)u(x,t) = f(x,t)$, maka persamaan (2.56) dapat ditulis

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x,t) = 0 \quad (2.57)$$

Berdasarkan persamaan (2.56) dan (2.57), maka persamaan (2.53) dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial parsial orde satu sebagai berikut:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t) \quad (2.58)$$

$$4 \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2.59)$$

Langkah pertama adalah menyelesaikan persamaan (2.59), dengan memberikan nilai awal $f(x,0) = a(x)$ dan diasumsikan laminar $x = \tau$, maka didapatkan

$$x_0 = \tau, \quad t_0 = 0, \quad f_0 = a(\tau)$$

sehingga dapat disimpulkan kurva-kurva karakteristik dari persamaan (2.59), dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{ds} = 4, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \text{dan} \quad \frac{df}{ds} = 0$$

Kemudian, integralkan semua komponen di atas, yaitu $\int_C 1 dx = \int_C 4 ds$, maka diperoleh $x = 4s$ dan $\int_C 1 dt = \int_C 1 ds$, maka diperoleh $t = s$ dan $\int_C 1 df = \int_C 0 ds$, maka diperoleh $f = 0$. Sehingga didapatkan penyelesaian untuk kurva-kurva karakteristik dari persamaan (2.59) dengan nilai awalnya yaitu:

$$x(\tau, s) = 4s + \tau \quad \text{dan} \quad t(\tau, s) = s \quad \text{dan} \quad f(\tau, s) = a(\tau)$$

dimana persamaan pertama dapat ditulis $\tau = x - 4s$, untuk setiap $s = t$ maka dapat dinyatakan $\tau = x - 4t$. Selanjutnya, substitusikan $\tau = x - 4t$ pada $f(\tau, s) = a(\tau)$ sehingga didapatkan

$$f(\tau, s) = a(\tau) = a(x - 4t) \quad (2.60)$$

sehingga diperoleh kondisi awal untuk $f(x, t)$ dari persamaan (2.58), yaitu:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= \cos(x) + 0 \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Kemudian, dengan persamaan (2.60) maka didapatkan penyelesaian untuk persamaan (2.59), yaitu:

$$f(x, t) = \cos(x - 4t) \quad (2.61)$$

Substitusikan persamaan (2.61) pada persamaan (2.58), sehingga didapatkan

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \cos(x - 4t) \quad (2.62)$$

sehingga dapat disimpulkan kurva-kurva karakteristik dari persamaan (2.62), yaitu:

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \text{dan} \quad \frac{du}{ds} = \cos(x - 4t)$$

Kemudian, integralkan semua komponen di atas, yaitu $\int_C 1 \, dx = \int_C 1 \, ds$, maka

diperoleh $x = s$ dan $\int_C 1 \, dt = \int_C 1 \, ds$, maka diperoleh $t = s$ dan $\int_C 1 \, du = \int_C \cos(x - 4t) \, ds$,

maka diperoleh $u = \int_C \cos(x - 4t) \, ds$. Jika pada kondisi awal gelombang

diasumsikan laminar $x = \tau$, maka didapatkan

$$x = \tau + s \text{ dan } t = 0 \text{ dan } u(x, 0) = f(\tau) \quad (2.63)$$

Jika kedua ruas persamaan $x = \tau + s$ ditambah dengan $-4s$, maka didapatkan

$$x - 4t = \tau - 3s, \quad (2.64)$$

untuk setiap $s = t$.

Kemudian, substitusikan persamaan (2.64) pada $u = \int_C \cos(x - 4t) ds$, sehingga diperoleh penyelesaian untuk u bersama kondisi awalnya, yaitu:

$$\begin{aligned} u(\tau, s) &= \int_0^s \cos(x - 4t) dt + f(\tau) \\ &= \int_0^s \cos(\tau - 3t) dt + f(\tau) \end{aligned}$$

Jika dimisalkan $\lambda = \tau - 3t$, maka $d\lambda = -3 dt$. Hal ini mengakibatkan

$$\begin{aligned} u(\tau, s) &= \int_{\tau}^{\tau-3s} \cos(\lambda) \left(-\frac{1}{3} d\lambda \right) + f(\tau) \\ &= -\frac{1}{3} \int_{\tau}^{\tau-3s} \cos(\lambda) d\lambda + f(\tau) \\ &= -\frac{1}{3} \sin(\lambda) \Big|_{\tau}^{\tau-3s} + f(\tau) \\ &= -\frac{1}{3} [\sin(\tau - 3s) - \sin(\tau)] + \sin(\tau) \\ &= \left[\frac{1}{3} \sin(\tau) + \sin(\tau) \right] - \frac{1}{3} \sin(\tau - 3s) \\ &= \frac{4}{3} \sin(\tau) - \frac{1}{3} \sin(\tau - 3s) \\ &= \frac{1}{3} (4 \sin(\tau) - \sin(\tau - 3s)) \end{aligned} \quad (2.65)$$

untuk setiap $x = \tau$ dan $t = s$.

Karena $\tau = x - t$ dan $x - 4t = \tau - 3t$, maka persamaan (2.65) dapat ditulis

$$u(x,t) = \frac{1}{3}(4\sin(x-t) - \sin(x-4t)) \quad (2.66)$$

dimana $\frac{1}{3}(4\sin(x-t) - \sin(x-4t))$ merupakan gelombang yang berjalan ke kanan.

2.4 Masalah Nilai Batas

Untuk mendapatkan penyelesaian analitik dari persamaan diferensial parsial, maka harus menentukan penyelesaian masalah nilai batas dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Masalah Nilai Batas (MNB) melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua penyelesaiannya yang memenuhi syarat dinamakan syarat batas (Spiegel, 1983).

Secara matematik, masalah nilai batas adalah suatu cara untuk menemukan fungsi yang memenuhi persamaan diferensial parsial yang telah diberikan dan kondisi partikular. Sedangkan secara fisika, masalah nilai batas adalah suatu permasalahan yang tidak bergantung waktu dan hanya memuat koordinat-koordinat ruang. Seperti halnya, masalah nilai awal yang berhubungan dengan persamaan diferensial parsial tipe hiperbolik, masalah nilai batas berhubungan dengan persamaan diferensial parsial tipe eliptik (Myint-U dan Debnath, 2007).

Beberapa bentuk khusus syarat batas yang digunakan dalam aplikasi diklasifikasikan menjadi tiga, yaitu (Myint-U dan Debnath, 2007):

1) Kondisi Batas Tipe Pertama

Kondisi batas tipe pertama atau biasa disebut kondisi batas *Dirichlet* adalah mencari suatu fungsi $u(x, y)$, harmonik di D , yang memenuhi:

$$u = f(s),$$

pada B , dimana $f(s)$ adalah fungsi kontinu yang terdefinisi pada batas B dari domain D . Dimana D adalah interior dari *piecewise* halus kurva B tertutup sederhana.

Sedangkan menurut Nagle dan Saff (1966) kondisi batas *Dirichlet* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0$$

dimana nilai eigennya $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, dimana $n = 1, 2, 3, \dots$, dan fungsi eigennya adalah $\phi_n(x) = a_n \sin(n\pi x/L)$, dimana a_n konstanta tidak nol.

Secara fisika penyelesaian u dari kondisi batas *Dirichlet* dapat diartikan bahwa distribusi suhu tubuh yang stabil dimana tidak ada sumber panas yang masuk, dengan suhu yang telah dijelaskan di setiap titik pada batas.

2) Kondisi Batas Tipe Kedua

Kondisi batas tipe kedua atau biasa disebut kondisi batas *Neumann* adalah mencari suatu fungsi $u(x, y)$, harmonik di D , yang memenuhi:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(s), \quad (2.67)$$

pada B , dengan

$$\int_B f(s) ds = 0. \quad (2.68)$$

Simbol $\partial u/\partial n$ menotasikan turunan berarah dari u sepanjang vektor normal ke batas B . Persamaan (2.68) dikenal sebagai kondisi kesesuaian dikarenakan akibat dari persamaan (2.67) dan persamaan $\nabla^2 u = 0$.

Sedangkan menurut Nagle dan Saff (1966) kondisi batas *Neumann* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = y'(L) = 0$$

dimana nilai eigennya $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, dimana $n = 1, 2, 3, \dots$, dan fungsi eigennya adalah $\phi_n(x) = c_n \cos(n\pi x/L)$, dimana c_n konstanta tidak nol.

Penyelesaian u dapat diartikan sebagai distribusi suhu tubuh yang stabil dimana tidak ada sumber panas yang masuk ketika ada aliran panas yang melewati batas yang telah didefinisikan. Pada kasus ini, kondisi kesesuaian secara fisika dapat diartikan sebagai panas yang dibutuhkan ketika ada aliran panas yang melewati batas adalah nol.

3) Kondisi Batas Tipe Ketiga

Kondisi batas tipe ketiga atau biasa disebut kondisi batas *Robin* adalah mencari suatu fungsi $u(x, y)$, harmonik di D , yang memenuhi kondisi batas dari masing-masing tipe pada batas B , yaitu:

$$u = f_1(s),$$

pada B_1 , dan

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2(s),$$

pada B_2 , dimana $B = B_1 \cup B_2$.

2.5 Penyelesaian Masalah Nilai Batas

Banyak permasalahan matematika fisika linier yang dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel. Metode pemisahan variabel adalah teknik

klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Misalnya saja penyelesaian $u(x,t)$ untuk persamaan diferensial parsial sebagai kombinasi linier tak hingga fungsi komponen sederhana $u_n(x,t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ yang memenuhi persamaan diferensial parsial, homogen, linier, dan kondisi batasnya (Nagle dan Saff, 1996).

Gambar 2.1 menggambarkan skema penerapan metode ini untuk menyelesaikan masalah nilai batas untuk persamaan linier homogen orde dua untuk tipe parabolik dan hiperbolik dengan kondisi batas homogen dan kondisi awal tak homogen. Secara sederhana, pandang permasalahan berikut dengan dua variabel bebas x dan t , dimana $x_1 \leq x \leq x_2$ dan $t \geq 0$ (Polyanin, 2002):

$$\alpha(t) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial w}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial w}{\partial x} + [c(x) + \gamma(t)] w \quad (2.69)$$

dengan kondisi batas homogen

$$\begin{aligned} s_1 \partial_x w(x_1, t) + k_1 w(x_1, t) &= 0 \\ s_2 \partial_x w(x_2, t) + k_2 w(x_2, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

dan kondisi awal

$$w(x, t_0) = f_1(x) \quad (2.71)$$

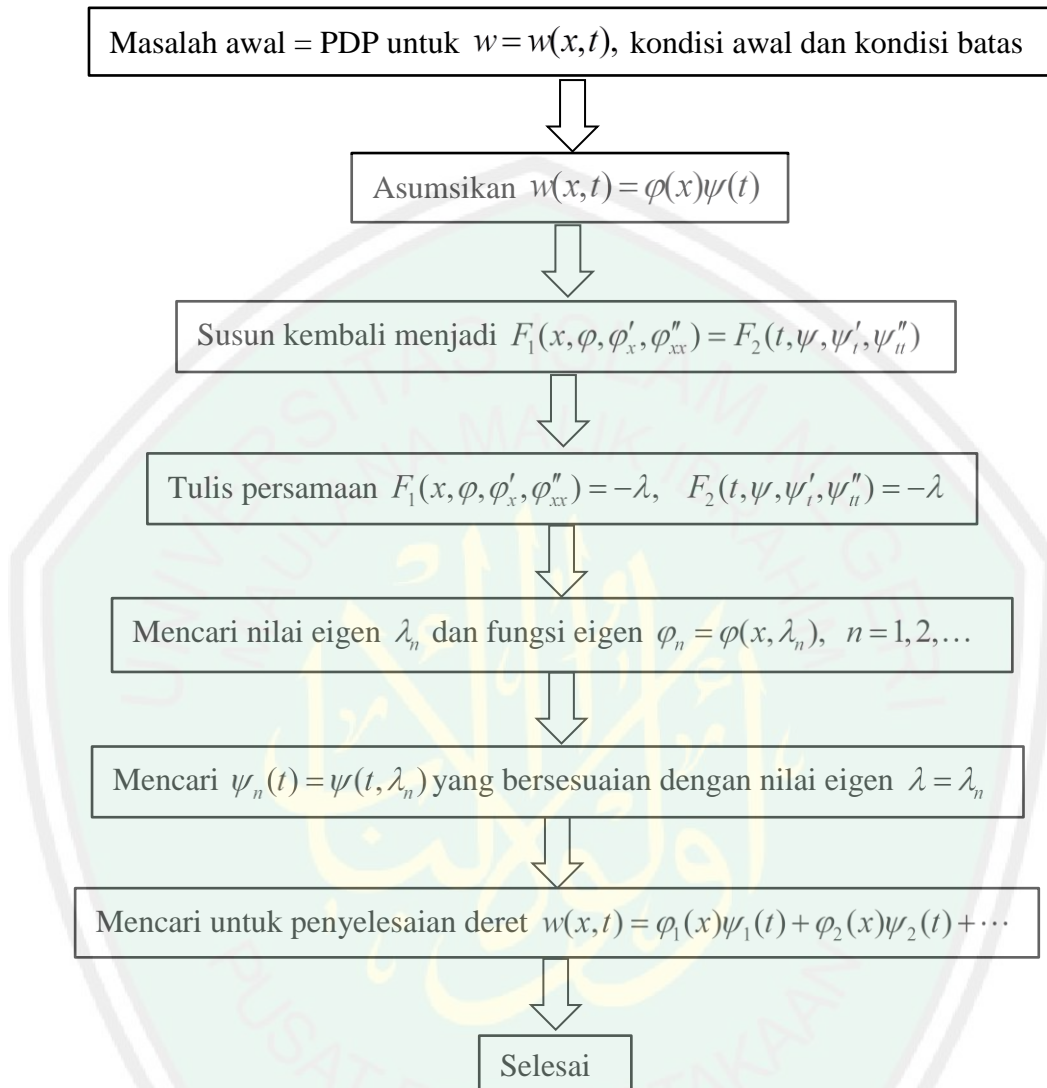
$$\frac{\partial w(x, t_0)}{\partial t} = f_2(x) \quad (2.72)$$

Asumsikan koefisien-koefisien persamaan (2.69) dan kondisi batas (2.70) dengan syarat sebagai berikut:

$$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), a(x), b(x), c(x)$$

adalah fungsi-fungsi kontinu dan

$$\alpha(t) \geq 0, \quad 0 < a(x) < \infty, \quad |s_1| + |k_1| > 0, \quad |s_2| + |k_2| > 0$$



Gambar 2.1 Skema Penyelesaian Masalah Nilai Batas dan Masalah Nilai Awal dengan Metode Pemisahan Variabel

Untuk menentukan penyelesaian $w_n(x, t)$, pertama diasumsikan $w_n(x, t) = \varphi_n(x)\psi_n(t)$. Selanjutnya dilakukan proses substitusi dari bentuk ini ke persamaan diferensial kemudian dipisahkan antara variabel x dan t sehingga didapatkan dua fungsi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan kondisi batasnya untuk fungsi $\varphi_n(x)$ dan $\psi_n(t)$. Metode ini akan menghasilkan

penyelesaian untuk persamaan diferensial parsial dengan masalah nilai batas yang melibatkan satu variabel (Nagle dan Saff, 1996).

Misalkan penyelesaian partikular persamaan (2.69) berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} s_1 \partial_x w(x_1, t) + k_1 w(x_1, t) &= 0 \\ s_2 \partial_x w(x_2, t) + k_2 w(x_2, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Setelah pemisahan variabel dan manipulasi dasar, sehingga menghasilkan persamaan diferensial biasa linier untuk fungsi $\varphi = \varphi(x)$ dan $\psi = \psi(x)$ berikut ini:

$$\begin{aligned} a(x)\varphi''_{xx} + b(x)\varphi'_x + [\lambda + c(x)]\varphi &= 0 \\ \alpha(t)\psi''_{tt} + \beta(t)\psi'_t + [\lambda + \gamma(t)]\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Persamaan ini memuat parameter λ yang disebut konstanta pemisah, dengan notasi yang diambil dari gambar 2.1 persamaan (2.74) dan (2.75) dapat ditulis kembali sebagai $\varphi F_1(x, \varphi, \varphi'_x, \varphi''_{xx}) + \lambda\varphi = 0$ dan $\psi F_2(t, \psi, \psi'_t, \psi''_{tt}) + \lambda\psi = 0$. Substitusikan persamaan (2.73) pada persamaan (2.69) sehingga menghasilkan kondisi batas homogen untuk $\varphi = \varphi(x)$ seperti pada persamaan (2.69).

Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode pemisahan variabel menghasilkan dua persamaan diferensial biasa linier homogen (2.74) berhubungan dengan kondisi batas homogen (2.69) dan menghasilkan masalah nilai eigen.

Suatu persamaan diferensial linier homogen orde dua dengan koefisien konstanta dapat dinyatakan sebagai berikut (Nagle dan Saff, 1996):

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.76)$$

dengan a , b , dan c adalah konstanta riil, dimana $a \neq 0$.

Maka penyelesaian umum dari persamaan (2.76) adalah

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta.

Selanjutnya, jika $y = e^{mx}$, disubstitusikan ke persamaan (2.76), maka didapatkan

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \quad (2.77)$$

Persamaan (2.77) harus sama dengan nol. Hal ini akan terjadi jika dan hanya jika

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (2.78)$$

hal ini mengingat e^{mx} tidak pernah nol.

Akibatnya $y = e^{mx}$ adalah penyelesaian untuk persamaan (2.76) jika dan hanya jika m memenuhi persamaan (2.78). Persamaan (2.78) disebut persamaan karakteristik dari persamaan (2.76) dan akar-akar dari persamaan (2.78) disebut akar-akar karakteristik. Berkenaan dengan persamaan (2.78) ada tiga kasus yang harus ditinjau, yaitu; persamaan (2.78) mempunyai dua akar riil berbeda, akar berulang, atau akar kompleks konjugat (Finizio dan Ladas, 1988).

a) Akar riil berbeda : Jika m_1 dan m_2 dua akar riil berbeda dari persamaan (2.78), maka $e^{m_1 x}$ dan $e^{m_2 x}$ adalah penyelesaian untuk persamaan (2.76).

Sehingga penyelesaian umum persamaan diferensial (2.76) adalah

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \quad (2.79)$$

dimana C_1 dan C_2 konstanta-konstanta sebarang.

- b) Akar berulang : Jika persamaan karakteristik (2.78) mempunyai akar berulang, maka e^{mx} dan xe^{mx} , adalah penyelesaian untuk persamaan (2.76).

Sehingga penyelesaian umum persamaan diferensial (2.76) adalah

$$y(x) = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} \quad (2.80)$$

- c) Akar kompleks konjugat : Jika persamaan karakteristik (2.78) mempunyai akar-akar kompleks konjugat $\alpha \pm \beta i$, maka penyelesaian untuk persamaan (2.76) adalah $e^{\alpha x} \cos \beta x$ dan $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Sehingga penyelesaian umum persamaan diferensial (2.76) adalah

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (2.81)$$

Misalkan $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_1(x, \lambda)$ dan $\tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ adalah penyelesaian partikular linier tak terikat dari persamaan (2.74), maka penyelesaian umumnya dapat ditunjukkan sebagai kombinasi linier berikut ini (Polyanin, 2002):

$$\varphi = C_1 \tilde{\varphi}_1(x, \lambda) + C_2 \tilde{\varphi}_2(x, \lambda) \quad (2.82)$$

dimana C_1 dan C_2 adalah konstanta sebarang.

Substitusikan penyelesaian (2.82) pada kondisi batas (2.70) sehingga menghasilkan sistem linier homogen dari persamaan untuk C_1 dan C_2 , yaitu:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\lambda)C_1 + \varepsilon_{12}(\lambda)C_2 &= 0 \\ \varepsilon_{22}(\lambda)C_1 + \varepsilon_{21}(\lambda)C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

dimana $\varepsilon_{ij}(\lambda) = \left[s_i \varphi'_x + k_i \tilde{\varphi}_j \right]_{x=x_i}$.

Supaya sistem (2.83) mempunyai penyelesaian *nontrivial*, maka determinannya harus sama dengan nol. Pandang persamaan berikut ini:

$$\varepsilon_{11}(\lambda)\varepsilon_{22}(\lambda) - \varepsilon_{12}(\lambda)\varepsilon_{21}(\lambda) = 0 \quad (2.84)$$

Penyelesaian transenden persamaan (2.84) untuk λ , didapatkan nilai eigen $\lambda = \lambda_n$, dimana $n = 1, 2, \dots$. Untuk nilai λ , maka penyelesaian nontrivial dari persamaan (2.83), yaitu:

$$\varphi_n(x) = \varepsilon_{12}(\lambda_n)\tilde{\varphi}_1(x, \lambda_n) - \varepsilon_{11}(\lambda_n)\tilde{\varphi}_2(x, \lambda_n) \quad (2.85)$$

dimana persamaan (2.85) disebut fungsi eigen.

Selanjutnya, tulis kembali persamaan (2.74) dalam bentuk sebagai berikut:

$$[p(x)\varphi'_x(x)]'_x + [\lambda\rho(x) - q(x)]\varphi = 0$$

dimana

$$p(x) = \exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right], \quad q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)} \exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right], \quad \rho(x) = \frac{1}{a(x)} \exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right] \quad (2.86)$$

Hal ini sesuai bahwa $p(x)$, $p'_x(x)$, $q(x)$ dan $\rho(x)$ adalah fungsi kontinu, dimana $p(x) > 0$ dan $\rho(x) > 0$.

Untuk persamaan hiperbolik, penyelesaian masalah nilai awal ditunjukkan dalam bentuk sebagai berikut (Polyanin, 2002):

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) [A_n \psi_{n1}(t) + B_n \psi_{n2}(t)] \quad (2.87)$$

dimana A_n dan B_n adalah sebarang konstanta. Fungsi-fungsi $\psi_{n1}(t)$ dan $\psi_{n2}(t)$ adalah penyelesaian partikular dari persamaan linier (2.75) untuk ψ (dengan $\lambda = \lambda_n$) yang memenuhi kondisi

$$\psi_{n1}(0) = 1, \quad \psi'_{n1}(0) = 0, \quad \psi_{n2}(0) = 0, \quad \psi'_{n2}(0) = 1 \quad (2.88)$$

Substitusikan penyelesaian (2.87) pada kondisi awal (2.71) dan (2.72) sehingga didapatkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = f_1(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(x) = f_2(x)$$

Kalikan persamaan tersebut di atas dengan $\rho(x)\varphi_n(x)$, dan gabungkan hasil yang diperoleh yang berhubungan dengan variabel x pada interval $x_1 \leq x \leq x_2$, sehingga didapatkan koefisien deret *Fourier* (2.87) dalam bentuk

$$A_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \varphi_n(x) f_1(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \varphi_n(x) f_2(x) dx \quad (2.89)$$

dimana $\|\varphi_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \varphi_n^2(x) dx$ dan $\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0$ untuk $n \neq m$.

Persamaan (2.85), (2.87), dan (2.89) merupakan penyelesaian umum masalah nilai batas dan masalah nilai awal untuk persamaan (2.69) sampai persamaan (2.72) untuk $\alpha(t) > 0$.

2.6 Eksistensi dan Ketunggalan Penyelesaian Persamaan Gelombang

2.6.1 Fungsi Kontinu

Definisi 2.2

Misalkan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dan $B \subset A$. Fungsi f dikatakan kontinu di B jika f kontinu di setiap titik $x \in B$ (Guswanto dan Nurshiami, 2006).

Definisi 2.3

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $u \in A$, terdapat suatu $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, u \in A$ yang memenuhi (Bartle dan Sherbet, 2000):

$$|x - u| < \delta(\varepsilon)$$

maka

$$|f(x) - f(u)| < \varepsilon$$

Contoh 2.4

Tunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ merupakan fungsi kontinu seragam.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, u \in A$ yang

memenuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka

$$|f(x) - f(u)| < |x^2 - u^2| = |x - u||x + u| < \delta(\varepsilon)|x + u|$$

Jika diambil $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / |x + u|$ maka

$$|f(x) - f(u)| < \delta(\varepsilon)|x + u| < \frac{\varepsilon}{|x + u|}|x + u| = \varepsilon$$

Jadi, f kontinu seragam.

Definisi 2.4

Sistem dinamik adalah pemetaan yang bersifat C^1 (kontinu dan terdiferensial)

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R} \times S &\rightarrow S \\ (x, t) &\mapsto x_t \end{aligned}$$

dimana S himpunan terbuka dari ruang *Euclid* dan dinyatakan $\phi(x, t) = \phi_t(x)$.

Hirsch dan Smale (1970) menyatakan bahwa pemetaan $\phi_t: S \rightarrow S$ harus memenuhi sifat-sifat:

- a) $\phi_0 : S \rightarrow S$ adalah identitas
- b) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, untuk setiap $t, s \in \mathbb{R}$

2.6.2 Fungsi Lipschitz

Definisi 2.5

Misalkan $A \subset \mathbb{R}$ dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Terdapat nilai konstanta $K > 0$ jika

$$|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$$

untuk setiap $x, u \in A$ (Bartle dan Sherbert, 2000).

Maka f disebut fungsi *Lipschitz* (memenuhi kondisi stabil) pada A . Kondisi $|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$ merupakan fungsi $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ pada interval I yang dikatakan fungsi *Lipschitz* yang dapat diinterpretasikan secara geometris. Jika kondisinya ditulis $|(f(x) - f(u)) / x - u| \leq K$, untuk setiap $x, u \in I$, dan $x \neq u$, maka kualitas nilai yang pasti merupakan gradien dari daerah garis pada $(x, f(x))$ dan $(u, f(u))$. Hal ini merupakan sebuah fungsi f yang memenuhi fungsi *Lipschitz* jika dan hanya jika gradien dari semua daerah garis terletak pada dua titik dari grafik $y = f(x)$ sampai I yang merupakan batas sebarang K .

Teorema 2.1

Jika $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi *Lipschitz*, maka f merupakan fungsi kontinu seragam pada A .

Bukti:

Jika $|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$ terpenuhi dan $\varepsilon > 0$, maka $\delta = \varepsilon / K$. Jika $x, u \in A$ memenuhi $|x - u| < \delta$ maka $|f(x) - f(u)| < K(\varepsilon / K) = \varepsilon$. Oleh karena itu, f merupakan fungsi kontinu seragam di A .

Contoh 2.5

Misalkan $f(x) = x^2$ pada $A = [0, b]$ dengan b konstanta positif.

Untuk menunjukkan bahwa f adalah fungsi *Lipschitz*, maka ambil sebarang $x, u \in [0, b]$. Perhatikan bahwa

$$|f(x) - f(u)| = |x^2 - u^2| = |x + u||x - u| \leq 2b|x - u|$$

Sehingga dengan mengambil $K = 2b$, f merupakan fungsi *Lipschitz*.

Definisi 2.6

Misalkan diberikan fungsi $f : W \rightarrow E$ dimana W adalah himpunan terbuka pada ruang vektor E yang bernorma, dikatakan memenuhi kondisi *Lipschitz* pada W jika ada konstanta K sehingga berlaku

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$$

untuk setiap $x, y \in W$.

K disebut konstanta *Lipschitz* pada f (Hirsch, dkk., 2004).

Definisi 2.7

Pandang persamaan diferensial berikut ini

$$X' = F(X) \tag{2.90}$$

dimana $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diasumsikan F kontinu dan terturunkan (*continuous differentiable*) atau dapat ditulis C^1 . Artinya, F dan turunan pertama parsial ada dan fungsi kontinu pada \mathbb{R}^n .

Penyelesaian sistem ini adalah fungsi terturunkan $X: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ yang terdefinisi pada beberapa interval $J \subset \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $t \in J$

$$X'(t) = F(X(t)) \quad (2.91)$$

Secara geometri, $X(t)$ adalah kurva di \mathbb{R}^n dimana tangen vektor $X'(t)$ sama dengan $F(X(t))$. Pemetaan $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai medan vektor pada \mathbb{R}^n . Kondisi awal untuk penyelesaian $X: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ berbentuk $X(t_0) = X_0$ dimana $t_0 \in J$ dan $X_0 \in \mathbb{R}^n$ (Hirsch, dkk., 2004).

Teorema 2.2 Eksistensi Penyelesaian Masalah Nilai Awal

Diberikan masalah nilai awal sebagai berikut:

$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$

dimana $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Misalkan $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah C^1 . Maka ada penyelesaian tunggal dari masalah nilai awal ini. Lebih tepatnya, ada $a > 0$ dan a penyelesaian tunggal $X: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dari persamaan diferensial ini yang memenuhi kondisi awal $X(0) = X_0$ (Hirsch, dkk., 2004).

Bukti:

Misalkan $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dalam koordinat (x_1, \dots, x_n) pada \mathbb{R}^n , ditulis

$$F(X) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

Misalkan DF_X turunan dari F di titik $X \in \mathbb{R}^n$, turunan ini dapat dilihat dari dua segi, yaitu pertama, DF_X adalah pemetaan linier yang terdefinisi untuk setiap titik $X \in \mathbb{R}^n$, pemetaan ini bersesuaian dengan setiap vektor $U \in \mathbb{R}^n$, yaitu:

$$DF_X(U) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(X + hU) - F(X)}{h}$$

dimana $h \in \mathbb{R}$.

Secara ekuivalen, dalam bentuk matriks DF_X adalah matriks *Jacobian* $n \times n$, yaitu:

$$DF_X = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f_i(x_1, \dots, x_n))$$

Sehingga turunan dapat dipandang sebagai fungsi yang berhubungan dengan pemetaan linier atau matriks untuk setiap titik di \mathbb{R}^n . Oleh karena itu, $DF : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$.

Seperti yang diketahui sebelumnya, fungsi F dikatakan kontinu dan terturunkan (*continuous differentiable*) atau dapat ditulis C^1 , jika setiap turunan parsial dari f_j ada dan kontinu. Akan ditunjukkan F adalah C^1 . Untuk setiap

$X \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan norma $\|DF_X\|$ dari matriks *Jacobian* DF_X , yaitu:

$$\|DF_X\| = \sup_{\|U\|=1} |DF_X(U)|$$

dimana $U \in \mathbb{R}^n$, dengan catatan $\|DF_X\|$ bukan nilai eigen terbesar dari matriks *Jacobian* di X . Maka didapatkan

$$|DF_X(V)| \leq \|DF_X\| \|V\|$$

untuk sebarang vektor $V \in \mathbb{R}^n$. Jika $V = (V/|V|)|V|$, maka didapatkan

$$|DF_x(V)| = \left| DF_x \frac{V}{|V|} \right| |V| \leq |DF_x| |V|$$

karena $V/|V|=1$. Sehingga, jika $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kontinu dan terdiferensial (C^1)

berakibat $\mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$, dimana $X \rightarrow DF_x$, adalah fungsi kontinu.

Misalkan $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ himpunan terbuka. Fungsi $F: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dikatakan fungsi *Lipschitz* pada \mathcal{O} jika ada konstanta K sedemikian sehingga

$$|F(Y) - F(X)| \leq K|Y - X|$$

untuk setiap $X, Y \in \mathcal{O}$. K disebut konstanta *Lipschitz* untuk F . Secara umum, F dikatakan *locally Lipschitz* jika setiap titik di \mathcal{O} mempunyai persekitaran \mathcal{O}' di \mathcal{O} sedemikian sehingga pembatasan F ke \mathcal{O}' adalah *Lipschitz*. Konstanta *Lipschitz* dari $F|_{\mathcal{O}'}$ dapat berubah-ubah sesuai dengan persekitaran \mathcal{O}' .

Pengertian penting lainnya yaitu kekompakan. Himpunan $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ dikatakan kompak jika tertutup dan terbatas. Jika $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu dan \mathcal{C} kompak, maka f terbatas pada \mathcal{C} dan f mencapai maksimum pada \mathcal{C} (Hirsch, dkk., 2004).

Lemma 2.1

Misalkan fungsi $F: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ kontinu dan terturunkan (C^1). Maka F *locally Lipschitz*.

Bukti:

Misalkan fungsi $F: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ kontinu dan terturunkan (C^1) dan misalkan

$X_0 \in \mathcal{O}$. Maka ada $\varepsilon > 0$ jari-jari pada bola tertutup \mathcal{O}_ε dimana \mathcal{O} memuat X_0 . Misalkan K batas atas $\|DF_X\|$ pada \mathcal{O}_ε , dijamin batas $\|DF_X\|$ ada karena DF_X kontinu dan \mathcal{O}_ε kompak. Himpunan \mathcal{O}_ε konveks, oleh karena itu, jika $Y, Z \in \mathcal{O}_\varepsilon$, maka ada segmen garis lurus yang menghubungkan Y ke Z yang termuat di \mathcal{O}_ε . Diberikan $Y + sU \in \mathcal{O}_\varepsilon$, untuk garis lurus ini dimana $U = Z - Y$ dan $0 \leq s \leq 1$. Misalkan $\psi(s) = F(Y + sU)$, dengan menggunakan aturan rantai maka didapatkan

$$\psi'(s) = DF_{Y+sU}(U)$$

Oleh karena itu, maka didapatkan

$$\begin{aligned} F(Z) - F(Y) &= \psi(1) - \psi(0) \\ &= \int_0^1 \psi'(s) ds \\ &= \int_0^1 DF_{Y+sU}(U) ds \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$|F(Z) - F(Y)| \leq \int_0^1 K |U| ds = K |Z - Y|$$

Secara implisit menurut teorema 2.2 yaitu, jika \mathcal{O} konveks dan jika $\|DF_X\| \leq K$ untuk setiap $X \in \mathcal{O}$, maka K adalah konstanta *Lipschitz* untuk $F|_{\mathcal{O}}$.

Misalkan J interval terbuka yang memuat 0 dan $X : J \rightarrow \mathcal{O}$ memenuhi

$$X'(t) = F(X(t))$$

dimana $X(0) = X_0$. Integrasikan kedua sisi persamaan di atas dan didapatkan

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(X(s)) ds$$

Persamaan di atas merupakan bentuk integral dari persamaan diferensial $X' = F(X)$. Jika $X : J \rightarrow \mathcal{O}$ memenuhi persamaan integral ini, maka $X(0) = X_0$ dan X memenuhi $X' = F(X)$. Oleh karena itu bentuk integral dan turunan dari persamaan ini ekuivalen untuk $X : J \rightarrow \mathcal{O}$. Untuk membuktikan eksistensi penyelesaian, akan digunakan bentuk integral dari persamaan diferensial dan asumsi-asumsi sebagai berikut:

- 1) \mathcal{O}_ρ bola tertutup, jari-jari $\rho > 0$ ditengah-tengah X_0
- 2) Ada konstanta *Lipschitz* K untuk F pada \mathcal{O}_ρ
- 3) $|F(X)| \leq M$ pada \mathcal{O}_ρ
- 4) Pilih $a < \min\{\rho / M, 1 / K\}$ dan misalkan $J = [-a, a]$

Langkah pertama, definisikan barisan fungsi U_0, U_1, \dots dari J ke \mathcal{O}_ρ . Kemudian akan dibuktikan fungsi-fungsi ini konvergen seragam menuju fungsi yang memenuhi persamaan diferensial. Untuk memperoleh kekonvergenan pada U_k maka harus memenuhi lemma berikut:

Lemma 2.2

Misalkan $U_k : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, 2, \dots$ adalah barisan fungsi kontinu yang terdefinisi pada interval tertutup J yang memenuhi kondisi berikut (Rudin, 1976):

Diberikan $\varepsilon > 0$, ada $N > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $p, q > N$

$$\max_{t \in J} |U_p(t) - U_q(t)| < \varepsilon$$

Maka ada fungsi kontinu $U : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, sedemikian sehingga

$$\max_{t \in J} |U_k(t) - U(t)| < \varepsilon, \quad k \rightarrow \infty$$

Untuk sebarang t , dimana $|t| \leq a$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t U_k(s) ds = \int_0^t U(s) ds$$

Bukti:

Ambil $\varepsilon_k = \sup |U_k(s) - U(s)|$, maka

$$U_k - \varepsilon_k \leq U \leq U_k + \varepsilon_k$$

sehingga, integral atas dan integral bawah memenuhi

$$\int_0^t (U_k - \varepsilon_k) ds \leq \int U ds \leq \int U ds \leq \int_0^t (U_k + \varepsilon_k) ds$$

sedemikian sehingga

$$0 \leq \int U ds - \int U ds \leq 2\varepsilon_k [s(t) - s(0)]$$

karena $\varepsilon_k \rightarrow 0$ dan $k \rightarrow \infty$, maka integral atas dan integral bawah U sama dan didapatkan

$$\left| \int_0^t U ds - \int_0^t U_k ds \right| \leq \varepsilon_k [s(t) - s(0)]$$

sehingga $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t U_k(s) ds = \int_0^t U(s) ds$ terbukti.

Barisan fungsi U_k didefinisikan secara rekursif dengan menggunakan skema iterasi *Picard*. Misalkan

$$U_0(t) \equiv X_0$$

untuk $t \in J$, didefinisikan

$$U_1(t) = X_0 + \int_0^t F(U_0(s)) ds = X_0 + tF(X_0)$$

karena $|t| \leq a$ dan $|F(X_0)| \leq M$, maka didapatkan

$$|U_1(t) - X_0| = |t| |F(X_0)| \leq aM \leq \rho$$

sehingga $U_1(t) \in \mathcal{O}_\rho$ untuk setiap $t \in J$. Dengan induksi, diasumsikan bahwa

$U_k(t)$ terdefinisi dan $|U_k(t) - X_0| \leq \rho$ untuk setiap $t \in J$. Maka misalkan

$$U_{k+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(U_k(s)) ds$$

Akan ditunjukkan $|U_{k+1}(t) - X_0| \leq \rho$ sedemikian sehingga $U_{k+1}(t) \in \mathcal{O}_\rho$ untuk

setiap $t \in J$. Hal ini akan berakibat barisan untuk U_{k+2}, U_{k+3}, \dots kontinu, yaitu:

$$\begin{aligned} |U_{k+1} - X_0| &\leq \int_0^t |F(U_k(s))| ds \\ &\leq \int_0^t M ds \\ &\leq Ma < \rho \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa konstanta $L \geq 0$, untuk setiap $k \geq 0$ sedemikian sehingga

$$|U_{k+1}(t) - U_k(t)| \leq (aK)^k L$$

Misalkan L maksimum dari $|U_1(t) - U_0(t)|$, $-a \leq t \leq a$. Berdasarkan persamaan di

atas $L \leq aM$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} |U_1(t) - U_0(t)| &= \int_0^t |F(U_1(s)) - F(U_0(s))| ds \\ &\leq \int_0^t K |U_1(s) - U_0(s)| ds \end{aligned}$$

$$|U_1(t) - U_0(t)| \leq aKL$$

Diasumsikan dengan induksi, untuk $k \geq 2$. Sudah terbukti bahwa

$$|U_k(t) - U_{k-1}(t)| \leq (aK)^{k-1} L$$

untuk setiap $|t| < a$. Maka didapatkan

$$\begin{aligned} |U_{k+1}(t) - U_k(t)| &\leq \int_0^t |F(U_k(s)) - F(U_{k-1}(s))| ds \\ &\leq K \int_0^t |U_k(s) - U_{k-1}(s)| ds \\ &\leq (aK)(aK)^{k-1} L = (aK)^k L \end{aligned}$$

Misalkan $\alpha = aK$, sehingga diasumsikan $\alpha < 1$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, pilih bilangan N sehingga untuk sebarang bilangan $r > s > N$ maka didapatkan

$$\begin{aligned} |U_r(t) - U_s(t)| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |U_{k+1}(t) - U_k(t)| \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k L \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga terbukti barisan fungsi U_0, U_1, \dots konvergen seragam menuju fungsi kontinu $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$. Berdasarkan identitas

$$U_{k+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(U_k(s)) ds$$

Dengan memberikan limit pada kedua sisi persamaan di atas, maka didapatkan

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t F(U_k(s)) ds \\ &= X_0 + \int_0^t \left(\lim_{k \rightarrow \infty} F(U_k(s)) \right) ds \end{aligned}$$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(X(s)) ds$$

Oleh karena itu, $X : J \rightarrow \mathcal{O}_\rho$ memenuhi bentuk integral dari persamaan diferensial dan merupakan penyelesaian dari persamaan itu sendiri. Secara umum $X : J \rightarrow \mathcal{O}_\rho$ kontinu dan terturunkan (C^1). Sehingga penyelesaian untuk persamaan diferensial ini ada.

Teorema 2.3 Ketunggalan Penyelesaian untuk Persamaan Gelombang

Misalkan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ terbuka, mulus dan terbatas di $\partial\Omega$. Maka ada satu penyelesaian $u \in \bar{\Omega}_T$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ untuk masalah nilai awal atau masalah nilai batas, yang ditulis sebagai berikut (Kumar dan Kumar, 2010):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f, & \text{dalam } \Omega_T \\ u = g, & \text{pada } \Gamma_T, \Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T \\ u_t = h, & \text{pada } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.92)$$

Bukti :

Misalkan \bar{u} adalah penyelesaian lain dari (2.92). Maka

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - c^2 \Delta \bar{u} = f, & \text{dalam } \Omega_T \\ \bar{u} = g, & \text{pada } \Gamma_T, \Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T \\ \bar{u}_t = h, & \text{pada } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Misalkan $w = u - \bar{u}$, maka w adalah penyelesaian dari

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0, & \text{dalam } \Omega_T \\ w = 0, & \text{pada } \Gamma_T, \Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T \\ w_t = 0, & \text{pada } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Karena penjumlahan antara energi kinetik dan energi potensial menghasilkan energi konservasi, yaitu $E(t) = KE(t) + PE(t)$ maka besarnya energi konservasi kekal. Kekekalan energi berakibat mengubah energi kinetik menjadi energi potensial, begitu pula sebaliknya. Sehingga energi konservasi dapat ditulis

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[w_t^2(x,t) + c^2 |Dw(x,t)|^2 \right] dx \quad (2.93)$$

untuk $0 \leq t \leq T$.

Turunkan persamaan (2.93) terhadap t , maka didapatkan

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[2w_t w_{tt} + 2c^2 Dw Dw_t \right] dx \\ &= \int_{\Omega} w_t w_{tt} dx - \int_{\Omega} c^2 w_t \Delta w dx \end{aligned} \quad (2.94)$$

Berdasarkan identitas *Green*, yaitu:

$$\int_{\Omega} (\psi \Delta \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dx = \int_{\partial \Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} dS$$

Misalkan $\psi = w_t$, $\phi = w$, $\nabla \psi = Dw_t = w_{xt}$, dan $\nabla \phi = Dw = w_x$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_t \Delta w + Dw_t \cdot Dw) dx &= \int_{\partial \Omega} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} dS \\ \int_{\Omega} Dw_t \cdot Dw dx &= - \int_{\Omega} w_t \Delta w dx + \int_{\partial \Omega} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} dS \end{aligned} \quad (2.95)$$

Karena $w=0$ pada Γ_T dan $w_t=0$ pada Γ_T , dimana $\partial \Omega (= \Omega \times \{t=0\})$, maka persamaan (2.95) menjadi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Dw_t \cdot Dw dx &= - \int_{\Omega} w_t \nabla w dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} w_t dS \\ &= - \int_{\Omega} w_t \nabla w dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} (0) dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} Dw_t \cdot Dw \, dx &= -\int_{\Omega} w_t \nabla w \, dx + 0 \\ &= -\int_{\Omega} w_t \nabla w \, dx\end{aligned}$$

Pandang kembali persamaan (2.96) berikut ini:

$$\dot{E}(t) = \int_{\Omega} w_t w_{tt} \, dx - \int_{\Omega} c^2 w_t \Delta w \, dx \quad (2.96)$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\dot{E}(t) = \int_{\Omega} w_t (w_{tt} - c^2 \Delta w) \, dx \quad (2.97)$$

Karena $w_{tt} - c^2 \Delta w = 0$ dalam Ω_T , maka persamaan (2.97) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= \int_{\Omega} w_t (w_{tt} - c^2 \Delta w) \, dx \\ &= \int_{\Omega} w_t (0) \, dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Kemudian integralkan $\dot{E}(t)$, sehingga didapatkan

$$E(t) = E(0) = 0$$

untuk $0 \leq t \leq T$.

Oleh karena itu, $w_t = 0$ dan $Dw = 0$ sepanjang Ω_T , dan

$$\begin{aligned}w &= 0 \\ u - \bar{u} &= 0 \\ u &= \bar{u} \quad \text{dalam } \Omega_T\end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa u adalah unik atau tunggal.

2.7 Kajian Gelombang Elektromagnetik dalam Al-Qur'an

Gerak gelombang dapat dipandang sebagai perpindahan energi dan momentum dari satu titik dalam ruang ke titik lain tanpa perpindahan materi

(Tripler, 1988). Salah satu jenis gelombang menurut arah getar dan arah rambatnya adalah gelombang elektromagnetik. Gelombang elektromagnetik merupakan gelombang transversal yang tidak memerlukan medium untuk perambatannya atau dapat merambat dalam ruang hampa. Pada gelombang elektromagnetik, energi dan momentum dibawa oleh medan listrik dan magnet yang dapat merambat melalui ruang bebas.

Cahaya merupakan salah satu bentuk gelombang elektromagnetik karena kecepatan cahaya sama dengan kecepatan gelombang elektromagnetik. Kecepatan cahaya ini sendiri telah dijelaskan secara tersirat dalam Al-Qur'an surat As-Sajdah ayat 5, Allah berfirman:

يُدَبِّرُ الْأَمْرَ مِنَ السَّمَاءِ إِلَى الْأَرْضِ ثُمَّ يَعْرُجُ إِلَيْهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ أَلْفَ سَنَةٍ مِمَّا تَعُدُّونَ ﴿٥﴾

Artinya: *Dia mengatur urusan dari langit ke bumi, kemudian (urusan) itu naik kepadanya dalam satu hari yang kadarnya adalah seribu tahun menurut perhitunganmu.*

Berdasarkan ayat tersebut di atas, tersirat adanya yang menjalankan urusan dari langit ke bumi, kemudian naik kembali menghadap kepada-Nya. Dimana dijelaskan bahwa yang membawa urusan naik kepada-Nya adalah malaikat. Malaikat diciptakan Allah dari cahaya (*nur*) dan kecepatan malaikat turun dari langit ke bumi kemudian kembali menghadap Allah dalam 1 hari yang lamanya sama dengan 1000 tahun menurut ukuran manusia (Wardhana, 2005). Dari pemikiran ini diketahui bahwa Al-Qur'an telah lebih dahulu memuat tentang adanya gelombang elektromagnetik meskipun hanya tersirat.

Kecepatan malaikat (kecepatan cahaya) melaksanakan urusan dari langit ke bumi dan kemudian naik (kembali) lagi menghadap kepada-Nya dalam waktu satu hari yang lamanya 1000 tahun menurut ukuran manusia, adalah suatu isyarat adanya perhitungan mengenai kecepatan cahaya. Dalam hal ini Allah memberi isyarat adanya jarak yang ditempuh malaikat, lamanya (waktu), dan kecepatannya yang secara matematis dapat dituliskan:

Jarak yang ditempuh = (kecepatan cahaya) \times (lama waktu tempuh)

Atau secara fisika dan mekanika dapat ditulis:

$$s = v \times t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

Jarak yang ditempuh (s) dan lama waktu tempuh (t) dapat dihitung sebagaimana yang telah dilakukan oleh Dr. Mansour Hasaf El-Nabi, seorang ahli astrofisika Mesir yang menemukan cara penghitungan kecepatan cahaya.

Dari perhitungan yang dilakukan oleh Dr. Mansour Hasaf El-Nabi diperoleh kecepatan cahaya sebesar 299.792,5 km/detik atau jika dibulatkan menjadi 3×10^8 km/detik. Hasil yang diperoleh ini sama dengan kecepatan cahaya yang diketahui saat ini. Hal ini menunjukkan bahwa Al-Qur'an benar-benar dapat dipakai sebagai rujukan ilmu pengetahuan sebagaimana dalam firman Allah surat Al-Jaatsiyah ayat 13 yang berbunyi:

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِي السَّمٰوٰتِ وَمَا فِي الْاَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُ ۗ اِنَّ فِيْ ذٰلِكَ لٰآيٰتٍ لِّقَوْمٍ

يَتَفَكَّرُوْنَ ﴿١٣﴾

Artinya: *Dan dia Telah menundukkan untukmu apa yang ada di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya.*

Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir.

Ayat di atas menjelaskan bahwasanya Allah memberikan sebagian dari ilmu-Nya kepada manusia untuk mengeluarkan manusia dari kegelapan ilmu pengetahuan. Banyak ilmu pengetahuan yang semula tidak diketahui manusia, akhirnya menjadi tahu ilmu pengetahuan melalui Al-Qur'an (Wardhana, 2005).

Pemahaman Al-Qur'an antara manusia yang satu dengan manusia lainnya walaupun hidup pada satu zaman pun akan berbeda karena pemahaman seseorang tergantung pada kecerdasan, tingkat pendidikan, bidang ilmu yang digelutinya, kemajuan ilmu pengetahuan kondisi sosialnya lingkungan sekitarnya, sehingga dari ayat yang sama mungkin saja akan memberikan tafsiran yang berbeda dalam hal kedalaman penafsirannya. Demikianlah, Al-Qur'an, dapat memberikan bermacam-macam makna tergantung dari sudut pandang ilmu pengetahuan seseorang. Pendapat yang demikian ini juga didukung oleh pemikir Islam bernama Mohammed Arkoun yang menyatakan bahwa Al-Qur'an memberikan kemungkinan arti yang tidak terbatas, ayat-ayatnya selalu terbuka untuk interpretasi baru. Penafsiran Al-Qur'an seolah tidak pernah selesai, karena setiap saat bisa muncul sehingga Al-Qur'an bersifat dinamik karena dapat mengikuti perkembangan zaman (Wardhana, 2004).

Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi banyak ditemukan penemuan-penemuan baru. Misalnya perkembangan teknologi mesin membuat banyak pabrik atau industri yang menggantikan tenaga manusia dengan mesin, keberhasilan para ilmuwan dalam kloning hewan mengundang wacana untuk melakukan kloning terhadap manusia, dan lain sebagainya. Namun, tidak

semua ilmu pengetahuan dapat diaplikasikan karena manusia mempunyai batas atas apa yang diketahuinya karena manusia hanya diberikan Tuhan sedikit ilmu pengetahuan yang berguna bagi keberlangsungan hidup manusia. Allah memberikan manusia batasan tentang apa yang boleh diketahui manusia dan yang tidak boleh diketahui manusia. Hal ini dijelaskan Allah dalam surat Al-Israa' ayat 85, yang berbunyi:

وَسْأَلُونَكَ عَنِ الرُّوحِ قُلِ الرُّوحُ مِنْ أَمْرِ رَبِّي وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا ﴿٨٥﴾

Artinya: *Dan mereka bertanya kepadamu tentang roh. Katakanlah: “Roh itu termasuk urusan Tuhan-ku, dan tidaklah kamu diberi pengetahuan melainkan sedikit”.*

Ayat di atas menjelaskan bahwasanya Allah SWT tidak memperbolehkan mengkaji atau mempertanyakan tentang roh secara mendalam karena roh merupakan rahasia Allah SWT dan hanya Allah yang benar-benar mengetahui. Sedangkan manusia cukup diberikan sedikit pengetahuan tentang roh. Berdasarkan ayat tersebut, tersirat bahwa manusia mempunyai batas-batas tertentu dalam mengkaji ilmu pengetahuan dan teknologi.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Eksistensi dan Ketunggalan Penyelesaian untuk Persamaan Maxwell

Pada subbab ini akan dijelaskan analisis eksistensi dan ketunggalan penyelesaian untuk persamaan Maxwell untuk medan listrik E_z dan medan magnet H_y dimana masing-masing secara beturut-turut akan dijelaskan di 3.1.1 dan 3.1.2 sebagai berikut:

3.1.1 Analisis Eksistensi Penyelesaian untuk Persamaan Maxwell

Persamaan Maxwell dapat dinyatakan kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (3.1)$$

dan

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3.2)$$

Pandang persamaan (3.1), kalikan persamaan (3.1) dengan μ , kemudian turunkan terhadap t , maka didapatkan

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} \quad (3.3)$$

Jika ruas kanan persamaan (3.3) dipindahkan ke ruas kiri, maka didapatkan

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} = 0 \quad (3.4)$$

Selanjutnya, pandang persamaan (3.2) dan turunkan terhadap x , sehingga didapatkan

$$\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) dapat ditulis kembali menjadi bentuk

$$\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \quad (3.6)$$

Kemudian, jumlahkan persamaan (3.4) dan (3.6), sehingga didapatkan

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \quad (3.7)$$

Jika dimisalkan $\mu \varepsilon = 1/v^2$, maka persamaan (3.7) dapat ditulis

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \quad (3.8)$$

Persamaan (3.8) dapat ditulis kembali menjadi bentuk

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \quad (3.9)$$

Persamaan (3.9) disebut linier karena koefisien v^2 tidak tergantung pada variabel x dan t . Persamaan ini juga dikatakan orde dua karena turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, yaitu $\partial^2 E_z / \partial t^2$ dan $\partial^2 E_z / \partial x^2$, dan juga persamaan ini disebut homogen karena $\partial^2 E_z / \partial t^2 - v^2 (\partial^2 E_z / \partial x^2) = 0$. Oleh karena itu, persamaan (3.9) dikatakan persamaan diferensial parsial linier homogen orde dua.

Selanjutnya, akan dilakukan analisis eksistensi penyelesaian untuk medan listrik E_z . Menurut Hirsch, dkk. (2004) analisis eksistensi penyelesaian persamaan diferensial selalu didasarkan pada kekontinuan atau kondisi *Lipschitz*.

Pada kondisi awal, harus ditinjau bahwa $E_z = E_z(x(s), 0) = \sin(x)$ terdefinisi, dengan memperhatikan definisi 2.4, yaitu memenuhi kaidah sebagai berikut:

(i) $\phi_0 : S \rightarrow S$ adalah identitas

$$\phi_0 : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$$

$$(\sin(x), 0) \mapsto \sin(x)$$

Artinya, $\phi_0(\sin(x)) = \sin(x) = f_0(x)$ terdefinisi. Selanjutnya, $\phi_0(\sin(x))$ adalah identitas.

(ii) Komposisi $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, untuk setiap $t, s \in \mathbb{R}$

$$x_0 \rightarrow \phi_0(x_0) = \sin(x_0)$$

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow \phi_1(x_1) &= \phi_1(x_0 + tx_0) \\ &= \sin(x_0 + tx_0) \\ &= \sin(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 \rightarrow \phi_2(x_2) &= \phi_2(x_1 + tx_2) \\ &= \sin(x_1 + tx_2) \\ &= \sin(x_2) \end{aligned}$$

Didapatkan $f(x) = \sin(x)$ terdefinisi pada interval $[a, b]$, untuk setiap $b > a$. Maka harus dipenuhi kondisi berikut:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0| \quad (3.10)$$

untuk setiap $K \in \mathbb{R}$.

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$, maka didapatkan

$$\begin{aligned} |\sin z| &\leq |z| \\ |\cos z| &\leq 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)$$

Karena $f(x_0)$ terjamin eksistensinya, maka persamaan (3.10) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq K|x - x_0| \quad (3.12)$$

untuk setiap $x, x_0 \in A$. Berdasarkan persamaan (3.12), maka K merupakan batas atas dan K disebut konstanta *Lipschitz* untuk $\sin(x)$. Selanjutnya, untuk menunjukkan K terkecil maka dibentuk persekitaran x_0 dengan jari-jari b , sehingga terbentuk barisan

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{x_0, (x_0 + \delta), \dots, (x_0 + n\delta)\} \quad (3.13)$$

Untuk menunjukkan bahwa $\sin(x)$ adalah fungsi *Lipschitz*, maka ambil sebarang $x, x_0 \in A$. Artinya, $|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq K|\sin(x) - \sin(x_0)|$ terpenuhi dan ada $\varepsilon > 0$, maka diperoleh $\delta = \varepsilon / K$. Karena $x, x_0 \in A$ memenuhi $|x - x_0| < \delta$, maka didapatkan

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(x_0)| &\leq K|\sin(x) - \sin(x_0)| \\ &\leq K \frac{\varepsilon}{K} \\ &< \varepsilon \end{aligned} \quad (3.14)$$

Artinya, selalu dijamin ada K , sehingga dapat dinyatakan kondisi *Lipschitz*, yaitu:

$$\begin{aligned} K|f(x) - f(x_0)| &\leq K|x - x_0| \\ &\leq K\delta \end{aligned}$$

$$K|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (3.15)$$

Menurut teorema 2.1, jika $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi *Lipschitz*, maka f merupakan fungsi kontinu seragam pada interval $[a, b]$, untuk setiap $b > a$.

Selanjutnya, akan dianalisis kekonvergenan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_0(s) &= \sin(x_0) \\ x_1(s) &= \sin(x_0) + \int_c (\sin(x_0)) \\ &= \sin(x_0) + \sin(x_0)s \\ x_2(s) &= \sin(x_0) + \int_c (\sin(x_0) + \sin(x_0)s) ds \\ &= \sin(x_0) + \left(\sin(x_0)s + \frac{1}{2} \sin(x_0)s^2 \right) \\ &\vdots \\ x_{k+1}(s) &= \sin(x_0) + \int_c x_k ds \end{aligned} \quad (3.16)$$

Misalkan $x_0 = \sin(x_0)$, maka persamaan (3.16) dapat ditulis

$$x_{k+1}(s) = x_0 + \frac{s}{1!} x_0 + \frac{s^2}{2!} x_0 + \frac{s^3}{3!} x_0 + \dots + \frac{s^n}{n!} x_0 \quad (3.17)$$

Sehingga, persamaan (3.17) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{k+1}(s) = x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} \quad (3.18)$$

Deret $\lim \frac{s^i}{i!} = b$ konvergen ke b . Jadi, terbukti bahwa $\sin(x_0)$ konvergen.

Selanjutnya, dengan prosedur yang analog dapat diselesaikan persamaan Maxwell untuk medan magnet H_y .

Pandang persamaan (3.2), kalikan persamaan (3.2) dengan ε , kemudian turunkan terhadap t , maka didapatkan

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} \quad (3.19)$$

Jika ruas kanan persamaan (3.19) dipindahkan ke ruas kiri, maka didapatkan

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = 0 \quad (3.20)$$

dan turunkan persamaan (3.1) terhadap x , sehingga didapatkan

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad (3.21)$$

Jika ruas kanan persamaan (3.21) dipindahkan ke ruas kiri, maka didapatkan

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.22)$$

Kemudian, jumlahkan persamaan (3.20) dan (3.22), sehingga didapatkan

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.23)$$

Jika dimisalkan $\mu\varepsilon = 1/v^2$, maka persamaan (3.23) dapat ditulis

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.24)$$

Persamaan (3.24) dapat ditulis kembali menjadi bentuk

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.25)$$

Persamaan (3.25) disebut linier karena koefisien v^2 tidak tergantung pada variabel x dan t . Persamaan ini juga dikatakan orde dua karena turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, yaitu $\partial^2 H_y / \partial t^2$ dan $\partial^2 H_y / \partial x^2$, dan juga persamaan ini disebut homogen karena $\partial^2 H_y / \partial t^2 - v^2 (\partial^2 H_y / \partial x^2) = 0$. Oleh

karena itu, persamaan (3.25) dikatakan persamaan diferensial parsial linier homogen orde dua.

Pada kondisi awal, harus ditinjau bahwa $H_y = H_y(x(s), 0) = \cos(x)$ terdefinisi, dengan memperhatikan definisi 2.4, yaitu memenuhi kaidah sebagai berikut:

(i) $\phi_0 : S \rightarrow S$ adalah identitas

$$\phi_0 : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$$

$$(\cos(x), 0) \mapsto \cos(x)$$

Artinya, $\phi_0(\cos(x)) = \cos(x) = f_0(x)$ terdefinisi. Selanjutnya, $\phi_0(\cos(x))$ adalah identitas.

(ii) Komposisi $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, untuk setiap $t, s \in \mathbb{R}$

$$x_0 \rightarrow \phi_0(x_0) = \cos(x_0)$$

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow \phi_1(x_1) &= \phi_1(x_0 + tx_0) \\ &= \cos(x_0 + tx_0) \\ &= \cos(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 \rightarrow \phi_2(x_2) &= \phi_2(x_1 + tx_1) \\ &= \cos(x_1 + tx_1) \\ &= \cos(x_2) \end{aligned}$$

Didapatkan $f(x) = \cos(x)$ terdefinisi pada interval $[a, b]$, untuk setiap $b > a$. Maka harus dipenuhi kondisi berikut:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0| \quad (3.26)$$

untuk setiap $K \in \mathbb{R}$.

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$, maka didapatkan

$$\begin{aligned} |\sin z| &\leq |z| \\ |\sin z| &\leq 1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$

Karena $f(x_0)$ terjamin eksistensinya, maka persamaan (3.26) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leq K|x - x_0| \quad (3.28)$$

untuk setiap $x, x_0 \in A$. Berdasarkan persamaan (3.27), maka K merupakan batas atas dan K disebut konstanta *Lipschitz* untuk $\cos(x)$. Selanjutnya, untuk menunjukkan K terkecil maka dibentuk persekitaran x_0 dengan jari-jari b , sehingga terbentuk barisan

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{x_0, (x_0 + \delta), \dots, (x_0 + n\delta)\} \quad (3.29)$$

Untuk menunjukkan bahwa $\cos(x)$ adalah fungsi *Lipschitz*, maka ambil sebarang $x, x_0 \in A$. Artinya, $|\cos(x) - \cos(x_0)| \leq K|x - x_0|$ terpenuhi dan ada $\varepsilon > 0$, maka diperoleh $\delta = \varepsilon / K$. Karena $x, x_0 \in A$ memenuhi $|x - x_0| < \delta$, maka didapatkan

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(x_0)| &\leq K|\sin(x) - \sin(x_0)| \\ &\leq K \frac{\varepsilon}{K} \\ &< \varepsilon \end{aligned} \quad (3.30)$$

Artinya, selalu dijamin ada K , sehingga dapat dinyatakan kondisi *Lipschitz*, yaitu:

$$\begin{aligned} K|f(x) - f(x_0)| &\leq K|x - x_0| \\ &\leq K\delta \end{aligned}$$

$$K|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (3.31)$$

Menurut teorema 2.1, jika $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi *Lipschitz*, maka f merupakan fungsi kontinu seragam pada interval $[a, b]$, untuk setiap $b > a$.

Selanjutnya, akan dianalisis kekonvergenan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_0(s) &= \cos(x_0) \\ x_1(s) &= \cos(x_0) + \int_c (\cos(x_0)) ds \\ &= \cos(x_0) + \cos(x_0)s \\ x_2(s) &= \cos(x_0) + \int_c (\cos(x_0) + \cos(x_0)s) ds \\ &= \cos(x_0) + \left(\cos(x_0)s + \frac{1}{2}\cos(x_0)s^2 \right) \\ &\vdots \\ x_{k+1}(s) &= \cos(x_0) + \int_c x_k ds \end{aligned} \quad (3.32)$$

Misalkan $x_0 = \cos(x_0)$, maka persamaan (3.32) dapat ditulis

$$x_{k+1}(s) = x_0 + \frac{s}{1!}x_0 + \frac{s^2}{2!}x_0 + \frac{s^3}{3!}x_0 + \dots + \frac{s^n}{n!}x_0 \quad (3.33)$$

Sehingga, persamaan (3.33) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{k+1}(s) = x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} \quad (3.34)$$

Deret $\lim \frac{s^i}{i!} = b$ konvergen ke b . Jadi, terbukti bahwa $\cos(x_0)$ konvergen.

Berdasarkan analisis eksistensi penyelesaian masalah nilai awal yang telah dilakukan di atas, dapat disimpulkan bahwa eksistensi penyelesaian persamaan Maxwell dengan masalah nilai awal terpenuhi.

3.1.2 Analisis Ketunggalan Penyelesaian untuk Persamaan Maxwell

Menurut Kumar dan Kumar (2010) analisis ketunggalan penyelesaian masalah nilai awal untuk persamaan Maxwell satu dimensi untuk medan listrik E_z dan untuk medan magnet H_y dapat dikerjakan dengan metode energi konservasi sebagai berikut:

Misalkan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ terbuka, mulus dan terbatas di $\partial\Omega$. Maka ada satu penyelesaian $E_z \in C^2(\bar{\Omega}_T)$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ untuk masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk medan listrik E_z , yang ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= 0, & \text{dalam } \Omega_T \\ E_z &= \sin(x), & \text{pada } \Gamma_T, \text{ dimana } \Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \sin(x), & \text{pada } \Omega \times \{t = 0\} \\ E_z(0, t) &= 0 & \text{pada } (0, T) \times \partial\Omega \\ E_z(l, t) &= 0 & \text{pada } (0, T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

Bukti :

Andaikan E_z mempunyai lebih dari satu penyelesaian. Misalkan E_z dan \bar{E}_z adalah penyelesaian untuk medan listrik E_z , dimana $E_z \neq \bar{E}_z$. Maka masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk \bar{E}_z dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{E}_z}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \bar{E}_z}{\partial x^2} &= 0, & \text{dalam } \Omega_T \\ \bar{E}_z &= \sin(x), & \text{pada } \Gamma_T, \text{ dimana } \Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T \\ \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \sin(x), & \text{pada } \Omega \times \{t = 0\} \\ \bar{E}_z(0, t) &= 0 & \text{pada } (0, T) \times \partial\Omega \\ \bar{E}_z(l, t) &= 0 & \text{pada } (0, T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

Misalkan $w = E_z - \bar{E}_z$, maka masalah nilai awal untuk w adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ dalam } \Omega_T \quad (3.35)$$

dengan kondisi awal

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= E_z(x, 0) - \bar{E}_z(x, 0) \\ &= \sin(x) - \sin(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pada Γ_T , dimana $\Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T$ dan

$$\begin{aligned} w_t(x, 0) &= E_{z_t}(x, 0) - \bar{E}_{z_t}(x, 0) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \sin(x) - \frac{1}{\varepsilon} \sin(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pada $\Omega \times \{t = 0\}$.

dan dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} w(0, t) &= E_z(0, t) - \bar{E}_z(0, t) = 0 \\ w(l, t) &= E_z(l, t) - \bar{E}_z(l, t) = 0 \end{aligned}$$

Pandang definisi energi kinetik (KE) berikut ini:

$$KE(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w_t^2(x, t) dx \quad (3.36)$$

Diasumsikan tidak ada nilai awal dikarenakan interval $|x| \leq \mathbb{R}$ besar, sehingga integral di atas konvergen karena kecepatan perambatan cahaya. Akan ditunjukkan energi kinetik (3.36) kekal sepanjang waktu. Turunkan persamaan (3.36) terhadap t , sehingga didapatkan

$$\frac{\partial}{\partial t} KE(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2w_t(x, t)w_{tt}(x, t) dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t} KE(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_t(x,t)w_u(x,t) dx \quad (3.37)$$

Substitusikan $w_u(x,t) = v^2 w_{xx}$ pada persamaan (3.37), sehingga didapatkan

$$\frac{\partial}{\partial t} KE(t) = v^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_t(x,t)w_{xx}(x,t) dx \quad (3.38)$$

Secara umum, besar kuantitas persamaan (3.38) sangat besar. Dalam kasus ini, perbedaan energi kinetik dan energi potensial (PE) akan selalu ada. Hitung integral di ruas kanan persamaan (3.38) sehingga didapatkan

$$\frac{\partial}{\partial t} KE(t) = v^2 \left(w_t(x,t)w_x(x,t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} w_{xt}(x,t)w_x(x,t) dx \right) \quad (3.39)$$

Dikarenakan kecepatan perambatan cahaya, maka $w_t(x,t)w_x(x,t) \Big|_{-\infty}^{\infty}$ dianggap tidak ada, sehingga persamaan (3.39) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} KE(t) = -v^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_{xt}(x,t)w_x(x,t) dx \quad (3.40)$$

Kemudian didefinisikan energi potensial (PE) sebagai berikut:

$$PE(t) = \frac{1}{2} v^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_x^2(x,t) dx \quad (3.41)$$

Diketahui bahwa

$$\frac{\partial}{\partial t} KE(t) = -\frac{\partial}{\partial t} PE(t) \quad (3.42)$$

atau dapat pula ditulis

$$\frac{\partial}{\partial t} (KE(t) + PE(t)) = 0 \quad (3.43)$$

Karena penjumlahan antara energi kinetik dan energi potensial menghasilkan energi konservasi, yaitu $E(t) = KE(t) + PE(t)$ maka besarnya energi konservasi kekal. Kekekalan energi berakibat mengubah energi kinetik menjadi energi potensial, begitu pula sebaliknya. Sehingga energi konservasi dapat ditulis

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (w_t^2(x,t) + v^2 w_x^2(x,t)) \quad (3.44)$$

Kalikan persamaan (3.35) dengan w_t dan turunkan terhadap x , sehingga didapatkan

$$\int_0^l w_t w_{tt} dx - v^2 \int_0^l w_t w_{xx} dx = 0 \quad (3.45)$$

Misalkan $w_t w_{tt}$ ditulis kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_t w_{tt} &= \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

dan $w_t w_{xx}$ ditulis kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_t w_{xx} &= \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \\ &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Substitusikan persamaan (3.46) dan (3.47) pada persamaan (3.45) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - v^2 \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx = 0 \\
 & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx = 0 \\
 & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_0^l = 0 \\
 & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 \left(\frac{\partial w(l,t)}{\partial x} \frac{\partial w(l,t)}{\partial t} - \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

karena $w(0,t) = w(l,t) = 0$, maka $w_x(0,t) = w_x(l,t) = 0$, sehingga persamaan (3.48) menjadi

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 \left((0) \frac{\partial w(l,t)}{\partial t} - (0) \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} \right) = 0 \\
 & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 (0) = 0 \\
 & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) = 0 \\
 & \frac{\partial E(t)}{\partial t} = 0
 \end{aligned}$$

Karena $\partial E(t)/\partial t = 0$, maka diperoleh $E(t) = 0$, hal ini berakibat $w(x,t) = 0$, untuk setiap x dan t . Substitusikan $w(x,t) = 0$ pada $w(x,t) = E_z(x,t) - \bar{E}_z(x,t)$, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 w(x,t) &= E_z(x,t) - \bar{E}_z(x,t) = 0 \\
 E_z(x,t) &= \bar{E}_z(x,t) \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi dengan $E_z(x,t) \neq \bar{E}_z(x,t)$. Oleh karena itu pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa medan listrik $E_z(x,t)$ mempunyai satu penyelesaian.

Selanjutnya, secara analog untuk membuktikan ketunggalan penyelesaian masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk medan magnet H_y dilakukan dengan prosedur sebagai berikut:

Misalkan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ terbuka, mulus dan terbatas di $\partial\Omega$. Maka ada satu penyelesaian $H_y \in C^2(\bar{\Omega}_T)$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ untuk masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk medan magnet H_y , yang ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} &= 0, & \text{dalam } \Omega_T \\ H_y &= \cos(x), & \text{pada } \Gamma_T, \text{ dimana } \Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \cos(x), & \text{pada } \Omega \times \{t = 0\} \\ H_y(0, t) &= 0 & \text{pada } (0, T) \times \partial\Omega \\ H_y(l, t) &= 0 & \text{pada } (0, T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

Bukti :

Andaikan H_y mempunyai lebih dari satu penyelesaian. Misalkan H_y dan \bar{H}_y adalah penyelesaian untuk medan magnet H_y , dimana $H_y \neq \bar{H}_y$. Maka masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk \bar{H}_y dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial x^2} &= 0, & \text{dalam } \Omega_T \\ \bar{H}_y &= \cos(x), & \text{pada } \Gamma_T, \text{ dimana } \Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T \\ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \cos(x), & \text{pada } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_y(0,t) &= 0 && \text{pada } (0,T) \times \partial\Omega \\ \bar{H}_y(l,t) &= 0 && \text{pada } (0,T) \times \partial\Omega\end{aligned}$$

Misalkan $m = H_y - \bar{H}_y$, maka masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk m adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = 0, \quad \text{dalam } \Omega_T \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}m(x,0) &= H_y(x,0) - \bar{H}_y(x,0) \\ &= \cos(x) - \cos(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

pada Γ_T , dimana $\Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T$ dan dengan kondisi awal

$$\begin{aligned}m_t(x,0) &= H_{y_t}(x,0) - \bar{H}_{y_t}(x,0) \\ &= -\frac{1}{\mu} \cos(x) - \left(-\frac{1}{\mu} \cos(x) \right) \\ &= -\frac{1}{\mu} \cos(x) + \frac{1}{\mu} \cos(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

pada $\Omega \times \{t=0\}$.

dan dengan kondisi batas

$$\begin{aligned}m(0,t) &= H_y(0,t) - \bar{H}_y(0,t) = 0 \\ m(l,t) &= H_y(l,t) - \bar{H}_y(l,t) = 0\end{aligned}$$

Kalikan persamaan (3.50) dengan m_t dan turunkan terhadap x , sehingga didapatkan

$$\int_0^l m_t m_{tt} dx - v^2 \int_0^l m_t m_{xx} dx = 0 \quad (3.51)$$

Misalkan $m_t m_{tt}$ ditulis kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 m_t m_{tt} &= \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial m}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

dan $m_t m_{xx}$ ditulis kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 m_t m_{xx} &= \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \\
 &= \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial t} \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial t} \\
 &= \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial t} \frac{\partial m}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial t} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Substitusikan persamaan (3.52) dan (3.53) pada persamaan (3.51) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\int_0^l \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 dx - v^2 \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 \right) dx = 0 \\
 &\frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial t} \right) dx = 0 \\
 &\frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial t} \Big|_0^l = 0 \\
 &\frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 \left(\frac{\partial m(l,t)}{\partial x} \frac{\partial m(l,t)}{\partial t} - \frac{\partial m(0,t)}{\partial x} \frac{\partial m(0,t)}{\partial t} \right) = 0 \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

karena $m(0,t) = m(l,t) = 0$, maka $m_x(0,t) = m_x(l,t) = 0$, sehingga persamaan

(3.54) menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 \left((0) \frac{\partial m(l,t)}{\partial t} - (0) \frac{\partial m(0,t)}{\partial t} \right) = 0 \\ & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) - v^2 (0) = 0 \\ & \frac{1}{2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 - v^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) = 0 \\ & \frac{\partial E(t)}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Karena $\partial E(t)/\partial t = 0$, maka diperoleh $E(t) = 0$, hal ini berakibat $m(x,t) = 0$, untuk setiap x dan t . Substitusikan $w(x,t) = 0$ pada $w(x,t) = E_z(x,t) - \bar{E}_z(x,t)$, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} w(x,t) &= E_z(x,t) - \bar{E}_z(x,t) = 0 \\ E_z(x,t) &= \bar{E}_z(x,t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Hal ini kontradiksi dengan $E_z(x,t) \neq \bar{E}_z(x,t)$. Oleh karena itu pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa medan magnet $H_y(x,t)$ mempunyai satu penyelesaian.

Berdasarkan analisis ketunggalan penyelesaian masalah nilai awal dan masalah nilai batas yang telah dilakukan di atas, dapat disimpulkan bahwa penyelesaian masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk persamaan Maxwell tunggal atau unik.

3.2 Penyelesaian Analitik Persamaan Maxwell

Pada subbab ini akan dijelaskan penyelesaian masalah nilai awal dan masalah nilai batas dimana masing-masing secara berturut-turut akan dijelaskan di

3.2.1 dan 3.2.2 sebagai berikut:

3.2.1 Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell

Pada penyelesaian masalah nilai awal persamaan Maxwell satu dimensi untuk medan listrik E_z dan untuk medan magnet H_y , dikerjakan dengan langkah penyelesaian menggunakan metode *D'Alembert*.

Persamaan Maxwell untuk medan listrik E_z dapat dinyatakan kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \quad (3.56)$$

dengan kondisi awal untuk medan listrik $E_z(x, t)$ dinyatakan sebagai berikut (Zauderer, 2006):

$$E_z(x, 0) = \sin(x) = f(x) \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial E_z(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \sin(x) = g(x) \quad (3.58)$$

Persamaan (3.56) dapat dikerjakan dengan faktorisasi operator diferensial, yaitu:

$$\frac{\partial^2 E_z(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_z(x, t)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) E_z(x, t) = 0 \quad (3.59)$$

Jika dimisalkan $(\partial/\partial t - v\partial/\partial x)E_z(x, t) = w(x, t)$, maka persamaan (3.59) dapat ditulis

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) w(x, t) = 0 \quad (3.60)$$

Berdasarkan persamaan (3.59) dan (3.60), maka persamaan (3.56) dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial parsial orde satu sebagai berikut:

$$\frac{\partial E_z(x, t)}{\partial t} - v \frac{\partial E_z(x, t)}{\partial x} = w(x, t) \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (3.62)$$

Langkah pertama adalah menyelesaikan persamaan (3.62), dengan memberikan nilai awal $w(x,0) = a(x)$ dan diasumsikan laminer $x = \tau$, maka didapatkan

$$x_0 = \tau, \quad t_0 = 0, \quad w_0 = a(\tau)$$

sehingga dapat disimpulkan kurva-kurva karakteristik dari persamaan (3.64), dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{ds} = v, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \text{dan} \quad \frac{dw}{ds} = 0$$

Kemudian, integralkan semua komponen di atas, yaitu $\int_C 1 dx = \int_C v ds$, maka diperoleh $x = vs$ dan $\int_C 1 dt = \int_C 1 ds$, maka diperoleh $t = s$ dan $\int_C 1 dw = \int_C 0 ds$, maka diperoleh $w = 0$. Sehingga didapatkan penyelesaian untuk kurva-kurva karakteristik dari persamaan (3.62) dengan nilai awalnya yaitu:

$$x(\tau, s) = vs + \tau \quad \text{dan} \quad t(\tau, s) = s \quad \text{dan} \quad w(\tau, s) = a(\tau)$$

dimana persamaan pertama dapat ditulis $\tau = x - vs$, untuk setiap $s = t$ maka dapat dinyatakan $\tau = x - vt$. Selanjutnya, substitusikan $\tau = x - vt$ pada $w(\tau, s) = a(\tau)$ sehingga didapatkan

$$w(\tau, s) = a(\tau) = a(x - vt) \quad (3.63)$$

sehingga diperoleh kondisi awal untuk $w(x,t)$ dari persamaan (3.61), yaitu:

$$w(x,0) = g(x) - vf'(x)$$

Kemudian, dengan persamaan (3.63) maka didapatkan penyelesaian untuk persamaan (3.62), yaitu:

$$w(x,t) = g(x-vt) - vf'(x-vt) \quad (3.64)$$

Substitusikan persamaan (3.64) pada persamaan (3.61), sehingga didapatkan

$$\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} - v \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x} = g(x-vt) - vf'(x-vt) \quad (3.65)$$

sehingga dapat disimpulkan kurva-kurva karakteristik dari persamaan (3.65),

yaitu:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = -v, \quad \text{dan} \quad \frac{dE_z}{ds} = g(x-vt) - vf'(x-vt)$$

Kemudian, integralkan semua komponen di atas, yaitu $\int_C 1 dt = \int_C 1 ds$, maka

diperoleh $t = s$ dan $\int_C 1 dx = \int_C -v ds$, maka diperoleh $x = -vs$ dan

$$\int_C 1 dE_z = \int_C (g(x-vt) - vf'(x-vt)) ds, \quad \text{maka diperoleh} \quad E_z = \int_C (g(x-vt) - vf'(x-vt)) ds.$$

Jika pada kondisi awal gelombang diasumsikan laminar $x = \tau$, maka didapatkan

$$x = \tau - vs \quad \text{dan} \quad t = 0 \quad \text{dan} \quad E_z(x,0) = f(\tau) \quad (3.66)$$

Jika kedua ruas persamaan pertama (3.66) ditambah dengan $-vs$, didapatkan

$$x - vt = \tau - 2vs, \quad (3.67)$$

untuk setiap $s = t$. Kemudian, substitusikan persamaan (3.67) pada E_z , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} E_z(\tau, s) &= \int_0^s (g(x-vt) - vf'(x-vt)) dt + f(\tau) \\ &= \int_0^s (g(\tau - 2vt) - vf'(\tau - 2vt)) dt + f(\tau) \end{aligned}$$

Jika dimisalkan $\lambda = \tau - 2vt$, maka $d\lambda = -2v dt$. Hal ini mengakibatkan

$$\begin{aligned}
E_z(\tau, s) &= \int_{\tau}^{\tau-2vs} g(\lambda) \left(-\frac{1}{2v} d\lambda \right) - v \int_{\tau}^{\tau-2vs} f'(\lambda) \left(-\frac{1}{2v} d\lambda \right) + f(\tau) \\
&= -\frac{1}{2v} \int_{\tau}^{\tau-2vs} g(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\tau-2vs} f'(\lambda) d\lambda + f(\tau) \\
&= -\frac{1}{2v} G(\lambda) \Big|_{\tau}^{\tau-2vs} + \frac{1}{2} f(\lambda) \Big|_{\tau}^{\tau-2vs} + f(\tau) \\
&= -\frac{1}{2v} [G(\tau-2vs) - G(\tau)] + \frac{1}{2} [f(\tau-2vs) - f(\tau)] + f(\tau) \\
&= \left[\frac{1}{2v} G(\tau) - \frac{1}{2} f(\tau) + f(\tau) \right] + \left[\frac{1}{2} f(\tau-2vs) - \frac{1}{2v} G(\tau-2vs) \right] \\
&= \left[\frac{1}{2} f(\tau) + \frac{1}{2v} G(\tau) \right] + \left[\frac{1}{2} f(\tau-2vs) - \frac{1}{2v} G(\tau-2vs) \right] \quad (3.68)
\end{aligned}$$

untuk setiap $x = \tau$ dan $t = s$.

Karena $\tau = x + vt$ dan $x - vt = \tau - 2vt$, maka persamaan (3.68) dapat ditulis

$$E_z(x, t) = \left[\frac{1}{2} f(x + vt) + \frac{1}{2v} G(x + vt) \right] + \left[\frac{1}{2} f(x - vt) - \frac{1}{2v} G(x - vt) \right] \quad (3.69)$$

Karena kondisi awal medan listrik untuk $\partial E_z(x, 0)/\partial t = (1/\varepsilon) \sin(x) = g(x)$, maka

$$\int_s g(\lambda) d\lambda = \int_s (1/\varepsilon) \sin(\lambda) d\lambda = -1/\varepsilon \cos(\lambda) = G(\lambda). \quad \text{Substitusikan kondisi awal}$$

untuk medan listrik E_z pada persamaan (3.69), yaitu:

$$E_z(x, t) = \left[\frac{1}{2} \sin(x + vt) - \frac{1}{2v\varepsilon} \cos(x + vt) \right] + \left[\frac{1}{2} \sin(x - vt) + \frac{1}{2v\varepsilon} \cos(x - vt) \right] \quad (3.70)$$

Persamaan (3.70) adalah penyelesaian nilai awal untuk medan listrik E_z , dimana

$1/2 \sin(x + vt) - (1/2v\varepsilon) \cos(x + vt)$ merupakan gelombang berjalan ke kiri dan

$1/2 \sin(x - vt) + (1/2v\varepsilon) \cos(x - vt)$ merupakan gelombang berjalan ke kanan

dengan kecepatan v (Zauderer, 2006).

Persamaan (3.70) dapat dijabarkan dan disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
E_z(x,t) &= \frac{1}{2} \left(\left[\sin(x) \cos(vt) + \cos(x) \sin(vt) \right] - \frac{1}{v\epsilon} \left[\cos(x) \cos(vt) - \sin(x) \sin(vt) \right] \right) + \\
&\quad \frac{1}{2} \left(\left[\sin(x) \cos(vt) - \cos(x) \sin(vt) \right] + \frac{1}{v\epsilon} \left[\cos(x) \cos(vt) + \sin(x) \sin(vt) \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \sin(x) \cos(vt) + \frac{1}{2} \cos(x) \sin(vt) - \frac{1}{2v\epsilon} \cos(x) \cos(vt) + \frac{1}{2v\epsilon} \sin(x) \sin(vt) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin(x) \cos(vt) - \frac{1}{2} \cos(x) \sin(vt) + \frac{1}{2v\epsilon} \cos(x) \cos(vt) + \frac{1}{2v\epsilon} \sin(x) \sin(vt) \\
&= \frac{1}{2} \sin(x) \cos(vt) + \frac{1}{2} \sin(x) \cos(vt) + \frac{1}{2v\epsilon} \sin(x) \sin(vt) + \frac{1}{2v\epsilon} \sin(x) \sin(vt) \\
&= \sin(x) \cos(vt) + \frac{1}{v\epsilon} \sin(x) \sin(vt) \\
&= \sin(x) \left(\cos(vt) + \frac{1}{v\epsilon} \sin(vt) \right)
\end{aligned}$$

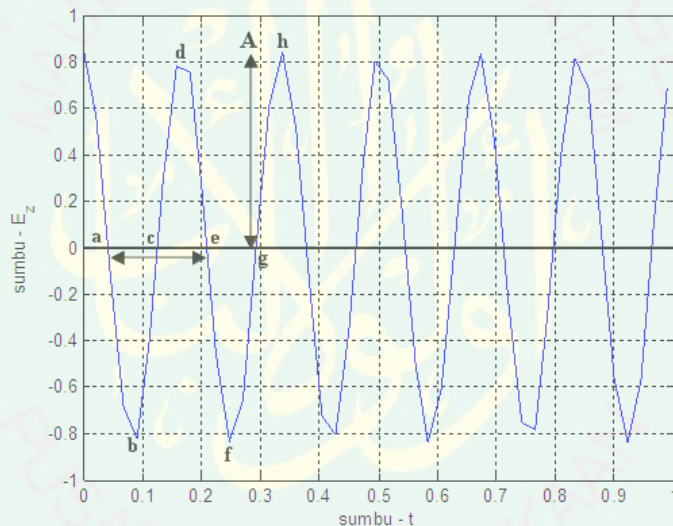
Sehingga penyelesaian masalah nilai awal untuk medan listrik E_z , yaitu:

$$E_z(x,t) = \sin(x) \left(\cos(vt) + \frac{1}{v\epsilon} \sin(vt) \right) \quad (3.71)$$

Secara grafik, untuk penyelesaian analitik medan listrik E_z dapat dilihat pada gambar 3.1. Pada gambar 3.1, dapat diketahui amplitudonya adalah $E_z = \pm 0,9$. Amplitudo adalah jarak maksimum atau simpangan maksimum dari titik setimbangnya (Ishaq, 2007). Pada gambar 3.1, amplitudo dilambangkan dengan huruf A atau ketika benda ada pada titik terendah atau tertinggi pada gambar 3.1, sedangkan titik setimbangnya adalah garis $t = 0$. Periode adalah waktu yang dibutuhkan benda untuk mengalami satu getaran. Definisi dari satu getar adalah ketika benda mengalami keadaan (posisi atau fasa) yang sama pada saat berikutnya.

Periode secara fisis menunjukkan lambatnya sebuah sistem berosilasi, periode yang besar menunjukkan osilasi yang lambat, demikian sebaliknya (Ishaq, 2007). Pada gambar 3.1, satu periode adalah waktu yang diperlukan dari titik a ke

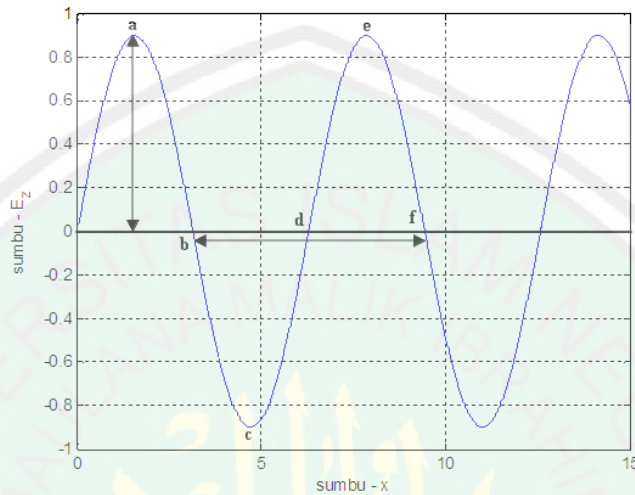
e atau dari titik b ke f dan sebagainya dimana periodenya adalah 0,15. Frekuensi didefinisikan sebagai banyaknya getaran setiap satu detik. Frekuensi menunjukkan kecepatan osilasi dari sistem. satuan untuk frekuensi adalah seperdetik atau lebih dikenal dengan *Hertz* (Hz). Frekuensi osilasi tinggi artinya memiliki kecepatan osilasi yang lebih tinggi dibandingkan dengan osilasi yang rendah (Ishaq, 2007). Hubungan antara periode dengan frekuensi adalah $f = 1/T$, sehingga pada gambar 3.1 diketahui frekuensinya adalah $1/0,15$ Hz.



Gambar 3.1 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu (E_z, t)

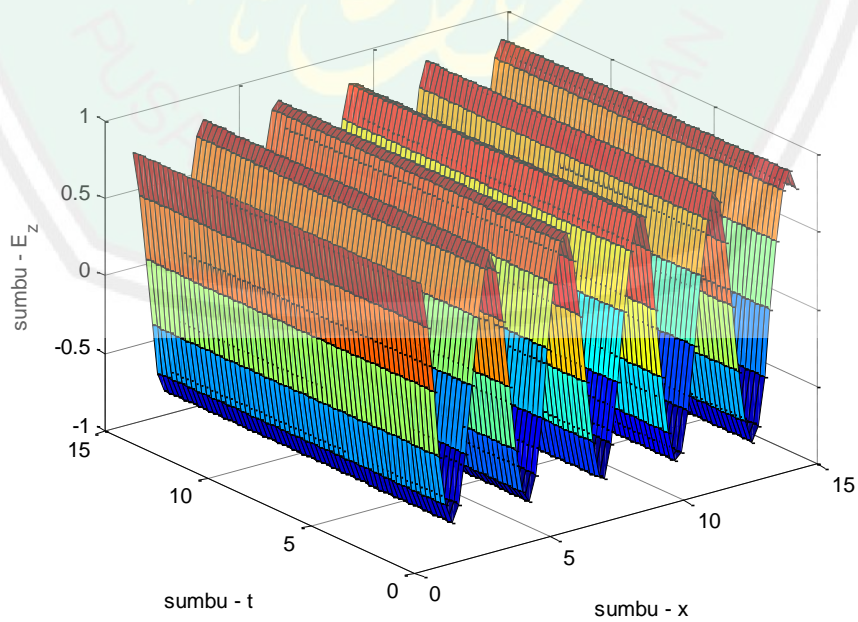
Sedangkan grafik penyelesaian analitik masalah nilai awal untuk medan listrik E_z pada sumbu (E_z, x) dapat dilihat pada gambar 3.2. Pada gambar 3.2, dapat diketahui amplitudonya adalah $E_z = \pm 0,9$. Amplitudo dilambangkan dengan huruf a atau ketika benda ada pada titik terendah atau tertinggi pada gambar 3.2, sedangkan titik setimbangnya adalah garis $x = 0$. Sedangkan periodenya adalah waktu yang diperlukan dari titik a ke e atau dari titik b ke f dan

sebagainya, dimana periodenya adalah ± 6 . Serta diketahui frekuensinya adalah $1/6\text{Hz}$.



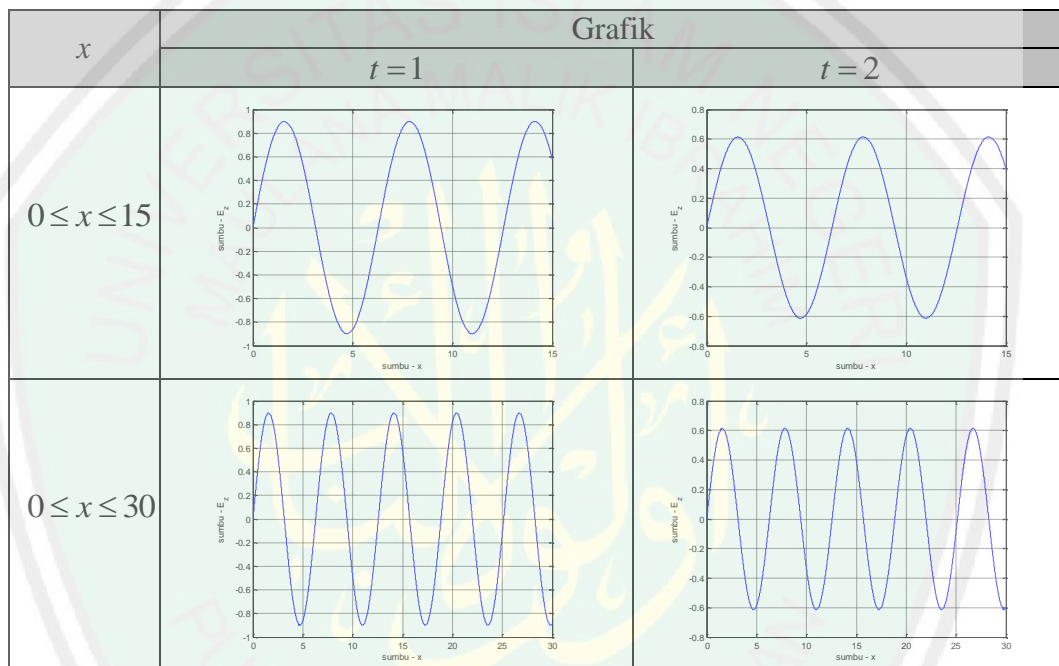
Gambar 3.2 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu (E_z, x)

Sedangkan untuk gambar penampang gelombang pada sumbu (E_z, x, t) dapat dilihat pada gambar 3.3 sebagai berikut:



Gambar 3.3 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Listrik E_z pada sumbu (E_z, x, t)

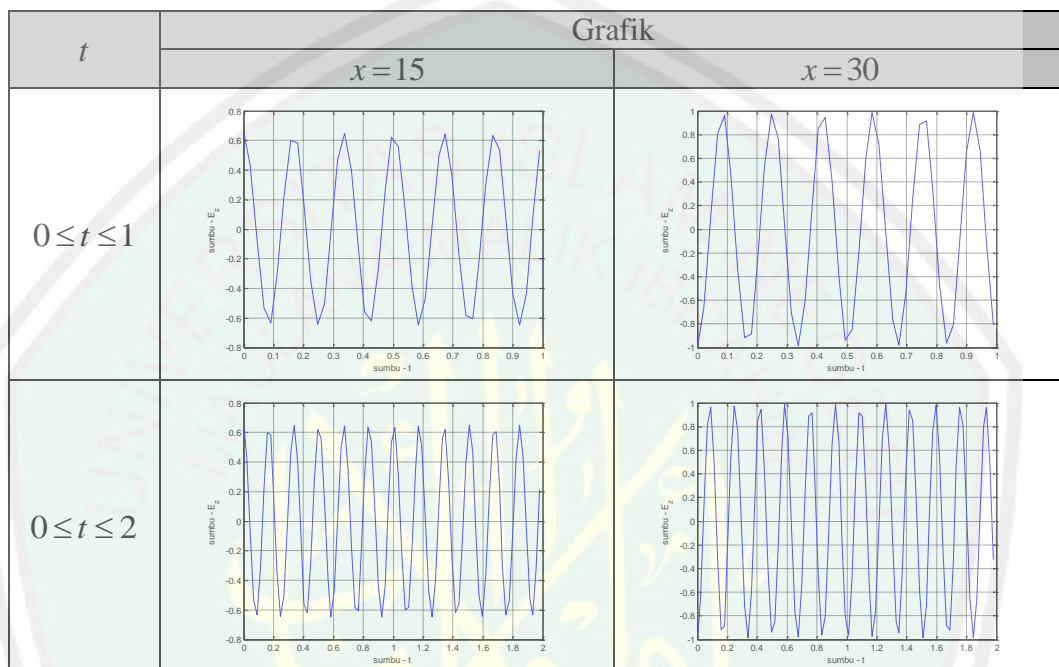
Untuk lebih jelas melihat perbedaannya, dalam skripsi ini diberikan dua interval dan dua selang waktu yang berbeda, yaitu $0 \leq x \leq 15$ meter, $0 \leq x \leq 30$ meter, $0 \leq t \leq 1$ detik, dan $0 \leq t \leq 2$ detik. Dimana pada gambar 3.4, t dianggap sebagai konstanta dan pada gambar 3.5, x dianggap konstanta. Perkembangan variabel akan terlihat sebagaimana gambar 3.4 dan 3.5 berikut:



Gambar 3.4 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu x dengan Jarak $0 \leq x \leq 15$ meter dan $0 \leq x \leq 30$ meter.

Pada gambar 3.4 dapat dianalisis bahwa pada interval $0 \leq x \leq 15$ meter pada saat $t = 1$ detik, diperoleh amplitudo sebesar 0,9 dan periode sebanyak 2 dan pada saat $t = 2$ detik amplitudonya sebesar 0,6 dan periode sebanyak 2. Sedangkan pada interval $0 \leq x \leq 30$ meter pada saat $t = 1$ detik diperoleh amplitudo sebesar 0,9 dan periode sebanyak 4 dan pada saat $t = 2$ detik diperoleh amplitudo sebesar 0,6 dan periodenya sebanyak 4. Jadi, dapat disimpulkan bahwa semakin besar interval, amplitudo yang diperoleh tidak berubah atau tetap

sedangkan periodenya semakin banyak. Semakin lama waktu yang diberikan, amplitudo yang diperoleh semakin rendah sedangkan periodenya tidak mengalami perubahan atau tetap.



Gambar 3.5 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu t dengan Waktu $0 \leq t \leq 1$ detik dan $0 \leq t \leq 2$ detik.

Pada gambar 3.5 dapat dianalisis bahwa pada saat $0 \leq t \leq 1$ detik pada jarak $x = 15$ meter diperoleh periode sebanyak 5 dan amplitudo sebesar 0,65 dan pada jarak $x = 30$ meter amplitudonya sebesar 0,95 dan periodenya sebanyak 5. Sedangkan pada saat $0 \leq t \leq 2$ detik pada saat $x = 15$ meter diperoleh amplitudo sebesar 0,65 dan periodenya sebanyak 11 dan pada saat $x = 30$ meter diperoleh amplitudo sebesar 0,95 dan periodenya sebanyak 11. Jadi, dapat disimpulkan bahwa semakin besar interval, semakin besar amplitudo yang diperoleh sedangkan periodenya tetap atau tidak mengalami perubahan. Semakin lama waktu yang

diberikan, semakin banyak periodenya sedangkan amplitudonya tidak mengalami perubahan atau tetap.

Berdasarkan gambar 3.4 dan 3.5, dapat diketahui bahwa semakin lama waktu yang diberikan dan semakin besar interval yang diberikan, semakin rendah amplitudo yang diperoleh sedangkan periodenya semakin besar. Semakin besar periodenya, semakin besar pula frekuensinya yang artinya semakin cepat pula sistem berosilasi.

Selanjutnya, dengan prosedur yang analog dapat diselesaikan bidang awal gelombang untuk medan magnet H_y .

Persamaan Maxwell untuk medan magnet H_y dapat dinyatakan kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.72)$$

dengan kondisi awal untuk medan magnet $H_y(x, t)$ dinyatakan sebagai berikut (Zauderer, 2006):

$$H_y(x, 0) = \cos(x) = m(x) \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial H_y(x, 0)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cos(x) = n(x) \quad (3.74)$$

Persamaan (3.72) dapat dikerjakan dengan faktorisasi operator diferensial, yaitu:

$$\frac{\partial^2 H_y(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_y(x, t)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) H_y(x, t) = 0 \quad (3.75)$$

Jika dimisalkan $(\partial/\partial t - \partial/\partial x)H_y(x, t) = b(x, t)$, maka persamaan (3.75) dapat ditulis

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right)b(x,t) = 0 \quad (3.76)$$

Berdasarkan persamaan (3.75) dan (3.76), maka persamaan (3.72) dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial parsial orde satu sebagai berikut:

$$\frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} - v \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial x} = b(x,t) \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial b(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (3.78)$$

Langkah pertama adalah menyelesaikan persamaan (3.78) dengan memberikan nilai awal $b(x,0) = c(x)$ dan diasumsikan laminer $x = \tau$, maka didapatkan

$$x_0 = \tau, \quad t = 0, \quad b = c(\tau)$$

sehingga dapat disimpulkan kurva-kurva karakteristik dari persamaan (3.78), dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{ds} = v, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \text{dan} \quad \frac{db}{ds} = 0$$

Kemudian, integralkan semua komponen di atas, yaitu $\int_C 1 dx = \int_C v ds$, maka diperoleh $x = vs$ dan $\int_C 1 dt = \int_C 1 ds$, maka diperoleh $t = s$ dan $\int_C 1 db = \int_C 0 ds$, maka diperoleh $b = 0$. Sehingga didapatkan penyelesaian untuk kurva-kurva karakteristik dengan nilai awalnya, yaitu:

$$x(\tau, s) = vs + \tau \quad \text{dan} \quad t(\tau, s) = s \quad \text{dan} \quad b(\tau, s) = c(\tau)$$

dimana persamaan pertama dapat ditulis $\tau = x - vs$, untuk setiap $s = t$ maka dapat dinyatakan $\tau = x - vt$. Selanjutnya, substitusikan $\tau = x - vt$ pada $b(\tau, s) = c(\tau)$

sehingga didapatkan

$$b(\tau, s) = c(\tau) = c(x - vt) \quad (3.79)$$

sehingga diperoleh kondisi awal untuk $b(x, t)$ dari persamaan (3.77), yaitu:

$$b(x, 0) = n(x) - vm'(x)$$

Kemudian, dengan persamaan (3.79) maka didapatkan penyelesaian untuk persamaan (3.78), yaitu:

$$b(x, t) = n(x - vt) - vm'(x - vt) \quad (3.80)$$

Substitusikan persamaan (3.80) pada persamaan (3.77), sehingga didapatkan

$$\frac{\partial H_y(x, t)}{\partial t} - v \frac{\partial H_y(x, t)}{\partial x} = n(x - vt) - vm'(x - vt) \quad (3.81)$$

sehingga dapat disimpulkan kurva-kurva karakteristik dari persamaan (3.81), yaitu:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = -v, \quad \text{dan} \quad \frac{dH_y}{ds} = n(x - vt) - vm'(x - vt) \quad (3.82)$$

Kemudian, integralkan semua komponen di atas, yaitu $\int_C 1 dt = \int_C 1 ds$, maka

diperoleh $t = s$ dan $\int_C 1 dx = \int_C -v ds$, maka diperoleh $x = -vs$ dan

$$\int_C 1 dH_y = \int_C (n(x - vt) - vm'(x - vt)) ds, \text{ maka diperoleh } H_y = \int_C (n(x - vt) - vm'(x - vt)) ds.$$

Jika pada kondisi awal gelombang diasumsikan laminar $x = \tau$, maka didapatkan

$$x = \tau - vs \text{ dan } t = 0 \text{ dan } H_y(x, 0) = m(\tau) \quad (3.83)$$

Jika kedua ruas persamaan pertama (3.83) ditambah dengan $-vs$, didapatkan

$$x - vt = \tau - 2vs, \quad (3.84)$$

untuk setiap $s = t$. Substitusikan persamaan (3.84) pada H_y , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} H_y(\tau, s) &= \int_0^s \left(n(x - vt) - vm'(x - vt) \right) dt + m(\tau) \\ &= \int_0^s \left(n(\tau - 2vt) - vm'(\tau - 2vt) \right) dt + m(\tau) \end{aligned}$$

Jika dimisalkan $\lambda = \tau - 2vt$, maka $d\lambda = -2v dt$. Hal ini mengakibatkan

$$\begin{aligned} H_y(\tau, s) &= \int_{\tau}^{\tau-2vs} n(\lambda) \left(-\frac{1}{2v} d\lambda \right) - v \int_{\tau}^{\tau-2vs} m'(\lambda) \left(-\frac{1}{2v} d\lambda \right) + m(\tau) \\ &= -\frac{1}{2v} \int_{\tau}^{\tau-2vs} n(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\tau-2vs} m'(\lambda) d\lambda + m(\tau) \\ &= -\frac{1}{2v} N(\lambda) \Big|_{\tau}^{\tau-2vs} + \frac{1}{2} m(\lambda) \Big|_{\tau}^{\tau-2vs} + m(\tau) \\ &= -\frac{1}{2v} [N(\tau - 2vs) - N(\tau)] + \frac{1}{2} [m(\tau - 2vs) - m(\tau)] + m(\tau) \\ &= \left[\frac{1}{2v} N(\tau) - \frac{1}{2} m(\tau) + m(\tau) \right] + \left[\frac{1}{2} m(\tau - 2vs) - \frac{1}{2v} N(\tau - 2vs) \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} m(\tau) + \frac{1}{2v} N(\tau) \right] + \left[\frac{1}{2} m(\tau - 2vs) - \frac{1}{2v} N(\tau - 2vs) \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

untuk setiap $x = \tau$ dan $t = s$.

Karena $\tau = x + vt$ dan $x - vt = \tau - 2vt$, maka persamaan (3.85) dapat ditulis

$$H_y(x, t) = \left[\frac{1}{2} m(x + vt) + \frac{1}{2v} N(x + vt) \right] + \left[\frac{1}{2} m(x - vt) - \frac{1}{2v} N(x - vt) \right] \quad (3.86)$$

Karena kondisi awal medan magnet untuk $\partial H_y(x, 0) / \partial t = -(1/\mu) \cos(x) = n(x)$, maka

diperoleh $\int_s n(\lambda) d\lambda = -\int_s (1/\mu) \cos(\lambda) d\lambda = (-1/\mu) \sin(\lambda) = N(\lambda)$. Substitusikan

kondisi awal untuk medan magnet H_y pada persamaan (3.86), sehingga diperoleh

$$H_y(x, t) = \left[\frac{1}{2} \cos(x + vt) - \frac{1}{2v\mu} \sin(x + vt) \right] + \left[\frac{1}{2} \cos(x - vt) + \frac{1}{2v\mu} \sin(x - vt) \right] \quad (3.87)$$

Persamaan (3.87) adalah penyelesaian nilai awal untuk medan magnet H_y , dimana $1/2 \cos(x+vt) - (1/2v\mu) \sin(x+vt)$ merupakan gelombang berjalan ke kiri dan $1/2 \cos(x-vt) + (1/2v\mu) \sin(x-vt)$ merupakan gelombang berjalan ke kanan dengan kecepatan v (Zauderer, 2006).

Persamaan (3.87) dapat dijabarkan dan disederhanakan menjadi

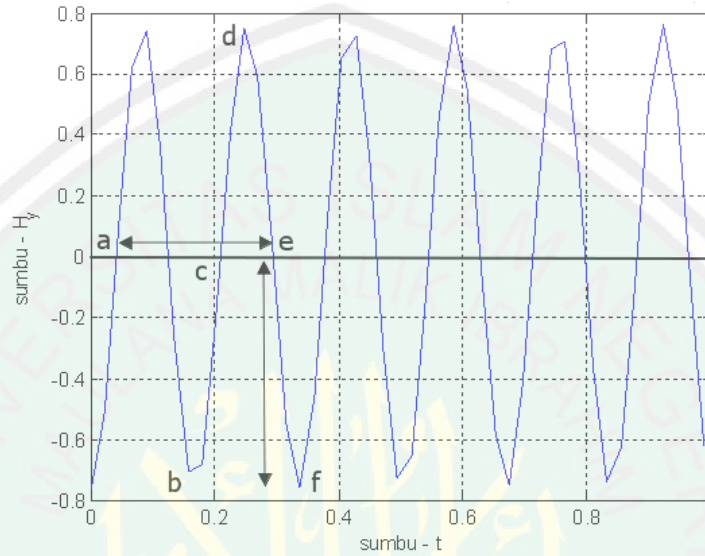
$$\begin{aligned}
 H_y(x,t) &= \frac{1}{2} \left([\cos(x) \cos(vt) + \sin(x) \sin(vt)] - \frac{1}{v\mu} [\sin(x) \cos(vt) + \cos(x) \sin(vt)] \right) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left([\cos(x) \cos(vt) + \sin(x) \sin(vt)] + \frac{1}{v\mu} [\sin(x) \cos(vt) - \cos(x) \sin(vt)] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cos(x) \cos(vt) + \frac{1}{2} \sin(x) \sin(vt) - \frac{1}{2v\mu} \sin(x) \cos(vt) - \frac{1}{2v\mu} \cos(x) \sin(vt) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \cos(x) \cos(vt) + \frac{1}{2} \sin(x) \sin(vt) + \frac{1}{2v\mu} \sin(x) \cos(vt) - \frac{1}{2v\mu} \cos(x) \sin(vt) \\
 &= \frac{1}{2} \cos(x) \cos(vt) + \frac{1}{2} \cos(x) \cos(vt) - \frac{1}{2v\mu} \cos(x) \sin(vt) - \frac{1}{2v\mu} \cos(x) \sin(vt) \\
 &= \cos(x) \cos(vt) - \frac{1}{v\mu} \cos(x) \sin(vt) \\
 &= \cos(x) \left(\cos(vt) - \frac{1}{v\mu} \sin(vt) \right)
 \end{aligned}$$

Sehingga penyelesaian masalah nilai awal untuk medan magnet H_y , yaitu:

$$H_y(x,t) = \cos(x) \left(\cos(vt) - \frac{1}{v\mu} \sin(vt) \right) \quad (3.88)$$

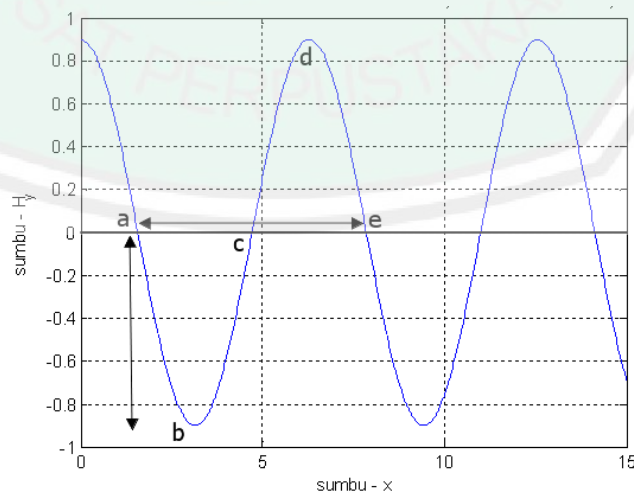
Secara grafik, untuk penyelesaian analitik medan magnet H_y dapat dilihat pada gambar 3.6. Pada gambar 3.6, dapat diketahui amplitudonya adalah $H_y = \pm 0,5$. Amplitudo dilambangkan dengan huruf f atau ketika benda ada pada titik terendah atau tertinggi pada gambar 3.6, sedangkan titik setimbangnya adalah garis $t = 0$. Sedangkan periodenya adalah waktu yang diperlukan dari titik a ke e atau dari

titik b ke f dan sebagainya, dimana periodenya adalah $\pm 0,15$ dan frekuensinya adalah $1/0,15$ Hz.



Gambar 3.6 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, t)

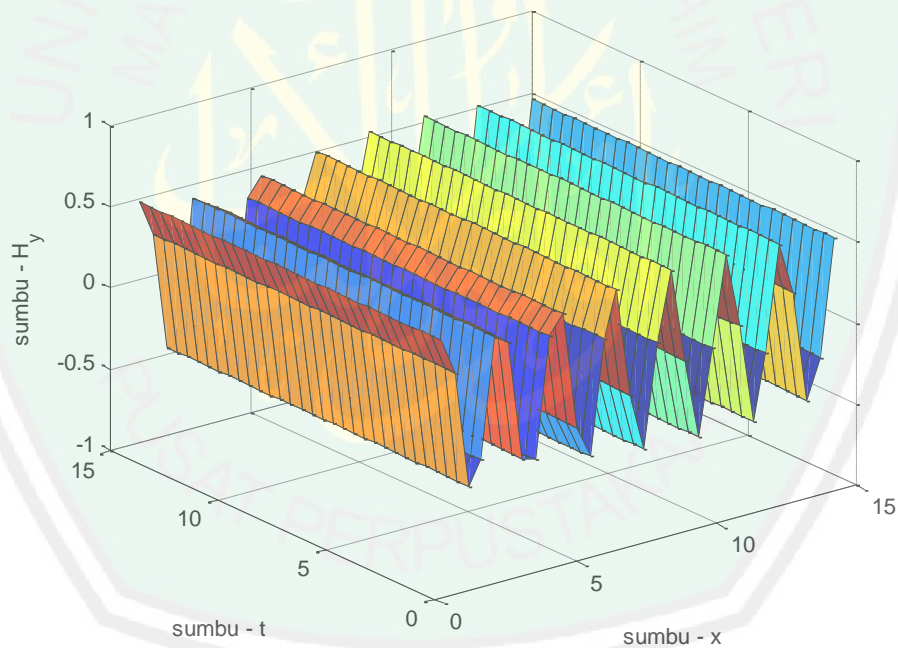
Sedangkan grafik penyelesaian analitik masalah nilai awal untuk medan magnet H_y pada sumbu (H_y, x) dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.7 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, x)

Pada gambar 3.7, dapat diketahui amplitudonya adalah $H_y = \pm 0,9$. Amplitudo dilambangkan dengan huruf a atau ketika benda ada pada titik terendah atau tertinggi pada gambar 3.7, sedangkan titik setimbangnya adalah garis $x=0$. Sedangkan periodenya adalah waktu yang diperlukan dari titik a ke e atau dari titik b ke f dan sebagainya, dimana periodenya adalah ± 6 dan frekuensinya adalah $1/6\text{Hz}$.

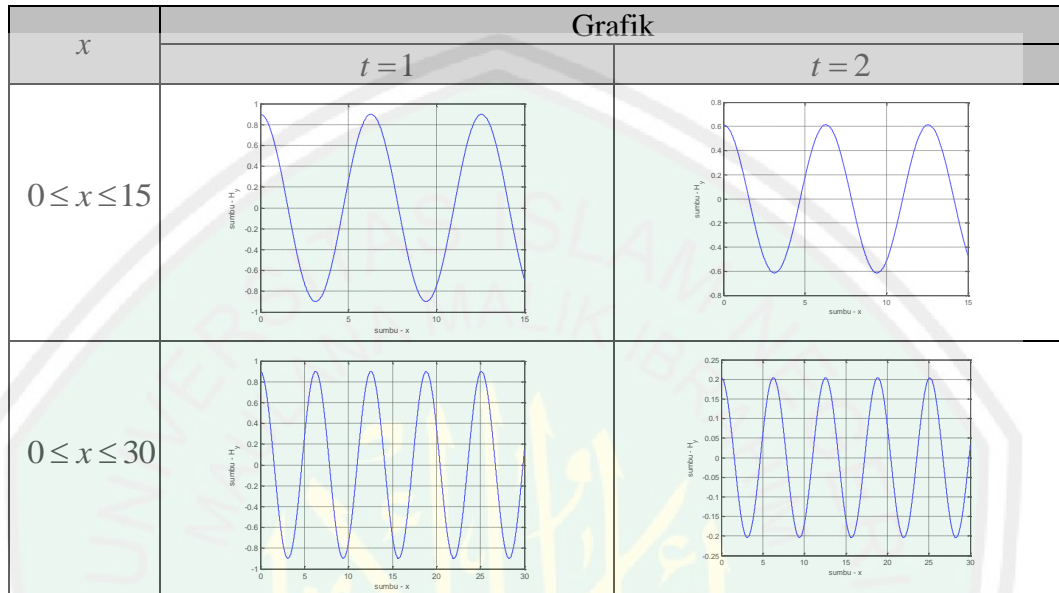
Sedangkan gambar penampang gelombang untuk medan magnet pada sumbu (H_y, x, t) dapat dilihat pada gambar 3.8 sebagai berikut:



Gambar 3.8 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, x, t)

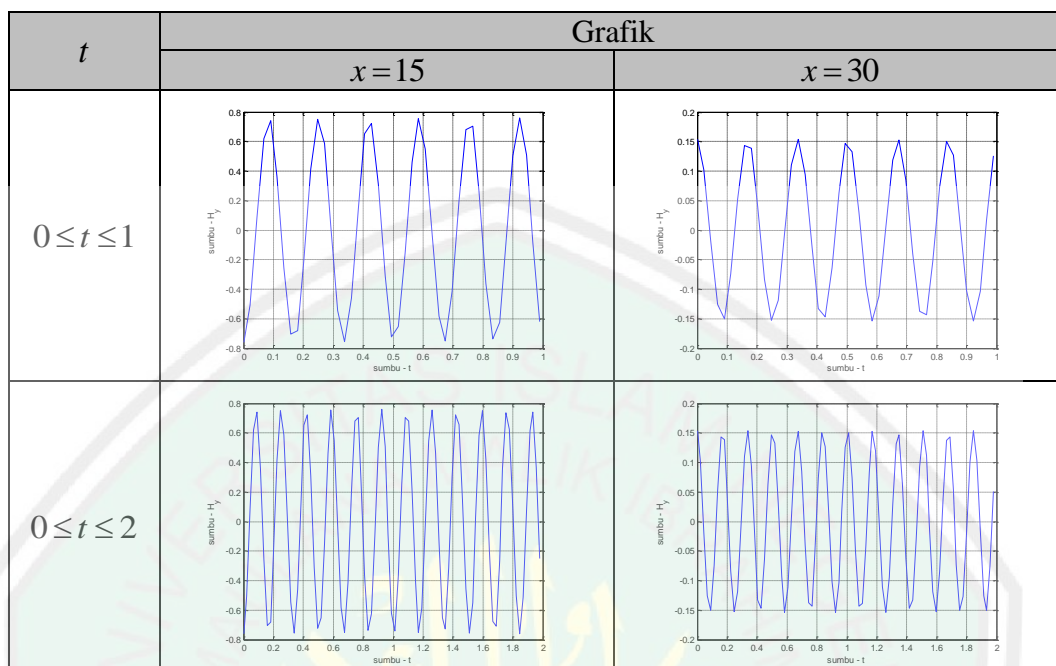
Untuk lebih jelas melihat perbedaannya, dalam skripsi ini diberikan dua interval dan dua selang waktu yang berbeda, yaitu $0 \leq x \leq 15$ meter, $0 \leq x \leq 30$ meter, $0 \leq t \leq 1$ detik, dan $0 \leq t \leq 2$ detik. Dimana pada gambar 3.9, t dianggap

sebagai konstanta dan pada gambar 3.10, x dianggap konstanta. Perkembangan variabel akan terlihat sebagaimana gambar 3.9 dan 3.10 berikut:



Gambar 3.9 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu x dengan Jarak $0 \leq x \leq 15$ meter dan $0 \leq x \leq 30$ meter.

Pada gambar 3.9 dapat dianalisis bahwa pada interval $0 \leq x \leq 15$ meter pada saat $t = 1$ detik, diperoleh amplitudo sebesar 0,9 dan periode sebanyak 2 dan pada saat $t = 2$ detik amplitudonya sebesar 0,6 dan periode sebanyak 2. Sedangkan pada interval $0 \leq x \leq 30$ meter pada saat $t = 1$ detik diperoleh amplitudo sebesar 0,9 dan periode sebanyak 4 dan pada saat $t = 2$ detik diperoleh amplitudo sebesar 0,6 dan periodenya sebanyak 4. Jadi, dapat disimpulkan bahwa semakin besar interval, amplitudo yang diperoleh diperoleh tidak berubah atau tetap sedangkan periodenya semakin banyak. Semakin lama waktu yang diberikan, amplitudo yang diperoleh semakin rendah sedangkan periodenya tidak mengalami perubahan atau tetap.



Gambar 3.10 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Maxwell Untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu t dengan Waktu $0 \leq t \leq 1$ detik dan $0 \leq t \leq 2$ detik.

Pada gambar 3.10 dapat dianalisis bahwa pada saat $0 \leq t \leq 1$ detik pada jarak $x = 15$ meter diperoleh periode sebanyak 6 dan amplitudo sebesar 0,75 dan pada jarak $x = 30$ detik amplitudonya sebesar 0,15 dan periodenya sebanyak 6. Sedangkan pada saat $0 \leq t \leq 2$ meter pada saat $x = 15$ meter diperoleh amplitudo sebesar 0,75 dan periodenya sebanyak 11 dan pada saat $x = 30$ meter diperoleh amplitudo sebesar 0,15 periodenya sebanyak 11. Jadi, dapat disimpulkan bahwa semakin besar interval dan semakin lama waktu yang diberikan maka amplitudo yang diperoleh semakin rendah dan periodenya semakin banyak.

Berdasarkan gambar 3.9 dan 3.10, dapat diketahui bahwa semakin lama waktu yang diberikan dan semakin besar interval yang diberikan, semakin rendah amplitudo yang diperoleh sedangkan periodenya semakin besar. Semakin besar

periodenya, semakin besar pula frekuensinya yang artinya semakin cepat pula sistem berosilasi.

3.2.2 Penyelesaian Masalah Nilai Batas Persamaan Maxwell

Penyelesaian masalah nilai batas persamaan Maxwell untuk medan listrik dan medan magnet secara berturut-turut dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel dengan prosedur sebagai berikut:

Pandang persamaan (3.56) untuk medan listrik E_z sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0$$

dengan kondisi batas untuk medan listrik $E_z(x, t)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$E_z(0, t) = 0 \quad (3.89)$$

$$E_z(l, t) = 0 \quad (3.90)$$

Jika dimisalkan $E_z(x, t) = X(x)T(t)$, maka didapatkan

$$\frac{\partial E_z(x, t)}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 E_z(x, t)}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

$$\frac{\partial E_z(x, t)}{\partial x} = X'(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 E_z(x, t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

Substitusikan persamaan di atas pada persamaan (3.56), sehingga didapatkan

$$X(x)T''(t) - v^2 X''(x)T(t) = 0 \quad (3.91)$$

Kalikan persamaan (3.92) dengan $1/X(x)T(t)$ sehingga didapatkan

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.92)$$

Jika dimisalkan $(1/v^2)T''(t)/T(t)$ dan $X''(x)/X(x)$ sama dengan λ , maka didapatkan

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \quad (3.93)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (3.94)$$

Persamaan (3.95) dapat ditulis kembali menjadi

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (3.95)$$

Jika dimisalkan $X(x) = e^{mx}$, maka persamaan (3.96) menjadi

$$m^2 e^{mx} - \lambda e^{mx} = 0 \quad (3.96)$$

Persamaan (3.97) dapat disederhanakan menjadi

$$e^{mx} (m^2 - \lambda) = 0 \quad (3.97)$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristik dari persamaan (3.98) yaitu:

$$m^2 - \lambda = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$m^2 = \lambda \quad (3.98)$$

Sehingga didapatkan akar-akar karakteristik dari persamaan (3.99) yaitu:

$$m_{12} = \pm\sqrt{\lambda} \quad (3.99)$$

Berdasarkan akar-akar karakteristik yang diperoleh, maka untuk penyelesaiannya terdapat tiga kasus yang harus ditinjau, yaitu:

1) Kasus I: Jika $\lambda > 0$, maka didapatkan dua akar riil dan berbeda, yaitu

$m_{12} = \pm\sqrt{\lambda}$. Akibatnya, penyelesaian umum dari persamaan (3.99) adalah

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (3.100)$$

dengan memperhatikan kondisi batas untuk $0 \leq x \leq l$, maka persamaan (3.100) pada saat $x = 0$, yaitu:

$$X(0) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}(0)} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}(0)} = 0$$

Bentuk di atas dapat dinyatakan kembali menjadi

$$C_1 + C_2 = 0$$

sehingga didapatkan

$$C_2 = -C_1 \quad (3.101)$$

sedangkan persamaan (3.100) pada saat $x = l$ adalah

$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}(l)} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}(l)} = 0 \quad (3.102)$$

substitusikan persamaan (3.101) pada persamaan (3.102), sehingga didapatkan

$$C_1 e^{\sqrt{\lambda}(l)} - C_1 e^{-\sqrt{\lambda}(l)} = 0$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$C_1 (e^{\sqrt{\lambda}(l)} - e^{-\sqrt{\lambda}(l)}) = 0 \quad (3.103)$$

sehingga dari persamaan (3.103) dapat disimpulkan

$$C_1 = 0 \quad \text{atau} \quad e^{\sqrt{\lambda}(l)} - e^{-\sqrt{\lambda}(l)} = 0 \quad (3.104)$$

Jika diasumsikan $C_1 \neq 0$ dan $e^{\sqrt{\lambda}(l)} - e^{-\sqrt{\lambda}(l)} = 0$, maka didapatkan

$$e^{\sqrt{\lambda}(l)} = e^{-\sqrt{\lambda}(l)}$$

$$e^{\sqrt{\lambda}(l)} = \frac{1}{e^{\sqrt{\lambda}(l)}}$$

$$e^{2\sqrt{\lambda}(l)} = 1$$

$$e^{2\sqrt{\lambda}(l)} = e^0$$

$$2\sqrt{\lambda}(l) = 0$$

sehingga didapatkan

$$2\sqrt{\lambda}(l) = 0$$

Namun, $e^{\sqrt{\lambda}(l)} - e^{-\sqrt{\lambda}(l)} \neq 0$ karena $\lambda > 0$ dan $l > 0$. Sehingga penyelesaian yang mungkin adalah $C_1 = 0$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa tidak ada penyelesaian *nontrivial* pada kasus ini.

- 2) Kasus II: Jika $\lambda = 0$, maka didapatkan dua akar yang berulang, yaitu $m_1 = m_2 = 0$. Akibatnya, penyelesaian umum dari persamaan (3.99) adalah

$$X(x) = C_1 e^{(0)x} + C_2 x e^{(0)x} \quad (3.105)$$

dengan memperhatikan kondisi batas untuk $0 \leq x \leq l$, maka persamaan

(3.105) pada saat $x = 0$, yaitu:

$$X(0) = C_1 e^{(0)(0)} + C_2 (0) e^{(0)(0)} = 0$$

$$C_1 e^0 + C_2 (0) e^0 = 0$$

$$C_1 + 0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

sehingga didapatkan

$$C_1 = 0 \quad (3.106)$$

sedangkan persamaan (3.105) pada saat $x = l$ adalah

$$\begin{aligned} X(l) &= C_1 e^{(0)l} + C_2(l) e^{(0)l} = 0 \\ C_1 e^0 + C_2(l) e^0 &= 0 \\ C_1 + C_2(l) &= 0 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (3.106) pada persamaan di atas, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} 0 + C_2(l) &= 0 \\ C_2(l) &= 0 \end{aligned}$$

Karena $l > 0$, maka didapatkan $C_2 = 0$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa jika $\lambda = 0$, maka didapatkan $C_1 = C_2 = 0$, sehingga tidak ada penyelesaian *nontrivial* pada kasus ini.

- 3) Kasus III: Jika $\lambda < 0$, maka didapatkan dua akar kompleks, yaitu $m_{12} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Akibatnya, penyelesaian umum untuk persamaan (3.99) adalah

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 e^{(0)x} \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 e^{(0)x} \sin \sqrt{\lambda}x \\ &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \end{aligned} \quad (3.107)$$

dengan memperhatikan kondisi batas untuk $0 \leq x \leq l$, maka persamaan (3.107) pada saat $x = 0$, yaitu:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}(0) + C_2 \sin \sqrt{\lambda}(0) = 0 \\ C_1(1) + C_2(0) &= 0 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$C_1 = 0$$

sedangkan persamaan (3.107) pada saat $x = l$ adalah

$$X(l) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}(l) + C_2 \sin \sqrt{\lambda}(l) = 0 \quad (3.108)$$

Substitusikan $C_1 = 0$ pada persamaan (3.108), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} X(l) &= (0) \cos \sqrt{\lambda}(l) + C_2 \sin \sqrt{\lambda}(l) = 0 \\ &0 + C_2 \sin \sqrt{\lambda}(l) = 0 \\ &C_2 \sin \sqrt{\lambda}(l) = 0 \end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan di atas dapat disimpulkan

$$C_2 = 0 \text{ atau } \sin \sqrt{\lambda}(l) = 0 \quad (3.109)$$

Jika diasumsikan $C_2 \neq 0$ dan $\sin \sqrt{\lambda}(l) = 0$, maka $\sin \sqrt{\lambda}(l) = 0$ jika dan hanya jika $\sqrt{\lambda}(l) = n\pi$, yaitu

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}(l) &= n\pi \\ \lambda(l^2) &= (n\pi)^2 \\ \lambda &= \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \end{aligned}$$

dimana $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Jika diasumsikan $C_2 = 0$, maka tidak ada penyelesaian *nontrivial* untuk kasus ini. Sehingga penyelesaian untuk persamaan (3.107), yaitu:

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.110)$$

dimana a_n adalah konstan.

Selanjutnya, pandang persamaan (3.93), sebagai berikut:

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$T''(t) = v^2 \lambda T(t)$$

$$T''(t) - v^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.111)$$

Jika dimisalkan $T(t) = e^{mt}$, maka persamaan (3.111) menjadi

$$m^2 e^{mt} - v^2 \lambda e^{mt} = 0$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$e^{mt} (m^2 - v^2 \lambda) = 0 \quad (3.112)$$

sehingga didapatkan persamaan karakteristik dari persamaan (3.112), yaitu:

$$m^2 - v^2 \lambda = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$m^2 = v^2 \lambda \quad (3.113)$$

Karena λ yang sesuai adalah $\lambda < 0$, maka diperoleh akar-akar karakteristik dari persamaan (3.113), yaitu:

$$m_{12} = \pm \sqrt{-v^2 \lambda} = \pm iv \sqrt{\lambda} \quad (3.114)$$

sehingga, penyelesaian umum dari persamaan (3.114) adalah

$$\begin{aligned} T(t) &= C_3 e^{(0)t} \cos(v \sqrt{\lambda} t) + C_4 e^{(0)t} \sin(v \sqrt{\lambda} t) \\ &= C_3 \cos(v \sqrt{\lambda} t) + C_4 \sin(v \sqrt{\lambda} t) \end{aligned} \quad (3.115)$$

Karena $\lambda = (n\pi/l)$ dan $t > 0$, maka penyelesaian dari persamaan (3.115) adalah

$$T_n(t) = b_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + c_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \quad (3.116)$$

Substitusikan persamaan (3.110) dan (3.116) pada $E_{z_n}(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, maka didapatkan

$$E_{z_n}(x,t) = \left(a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \left(b_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + c_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \right) \quad (3.117)$$

Jika dimisalkan $A_n = a_n b_n$ dan $B_n = a_n c_n$, maka persamaan (3.117) dapat ditulis kembali

$$E_{z_n}(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \right) \quad (3.118)$$

Persamaan (3.118) merupakan penyelesaian partikular masalah nilai batas untuk medan listrik E_z .

Karena persamaan (3.56) adalah linier dan homogen, maka persamaan (3.118) dapat ditulis dalam bentuk deret tak hingga sebagai berikut:

$$E_z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \right) \quad (3.119)$$

Persamaan (3.119) juga merupakan penyelesaian dari persamaan (3.56) yang konvergen dan kontinu serta terturunkan terhadap x dan t .

Kemudian turunkan deret (3.119) terhadap t , sehingga diperoleh

$$\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(-A_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + B_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \right) \quad (3.120)$$

Kemudian, substitusikan kondisi awal (3.57) dan (3.58) pada persamaan (3.119) dan persamaan (3.120), yaitu:

$$E_z(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{vn\pi(0)}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{vn\pi(0)}{l}\right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 E_z(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (A_n \cos(0) + B_n \sin(0)) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (A_n(1) + B_n(0)) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sin(x)
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_z(x,0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(-A_n \sin\left(\frac{vn\pi(0)}{l}\right) + B_n \cos\left(\frac{vn\pi(0)}{l}\right)\right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (-A_n \sin(0) + B_n \cos(0)) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (0 + B_n(1)) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \sin(x)
 \end{aligned}$$

dengan koefisien A_n dan B_n diberikan sebagai berikut:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.121)$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \frac{1}{\varepsilon} \sin(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.122)$$

Pertama selesaikan $\int_1^l \sin(x) \sin(n\pi x/l) dx$ sebagai berikut:

$$\int_1^l \sin(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \cos\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) x dx - \int_0^l \cos\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right) x dx \right) \quad (3.123)$$

Kemudian untuk $\int_0^l \cos(1 - n\pi/l) x dx$ diselesaikan sebagai berikut:

$$\int_0^l \cos\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) x dx = \frac{l}{l - n\pi} \sin\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) x \Big|_0^l$$

$$\begin{aligned}\int_0^l \cos\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right)x dx &= \frac{l}{l - n\pi} \left(\sin\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right)l - \sin(0) \right) \\ &= \frac{l}{l - n\pi} \sin(l - n\pi)\end{aligned}\quad (3.124)$$

dan untuk $\int_0^l \cos\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right)x dx$ dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\int_0^l \cos\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right)x dx &= \frac{l}{l + n\pi} \sin\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right)x \Big|_0^l \\ &= \frac{l}{l + n\pi} \left(\sin\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right)l - \sin(0) \right) \\ &= \frac{l}{l + n\pi} \sin(l + n\pi)\end{aligned}\quad (3.125)$$

Substitusikan persamaan (3.124) dan (3.125) pada persamaan (3.123), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int_1^l \sin(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^l \cos\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right)x dx - \int_0^l \cos\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right)x dx \right) \\ &= \frac{l}{2} \left(\frac{1}{l - n\pi} \sin(l - n\pi) - \frac{1}{l + n\pi} \sin(l + n\pi) \right)\end{aligned}\quad (3.126)$$

Substitusikan persamaan (3.126) pada persamaan (3.121) sebagai berikut:

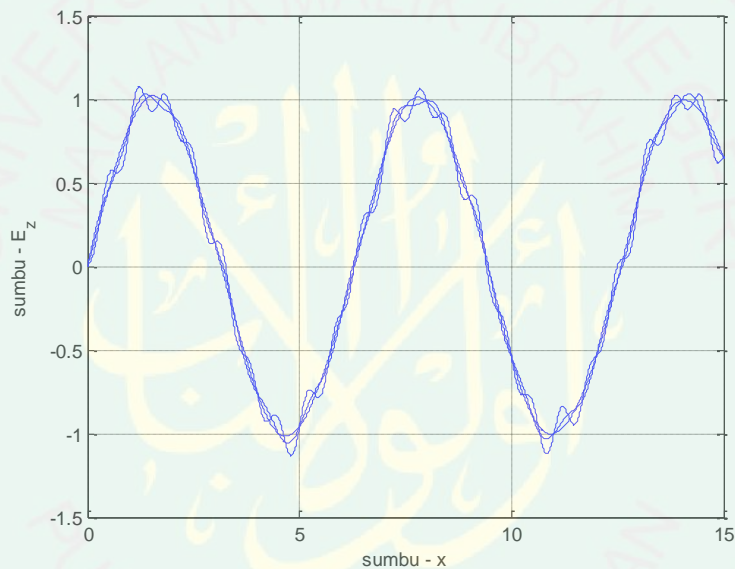
$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{l} \left(\frac{l}{2} \left(\frac{1}{l - n\pi} \sin(l - n\pi) - \frac{1}{l + n\pi} \sin(l + n\pi) \right) \right) \\ &= \frac{1}{l - n\pi} \sin(l - n\pi) - \frac{1}{l + n\pi} \sin(l + n\pi)\end{aligned}\quad (3.127)$$

Kemudian, substitusikan persamaan (3.126) pada persamaan (3.122) sebagai berikut:

$$B_n = \frac{2}{n\pi v \varepsilon} \left(\frac{l}{2} \left(\frac{1}{l - n\pi} \sin(l - n\pi) - \frac{1}{l + n\pi} \sin(l + n\pi) \right) \right)$$

$$B_n = \frac{l}{n\pi v \epsilon} \left(\frac{1}{l-n\pi} \sin(l-n\pi) - \frac{1}{l+n\pi} \sin(l+n\pi) \right) \quad (3.128)$$

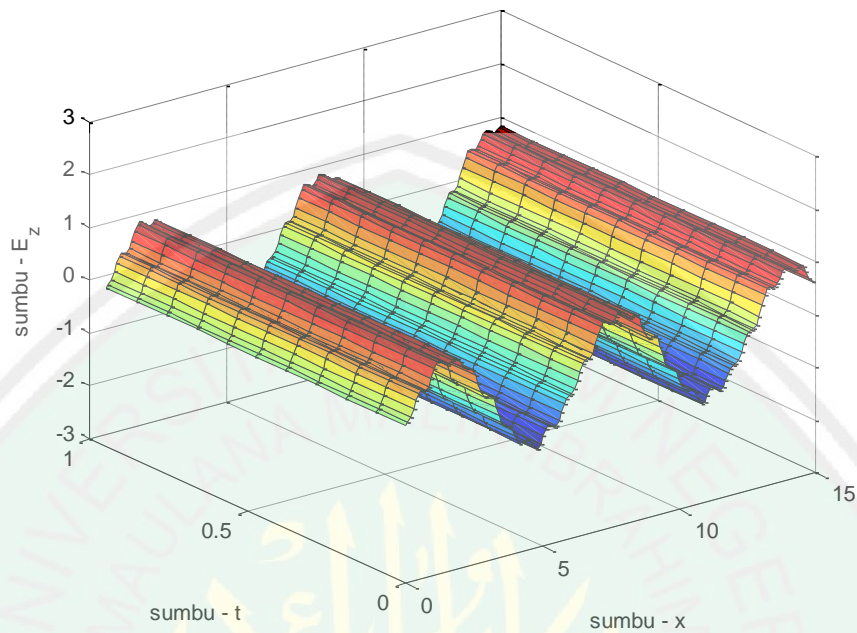
Persamaan (3.119) merupakan penyelesaian masalah nilai batas untuk medan listrik E_z dengan koefisien A_n dan B_n diberikan pada persamaan (3.127) dan (3.128). Secara grafik, penyelesaian analitik untuk medan E_z listrik dapat dilihat pada gambar sebagai berikut:



Gambar 3.11 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Batas untuk Medan Listrik E_z pada Sumbu (E_z, x)

Pada gambar 3.11, dapat diketahui untuk $n=1$ amplitudonya adalah ± 1 . Sedangkan periodenya adalah 2. Begitu pula untuk $n=2$ dan $n=3$ amplitudo dan periodenya tetap, yaitu 2, dan kurva yang dihasilkan mulai terlihat mengalami gangguan namun tidak terlalu signifikan.

Sedangkan penampang gelombang untuk medan listrik pada sumbu (E_z, x, t) dapat dilihat pada gambar 3.12 sebagai berikut:



Gambar 3.12 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Batas untuk Medan Listrik E_z pada sumbu (E_z, x, t)

Selanjutnya dengan prosedur yang analog, maka penyelesaian masalah nilai batas untuk medan magnet H_y dapat dikerjakan sebagai berikut:

Pandang persamaan (3.72) untuk medan magnet, yaitu:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = 0$$

dengan kondisi batas untuk medan magnet $H_y(x, t)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$H_y(0, t) = 0 \quad (3.129)$$

$$H_y(l, t) = 0 \quad (3.130)$$

Jika dimisalkan $H_y(x, t) = X(x)T(t)$ maka didapatkan

$$\frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 H_y(x,t)}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

$$\frac{\partial H_y(x,t)}{\partial x} = X'(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 H_y(x,t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

Substitusikan persamaan di atas pada persamaan (3.72), sehingga didapatkan

$$X(x)T''(t) - v^2 X''(x)T(t) = 0 \quad (3.131)$$

Kalikan persamaan (3.132) dengan $1/X(x)T(t)$ sehingga didapatkan

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.132)$$

Jika dimisalkan $(1/v^2)T''(t)/T(t)$ dan $X''(x)/X(x)$ sama dengan λ , maka didapatkan

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \quad (3.133)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (3.134)$$

Persamaan (3.134) dapat ditulis kembali menjadi

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (3.135)$$

Jika dimisalkan $X(x) = e^{mx}$, maka persamaan (3.135) menjadi

$$m^2 e^{mx} - \lambda e^{mx} = 0$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$e^{mx} (m^2 - \lambda) = 0 \quad (3.136)$$

sehingga didapatkan persamaan karakteristik dari persamaan (3.136) yaitu:

$$m^2 - \lambda = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$m^2 = \lambda \quad (3.137)$$

sehingga didapatkan akar-akar karakteristik dari persamaan (3.137), yaitu:

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \quad (3.138)$$

Berdasarkan akar-akar karakteristik yang diperoleh, maka untuk penyelesaiannya terdapat tiga kasus yang harus ditinjau, yaitu:

1) Kasus I: Jika $\lambda > 0$, maka didapatkan dua akar riil dan berbeda, yaitu

$m_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Akibatnya, penyelesaian umum dari persamaan (3.138) adalah

$$X(x) = C_5 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_6 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (3.139)$$

dengan memperhatikan kondisi batas untuk $0 \leq x \leq l$, maka persamaan

(3.139) pada saat $x = 0$, yaitu:

$$X(0) = C_5 e^{\sqrt{\lambda}(0)} + C_6 e^{-\sqrt{\lambda}(0)} = 0$$

Bentuk di atas dapat dinyatakan kembali menjadi

$$C_5 + C_6 = 0$$

sehingga didapatkan

$$C_6 = -C_5 \quad (3.140)$$

sedangkan persamaan (3.139) pada saat $x = l$ adalah

$$X(l) = C_5 e^{\sqrt{\lambda}(l)} + C_6 e^{-\sqrt{\lambda}(l)} = 0 \quad (3.141)$$

Substitusikan persamaan (3.140) pada persamaan (3.141), sehingga didapatkan

$$C_5 e^{\sqrt{\lambda}(l)} - C_5 e^{-\sqrt{\lambda}(l)} = 0$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$C_1 \left(e^{\sqrt{\lambda}(l)} - e^{-\sqrt{\lambda}(l)} \right) = 0 \quad (3.142)$$

sehingga dari persamaan (3.142) dapat disimpulkan

$$C_5 = 0 \quad \text{atau} \quad e^{\sqrt{\lambda}(l)} - e^{-\sqrt{\lambda}(l)} = 0 \quad (3.143)$$

Jika diasumsikan $C_5 \neq 0$ dan $e^{\sqrt{\lambda}(l)} - e^{-\sqrt{\lambda}(l)} = 0$, maka didapatkan

$$e^{\sqrt{\lambda}(l)} = e^{-\sqrt{\lambda}(l)}$$

$$e^{\sqrt{\lambda}(l)} = \frac{1}{e^{\sqrt{\lambda}(l)}}$$

$$e^{2\sqrt{\lambda}(l)} = 1$$

$$e^{2\sqrt{\lambda}(l)} = e^0$$

$$2\sqrt{\lambda}(l) = 0$$

sehingga didapatkan

$$2\sqrt{\lambda}(l) = 0$$

Namun, $e^{\sqrt{\lambda}(l)} - e^{-\sqrt{\lambda}(l)} \neq 0$ karena $\lambda > 0$ dan $l > 0$. Sehingga penyelesaian yang mungkin adalah $C_5 = 0$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa tidak ada penyelesaian *nontrivial* pada kasus ini.

- 2) Kasus II: Jika $\lambda = 0$, maka didapatkan dua akar yang berulang, yaitu $m_1 = m_2 = 0$. Akibatnya, penyelesaian umum dari persamaan (3.138) adalah

$$X(x) = C_5 e^{(0)x} + C_6 x e^{(0)x} \quad (3.144)$$

dengan memperhatikan kondisi batas untuk $0 \leq x \leq l$, maka persamaan (3.144) pada saat $x = 0$, yaitu:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_5 e^{(0)(0)} + C_6(0) e^{(0)(0)} = 0 \\ C_5 e^0 + C_6(0) e^0 &= 0 \\ C_5 + 0 &= 0 \\ C_5 &= 0 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$C_5 = 0 \quad (3.145)$$

sedangkan persamaan (3.144) pada saat $x = l$ adalah

$$\begin{aligned} X(l) &= C_5 e^{(0)l} + C_6(l) e^{(0)l} = 0 \\ C_5 e^0 + C_6(l) e^0 &= 0 \\ C_5 + C_6(l) &= 0 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (3.145) pada persamaan di atas, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} 0 + C_6(l) &= 0 \\ C_6(l) &= 0 \end{aligned}$$

Karena $l > 0$, maka didapatkan $C_6 = 0$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa jika $\lambda = 0$, maka didapatkan $C_5 = C_6 = 0$, sehingga tidak ada penyelesaian *nontrivial* pada kasus ini.

- 3) Kasus III: Jika $\lambda > 0$, maka didapatkan dua akar kompleks, yaitu $m_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Akibatnya, penyelesaian umum untuk persamaan (3.138) adalah

$$\begin{aligned} X(x) &= C_5 e^{(0)x} \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 e^{(0)x} \sin \sqrt{\lambda}x \\ &= C_5 \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{\lambda}x \end{aligned} \quad (3.146)$$

dengan memperhatikan kondisi batas untuk $0 \leq x \leq l$, maka persamaan (3.146) pada saat $x = 0$, yaitu:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_5 \cos \sqrt{\lambda}(0) + C_6 \sin \sqrt{\lambda}(0) = 0 \\ C_5(1) + C_6(0) &= 0 \\ C_5 &= 0 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$C_5 = 0 \quad (3.147)$$

sedangkan persamaan (3.146) pada saat $x = l$ adalah

$$X(l) = C_5 \cos \sqrt{\lambda}(l) + C_6 \sin \sqrt{\lambda}(l) = 0 \quad (3.148)$$

Substitusikan persamaan (3.147) pada persamaan (3.148), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} X(l) &= (0) \cos \sqrt{\lambda}(l) + C_6 \sin \sqrt{\lambda}(l) = 0 \\ 0 + C_6 \sin \sqrt{\lambda}(l) &= 0 \\ C_6 \sin \sqrt{\lambda}(l) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan di atas dapat disimpulkan

$$C_6 = 0 \quad \text{atau} \quad \sin \sqrt{\lambda}(l) = 0 \quad (3.149)$$

Jika diasumsikan $C_6 \neq 0$ dan $\sin \sqrt{\lambda}(l) = 0$, maka $\sin \sqrt{\lambda}(l) = 0$ jika dan hanya jika $\sqrt{\lambda}(l) = n\pi$, yaitu:

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda}(l) &= n\pi \\ \lambda(l^2) &= (n\pi)^2 \\ \lambda &= \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\end{aligned}$$

dimana $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Jika diasumsikan $C_6 = 0$, maka tidak ada penyelesaian *nontrivial* untuk kasus ini. Sehingga penyelesaian untuk persamaan (3.146), yaitu:

$$X_n(x) = a_n^* \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.150)$$

dimana a_n^* adalah konstanta.

Selanjutnya, pandang persamaan (3.133), sebagai berikut:

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$T''(t) = v^2 \lambda T(t)$$

$$T''(t) - v^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.151)$$

Jika dimisalkan $T(t) = e^{mt}$, maka persamaan (3.151) menjadi

$$m^2 e^{mt} - v^2 \lambda e^{mt} = 0$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$e^{mt} (m^2 - v^2 \lambda) = 0 \quad (3.152)$$

sehingga didapatkan persamaan karakteristik dari persamaan (3.152) yaitu:

$$m^2 - v^2\lambda = 0 \quad (3.153)$$

Persamaan (3.153) dapat ditulis kembali menjadi

$$m^2 = v^2\lambda \quad (3.154)$$

Karena λ yang sesuai adalah $\lambda < 0$, maka diperoleh akar-akar karakteristik dari persamaan (3.154), yaitu:

$$m_{12} = \pm\sqrt{-v^2\lambda} = \pm iv\sqrt{\lambda} \quad (3.155)$$

sehingga, penyelesaian umum dari persamaan (3.151) adalah

$$\begin{aligned} T(t) &= C_7 e^{(0)t} \cos(v\sqrt{\lambda}t) + C_8 e^{(0)t} \sin(v\sqrt{\lambda}t) \\ &= C_7 \cos(v\sqrt{\lambda}t) + C_8 \sin(v\sqrt{\lambda}t) \end{aligned} \quad (3.156)$$

Karena $\lambda = (n\pi/l)$ dan $t > 0$, maka penyelesaian dari persamaan (3.151) adalah

$$T_n(t) = b_n^* \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + c_n^* \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \quad (3.157)$$

Substitusikan persamaan (3.150) dan (3.157) pada $H_{y_n}(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, maka didapatkan

$$H_{y_n}(x,t) = \left(a_n^* \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right) \left(b_n^* \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + c_n^* \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right)\right) \quad (3.158)$$

Jika dimisalkan $C_n = a_n^* b_n^*$ dan $D_n = a_n^* c_n^*$ maka persamaan (3.158) dapat ditulis kembali

$$H_{y_n}(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(C_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + D_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right)\right) \quad (3.159)$$

Persamaan (3.159) merupakan penyelesaian partikular masalah nilai batas untuk medan magnet H_y .

Karena persamaan (3.72) adalah linier dan homogen, maka persamaan (3.159) dapat ditulis dalam bentuk deret tak hingga sebagai berikut:

$$H_y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(C_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + D_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \right) \quad (3.160)$$

Persamaan (3.160) juga merupakan penyelesaian dari persamaan (3.72) yang konvergen dan kontinu serta terturunkan terhadap x dan t .

Kemudian turunkan deret (3.160) terhadap t , sehingga diperoleh

$$\frac{\partial H_y(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(-C_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + D_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \right) \quad (3.161)$$

Kemudian, substitusikan kondisi awal (3.73) dan (3.74) pada persamaan (3.160) dan persamaan (3.161), yaitu:

$$\begin{aligned} H_y(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(C_n \cos\left(\frac{vn\pi(0)}{l}\right) + D_n \sin\left(\frac{vn\pi(0)}{l}\right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (C_n \cos(0) + D_n \sin(0)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (C_n(1) + D_n(0)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y(x, 0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(-C_n \sin\left(\frac{vn\pi(0)}{l}\right) + D_n \cos\left(\frac{vn\pi(0)}{l}\right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (-C_n \sin(0) + D_n \cos(0)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (0 + D_n(1)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{vn\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = -\frac{1}{\mu} \cos(x) \end{aligned}$$

dengan koefisien C_n dan D_n diberikan sebagai berikut:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \cos(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.162)$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \left(-\frac{1}{\mu} \cos(x)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.163)$$

Pertama selesaikan $\int_1^l \cos(x) \sin(n\pi x/l) dx$ sebagai berikut:

$$\int_1^l \cos(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \sin\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right) x dx - \int_0^l \sin\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) x dx \right) \quad (3.164)$$

Kemudian untuk $\int_0^l \sin\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right) x dx$ diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right) x dx &= -\frac{l}{l+n\pi} \cos\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right) x \Big|_0^l \\ &= -\frac{l}{l+n\pi} \left(\cos\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right) l - \cos(0) \right) \\ &= -\frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1) \end{aligned} \quad (3.165)$$

dan untuk $\int_0^l \sin\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) x dx$ dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) x dx &= -\frac{l}{l-n\pi} \cos\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) x \Big|_0^l \\ &= -\frac{l}{l-n\pi} \left(\cos\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) l - \cos(0) \right) \\ &= -\frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) \end{aligned} \quad (3.166)$$

Substitusikan persamaan (3.165) dan (3.166) pada persamaan (3.164), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \int_1^l \cos(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^l \sin\left(1 + \frac{n\pi}{l}\right) x dx - \int_0^l \sin\left(1 - \frac{n\pi}{l}\right) x dx \right) \\ &= \frac{l}{2} \left(-\frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1) - \left(-\frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) \right) \right) \\ &= \frac{l}{2} \left(\frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) - \frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1) \right) \quad (3.167) \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (3.167) pada persamaan (3.162) sebagai berikut:

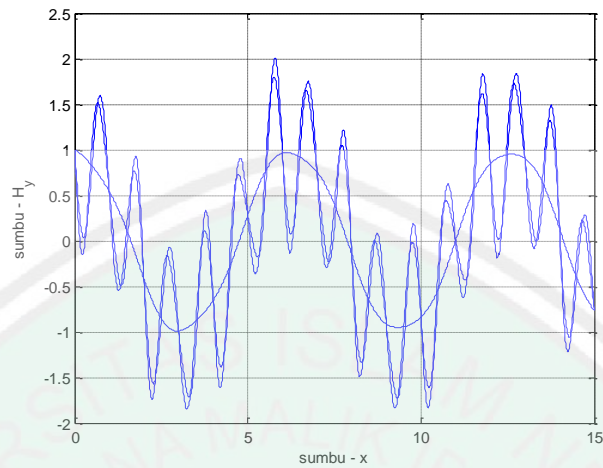
$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \left(\frac{l}{2} \left(\frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) - \frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1) \right) \right) \\ &= \frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) - \frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1) \quad (3.168) \end{aligned}$$

Kemudian, substitusikan persamaan (3.167) pada persamaan (3.163) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D_n &= -\frac{2}{n\pi\nu\mu} \left(\frac{l}{2} \left(\frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) - \frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1) \right) \right) \\ &= -\frac{l}{n\pi\nu\mu} \left(\frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) - \frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1) \right) \quad (3.169) \end{aligned}$$

Persamaan (3.160) merupakan penyelesaian masalah nilai awal dan masalah nilai batas untuk medan magnet H_y dengan koefisien C_n dan D_n diberikan pada persamaan (3.168) dan (3.169).

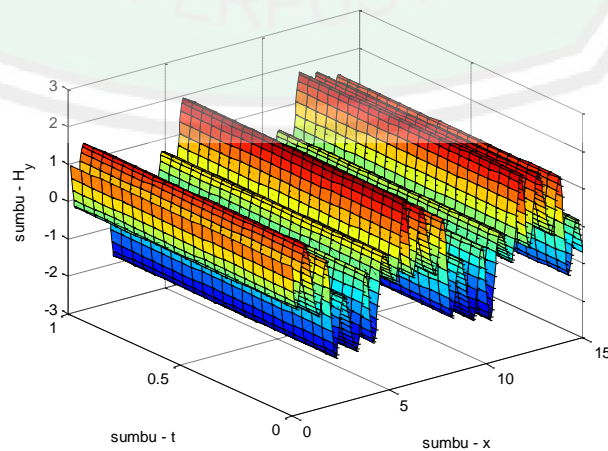
Secara grafik, penyelesaian analitik medan magnet H_y dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.13 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Batas untuk Medan Magnet H_y pada Sumbu (H_y, x)

Pada gambar 3.13, dapat diketahui untuk $n=1$ amplitudonya adalah ± 1 . Sedangkan periodenya adalah 2. Untuk $n=2$ dan $n=3$ amplitudonya adalah 1,5 dan periodenya adalah 11. Pada gambar, terlihat bahwa amplitudo dan periodenya mengalami perubahan yang signifikan dimana jumlah amplitudo dan periodenya bertambah.

Sedangkan gambar penampang gelombang untuk medan magnet pada sumbu (H_y, x, t) dapat dilihat pada gambar 3.14 sebagai berikut:



Gambar 3.14 Grafik Penyelesaian Masalah Nilai Batas untuk Medan Magnet H_y pada sumbu (H_y, x, t)

3.3 Batas Kemampuan Manusia dalam Al-Qur'an

Allah SWT menciptakan manusia berbeda-beda. Ada kuat, ada lemah, ada kaya, ada miskin, satu cerdas dan berpotensi besar, salah satunya kurang cerdas dan berpotensi sedikit. Karena memang fitrah manusia diciptakan berbeda-beda dan memiliki batas kemampuan. Seperti yang dijelaskan dalam surat Al-Baqarah ayat 286, Allah SWT berfirman:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۗ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِن نَّسِينَا
 أَوْ أَخْطَأْنَا ۗ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِن قَبْلِنَا ۗ رَبَّنَا وَلَا
 تُحْمِلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۗ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا ۗ أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ
 الْكَافِرِينَ

Artinya: Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau hukum Kami jika Kami lupa atau Kami tersalah. Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau bebankan kepada Kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau pikulkan kepada Kami apa yang tak sanggup Kami memikulnya. beri ma'aflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong Kami, Maka tolonglah Kami terhadap kaum yang kafir."

Menurut Al-Qurthubi (2009), kata *at-Takliif* adalah sesuatu yang memberatkan seseorang. Terbebani sesuatu artinya adalah menanggung atau menahan beban tersebut. Sedangkan kata *wus'aha*, adalah kesungguhan, kemampuan, dan kesanggupan. Ayat ini menerangkan bahwasanya Allah tidak membebani seseorang melainkan hanya sebatas kemampuannya, yang mungkin dilakukan olehnya. Allah memberitahukan bahwa dari awal diturunkannya ayat pertama, hamba-hambanya tidak pernah dibebani dengan suatu ibadah, baik yang

dilakukan oleh anggota badan yang dapat dilihat maupun tidak, kecuali pembebanan itu masih dapat dilakukan oleh mereka.

Sedangkan dalam tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa ayat ini yang menghapus berat beban yang dirasakan oleh para sahabat Nabi, yaitu dalam ayat, (وَإِنْ تُبْدُوا مَا فِي أَنْفُسِكُمْ أَوْ تُخْفُوهُ يُحَاسِبِكُمْ بِهِ اللَّهُ) “Dan jika kamu menampakkan apa yang ada dalam di hatimu atau kamu menyembunyikannya, niscaya Allah akan membuat perhitungan denganmu tentang perbuatanmu itu.” Maksudnya, meskipun Dia menghisab dan meminta pertanggungjawaban, namun Dia tidak mengadzab melainkan disebabkan dosa yang seseorang memiliki kemampuan untuk menolaknya. Adapun sesuatu yang seseorang tidak memiliki kemampuan untuk menolaknya seperti godaan dan bisikan jiwa (hati), maka hal itu tidak dibebankan kepada manusia dan kebencian terhadap godaan bisikan yang jelek merupakan bagian dari iman (Abdullah, 2004). Jadi, apabila manusia tidak mempunyai kemampuan itu, maka beban itu tidak akan diberikan kepada manusia atau dengan kata lain, Allah akan mengadzab seseorang yang diberikan pekerjaan tetapi tidak dikerjakan (Ash-Shiddieqy, 2000).

Menurut Al-Jazairi (2006) dalam tafsirnya yang berjudul Al-Aisar, ayat ini menerangkan bahwa dalam mencapai tujuan hidup, manusia diberi beban oleh Allah SWT sesuai batas kesanggupannya, mereka diberi pahala lebih dari yang telah diusahakannya dan mendapat siksa yang seimbang dengan kejahatan yang telah dilakukannya. Agama Islam adalah agama yang tidak memberati manusia dengan beban yang berat dan sulit. Mudah, ringan, dan tidak sempit adalah asas

pokok dari agama Islam. Hal ini merupakan salah satu dari lemah lembut dan kasih sayang-Nya kepada makhluk-Nya.

Sedangkan dalam tafsir fi-zhilalil qur'an dikatakan bahwa setiap tugas yang diberikan oleh Allah adalah sesuai dengan batas kemampuan manusia. Walaupun akan ada saat dimana manusia merasa berat melaksanakannya, tetapi itu bukan karena beban itu berat. Namun, merupakan kelemahan dari manusia itu sendiri. Dengan melipatgandakan semangat dan meningkatkan tekad, semua itu akan dapat diatasi. Karena, semua tugas yang dibebankan masih dalam lingkup kemampuan manusia (Qutb, 2001).

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, manusia mempunyai kemampuan terbatas sesuai dengan ukuran yang diberikan oleh Allah kepadanya. Makhluk ini, misalnya, tidak dapat terbang. Ini merupakan salah satu ukuran atau batas kemampuan yang dianugerahkan Allah kepadanya. Ia tidak mampu melampauinya, kecuali jika ia menggunakan akalinya untuk menciptakan suatu alat, namun akalinya pun mempunyai ukuran yang tidak mampu dilampaui. Di sisi lain, manusia berada di bawah hukum-hukum Allah sehingga segala yang dilakukan pun tidak terlepas dari hukum-hukum yang telah mempunyai kadar dan ukuran tertentu. Hanya saja karena hukum-hukum tersebut cukup banyak, dan manusia diberi kemampuan untuk memilih maka manusia dapat memilih yang mana di antara takdir yang ditetapkan Tuhan terhadap alam yang dipilihnya. Di sinilah pentingnya pengetahuan dan perlunya ilham atau petunjuk Ilahi (Shihab, 1996).

Dari paparan di atas, dapat disimpulkan bahwasanya Allah SWT tidak akan membebani seseorang kecuali sesuai dengan kesanggupannya. Begitu pula dalam menyelesaikan suatu permasalahan matematika. Suatu permasalahan matematika sejatinya dapat dicari penyelesaian analitik dan penyelesaian numeriknya. Meskipun penyelesaian analitik lebih bagus daripada penyelesaian numeriknya karena tidak mempunyai galat atau *error*. Namun terkadang, ada permasalahan yang sulit dicari penyelesaian analitiknya, sehingga dapat diselesaikan dengan mencari penyelesaian numeriknya.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan untuk analisis eksistensi dan ketunggalan untuk persamaan Maxwell dan penyelesaian analitik persamaan Maxwell untuk medan listrik E_z dan medan magnet H_y dengan masalah nilai awal dan masalah nilai batas sebagai berikut:

1. Berdasarkan analisis eksistensi dan ketunggalan penyelesaian untuk persamaan Maxwell, diketahui bahwa penyelesaian untuk persamaan Maxwell ada dan mempunyai satu penyelesaian.
2. Penyelesaian masalah nilai awal untuk medan listrik E_z dan medan magnet H_y sebagai berikut:

$$E_z(x, t) = \sin(x) \left(\cos(vt) + \frac{1}{v\epsilon} \sin(vt) \right)$$

$$H_y(x, t) = \cos(x) \left(\cos(vt) - \frac{1}{v\mu} \sin(vt) \right)$$

3. Penyelesaian masalah nilai batas untuk medan listrik E_z dan medan magnet H_y sebagai berikut:

$$E_z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \right)$$

dimana

$$A_n = \frac{1}{l-n\pi} \sin(l-n\pi) - \frac{1}{l+n\pi} \sin(l+n\pi)$$

dan

$$B_n = \frac{l}{n\pi v \epsilon} \left(\frac{1}{l-n\pi} \sin(l-n\pi) - \frac{1}{l+n\pi} \sin(l+n\pi) \right)$$

dan untuk medan magnet H_y yaitu:

$$H_y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(C_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + D_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) \right)$$

dimana

$$C_n = \frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) - \frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1)$$

dan

$$D_n = -\frac{l}{n\pi v \mu} \left(\frac{l}{l-n\pi} (\cos(l-n\pi) - 1) - \frac{l}{l+n\pi} (\cos(l+n\pi) - 1) \right)$$

4.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan metode *D'Alembert* untuk menyelesaikan masalah nilai awal dan metode pemisahan variabel untuk menyelesaikan masalah nilai batas. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini supaya mengembangkannya dengan melakukan analisis persamaan Maxwell untuk dimensi yang lebih tinggi atau menggunakan metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah, B.M.. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar, Abdurrahim Mu'thi, dan Abu Ihsan Al-Atsari. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Al-Jazairi, A.B.J.. 2006. *Tafsir Al-Aisar*. Terjemahan M. Azhari Hathim dan Abdurrahim Mukti. Jakarta: Darus Sunnah Press.
- Al-Qurthubi, S.I.. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi*. Terjemahan Fathurrahman Abdul Hamid, Dudi Rosyadi, dan Marwan Affandi. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Anggraini, D.P.. 2008. *Pemodelan Gelombang Bunyi Dalam Air dan Solusinya*. Skripsi tidak diterbitkan. Bogor: IPB.
- Anonim. 2013. *Modul Gelombang Elektromagnetik*. (Online): ([http://supriyanto.fisika.ui.ac.id./laci04/gelombang elektromagnetik.pdf](http://supriyanto.fisika.ui.ac.id./laci04/gelombang%20elektromagnetik.pdf)). Diakses tanggal 3 Februari 2013 pukul 09.27).
- Ash-Shiddieqy, M.H.T.. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nur*. Semarang: Pustaka Rizki Putra.
- Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R.. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Cain, J.W. dan Reynolds, A.M.. 2010. *Ordinary And Partial Differential Equations: An Introduction to Dynamical Systems*. Virginia: Virginia Commonwealth University.
- Finizio, N. dan Ladas, G.. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Terjemahan oleh Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Fong, C.F.M.C., Kee, D.D., dan Kaloni, P.N.. 2003. *Advanced Mathematics For Engineering and Science*. Singapura: World Scientific.
- Guswanto, B.H. dan Nurshiami, S.R.. 2006. *Analisis Riil*. Purwokerto: Universitas Jenderal Soedirman.
- Hirsch, M.W. dan Smale, S.. 1970. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. California: Academic Press.
- Hirsch, M.W., Smale, S., dan Devaney, R.L.. 2004. *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*. California: Academic Press.
- Ishaq, M.. 2007. *Fisika dasar Edisi Kedua*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

- Kumar, N. dan Kumar, R.. 2010. *Partial Differential Equations with Numerical Solutions*. New Delhi: Anamaya Publishers.
- Liang, D. dan Yuan, Q.. 2013. The Spatial Fourth-Order Energy-Conserved S-FDTD Scheme for Maxwell's Equations. *Journal of Computational Physics* 243, Hal. 344-364.
- Myint-U, T. dan Debnath, L.. 2007. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Fourth Edition*. Boston: Birkhäuser.
- Nagle, R.K. dan Saff, E.B.. 1966. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Massachusetts: Addison Wesley Longman, Inc.
- Polyanin, A.D.. 2002. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Purwanto, A.. 2008. *Ayat-ayat Semesta: Sisi-sisi Al-Qur'an yang Terlupakan*. Bandung: Mizan.
- Qutb, S.. 2001. *Fi Zhilalil Qur'an*. Terjemahan Aunur Rafiq Shaleh Tamhiddan Syafril Halim. Jakarta: Rabbani Press.
- Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Rudin, W.. 1976. *Principles of Mathematical Analysis Third Edition*. New York: McGraw-Hill, Inc.
- Shihab, M.Q.. 1996. *Wawasan Al-Qur'an: Tafsir Maudhu'i atas Pelbagai Persoalan Umat*. Bandung: Mizan.
- Spiegel, M.R.. 1984. *Advanced Mathematics for Engineer and Scientists*. Terjemahan oleh Koko Martono. Jakarta: Erlangga.
- Stewart, J.. 2003. *Kalkulus Jilid 2*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila dan Hendra Gunawan. Jakarta: Erlangga.
- Strauss, W.A.. 2008. *Partial Differential Equation: An Introduction*. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Tripler, P.A.. 1998. *Fisika*. Terjemahan oleh Lea Prasetio dan Rahmad W. Adi. Jakarta: Erlangga.
- Tung, K.K.. 2013. *Partial Differential Equations And Fourier Analysis: A Short Introduction*. Washington: University of Washington.
- Wardhana, W.A.. 2004. *Al Qur'an dan Energi Nuklir*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Wardhana, W.A.. 2005. *Al Qur'an dan Teori Einstein: Melacak Teori Einstein Dalam Al Qur'an*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Zhao, S. dan Wei, G.W.. 2004. High-Order FDTD Methods Via Derivative Matching for Maxwell's Equations with Material Interfaces. *Journal of Computational Physics* 200, Hal. 60-103.

Zill, D.G. dan Cullen, M.R.. 2009. *Differential Equations With Boundary Value Problems*. Kanada: Cengage Learning.



LAMPIRAN

Lampiran 1

Program Matlab untuk gambar 3.1 dengan waktu $0 < t < 1$

```
% Lampiran 1
% Program Matlab untuk gambar 3.1
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== ||=====
clc,clear
t=0:.0225:1;
x=1;
v=3*(10^8);
ep=8.85*10^-12;
E_z=sin(x)*(cos(v*t)+(1/v*ep)*sin(v*t));
plot(t,E_z)
grid on
xlabel('sumbu - t'),ylabel('sumbu - E_z')
%===== ||=====
```

Lampiran 2

Program Matlab untuk gambar 3.2 dengan interval $0 < x < 15$

```
% Lampiran 2
% Program Matlab untuk gambar 3.2
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== ||=====
clc,clear
x=0:.0001:15;
t=1;
v=3*(10^8);
ep=8.85*10^-12;
E_z=sin(x)*(cos(v*t)+(1/v*ep)*sin(v*t));
plot(x,E_z)
grid on
xlabel('sumbu - x'),ylabel('sumbu - E_z')
%===== ||=====
```

Lampiran 3

Program Matlab untuk gambar 3.3

```
% Lampiran 3
% Program Matlab untuk gambar 3.3
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== ||=====
clc,clear
t=linspace(1,15,60);
x=t;
[X,T]=meshgrid(x,t);
v=3*10^8;
ep=8.85*10^-12;
E_z=zeros(60,60);
for i=1:60
```

```

    for j=1:60
        E_z(i,j)=sin(X(i))*(cos(v*T(j))+(1/v*ep)*sin(v*T(j)));
    end
end
surf(X,T,E_z)
xlabel('sumbu - x'),ylabel('sumbu - t'),zlabel('sumbu - E_z')
%===== || =====

```

Lampiran 4

Program Matlab untuk gambar 3.4 dengan interval $0 < x < 15$ dan $0 < x < 30$

```

% Lampiran 3
% Program Matlab untuk gambar 3.4
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== || =====
clc,clear
x=0:.0001:15; % Untuk 0<x<15 dan 0<x<30
t=1; % Untuk t=1,2
v=3*(10^8);
ep=8.85*10^-12;
E_z=sin(x)*(cos(v*t)+(1/v*ep)*sin(v*t));
plot(x,E_z)
grid on
%===== || =====

```

Lampiran 5

Program Matlab untuk gambar 3.5 dengan waktu $0 < t < 1$ dan $0 < t < 2$

```

% Lampiran 5
% Program Matlab untuk gambar 3.5
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== || =====
clc,clear
t=0:.0225:1; % Untuk 0<t<1 dan 0<t<2
x=15; % Untuk x=15,30
v=3*(10^8);
ep=8.85*10^-12;
E_z=sin(x)*(cos(v*t)+(1/v*ep)*sin(v*t));
plot(t,E_z)
grid on
%===== || =====

```

Lampiran 6

Program Matlab untuk gambar 3.6 dengan waktu $0 < t < 1$

```

% Lampiran 6
% Program Matlab untuk gambar 3.5
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== || =====
clc,clear
t=0:.0225:1;
x=15;
v=3*(10^8);
mu=4*pi*(10^-7);

```

```

H_y=cos(x)*(cos(v*t)-(1/v*mu)*sin(v*t));
plot(t,H_y)
grid on
xlabel('sumbu - t'),ylabel('sumbu - H_y')
%=====||=====

```

Lampiran 7

Program Matlab untuk gambar 3.7 dengan interval $0 < x < 15$

```

% Lampiran 7
% Program Matlab untuk gambar 3.7
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%=====||=====
clc,clear
x=0:.0001:15;
t=1;
v=3*(10^8);
mu=4*pi*(10^-7);
H_y=cos(x)*(cos(v*t)-(1/v*mu)*sin(v*t));
plot(x,H_y)
grid on
xlabel('sumbu - x'),ylabel('sumbu - H_y')
%=====||=====

```

Lampiran 8

Program Matlab untuk gambar 3.8

```

% Lampiran 8
% Program Matlab untuk gambar 3.8
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%=====||=====
clc,clear
figure
t=linspace(1,15,30);
x=t;
[X,T]=meshgrid(x,t);
v=3*10^8;
mu=4*pi*(10^-7);
H_y=zeros(30,30);
for i=1:30
    for j=1:30
        H_y(i,j)=cos(X(i))*(cos(v*T(j))-(1/v*mu)*sin(v*T(j)));
    end
end
surf(X,T,H_y)
xlabel('sumbu - x'),ylabel('sumbu - t'),zlabel('sumbu - H_y')
%=====||=====

```

Lampiran 9

Program Matlab untuk gambar 3.9 dengan interval $0 < x < 15$ dan $0 < x < 30$

```
% Lampiran 9
% Program Matlab untuk gambar 3.9
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== || =====
clc,clear
x=0:.0001:15; % Untuk 0<x<15 dan 0<x<30
t=1; % Untuk t=1,2
v=3*(10^8);
mu=4*pi*(10^-7);
H_y=cos(x)*(cos(v*t)-(1/v*mu)*sin(v*t));
plot(x,H_y)
grid on
%===== || =====
```

Lampiran 10

Program Matlab untuk gambar 3.10 dengan waktu $0 < t < 1$ dan $0 < t < 2$

```
% Lampiran 10
% Program Matlab untuk gambar 3.10
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== || =====
clc,clear
t=0:.0225:1; % Untuk 0<t<1 dan 0<t<2
x=15; % Untuk x=15,30
v=3*(10^8);
mu=4*pi*(10^-7);
H_y=cos(x)*(cos(v*t)-(1/v*mu)*sin(v*t));
plot(t,H_y)
grid on
%===== || =====
```

Lampiran 11

Program Matlab untuk gambar 3.11

```
% Lampiran 11
% Program Matlab untuk gambar 3.11
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%===== || =====
clc,clear
x=(0:0.01:15);
t=(0:0.01:15);
l=15;
ep=8.85*10^-12;
v=3*(10^8);
E_z0=(sin(x));
E_z=E_z0;
for n=1:3
A_n=(1/(l-n*pi))*sin(l-n*pi)-(1/(l+n*pi))*sin(l+n*pi);
B_n=(1/(n*pi*v*ep))*A_n;
E_z=E_z+ sin(n*pi*x).*(A_n*cos(v*n*pi*t/l)+B_n*sin(v*n*pi*t/l));
plot(x,E_z,'LineWidth',1.5), hold on, grid on
```

```

pause(2)
end

```

Lampiran 12

Program Matlab untuk gambar 3.12

```

% Lampiran 12
% Program Matlab untuk gambar 3.12
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%=====||=====
clc, clear
x=(0:0.095:15);
t=(0:0.095:1);
l=15;
ep=8.85*10^-12;
v=3*(10^8);
[X,T]=meshgrid(x,t);
u0=sin(X);
u1=(8/(3*pi))*(sin(pi*X)).*(exp(-(pi)^2*T));
u2=u0;
for n=1:3
    u2oud=u2;
    A_n(n)=(1/(1-n*pi))*sin(1-n*pi)-(1/(1+n*pi))*sin(1+n*pi);
    B_n(n)=(1/(n*pi*v*ep))*A_n(n);
    u2=u2+
sin(n*pi*X).*(A_n(n)*cos(v*n*pi*T/l)+B_n(n)*sin(v*n*pi*T/l));
    surf(X,T,u2), axis([0 15 0 1 -3 3]), view(-40,10)
    u20=u2(1,:);
    pause(1)
end
xlabel('sumbu - x'), ylabel('sumbu - t'), zlabel('sumbu - E_z')
%=====||=====

```

Lampiran 13

Program Matlab untuk gambar 3.13

```

% Lampiran 13
% Program Matlab untuk gambar 3.13
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%=====||=====
clc, clear
x=(0:0.01:15);
t=(0:0.01:15);
l=15;
mu=4*pi*(10^-7);
v=3*(10^8);
E_z0=(cos(x));
E_z=E_z0;
for n=1:3
    C_n=(1/(1-n*pi))*((cos(1-n*pi)-1)-(1/(1+n*pi))*(cos(1+n*pi)-1));
    D_n=-1/(n*pi*v*mu)*C_n;
    E_z=E_z+ sin(n*pi*x).*(C_n*cos(v*n*pi*t/l)+D_n*sin(v*n*pi*t/l));
end
plot(x,E_z,'LineWidth',1.5), hold on, grid on
pause(4)

```



```

end
xlabel('sumbu - x'),ylabel('sumbu - H_y')
%=====||=====

```

Lampiran 14

Program Matlab untuk gambar 3.14

```

% Lampiran 14
% Program Matlab untuk gambar 3.14
% Oleh : Roudatul Khairiyah
%=====||=====
clc,clear
x=(0:0.045:15);
t=(0:0.045:1);
l=15;
mu=4*pi*(10^-7);
[X,T]=meshgrid(x,t);
v=3*(10^8);
H_y0=cos(X);
H_y=H_y0;
for n=1:3
    C_n(n)=(1/(1-n*pi))*((cos(1-n*pi)-1)-
(1/(1+n*pi))*(cos(1+n*pi)-1));
    D_n(n)=-(1/(n*pi*v*mu))*C_n(n);
    H_y=H_y+
sin(n*pi*X).*(C_n(n)*cos(v*n*pi*T/l)+D_n(n)*sin(v*n*pi*T/l));
    surf(X,T,H_y), axis([0 15 0 1 -3 3])
    pause(1)
end
xlabel('sumbu - x'),ylabel('sumbu - t'),zlabel('sumbu - H_y')
%=====||=====

```