

***p*-CHART MODIFIKASI EKSPANSI CORNISH-FISHER UNTUK  
PENGENDALIAN PROSES PADA TINGKAT  
KETIDAKSESUAIAN KECIL**

SKRIPSI

Oleh:  
**FARIDA ULIN NUHA**  
**NIM. 09610103**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

***p*-CHART MODIFIKASI EKSPANSI CORNISH-FISHER UNTUK  
PENGENDALIAN PROSES PADA TINGKAT  
KETIDAKSESUAIAN KECIL**

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**FARIDA ULIN NUHA**  
NIM. 09610103

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

***p*-CHART MODIFIKASI EKSPANSI CORNISH-FISHER UNTUK  
PENGENDALIAN PROSES PADA TINGKAT  
KETIDAKSESUAIAN KECIL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**FARIDA ULIN NUHA**  
**NIM. 09610103**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal: 30 Mei 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Fachrur Rozi, M.Si

NIP. 19800527 200801 1 012

Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

***p*-CHART MODIFIKASI EKSPANSI CORNISH-FISHER UNTUK  
PENGENDALIAN PROSES PADA TINGKAT  
KETIDAKSESUAIAN KECIL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**FARIDA ULIN NUHA**  
**NIM. 09610103**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 13 Juni 2013

Penguji Utama : Dr. Sri Harini, M.Si  
NIP. 19731014 200112 2 002 .....

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002 .....

Sekretaris Penguji : Fachrur Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012 .....

Anggota Penguji : Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001 .....

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Farida Ulin Nuha

NIM : 09610103

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Mei 2013  
Yang membuat pernyataan,

Farida Ulin Nuha  
NIM. 09610103

## MOTTO

فَإِذَا فَرَغْتَ فَانصَبْ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَارْغَبْ

Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain. Dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap.

(Alam Nasyrah: 7-8)

*“In The First we make habits,  
in the last habits make us”*

## PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah Rabbil 'alamin, dengan mengucap syukur  
kepada Allah SWT

Skrripsi ini penulis persembahkan untuk  
kedua orang tua tercinta  
Bapak Syamsuddin dan Ibu Suningsih  
sebagai motivator terbesar dalam hidup penulis  
yang tidak pernah lelah  
untuk mende'akan dan menyangangi penulis  
serta kedua adik tercinta  
Musta'inul Ichwan dan Muhammad Zainus Shelihin  
yang selalu mendukung penulis

## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum Wr. Wb.*

Syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus dosen pembimbing keagamaan.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing akademik, yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama menjadi mahasiswa.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan dan bimbingan selama penulisan skripsi ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kedua orang tua dan kedua adik tercinta, yang tak henti-hentinya memanjatkan do'a serta bekerja memeras keringat untuk pendidikan, kebahagiaan, dan kesuksesan masa depan penulis.
8. Kakak dan adik sepupu tercinta, Mamba'ul Huda dan Misbahuddin, yang telah memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Matematika angkatan 2009, khususnya Zahrotul Mufidah, Anis Fathona H., Suci Imro'atul M., Kamaliyah, Robi'atul A., Arni Hartanti, Novita I.S., Azhar Effendi, Ainun Rosyida, Fithrotul Maf'ula, Fauziah Paiman, Irma Yuni L., Lusianawati, Amalia Intifaada, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
10. Sahabat-sahabat kos di Jalan Mertojoyo Selatan Gang 1 Nomer 12, Titin Winarsih, Ajeng Fitriasih, Isya Muttoharo, Roudlotun Nadhifah, terima kasih untuk semua dukungan dan semangatnya dalam menuntut ilmu bersama.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil yang sudah diberikan kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

*Wassalamu 'alaikum Wr.Wb.*

Malang, Mei 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xiv
<b>ABSTRAK</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>مستخلص البحث</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Batasan Masalah .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	6
1.6 Metode Penelitian .....	6
1.7 Sistematika Penulisan .....	7
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Distribusi Probabilitas Diskrit.....	9
2.1.1 Distribusi Bernoulli.....	10
2.1.2 Distribusi Binomial .....	10
2.2 Ekspektasi .....	12
2.2.1 Momen .....	13
2.2.2 Fungsi Pembangkit Momen .....	15
2.2.3 Fungsi Pembangkit Momen dari Distribusi Binomial .....	16
2.2.4 <i>Cumulant</i> .....	17
2.3 Pengujian Hipotesis .....	18
2.4 <i>p-Chart</i> .....	20
2.4.1 Proporsi Ketidaksesuaian ( <i>Fraction Nonconforming</i> ) .....	20
2.4.2 Batas-Batas Pengendali untuk <i>p-Chart</i> .....	22
2.5 Ekspansi Cornish-Fisher .....	23
2.6 Kajian Keagamaan .....	25

### **BAB III PEMBAHASAN**

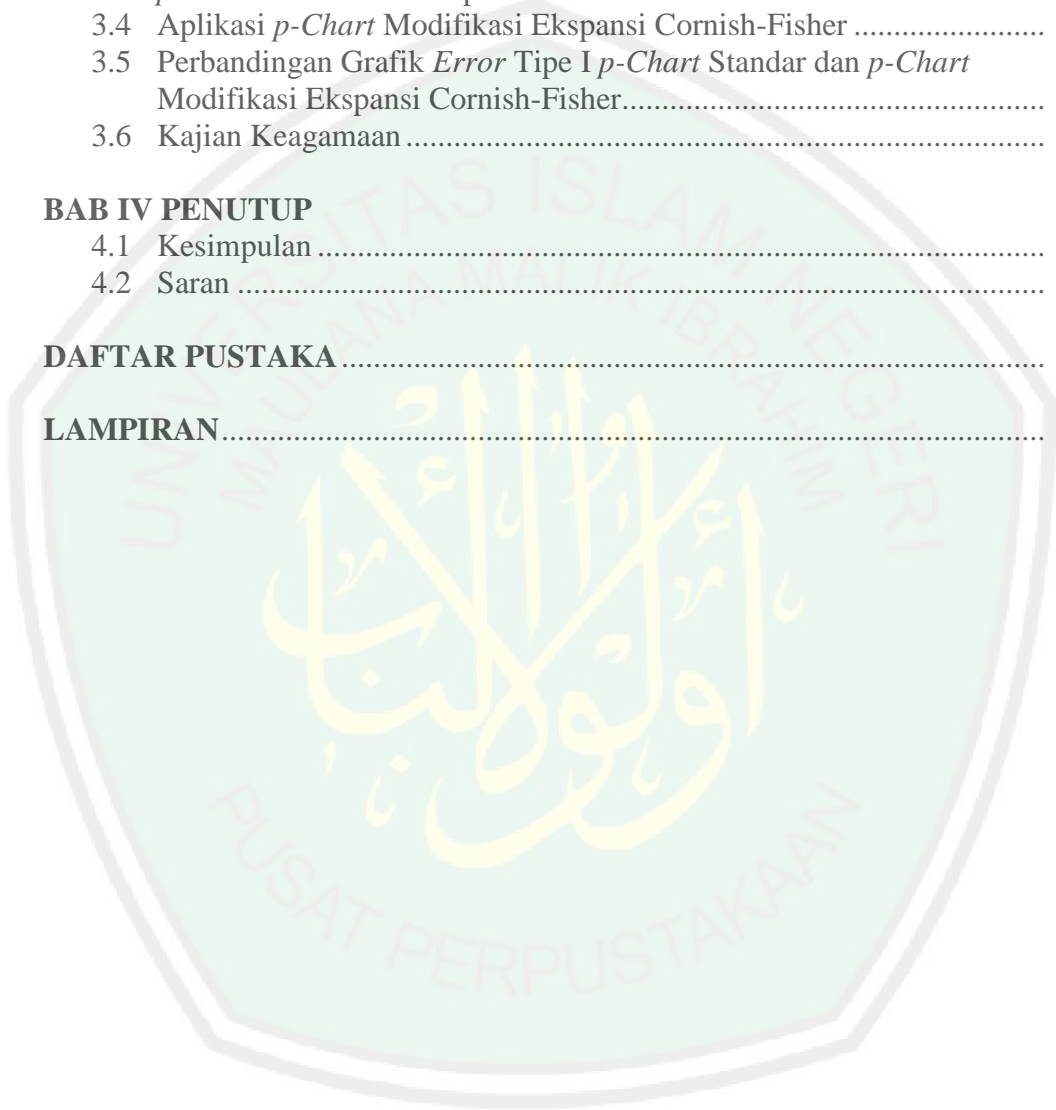
3.1 Menentukan Momen Biasa dan Momen Pusat pada Distribusi Binomial.....	29
3.2 Analisis Ekspansi Cornish-Fisher.....	35
3.3 <i>p-Chart</i> Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher.....	39
3.4 Aplikasi <i>p-Chart</i> Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher.....	42
3.5 Perbandingan Grafik <i>Error Tipe I p-Chart</i> Standar dan <i>p-Chart</i> Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher.....	49
3.6 Kajian Keagamaan.....	51

### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan.....	55
4.2 Saran.....	56

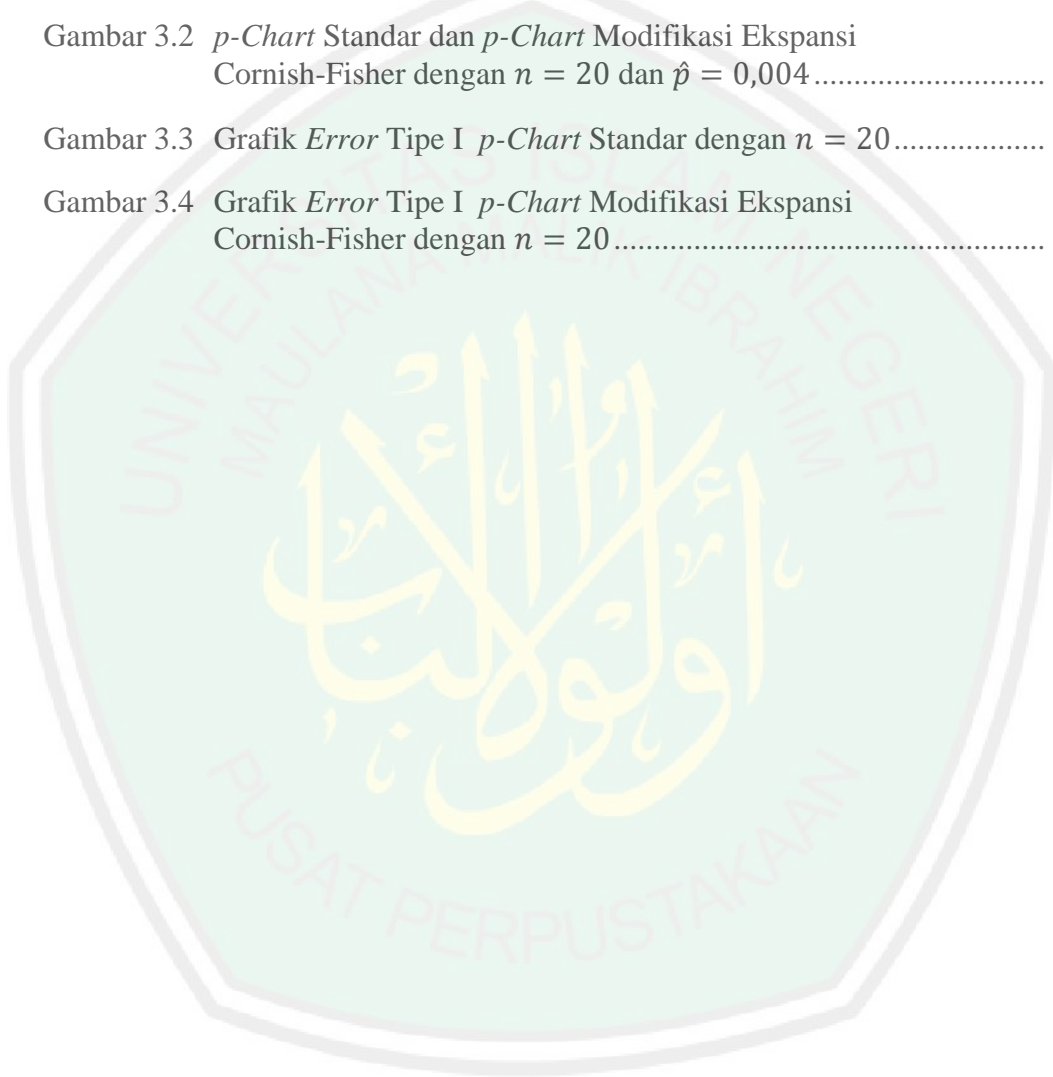
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	57
-----------------------------	----

<b>LAMPIRAN</b> .....	59
-----------------------	----



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	<i>p-Chart</i> Standar dan <i>p-Chart</i> Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher dengan $n = 576$ dan $\hat{p} = 0,004$ .....	44
Gambar 3.2	<i>p-Chart</i> Standar dan <i>p-Chart</i> Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher dengan $n = 20$ dan $\hat{p} = 0,004$ .....	47
Gambar 3.3	Grafik <i>Error</i> Tipe I <i>p-Chart</i> Standar dengan $n = 20$ .....	49
Gambar 3.4	Grafik <i>Error</i> Tipe I <i>p-Chart</i> Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher dengan $n = 20$ .....	50



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Sifat-Sifat Distribusi Binomial.....	17
Tabel 2.2	Tabel <i>Type of Error</i> .....	20
Tabel 3.1	Batas-Batas Pengendali dan <i>Error Tipe I</i> ( $\alpha$ ) dari Gambar 3.1 .....	45
Tabel 3.2	Batas-Batas Pengendali dan <i>Error Tipe I</i> ( $\alpha$ ) dari Gambar 3.2 .....	48
Tabel 3.3	Nilai $n$ dan $p$ Minimum <i>p-Chart</i> Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher Berdasarkan <i>Error Tipe I</i> ( $\alpha$ ) .....	50
Tabel 3.4	Nilai $n$ dan $p$ Minimum <i>p-Chart</i> Standar Berdasarkan <i>Error Tipe I</i> ( $\alpha$ ) .....	51

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Data Ketidaksesuaian Produksi Botol IBTC 175ml .....	59
Lampiran 2	Data Ketidaksesuaian Produksi Cokelat.....	61
Lampiran 3	Perbandingan Nilai <i>Error Tipe I p-Chart</i> Standar dan <i>p-Chart</i> Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher.....	63



## ABSTRAK

Nuha, Farida Ulin. 2013. *p-Chart Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher untuk Pengendalian Proses pada Tingkat Ketidaksesuaian Kecil*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si  
(II) Abdussakir, M.Pd

**Kata kunci:** Ekspansi Cornish-Fisher, *Error* Tipe I, Fungsi Pembangkit Momen

Grafik pengendali  $p$  ( $p$ -chart) digunakan untuk pengendalian proses yang berkarakteristik atribut yang berhubungan dengan proporsi ketidaksesuaian produk. Ketika terjadi tingkat ketidaksesuaian produk ( $p$ ) kecil, akan menimbulkan distribusi yang tidak simetris. Distribusi yang tidak simetris jika dianalisis dengan grafik pengendali yang simetris, dapat menimbulkan nilai *error* tipe I ( $\alpha$ ) yang besar. Dengan  $\alpha$  yang besar, bahkan jauh dari batas toleransi, dapat disimpulkan  $p$ -chart standar tidak efektif digunakan dalam pengendalian proses pada saat tingkat ketidaksesuaian kecil.  $p$ -Chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher merupakan  $p$ -chart yang dibentuk berdasarkan ekspansi Cornish-Fisher. Ekspansi Cornish-Fisher dapat menunjukkan kuantil- $\alpha$  distribusi binomial berdasarkan *cumulant* distribusi binomial dan kuantil- $\alpha$  distribusi normal standar. Aplikasi terhadap data dengan tingkat ketidaksesuaian yang kecil untuk  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dapat memberikan hasil yang baik daripada  $p$ -chart standar. Hal ini karena  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dapat digunakan untuk distribusi yang tidak simetris dan mempunyai nilai  $\alpha$  yang kecil.

## ABSTRACT

Nuha, Farida Ulin. 2013. ***p-Chart Modified Cornish-Fisher Expansion for Process Control at Small Nonconforming Rate***. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (I) Fachrur Rozi, M.Si  
(II) Abdussakir, M.Pd

**Keywords:** Cornish-Fisher Expansion, Moment Generating Function, Type I Error

*p*-Chart is used for process control that characterized attributes associated with the fraction nonconforming product. When the fraction nonconforming product (*p*) is small, it will make an asymmetrical distribution. If the asymmetrical distribution analyzed by symmetric control limits, may cause the value of the type I error ( $\alpha$ ) is large. With large  $\alpha$ , even far from the limit of tolerance, it can be concluded *p*-chart standard are not effectively used in the control process at the small nonconforming rate. *p*-Chart modified Cornish-Fisher expansion is *p*-chart that established based Cornish-Fisher expansion. Cornish-Fisher expansion can demonstrate  $\alpha$ -quantiles binomial distribution based in term of the cumulants of binomial distribution and  $\alpha$ -quantiles of standard normal distribution. Application of data with a small nonconforming rate for *p*-chart modified Cornish-Fisher expansion can provide good results than standard *p*-chart. This is because the *p*-chart modified Cornish-Fisher expansion can be used for a distribution that is asymmetric and has a small value  $\alpha$ .

## مستخلص البحث

النهى، فريدا أولي. ٢٠١٣. ف الرسم البياني (*p-chart*) معدلة توسيع كورنيش-فيشر لعملية رقابة المستوى في التعارض الصغير. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج.  
المشرف: (١) فخر الرازي، الماجستير  
(٢) عبد الشاكر، الماجستير

الكلمات الأساسية: توسيع كورنيش-فيشر، النوع الأول من الأخطاء، وظائف توليد لحظة

يستخدم الخطوط البيانية الزمامة ف الرسم البياني (*p-chart*) للسيطرة على العملية التي تتميز سمات المرتبطة بنسبة تعارض المنتجات. عندما نسبة تعارض المنتجات ( $p$ ) صغيرة أو معدل تعارض المنتجات هو صغير، فسوف يؤدي إلى توزيع غير متساوية. إذا تم تحليل التوزيع غير متساوية بالخطوط البيانية الزمامة المتساوية، سوف يؤدي إلى زيادة قيمة النوع الأول من الأخطاء ( $\alpha$ ) الكبيرة. بـ  $\alpha$  الكبيرة، وحتى بعيدا عن حدود التسامح، يمكن لنا أن نستنتج بأن ف الرسم البياني غير فعال إذا يستخدم في مراقبة العملية إذا كانت مستوى تعارض المنتجات هي صغيرة. ف الرسم البياني (*p-chart*) معدلة توسيع كورنيش-فيشر هو ف الرسم البياني التي أنشئت بموجب بتوسيع كورنيش-فيشر. وكان توسيع كورنيش-فيشر يمكن أن يدل على كوانتيل- $\alpha$  ( $\alpha$ -kuantil) لتوزيع ذي الحدين على أساس كومولان (*cumulant*) لتوزيع ذي الحدين و كوانتيل- $\alpha$  ( $\alpha$ -kuantil) للتوزيع الطبيعي. وكان تطبيق البيانات ب مستوى تعارض المنتجات الصغيرة لـ"ف الرسم البياني" (*p-chart*) معدلة توسيع كورنيش-فيشر يستطيع أن تقدم نتائج جيدة من الرتبة "ف الرسم البياني المعياري". وذلك لأن ف الرسم البياني معدلة توسيع كورنيش-فيشر يستطيع استخدامها لتوزيع غير متساوية، وتملك قيمة ( $\alpha$ ) الصغيرة.

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Kualitas merupakan faktor dasar keputusan konsumen dalam memilih produk dan jasa. Konsumen akan memilih produk perusahaan tertentu dengan kualitas yang lebih baik. Akibatnya, kualitas menjadi faktor utama yang membawa keberhasilan bisnis. Allah telah mengajarkan manusia untuk mengutamakan kualitas. Di dalam Al-Qur'an konsep tentang kualitas telah disebutkan oleh Allah dalam surat Al-Mulk ayat 2:

الَّذِي خَلَقَ الْمَوْتَ وَالْحَيَاةَ لِيَبْلُوَكُمْ أَيُّكُمْ أَحْسَنُ عَمَلًا ۗ وَهُوَ الْعَزِيزُ الرَّحِيمُ ﴿٢﴾

**Artinya:** “Yang menjadikan mati dan hidup, supaya Dia menguji kamu, siapa di antara kamu yang lebih baik amalnya. Dan Dia Maha Perkasa lagi Maha Pengampun.

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah akan menguji makhluk-Nya, bahwa siapa yang amalnya lebih baik, kelak akan mendapatkan tempat yang baik di sisi-Nya. Amal baik yang dimaksud adalah ibadah, ibadah dalam arti sempit maupun luas. Ibadah dalam arti sempit adalah ibadah secara langsung kepada Allah, seperti shalat, puasa, dan lain-lain. Sedangkan ibadah dalam arti luas adalah ibadah yang berhubungan dengan sesama manusia, seperti tolong menolong, membantu yang lemah, dan mengerjakan perbuatan baik lainnya. Dalam industri khususnya dalam proses produksi, mengerjakan amal baik ini misalnya dengan memproduksi suatu produk dengan benar, sesuai dengan manfaat dan kepuasan bagi konsumen yang akan menggunakannya.

Untuk mendapatkan kualitas yang lebih baik, produsen harus melihat kepada produk-produk yang dihasilkan sebelumnya. Apabila kemarin kualitas produknya dinilai jelek oleh konsumen, misalnya produk tidak berfungsi dengan memuaskan setelah disampaikan kepada konsumen, maka harus dilakukan analisis mengenai sebab-sebab yang harus diperbaiki agar kualitas produk yang dihasilkan menjadi lebih baik. Untuk memperbaiki kualitas pekerjaan, Rasulullah SAW bersabda:

مَنْ كَانَ يَوْمُهُ خَيْرًا مِنْ أَمْسِيهِ فَهُوَ رَاحٍ، وَمَنْ كَانَ يَوْمُهُ مِثْلَ أَمْسِيهِ فَهُوَ مَعْبُودٌ، وَمَنْ كَانَ يَوْمُهُ شَرًّا مِنْ أَمْسِيهِ فَهُوَ مَلْعُونٌ

**Artinya:** “Barangsiapa yang hari ini lebih baik dari hari kemarin sesungguhnya dia telah beruntung, barangsiapa yang hari ini sama dengan hari kemarin, maka sesungguhnya ia telah merugi. Dan barangsiapa yang hari ini lebih buruk dari hari kemarin, maka sesungguhnya ia terlaknat”.

Grafik pengendali merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengendalikan kualitas suatu produk. Grafik pengendali dapat menunjukkan keadaan tidak terkendali apabila satu atau beberapa titik jatuh di luar batas pengendali. Batas-batas dalam grafik pengendali, yaitu *Upper Control Limit* (UCL) yang merupakan batas atas dan *Lower Control Limit* (LCL) merupakan batas bawah. Suatu produk harus memenuhi kriteria (spesifikasi) yang ditetapkan oleh perusahaan, sehingga apabila terjadi ketidaksesuaian produk dan menimbulkan suatu titik terletak di luar batas pengendali maka akan dikatakan bahwa proses tidak terkendali dan diperlukan tindakan penyelidikan atau perbaikan untuk mengetahui penyebab dari keadaan tersebut (Montgomery, 1990:135).

Permasalahan yang sering terjadi dalam mengevaluasi hasil pengujian adalah mengenai ketepatan dan ketelitian dari data yang dilaporkan. Grafik pengendali adalah teknik pengendali proses untuk tujuan penyelidikan terhadap proses tersebut. Grafik pengendali dapat juga digunakan untuk menaksir parameter suatu proses produksi, dan melalui informasi ini dapat menentukan kemampuan proses. Salah satu dari 3 macam grafik pengendali adalah *p-chart*. *p-Chart* merupakan grafik pengendali yang berhubungan dengan proporsi ketidaksesuaian produk yang diproduksi oleh suatu proses produksi (Montgomery, 1990:142).

Dalam penelitian Hsiuying Wang (2009), yang berjudul *Comparison of p-Control Chart for Low Develctive Rate* yang meneliti empat grafik pengendali (*control chart*) yang ada, yaitu *p-chart standard*, *p-chart arcsin*, *p-chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher*, dan *CPC-chart*, menyimpulkan bahwa keempat *p-chart* tersebut dapat berfungsi dengan baik ketika proporsi ketidaksesuaian proses ( $p$ ) diketahui, dan tidak dapat bekerja dengan baik untuk  $p$  yang tidak diketahui. Sehingga muncul *p-chart* baru untuk kasus  $p$  tidak diketahui yang berdasarkan pada selang kepercayaan Agresti-Coull. Sedangkan pada penelitian Chan, dkk. (2002) yang berjudul *Cumulative Probability Control Chart (CPC-chart) for Geometric and Exponential Process Characteristics*, mengatakan bahwa ketika tingkat ketidaksesuaian kecil, pemantauan dengan grafik pengendali standar (*p-chart*, *np-chart*, *c-chart*, dan *u-chart*) tidak memberikan hasil yang baik. Sehingga, Chan, dkk. (2002) mengusulkan grafik pengendali berdasarkan *Cumulative Probability Control Chart (CPC-chart)* untuk mengatasi kesulitan

dari lemahnya kemampuan grafik pengendali ketika terjadi tingkat ketidaksesuaian yang kecil.

Pada saat terjadi tingkat ketidaksesuaian yang kecil, maka CL dari grafik pengendali  $p$  mendekati nol, menyebabkan LCL bernilai negatif. LCL yang bernilai negatif akan menjadi nol, karena proporsi ketidaksesuaian produk tidak mungkin negatif (Chan, dkk., 2002:133). Akibatnya distribusi terdesak oleh LCL yang sama dengan nol, sehingga menimbulkan distribusi yang tidak simetris. Semakin kecil nilai  $p$ , maka distribusinya semakin tidak simetris (Octavia, dkk., 2000:61). Distribusi yang tidak simetris akan dianalisis dengan grafik pengendali simetris, dapat menimbulkan nilai *error* yang besar.

$p$ -Chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher adalah  $p$ -chart yang dibentuk berdasarkan ekspansi Cornish-Fisher. Dengan  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher akan dilakukan suatu pendekatan normal yang lebih baik, yang digunakan untuk mengoreksi ketidaknormalan suatu distribusi (Joekes dan Barbosa, 2011:2). Berdasarkan uraian di atas dalam skripsi ini akan mengkaji tentang tingkat ketidaksesuaian suatu produk yang kecil, dengan judul “ $p$ -Chart Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher untuk Pengendalian Proses pada Tingkat Ketidaksesuaian Kecil”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher?

2. Bagaimana perbandingan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dan *p-chart* standar untuk pengendalian proses pada tingkat ketidaksesuaian kecil?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui bentuk *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher.
2. Untuk mengetahui hasil perbandingan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dan *p-chart* standar untuk pengendalian proses pada tingkat ketidaksesuaian kecil.

### 1.4 Batasan Masalah

Pembahasan dalam penelitian ini agar tidak meluas, maka peneliti akan membahas dengan batasan masalah sebagai berikut:

1. *p-Chart* yang digunakan adalah *p-chart* ketika proporsi ketidaksesuaian proses ( $p$ ) diketahui.
2. Ukuran sampel ( $n$ ) tiap pengamatan adalah sama dan berdistribusi binomial.
3. Menggunakan metode momen untuk mencari nilai *mean*, variansi, dan *skewness* distribusi binomial.
4. Dalam penelitian ini menggunakan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dengan satu penyesuaian atau sampai pada *cumulant* ke-3.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan memberi manfaat sebagai berikut:

1. Ketika terjadi tingkat ketidaksesuaian yang kecil dan sampel yang digunakan terbatas, maka dapat diketahui grafik pengendali yang baik untuk memantau proses produksi.
2. Penelitian ini dapat memberikan wawasan tentang grafik pengendali  $p$  ( $p$ -chart) yang dimodifikasi dengan ekspansi Cornish-Fisher.

### 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah menggunakan studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku, majalah, artikel, jurnal dan lain-lain. Jurnal utama yang digunakan dalam skripsi ini adalah jurnal yang berjudul *Comparison of  $p$ -Control Chart for Low Defective Rate*, oleh Hsiuying Wang (2009).

Dalam penelitian ini ada beberapa tahapan yang dilakukan, yaitu:

1. Menentukan momen biasa dan momen pusat pada distribusi binomial.
2. Menganalisis ekspansi Cornish-Fisher.
3. Membentuk  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher berdasarkan kuantil- $\alpha$  proporsi distribusi binomial.

4. *p-Chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher akan diaplikasikan terhadap data yang diketahui tingkat ketidaksiannya kecil, sekaligus membandingkan hasilnya dengan *p-chart* standar.
5. Berdasarkan nilai  $\alpha$  (peluang terjadinya *error* tipe I), akan ditentukan batas-batas nilai  $n$  dan  $p$  minimum yang dapat digunakan dalam *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dan *p-chart* standar.
6. Menarik kesimpulan.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Untuk lebih mudah memahami penulisan ini secara keseluruhan isinya, maka penulis memberikan gambaran umum tentang sistematika penulisan sebagai berikut:

#### Bab I Pendahuluan

Pada bab pertama dibahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

#### Bab II Kajian Pustaka

Pada bab kedua berisi tentang distribusi probabilitas diskrit, ekspektasi, fungsi pembangkit momen, *cumulant*, pengujian hipotesis, grafik pengendali  $p$  (*p-chart*), ekspansi Cornish-Fisher, dan kajian keagamaan.

#### Bab III Pembahasan

Pada bab ketiga membahas tentang momen-momen dari distribusi binomial, analisis ekspansi Cornish-Fisher, grafik pengendali  $p$  (*p-chart*)

yang dimodifikasi ekspansi Cornish-Fisher, aplikasi *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher, perbandingan grafik *error* tipe I *p-chart* standar dan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher, dan kajian keagamaan.

#### **Bab IV Penutup**

Pada bab keempat berisi tentang kesimpulan dari pembahasan berdasarkan rumusan masalah dan saran yang berkaitan dengan penulisan.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Distribusi Probabilitas Diskrit

Distribusi probabilitas variabel acak menggambarkan bagaimana suatu probabilitas didistribusikan terhadap nilai-nilai dari variabel acak tersebut. Variabel acak diskrit adalah variabel acak yang ruang rentangnya merupakan himpunan berhingga (*finite*) atau tak berhingga tapi terhitung (*denumerable/countably infinite*).

##### Definisi 1.

Untuk variabel acak diskrit  $X$ , distribusi probabilitas didefinisikan dengan  $f(x) = P(X = x)$ . Dalam membuat suatu fungsi probabilitas untuk variabel acak diskrit, ada beberapa syarat yang harus dipenuhi, di antaranya:

- i.  $P(X = x) \geq 0$  atau  $0 \leq P(X = x) \leq 1$
- ii.  $\sum P(X = x) = 1$  (2.1)

(Supranto, 2001:3).

Fungsi distribusi kumulatif untuk suatu variabel acak diskrit  $X$  dapat diperoleh dari fungsi probabilitasnya dengan memperhatikan bahwa, untuk semua  $x$  dalam  $(-\infty, \infty)$ ,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u) \quad (2.2)$$

di mana jumlah tersebut adalah untuk semua nilai  $u$  yang dipakai oleh  $X$ , di mana  $u \leq x$ . Jika  $X$  hanya memiliki nilai-nilai  $x_1, x_2, \dots, x_n$  yang banyaknya berhingga, maka fungsi distribusinya adalah:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + \dots + f(x_n) & x_n \leq x < \infty \end{cases}$$

(Spiegel, dkk., 2004:31).

### 2.1.1 Distribusi Bernoulli

Pada distribusi Bernoulli percobaan dilakukan satu kali, dan hanya mempunyai dua kemungkinan, yaitu sukses atau gagal. Pada distribusi Bernoulli hanya dapat berupa dua nilai (0 atau 1), nilai 1 melambangkan sukses, dan 0 melambangkan gagal, dengan probabilitas masing-masing  $p$  dan  $1 - p$ .

#### Definisi 2.

Variabel acak  $X$  dikatakan berdistribusi Bernoulli jika (untuk suatu  $0 \leq p \leq 1$ )

$$P(X = x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & \text{bila } x = 0 \text{ atau } x = 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

(Dudewicz dan Mishra, 1995:93).

### 2.1.2 Distribusi Binomial

Misalkan suatu percobaan yang memiliki dua kemungkinan (sukses atau gagal) dilakukan sebanyak  $n$  kali, maka distribusi probabilitas dari variabel acak yang menggambarkan banyaknya sukses yang terjadi disebut distribusi binomial. Dengan kata lain, distribusi binomial dapat dikatakan sebagai  $n$  ulang kejadian Bernoulli.

**Definisi 3.**

Variabel acak  $X$  dikatakan berdistribusi binomial dengan parameter  $n$  dan  $p$ , dinotasikan dengan  $B(n, p)$ , jika memiliki fungsi probabilitas:

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \text{untuk } x = 0, 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

(Tirta, 2004:197).

Suatu variabel acak binomial memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- Terdiri dari  $n$  percobaan berulang.
- Tiap percobaan memberi hasil yang terdiri dari sukses atau gagal.
- Nilai probabilitas sukses tetap dalam setiap percobaan.
- Setiap percobaan bebas dari percobaan lainnya.

(Simbolon, 2009:59).

Selanjutnya verifikasi terhadap bentuk fungsi probabilitas dari distribusi binomial, misalnya diketahui ekspansi binomial dari pangkat suatu jumlah adalah

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} a^{n-x} b^x \quad (2.3)$$

maka untuk distribusi binomial,

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^n P(X = x) &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= (p + (1-p))^n = 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2.2 Ekspektasi

Ekspektasi atau nilai harapan merupakan karakteristik yang menjelaskan suatu distribusi, di antaranya ukuran yang menunjukkan lokasi pemusatan atau ukuran tendensi sentral dan ukuran penyebaran atau dispersi.

### Definisi 4.

Untuk suatu variabel acak diskrit  $X$ , yang memiliki nilai-nilai yang mungkin  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ekspektasi dari  $X$  didefinisikan sebagai:

$$E[X] = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \dots + x_nP(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_iP(X = x_i)$$

atau ekuivalennya, jika  $P(X = x_i) = f(x_i)$ , sehingga

$$E[X] = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \dots + x_nf(x_n) = \sum_{i=1}^n x_if(x_i) = \sum xf(x)$$

Ekspektasi dari  $X$  sering disebut sebagai *mean* dari  $X$ . *Mean* atau ekspektasi dari  $X$  memberikan suatu nilai tunggal yang bertindak sebagai wakil atau rata-rata dari nilai-nilai  $X$ , sehingga sering juga disebut sebagai ukuran tendensi sentral (Spiegel, dkk., 2004:63).

### Definisi 5.

Ekspektasi dari suatu fungsi  $u(X)$  dari suatu variabel acak  $X$  dengan fungsi probabilitas  $f(x)$ , adalah

$$E[u(X)] = \sum u(x)f(x)$$

(Tirta, 2004:225).

Berdasarkan definisi di atas, ekspektasi mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

**Teorema 1.**

1. Jika  $u(X) = k$  dan  $k$  adalah konstanta, maka  $E[X] = E[k] = k$

Bukti:

$$\begin{aligned} E[k] &= \sum kf(x) && \text{berdasarkan definisi 4} \\ &= k \sum f(x) \\ &= k \end{aligned}$$

2.  $E[ku(X)] = kE[u(X)]$

Bukti:

$$\begin{aligned} E[ku(X)] &= \sum ku(x)f(x) && \text{berdasarkan definisi 5} \\ &= k \sum u(x)f(x) \\ &= kE[u(X)] \end{aligned}$$

3.  $E[u_1(X) \pm u_2(X)] = Eu_1[X] \pm Eu_2[X]$

Bukti:

$$\begin{aligned} E[u_1(X) \pm u_2(X)] &= \sum (u_1(x) \pm u_2(x))f(x) && \text{berdasarkan definisi 5} \\ &= \sum (u_1(x)f(x) \pm u_2(x)f(x)) \\ &= \sum u_1(x)f(x) \pm \sum u_2(x)f(x) \\ &= E[u_1(X)] \pm E[u_2(X)] \end{aligned}$$

(Tirta, 2004:127).

### 2.2.1 Momen

Momen ialah salah satu ukuran statistika yang kegunaannya sebagai dasar untuk merumuskan ukuran keruncingan dan kemiringan kurva (distribusi).

**Definisi 6.**

Misalkan  $X$  variabel acak. Jika  $E[X]$  ada, *mean* dari  $X$  dinotasikan dengan  $\mu'$ , didefinisikan dengan  $\mu' = E[X]$ . *Mean* dari  $X$  disebut momen pertama dari  $X$ . Secara umum jika  $E[X^r]$  ada, maka  $E[X^r]$  disebut momen ke- $r$  atau dinotasikan dengan  $\mu'_r$ , dengan  $r = 0,1,2,3, \dots$

(Spiegel, dkk., 2004:66).

**Definisi 7.**

Momen ke- $r$  terhadap  $\mu$ , disebut momen pusat ke- $r$  yang didefinisikan sebagai:

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r], \text{ di mana } r = 0,1,2,3,\dots$$

(Spiegel, dkk., 2004:66).

**Definisi 8.**

Misalkan  $X$  variabel acak, momen pusat kedua,  $\mu_2 = E[(X - \mu)^2]$  disebut variansi dari  $X$ , dinotasikan dengan  $\sigma^2$  atau  $Var(X)$ , didefinisikan sebagai

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

Selanjutnya,  $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ , disebut standar deviasi dari  $X$ .

(Dudewicz dan Mishra, 1995:252).

**Definisi 9.**

Momen pusat ketiga dan momen pusat keempat dapat digunakan untuk mendefinisikan koefisien dari *skewness* ( $\gamma_1$ ) dan *kurtosis* ( $\gamma_2$ ). *Skewness* adalah derajat kemiringan suatu distribusi, yang didefinisikan sebagai

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\frac{\mu_2^{\frac{3}{2}}}{\sigma^3}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

*Kurtosis* adalah derajat keruncingan suatu distribusi, yang didefinisikan sebagai

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

(Walck, 2007:3).

### 2.2.2 Fungsi Pembangkit Momen

Dalam mempelajari momen maka diperlukan fungsi pembangkit momen. Fungsi pembangkit momen adalah sebuah fungsi yang dapat menghasilkan momen-momen suatu distribusi.

#### Definisi 10.

Fungsi pembangkit momen dari suatu variabel acak  $X$  didefinisikan untuk setiap bilangan real  $t$  sebagai:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

Sehingga:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_X e^{tX} f(x)$$

(Dudewicz dan Mishra, 1995:300).

#### Teorema 2.

Apabila fungsi pembangkit momen  $M_X(t)$  dari variabel acak  $X$  ada untuk  $|t| \leq T$  (untuk suatu  $T > 0$ ), maka  $E[X^r]$  ada, dan

$$E[X^r] = M_X^{(r)}(0) \equiv \left. \frac{d^r}{dt^r} M_X(t) \right|_{t=0},$$

dengan  $r = 1, 2, 3, \dots$

Bukti:

Diketahui bahwa  $M_X(t) = E[e^{tX}]$ , dan untuk fungsi  $e^y$  dapat diuraikan sebagai

deret  $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$ . Bila  $y$  diganti dengan  $tX$  kemudian diambil

ekspektasi dari kedua ruas, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E[e^{tX}] = E\left[1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots\right] \\
 &= E\left[1 + Xt + X^2 \frac{t^2}{2!} + X^3 \frac{t^3}{3!} + \dots\right] \\
 &= 1 + E[X]t + E[X^2] \frac{t^2}{2!} + \dots + E[X^r] \frac{t^r}{r!} + \dots \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Selanjutnya, kedua ruas diturunkan terhadap  $t$ , dan karena  $t = 0$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 M'_X(0) &= \left(0 + E[X] + E[X^2]t + E[X^3] \frac{t^2}{2!} + \dots + E[X^r] \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \dots\right) \Big|_{t=0} \\
 &= E[X]
 \end{aligned}$$

Sehingga untuk pernyataan dalam teorema terbukti untuk  $r = 1$ , dan untuk  $r = 2, 3, \dots$  diperoleh dengan cara yang sama (Dudewicz dan Mishra, 1995:301).

### 2.2.3 Fungsi Pembangkit Momen dari Distribusi Binomial

#### **Teorema 3.**

Jika  $X$  variabel acak berdistribusi binomial  $B(n, p)$ , maka

$$M_X(t) = (pe^t + q)^n$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
 M_x(t) &= E[e^{tx}] && \text{berdasarkan definisi 10} \\
 &= \sum e^{tx} f(x) \\
 &= \sum e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} && \text{berdasarkan definisi 3} \\
 &= \sum \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\
 &= (pe^t + (1-p))^n && \text{berdasarkan (2.4)} \\
 &= (pe^t + q)^n
 \end{aligned}$$

(Tirta, 2004:226).

Spiegel, dkk. (2004) memberikan beberapa sifat penting dari distribusi binomial terdapat pada tabel berikut:

Tabel 2.1 Sifat-Sifat Distribusi Binomial

Mean	$\mu = np$
Variansi	$\sigma^2 = npq$
Standar deviasi	$\sigma = \sqrt{npq}$
Koefisien kemiringan	$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$
Koefisien keruncingan	$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$
Fungsi pembangkit momen	$M(t) = (pe^t + q)^n$
Fungsi karakteristik	$\phi(\omega) = (q + pe^{i\omega})^n$

#### 2.2.4 Cumulant

Berdasarkan definisi 4 dan 6, momen ke- $r$  dari variabel acak  $X$  dengan fungsi probabilitas  $f(x)$  adalah

$$\mu_r' = E[X^r] = \sum_{x=0}^n x^r f(x)$$

Untuk  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$  diasumsikan *finite*, dan berdasarkan pembuktian pada persamaan (2.5) menggunakan ekspansi deret Taylor, maka didapatkan fungsi pembangkit momen sebagai berikut:

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r' \frac{t^r}{r!}$$

**Definisi 11.**

*Cumulant* ke- $r$  adalah koefisien dari  $\frac{t^r}{r!}$  ekspansi dari logaritma  $M_X(t)$ ,

atau koefisien dari fungsi pembangkit cumulant ( $K_X(t)$ ),

$$K_X(t) = \ln M_X(t) = \sum_{r=1}^{\infty} k_r \frac{t^r}{r!}$$

(Walck, 2007:6).

### 2.3 Pengujian Hipotesis

Dalam statistik diperlukan adanya suatu pengujian hipotesis. Uji hipotesis adalah suatu cara menggunakan data sampel untuk mengevaluasi kebenaran hipotesis dari populasi. Meskipun sering digunakan istilah “menerima” dan “menolak”, tetapi perlu disadari bahwa penolakan suatu hipotesis berarti menyimpulkan bahwa hipotesis itu salah, sedangkan penerimaan suatu hipotesis semata-mata mengimplikasikan bahwa peneliti tidak mempunyai bukti untuk mempercayai sebaliknya. Karena pengertian ini statistikawan atau peneliti sering

mengambil sebagai hipotesis adalah suatu pernyataan yang diharapkan akan ditolaknya (Walpole, 1995:288).

Hipotesis yang dirumuskan dengan harapan akan ditolak dikenal dengan istilah hipotesis nol. Istilah itu telah digunakan pada sembarang hipotesis yang ingin diuji, dan dilambangkan dengan  $H_0$ . Hipotesis nol ( $H_0$ ) adalah dugaan sementara di mana variabel bebas (perlakuan) tidak berpengaruh pada variabel terikat dari populasi. Penolakan  $H_0$  mengakibatkan suatu penerimaan suatu hipotesis alternatif, yang dilambangkan dengan  $H_1$ .  $H_1$  merupakan dugaan di mana variabel bebas (perlakuan) akan berpengaruh pada variabel terikat dari populasi (Turmudi dan Harini, 2008:247).

Ada dua jenis kesalahan dalam pengujian hipotesis. Kesalahan tersebut terjadi ketika peneliti menolak hipotesis benar, atau menerima hipotesis yang salah. Kesalahan ini dinamakan *error* tipe I dan *error* tipe II.

- a. *Error* tipe I, kesalahan ini terjadi ketika menolak  $H_0$  padahal  $H_0$  benar. Probabilitas terjadinya kesalahan ini dinyatakan dengan  $\alpha$  dan pada umumnya disebut pada taraf nyata (*level of significance*).
- b. *Error* tipe II, kesalahan ini terjadi ketika menerima  $H_0$  padahal  $H_0$  salah dan  $H_1$  benar. Probabilitas terjadinya kesalahan ini dinyatakan dengan  $\beta$ . *Error* tipe II pada umumnya disebut dengan kuasa pengujian/kekuatan uji (*power of statistical test*).

Ada empat kemungkinan kesimpulan berdasarkan kejadian sesungguhnya,  $H_0$  atau  $H_1$ , yang ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 2.2 Tabel *Type of Error*

Kesimpulan	Kejadian yang sesungguhnya benar	
	$H_0$	$H_1$
Menerima $H_0$ (menolak $H_1$ )	Kesimpulan benar probabilitas $1 - \alpha$	Kesimpulan salah <i>Error type II</i> Probabilitas $=\beta$
Menerima $H_1$ (menolak $H_0$ )	Kesimpulan salah <i>Error type I</i> Probabilitas $=\alpha$	Kesimpulan benar Probabilitas $= 1 - \beta$

(Lungan, 2006:243).

Dalam pengendalian kualitas,  $\alpha$  kadang dinamakan risiko produsen, karena  $\alpha$  menunjukkan probabilitas bahwa produk yang baik akan ditolak, atau probabilitas bahwa suatu proses yang menghasilkan nilai-nilai karakteristik kualitas tertentu yang dapat diterima, akan ditolak karena disangka tidak bekerja dengan memuaskan. Demikian juga,  $\beta$  kadang-kadang dinamakan risiko konsumen karena  $\beta$  menunjukkan probabilitas akan menerima produk dengan kualitas rendah atau membiarkan proses yang bekerja memuaskan terhadap suatu karakteristik kualitas untuk bekerja terus (Montgomery, 1990:90).

## 2.4 *p-Chart*

### 2.4.1 Proporsi Ketidaksesuaian (*Fraction Nonconforming*)

*p-Chart* (grafik pengendali  $p$ ) merupakan salah satu dari grafik pengendali yang berhubungan dengan proporsi ketidaksesuaian produk. Proporsi

ketidaksesuaian (*fraction nonconforming*) didefinisikan sebagai perbandingan banyak benda yang tidak sesuai dalam suatu populasi dengan banyak benda keseluruhan dalam populasi itu. Biasanya proporsi ketidaksesuaian dinyatakan dengan pecahan desimal. Asas-asas statistik yang melandasi grafik pengendali untuk proporsi ketidaksesuaian didasarkan atas distribusi binomial. Misalkan proses produksi bekerja dalam keadaan stabil, sehingga probabilitas bahwa suatu unit akan tidak sesuai dengan spesifikasi adalah  $p$ , dan unit yang diproduksi berturut-turut adalah independen. Maka tiap unit yang diproduksi merupakan realisasi suatu variabel acak Bernoulli dengan parameter  $p$ . Apabila sampel acak dengan  $n$  unit produk dipilih, dan  $D$  adalah banyak unit produk tidak sesuai maka  $D$  berdistribusi binomial dengan parameter  $n$  dan  $p$ , adalah:

$$P(D = x) = \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n \quad (2.6)$$

Proporsi ketidaksesuaian sampel didefinisikan sebagai perbandingan banyak unit tidak sesuai dalam sampel ( $D$ ) dengan ukuran sampel ( $n$ ), adalah:

$$\hat{p} = \frac{D}{n} \quad (2.7)$$

Selanjutnya, *mean* dan variansi  $\hat{p}$ , masing-masing adalah:

$$\mu = p \quad (2.8)$$

dan

$$\sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (2.9)$$

(Montgomery, 1990:143).

### 2.4.2 Batas-Batas Pengendali untuk *p*-Chart

Jika  $w$  suatu statistik yang mengukur karakteristik kualitas, dan jika *mean*  $w$  adalah  $\mu_w$  dan variansi  $w$  adalah  $\sigma_w^2$  maka model umum grafik pengendali Shewhart adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_w + k\sigma_w \\ CL &= \mu_w \\ LCL &= \mu_w - k\sigma_w \end{aligned} \quad (2.10)$$

dengan  $k$  adalah jarak batas pengendali dari garis tengah, dalam kelipatan standar deviasi  $w$ , biasanya dipilih  $k = 3$ .

Andaikan bahwa proporsi ketidaksesuaian yang sebenarnya ( $p$ ) dalam proses produksi itu diketahui atau nilai standar yang ditentukan oleh manajemen, maka berdasarkan (2.10), garis tengah dan batas pengendali grafik pengendali proporsi ketidaksesuaian adalah

$$\begin{aligned} UCL &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ CL &= p \\ LCL &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Apabila proporsi ketidaksesuaian proses ( $p$ ) tidak diketahui, maka  $p$  harus ditaksir dari data observasi. Dengan memilih  $m$  pengamatan, masing-masing berukuran  $n$  sampel. Maka jika ada  $D_i$  unit tidak sesuai dalam pengamatan ke- $i$ , proporsi ketidaksesuaian dalam pengamatan ke- $i$  dihitung sebagai:

$$\hat{p}_i = \frac{D_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.12)$$

Rata-rata proporsi ketidaksesuaiannya adalah

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i}{m} \quad (2.13)$$

Statistik  $\bar{p}$  menaksir proporsi ketidaksesuaian  $p$  yang tidak diketahui. Garis tengah dan batas pengendali grafik pengendali untuk proporsi ketidaksesuaian dihitung sebagai

$$\begin{aligned} UCL_p &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ CL_p &= \bar{p} = \frac{D}{n} \\ LCL_p &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

(Montgomery, 1990:145).

## 2.5 Ekspansi Cornish-Fisher

Untuk  $0 < \alpha < 1$ , ekspansi Cornish-Fisher menunjukkan bahwa kuantil- $\alpha$  dari suatu distribusi dapat dinyatakan dengan *cumulant* dari distribusi tersebut dan kuantil- $\alpha$  dari distribusi normal standar. Diberikan suatu ekspansi sebagai berikut:

$$x_\alpha = \mu + \frac{1}{2}(\sigma^2 + 1)z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)k_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)k_3^2 \quad (2.15)$$

Pada persamaan ini,  $z_\alpha$  adalah kuantil- $\alpha$  dari distribusi normal standar,  $k_3$  dan  $k_4$  adalah *cumulant* ketiga dan keempat dari distribusi sampel,  $\sigma$  adalah standar deviasi distribusi sampel,  $\mu$  adalah *mean* dari distribusi sampel, dan  $x_\alpha$  adalah aproksimasi kuantil- $\alpha$ .

Ketika distribusi sampel distandarisasi, ekspansi menjadi  $x'_\alpha$ , di mana

$$x'_\alpha = \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} \quad (2.16)$$

Mean dari distribusi standarisasi adalah 0 dan variansinya adalah 1, sehingga bersama dengan persamaan (2.15), maka

$$x'_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)k_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)k_3^2 \quad (2.17)$$

Selanjutnya diberikan hubungan antara momen dan *cumulant* ( $\mu_2 = k_2$ ,  $\mu_3 = k_3$ , dan  $\mu_4 = k_4 + 3k_2^2$ ), di mana  $\mu_i$  adalah momen pusat ke- $i$  dan  $k_i$  adalah *cumulant* ke- $i$ ,  $k_3$  dan  $k_4$  dapat diganti dengan *skewness* dan *kurtosis*. Karena  $\mu_2$  sama dengan 1 untuk distribusi normal standar, hubungan antara momen dengan *cumulant* menunjukkan bahwa  $k_4 = \mu_4 - 3$ , yang ekuivalen terhadap *kurtosis* ( $\gamma_2$ ) dan  $\mu_3$  ekuivalen terhadap *skewness* ( $\gamma_1$ ). Sehingga,

$$x'_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\gamma_1 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\gamma_2 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\gamma_1^2 \quad (2.18)$$

Nilai ini harus ditransformasikan kembali terhadap kuantil dari awal distribusi sebelum dibentuk standar.  $x'_\alpha$  dikalikan dengan standar deviasi distribusi sampel dan dijumlahkan dengan *mean* distribusi sampel,

$$x_\alpha = \mu + \sigma x'_\alpha \quad (2.19)$$

di mana

$$x'_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\gamma_1 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\gamma_2 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\gamma_1^2$$

Pada persamaan di atas,  $x'_\alpha$  menunjukkan aproksimasi kuantil- $\alpha$  dari distribusi standarisasi, dan  $x_\alpha$  menunjukkan aproksimasi kuantil- $\alpha$  dari distribusi sampel (Bekki, dkk., 2003:5-7).

## 2.6 Kajian Keagamaan

Banyak karakteristik kualitas tidak dapat dengan mudah dinyatakan secara numerik. Ketika terjadi hal seperti itu, biasanya tiap benda yang diperiksa diklasifikasi sebagai sesuai dengan spesifikasi pada karakteristik kualitas atau tidak sesuai dengan spesifikasi. Karakteristik kualitas seperti ini dinamakan sifat (atribut) (Montgomery, 1990:142). Salah satu grafik pengendali sifat (atribut) adalah *p-chart*. *p-Chart* merupakan grafik untuk proporsi yang ditolak karena tidak sesuai terhadap spesifikasi. Apabila proporsi ketidaksesuaian yang sebenarnya ( $p$ ) dalam proses produksi ini diketahui, atau nilai standar ditentukan oleh manajemen, maka harus dibutuhkan informasi yang jelas mengenai spesifikasi ketidaksesuaian dari perusahaan terkait. Informasi ini yang akan digunakan dalam menentukan batas pengendali atas, garis tengah, dan batas pengendali bawah suatu *p-chart*. Konsep dalam Al-Qur'an tentang mengutamakan informasi yang sah terdapat dalam Al-Qur'an surat Al-Israa' ayat 36:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَٰئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْئُولًا ﴿٣٦﴾

**Artinya:** "Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggung jawabannya."

Di dalam Tafsir Al-Misbah (Shihab, 2002), menurut Sayyid Quthub, kehati-hatian dan upaya pembuktian terhadap semua berita, semua fenomena, semua gerak pada waktu sebelum memutuskan, itulah ajakan Al-Qur'an, serta metode yang sangat teliti dari ajaran islam. Apabila akal dan hati telah konsisten menerapkan metode ini, maka tidak ada wadah bagi dugaan dan perkiraan dalam bidang ketetapan hukum dan interaksi, tidak ada juga hipotesis atau perkiraan

yang rapuh dalam bidang penelitian, eksperimen, dan ilmu pengetahuan. *Amanah 'ilmiah* yang didengungkan di abad modern ini menerangkan sebagian dari *amanah aqliyah* dan *qalbiyah* yang dikumandangkan tanggung jawabnya oleh Al-Qur'an yang menyatakan bahwa manusia bertanggung jawab terhadap kerja pendengaran, penglihatan, dan hatinya, dan bertanggung jawab kepada Allah SWT yang menganugerahkan pendengaran, penglihatan, dan hati.

Ayat ini menegaskan bahwa manusia akan dituntut mempertanggung jawabkan kerja *al-fuadh*/hatinya. Para ulama' menggarisbawahi bahwa apapun yang tersirat dalam hati, bermacam-macam dan bertingkat-tingkat. Ada yang dinamai (هاجس) *hajis* yaitu sesuatu yang terlintas dalam pikiran secara spontan dan berakhir seketika. Selanjutnya (خاطر) *khathir*, yakni yang terlintas sejenak kemudian terhenti, tingkat ketiga adalah apa yang dinamakan (حديث نفس) *hadits nafs*, yakni bisikan-bisikan hati yang dari saat ke saat muncul dan bergejolak. Peringkat yang lebih tinggi adalah (هم) *hamm*, yaitu kehendak melakukan sesuatu sambil memikirkan cara-cara pencapaiannya, dan yang terakhir sebelum melangkah mewujudkan kegiatan adalah (عزم) *'azm*, yakni kebulatan tekad setelah rampungnya seluruh proses *hamm* dan dimulainya langkah awal bagi pelaksanaan.

Dalam melakukan analisis grafik pengendali, kadang ditemukan adanya titik yang *out of control*, baik itu berada di atas UCL atau di bawah LCL, sehingga dikatakan bahwa proses tidak terkendali. Peneliti harus mengetahui sebab-sebab yang mengakibatkan keadaan tersebut. Misalkan pada saat itu salah satu mesin ada yang tidak berfungsi dengan baik, bahan baku rusak ketika proses penumpukan, atau proses dalam keadaan stabil namun nilai standar ( $p$ ) yang

digunakan oleh perusahaan terlalu kecil. Sebab-sebab di atas merupakan contoh dari permasalahan yang dapat mengakibatkan grafik pengendali menunjukkan keadaan tidak terkendali. Allah mengajarkan makhluk-Nya untuk bersungguh-sungguh dalam mengerjakan suatu pekerjaan. Sehingga ketika hasil yang diperoleh kurang baik, maka harus dianalisis sebabnya, karena semua hasil yang diperoleh berasal dari diri manusia sendiri. Dalam Al-Qur'an surat Al-Israa' ayat 7:

إِنْ أَحْسَنْتُمْ أَحْسَنْتُمْ لِأَنْفُسِكُمْ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا فَإِذَا جَاءَ وَعْدُ الْآخِرَةِ لِيَسْتَوْفُوا وُجُوهَكُمْ  
وَلِيَدْخُلُوا الْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٍ وَلِيُتَبَرُوا مَا عَلَوْا تَتْبِيرًا ﴿٧﴾

**Artinya:** “Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam masjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai”.

Ayat di atas menjelaskan bahwa semua yang terjadi berasal dari manusia sendiri. Ketika memperoleh hasil yang baik, berarti usaha yang dilakukan sudah baik dan benar. Ketika hasil yang diperoleh kurang baik, maka harus dianalisis penyebabnya. Dalam mengendalikan kualitas produk, misalkan manajemen suatu perusahaan menetapkan nilai standar atau proporsi ketidaksesuaian proses ( $p$ ) yang digunakan sebesar 0,001, tetapi sebenarnya proses itu terkendali pada nilai  $p$  yang lebih besar, misalkan  $p = 0,005$ . Akibatnya, dengan grafik pengendali berdasarkan  $p = 0,001$ , banyak titik yang jatuh di atas batas pengendali atas, sehingga menunjukkan keadaan tidak terkendali. Tetapi, proses itu sebenarnya hanya tidak terkendali terhadap nilai  $p = 0,001$ . Berdasarkan contoh tersebut,

mengetahui sebab dan akibat dari suatu permasalahan sangat penting, supaya dapat dilakukan tindakan selanjutnya ketika terjadi sesuatu.



### BAB III

#### PEMBAHASAN

#### 3.1 Menentukan Momen Biasa dan Momen Pusat pada Distribusi Binomial

Momen biasa dan momen pusat dari distribusi binomial dapat ditentukan berdasarkan fungsi pembangkit momen. Berdasarkan teorema 2,

$$E[X^r] = M_X^{(r)}(0) \equiv \frac{d^r}{dt^r} M_X(t) \Big|_{t=0},$$

sehingga dapat dicari momen ke-1,2,3,4 dari distribusi binomial adalah sebagai berikut:

Momen pertama atau *mean* dari distribusi binomial adalah

$$\begin{aligned} \mu_1' = \mu = E[X^1] &= M_X^{(1)}(0) = \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} M_X(t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n \Big|_{t=0} && \text{berdasarkan teorema 3} \\ &= n(pe^t + q)^{n-1} pe^t \Big|_{t=0} \\ &= n(p+q)^{n-1} p \\ &= np \cdot 1 && \text{berdasarkan (2.4)} \\ &= np \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sehingga momen ke-1 dari distribusi binomial adalah  $\mu_1' = E[X^1] = np$ .

Selanjutnya akan dicari momen ke-2 dari distribusi binomial,

$$\begin{aligned} \mu_2' = E[X^2] &= M_X^{(2)}(0) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} n(pe^t + q)^{n-1} pe^t \Big|_{t=0} && \text{berdasarkan (3.1)} \\ &= \left( n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} p^2 e^{2t} + n(pe^t + q)^{n-1} pe^t \right) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n(n-1)(p+q)^{n-2} p^2 + n(p+q)^{n-1} p \\
&= n(n-1)p^2 + np \quad \text{berdasarkan (2.4)} \\
&= n^2 p^2 - np^2 + np \\
&= n^2 p^2 + np(1-p) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Sehingga momen ke-2 dari distribusi binomial adalah

$\mu_2' = E[X^2] = n^2 p^2 + np(1-p)$ . Selanjutnya akan dicari momen ke-3 dari distribusi binomial,

$$\begin{aligned}
\mu_3' &= E(X^3) = M_X^{(3)}(0) = \left. \frac{d^3}{dt^3} M_X(t) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} p^2 e^{2t} + n(pe^t + q)^{n-1} pe^t \right) \right|_{t=0} \quad \text{berdasarkan (3.2)} \\
&= \left. \frac{d}{dt} n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} p^2 e^{2t} \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} n(pe^t + q)^{n-1} pe^t \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} p^2 e^{2t} \right|_{t=0} + E[X^2] \\
&= \left. \left( n(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{n-3} pe^t \cdot p^2 e^{2t} + n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} 2p^2 e^{2t} \right) \right|_{t=0} + E[X^2] \\
&= n(n-1)(n-2)(p+q)^{n-3} p^3 + n(n-1)(p+q)^{n-2} 2p^2 + n^2 p^2 + np(1-p) \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 + n(n-1)2p^2 + n^2 p^2 + np(1-p) \quad \text{berdasarkan (2.4)} \\
&= n^3 p^3 - 3n^2 p^3 + 2np^3 + 3n^2 p^2 - 2np^2 + np - np^2 \\
&= n^3 p^3 + 3n^2 p^2(1-p) + np(2p^2 - 2p + 1 - p) \\
&= n^3 p^3 + 3n^2 p^2(1-p) + np(2p^2 - 3p + 1) \\
&= n^3 p^3 + 3n^2 p^2(1-p) + np(1-p)(1-2p) \\
&= np(1-p)(1-2p) + 3n^2 p^2(1-p) + n^3 p^3 \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Sehingga momen ke-3 dari distribusi binomial adalah

$\mu_3' = E[X^3] = np(1-p)(1-2p) + 3n^2 p^2(1-p) + n^3 p^3$ . Selanjutnya akan dicari momen ke-4 dari distribusi binomial,

$$\begin{aligned}
\mu_4' &= E[X^4] = M_X^{(4)}(0) = \left. \frac{d^4}{dt^4} M_X(t) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( n(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{n-3} pe^t \cdot p^2 e^{2t} + n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} 2p^2 e^{2t} \right) \right|_{t=0} + \\
&\quad \left. \frac{d}{dt} \left( n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} p^2 e^{2t} + n(pe^t + q)^{n-1} pe^t \right) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( n(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{n-3} pe^t \cdot p^2 e^{2t} + n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} 2p^2 e^{2t} \right) \right|_{t=0} + E[X^3] \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)(pe^t + q)^{n-4} p^4 e^{4t} + n(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{n-3} 3p^3 e^{3t} \Big|_{t=0} + \\
&\quad n(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{n-3} 2p^3 e^{3t} + n(n-1)(pe^t + q)^{n-2} 4p^2 e^{2t} \Big|_{t=0} + E[X^3] \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)(p+q)^{n-4} p^4 + n(n-1)(n-2)(p+q)^{n-3} 3p^3 + \\
&\quad n(n-1)(n-2)(p+q)^{n-3} 2p^3 + n(n-1)(p+q)^{n-2} 4p^2 + n^3 p^3 - \\
&\quad 3n^2 p^3 + 2np^3 + 3n^2 p^2 - 2np^2 + npq \\
&= n^4 p^4 - 6n^3 p^4 + 11n^2 p^4 - 6np^4 + 3n^3 p^3 - 9n^2 p^3 + 6np^3 + 2n^3 p^3 - 6n^2 p^3 + 4np^3 + \\
&\quad 4n^2 p^2 - 4np^2 + n^3 p^3 - 3n^2 p^3 + 2np^3 + 3n^2 p^2 - 2np^2 + np - np^2 \\
&= n^4 p^4 - 6n^3 p^4 + 11n^2 p^4 - 6np^4 + 6n^3 p^3 - 18n^2 p^3 + 12np^3 + \\
&\quad 7n^2 p^2 - 7np^2 + np \\
&= np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4 + 7n^2 p^2 - 18n^2 p^3 + 11n^2 p^4 + 6n^3 p^3 - 6n^3 p^4 + n^4 p^4 \\
&= (np - 6np^2 - np^2 + 6np^3 + 6np^3 - 6np^4) + \\
&\quad (6n^2 p^2 + n^2 p^2 - 12n^2 p^3 - 6n^2 p^3 + 12n^2 p^4 - n^2 p^4 + 6n^3 p^3 - 6n^3 p^4 + n^4 p^4) \\
&= np(1 - 6p - p + 6p^2 + 6p^2 - 6p^3) + (6n^2 p^2 - 12n^2 p^3) - \\
&\quad (6n^2 p^3 + 12n^2 p^4) + (6n^3 p^3 - 6n^3 p^4)(n^2 p^2 - n^2 p^4 + n^4 p^4) \\
&= np[(1-p) - 6p(1-2p-p^2)] + (6n^2 p^2(1-2p) + 6n^3 p^3 - 6n^2 p^3(1-2p) - 6n^3 p^4) \\
&\quad n^2 p^2(1-p^2 + n^2 p^2) \\
&= np[(1-p) - 6p(1-p)(1-p)] + (6n^2 p^2 - 6n^2 p^3)[(1-2p) + np] + n^2 p^2(1-p^2 + n^2 p^2) \\
&= np(1-p)[1-6p(1-p)] + 6n^2 p^2(1-p)[(1-2p) + np] + n^2 p^2(1-p^2 + n^2 p^2)
\end{aligned}$$

(3.4)

Sehingga diperoleh momen ke-4 dari distribusi binomial adalah

$$\mu_4' = E[X^4] = np(1-p)[1-6p(1-p)] + 6n^2p^2(1-p)[(1-2p)+np] + n^2p^2(1-p^2+n^2p^2)$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka diperoleh momen ke-1,2,3,4 dari distribusi binomial adalah sebagai berikut:

$$\mu_1' = E[X] = np$$

$$\mu_2' = E[X^2] = n^2p^2 + np(1-p)$$

$$\mu_3' = E[X^3] = np(1-p)(1-2p) + 3n^2p^2(1-p) + n^3p^3$$

$$\mu_4' = E[X^4] = np(1-p)[1-6p(1-p)] + 6n^2p^2(1-p)[(1-2p)+np] + n^2p^2(1-p^2+n^2p^2)$$

Selain momen di atas, dalam statistika juga terdapat momen pusat, yaitu momen terhadap  $\mu$ . Berdasarkan definisi 7, momen pusat ke-1,2,3,4 dari distribusi binomial adalah sebagai berikut:

Momen pusat ke-1 dari distribusi binomial adalah

$$\begin{aligned} \mu_1 &= E[X - \mu] \\ &= E[X] - E[\mu] \\ &= E[X] - \mu && \text{berdasarkan teorema 1} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sehingga diperoleh momen pusat ke-1 dari distribusi binomial adalah

$$\mu_1 = E[X - \mu] = 0. \text{ Selanjutnya akan dicari momen pusat ke-2 dari distribusi}$$

binomial atau variansi distribusi binomial,

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= E[X - \mu]^2 \\
&= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
&= \mu_2' - 2\mu_1'^2 + \mu_1'^2 && \text{berdasarkan definisi 6} \\
&= \mu_2' - \mu_1'^2 \\
&= n^2 p^2 + np(1-p) - n^2 p^2 && \text{berdasarkan (3.1) dan (3.2)} \\
&= np(1-p) && (3.6)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh momen pusat ke-2 dari distribusi binomial adalah

$\mu_2 = E[X - \mu]^2 = np(1-p)$ . Selanjutnya akan dicari momen pusat ke-3 dari distribusi binomial,

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= E[X - \mu]^3 \\
&= E[(X - \mu)(X - \mu)(X - \mu)] \\
&= E[X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3] \\
&= E[X^3] - 3\mu E[X^2] + 3\mu^2 E[X] - \mu^3 \\
&= np(1-p)(1-2p) + 3n^2 p^2(1-p) + n^3 p^3 - \\
&\quad 3np(n^2 p^2 - np^2 + np) + 3n^3 p^3 - n^3 p^3 && \text{berdasarkan (3.1), (3.2) dan (3.3)} \\
&= np(1-p)(1-2p) + 3n^2 p^2 - 3n^2 p^3 + n^3 p^3 - 3n^3 p^3 + \\
&\quad 3n^2 p^3 - 3n^2 p^2 + 3n^3 p^3 - n^3 p^3 \\
&= np(1-p)(1-2p) && (3.7)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh momen pusat ke-3 dari distribusi binomial adalah

$\mu_3 = E[X - \mu]^3 = np(1-p)(1-2p)$ . Selanjutnya akan dicari momen pusat ke-4 dari distribusi binomial,

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= E[X - \mu]^4 \\
&= E[X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3][X - \mu] \\
&= E[X^4 - 4X^3\mu + 6X^2\mu^2 - 4X\mu^3 + \mu^4] \\
&= E[X^4] - 4\mu E[X^3] + 6\mu^2 E[X^2] - 4\mu^3 E[X] + \mu^4 \\
&= np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4 + 7n^2p^2 - 18n^2p^3 + 11n^2p^4 + 6n^3p^3 - 6n^3p^4 + n^4p^4 - \\
&\quad 4np(n^3p^3 - 3n^2p^3 + 2np^3 + 3n^2p^2 - 2np^2 + np - np^2) + 6n^2p^2(n^2p^2 - np^2 + np) - \\
&\quad 4n^4p^4 + n^4p^4 \\
&= np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4 + 7n^2p^2 - 18n^2p^3 + 11n^2p^4 + 6n^3p^3 - 6n^3p^4 + n^4p^4 - \\
&\quad 4n^4p^4 + 12n^3p^4 - 8n^2p^4 - 12n^3p^3 + 8n^2p^3 - 4n^2p^2 + 4n^2p^3 + 6n^4p^4 - 6n^3p^4 + \\
&\quad 6n^3p^3 - 4n^4p^4 + n^4p^4 \\
&= np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4 + 3n^2p^2 - 6n^2p^3 + 3n^2p^4 \\
&= np - 6np^2 - np^2 + 6np^3 + 6np^3 - 6np^4 + 3n^2p^2 - 6n^2p^3 + 3n^2p^4 \\
&= np[1 - 6p - p + 6p^2 + 6p^2 - 6p^3] + 3n^2p^2(1 - 2p + p^2) \\
&= np[(1 - p) - 6p(1 - 2p - p^2)] + 3n^2p^2(1 - p)(1 - p) \\
&= np[(1 - p) - 6p(1 - p)(1 - p)] + 3n^2p^2(1 - p)^2 \\
&= np(1 - p)[1 - 6p(1 - p)] + 3n^2p^2(1 - p)^2 \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh momen pusat ke-4 dari distribusi binomial adalah

$$\mu_4 = E[X - \mu]^4 = np(1 - p)[1 - 6p(1 - p)] + 3n^2p^2(1 - p)^2$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka diperoleh momen pusat ke-1,2,3,4 dari distribusi binomial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= E[X - \mu] = 0 \\
\mu_2 &= E[X - \mu]^2 = \text{Var}(X) = \mu'_2 - \mu'_1 = np(1 - p) \\
\mu_3 &= E[X - \mu]^3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'_1{}^3 = np(1 - p)(1 - 2p) \\
\mu_4 &= E[X - \mu]^4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'_2\mu'_1{}^2 - 3\mu'_1{}^4 \\
&= np(1 - p)[1 - 6p(1 - p)] + 3n^2p^2(1 - p)^2
\end{aligned}$$

### 3.2 Analisis Ekspansi Cornish-Fisher

Berdasarkan persamaan (2.15), ekspansi Cornish-Fisher menunjukkan kuantil- $\alpha$  dari suatu distribusi, yaitu:

$$x_\alpha = \mu + \frac{1}{2}(\sigma^2 + 1)z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)k_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)k_3^2$$

Dalam penelitian ini  $X$  merupakan variabel acak distribusi binomial.  $x_\alpha$  menunjukkan kuantil- $\alpha$  distribusi binomial,  $\mu$  dan  $\sigma^2$  merupakan *mean* dan variansi distribusi binomial,  $k_3$  dan  $k_4$  merupakan *cumulant* ketiga dan keempat distribusi binomial.

Distribusi distandarisasi menjadi  $x'_\alpha = \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}$ , sehingga ekspansi

Cornish-Fisher untuk distribusi binomial yang distandarisasi menjadi:

$$x'_\alpha = \frac{\mu - \mu + \frac{1}{2}(\sigma^2 + 1)z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)k_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)k_3^2}{\sigma}$$

$$x'_\alpha = \frac{\frac{1}{2}(\sigma^2 + 1)z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)k_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)k_3^2}{\sigma}$$

*Mean* dari statistik yang distandarisasi bernilai 0, dan variansi yang distandarisasi bernilai 1. Sehingga persamaan di atas menjadi

$$x'_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)k_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)k_3^2 \quad (3.9)$$

Selanjutnya untuk mencari nilai *cumulant*, akan dihitung berdasarkan hubungan antara fungsi pembangkit *cumulant* dan fungsi pembangkit momen. Pada definisi 11 pada bab 2, hubungan antara fungsi pembangkit *cumulant* dengan fungsi pembangkit momen sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
K_X(t) &= \ln M_X(t) \\
&= \ln \left( 1 + E[X]t + E[X^2] \frac{t^2}{2!} + \dots + E[X^n] \frac{t^n}{n!} + \dots \right) \\
&= \ln \left( 1 + \left[ \mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\text{Misalkan } x = \mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \dots \tag{3.11}$$

$$\text{maka } \ln \left( 1 + \left[ \mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right] \right) = \ln(1+x) \tag{3.12}$$

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx, \text{ di mana } \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}$$

Selanjutnya akan dicari menggunakan deret Taylor

$$f(x) = (1+x)^{-1}, \text{ maka } f(0) = 1$$

$$f'(x) = -1(1+x)^{-2}, \text{ maka } f'(0) = -1$$

$$f''(x) = 2(1+x)^{-3}, \text{ maka } f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = -6(1+x)^{-4}, \text{ maka } f'''(0) = -6$$

⋮

maka,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Jika nilai  $a = 0$ , maka ekspansi deret Taylor menjadi:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln(1+x) &= \int \frac{1}{1+x} dx \\
 &= \int (1-x+x^2-x^3+\dots) dx \\
 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Berdasarkan pemisalan (3.11) nilai  $x = \mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \mu'_4 \frac{t^4}{4!} \dots$ , maka

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \mu_1'^2 t^2 + \mu_1' \mu_2' t^3 + \left[ \frac{2\mu_3' \mu_1'}{3!} + \frac{(\mu_2')^2}{4} \right] t^4 + \dots \\
 x^3 &= \mu_1'^3 t^3 + \frac{3\mu_2' \mu_1'^2 t^4}{2} + \left[ \mu_1' \mu_3' + \mu_2' \right] \frac{t^4}{4} + \dots \\
 x^4 &= \mu_1'^4 t^4 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 K_x(t) = \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\
 &= \left[ \mu_1' t + \mu_2' \frac{t^2}{2} + \mu_3' \frac{t^3}{3!} + \mu_4' \frac{t^4}{4!} + \dots \right] - \\
 &\quad \frac{1}{2} \left[ \mu_1'^2 t^2 + \mu_1' \mu_2' t^3 + \frac{2\mu_3' \mu_1'}{3!} t^4 + \frac{(\mu_2')^2}{4} t^4 + \dots \right] + \\
 &\quad \frac{1}{3} \left[ \mu_1'^3 t^3 + \frac{3\mu_2' \mu_1'^2 t^4}{2} + \mu_1' \mu_3' \frac{t^4}{4} + \mu_2' \frac{t^4}{4} \right] - \mu_1'^4 \frac{t^4}{4} + \dots \\
 &= \mu_1' t + \left[ \mu_2' - \mu_1'^2 \right] \frac{t^2}{2} + \left[ \mu_3' - 3\mu_1' \mu_2' + 2\mu_1'^3 \right] \frac{t^3}{3!} + \\
 &\quad \left[ \mu_4' - 4\mu_3' \mu_1' - 3(\mu_2')^2 + 12\mu_2' \mu_1'^2 - 6\mu_1'^4 \right] \frac{t^4}{4!} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Sehingga koefisien dari  $\frac{t^r}{r!}$ , yang merupakan *cumulant* ke- $r$ , dengan  $r = 1, 2, 3, \dots$

adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \mu'_1 = \mu \\
k_2 &= \mu'_2 - \mu_1'^2 = \sigma^2 \\
k_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_1\mu_2' + 2\mu_1'^3 = E[(X - \mu)^3] \\
k_4 &= \mu'_4 - 4\mu_3'\mu_1' - 3(\mu_2')^2 + 12\mu_2'\mu_1'^2 - 6\mu_1'^4 \\
&= E[(X - \mu)^4] - 3(\mu_2')^2 + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4 \\
&= E[(X - \mu)^4] - 3(\mu_2' - \mu_1'^2)^2 \\
&= E[(X - \mu)^4] - 3\sigma^4 = \mu_4 - 3\mu_2^2
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas dapat diketahui bahwa hubungan antara momen pusat dan *cumulant* adalah:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \mu \\
k_2 &= \mu_2 \\
k_3 &= \mu_3 \\
k_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Berdasarkan pernyataan di atas, *cumulant* standar dapat dibentuk dengan menentukan momen pusat standar, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1^* &= \mu^* = \frac{\mu}{\sigma} \\
k_2^* &= \mu_2^* = \frac{\mu_2}{\sigma^2} \\
k_3^* &= \mu_3^* = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \\
k_4^* &= \mu_4^* - 3\mu_2^{*2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\left(\frac{\mu_2}{\sigma^2}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Selanjutnya, pada persamaan (3.9)  $x_\alpha'$  merupakan nilai distribusi yang distandarisasi, maka  $k_3$  dan  $k_4$  diubah kebentuk standar menjadi  $k_3^*$  dan  $k_4^*$ .

Untuk distribusi standar  $\mu_2$  sama dengan 1, sehingga  $k_4^* = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ . Berdasarkan (3.17) dan definisi 9 di bab 2, maka  $k_3^*$  dan  $k_4^*$  dapat diganti dengan *skewness* ( $\gamma_1$ ) dan *kurtosis* ( $\gamma_2$ ). Sehingga persamaan (3.9) menjadi,

$$x'_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\gamma_1 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\gamma_2 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\gamma_1^2 \quad (3.18)$$

Nilai ini harus ditransformasikan kembali terhadap kuantil dari awal distribusi sebelum dibentuk standar.  $x'_\alpha$  dikalikan dengan standar deviasi distribusi sampel dan dijumlahkan dengan *mean* distribusi sampel,

$$x_\alpha = \mu + \sigma x'_\alpha \quad (3.19)$$

di mana

$$x'_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\gamma_1 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\gamma_2 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\gamma_1^2$$

Pada persamaan di atas  $x_\alpha$  menunjukkan aproksimasi kuantil- $\alpha$  dari distribusi binomial.

### 3.3 *p-Chart* Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher

Misalkan  $X$  variabel acak berdistribusi binomial dengan ukuran sampel  $n$  dan parameter  $p$ . Maka  $Y = \frac{X}{n}$  adalah proporsi binomial dengan *mean*

$\mu = E(Y) = p$ . Selanjutnya momen pusat kedua atau variansi dari  $Y$  adalah:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \text{var}(Y) = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \text{var}(X) \\
&= \frac{1}{n^2} np(1-p) \quad \text{berdasarkan (3.6)} \\
&= \frac{p(1-p)}{n} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Selanjutnya momen pusat ketiga dari  $Y$  adalah:

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= E(Y - \mu)^3 \\
&= E\left(\frac{X}{n} - p\right)^3 \\
&= E\left(\frac{X}{n} - \frac{np}{n}\right)^3 \\
&= \frac{1}{n^3} E(X - np)^3 \\
&= \frac{p(1-p)(1-2p)}{n^2} \quad \text{berdasarkan (3.1) dan (3.7)} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Untuk mencari kuantil- $\alpha$  dari proporsi binomial  $Y$  ( $Y_\alpha$ ) berdasarkan ekspansi

Cornish-Fisher adalah:

$$\begin{aligned}
Y_\alpha &= \mu + \sigma Y'_\alpha \\
\frac{Y_\alpha - \mu}{\sigma} &= Y'_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Y_\alpha - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} &= Y'_\alpha \quad \text{berdasarkan (3.20)} \\
&= z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\gamma_1 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\gamma_2 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\gamma_1^2 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Penelitian ini hanya menggunakan  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher

dengan satu penyesuaian, sehingga bentuk di atas direduksi menjadi berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{Y_\alpha - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} &\cong z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\gamma_1 \\
&= z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1) \frac{p(1-p)(1-2p)}{n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \\
Y_\alpha &= p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1) \frac{p(1-p)(1-2p)}{n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
&= p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1) \frac{p(1-p)(1-2p)}{n^2 \frac{p(1-p)}{n}} \\
&= p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1) \frac{p(1-p)(1-2p)}{np(1-p)} \\
&= p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1) \frac{(1-2p)}{n} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$Y_\alpha$  menunjukkan kuantil- $\alpha$  dari proporsi distribusi binomial. Jika digunakan  $\alpha$  sebesar 0,0027 maka  $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,0027}{2} = 0,00135$ , sehingga  $z_{\alpha_1}$  sebesar  $-3$ , yang akan digunakan sebagai batas bawah dan  $1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0027 = 0,99865$ , sehingga diperoleh  $z_{\alpha_2}$  sebesar 3 akan digunakan sebagai batas atas. Maka diperoleh  $z_\alpha = \pm 3$ , sehingga

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha_1} &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(3^2 - 1) \frac{(1-2p)}{n} \\
Y_{\alpha_2} &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}((-3)^2 - 1) \frac{(1-2p)}{n} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Karena  $p$ -chart dibentuk berdasarkan proporsi binomial, maka batas pengendali atas dan batas pengendali bawah  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 UCL &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(3^2 - 1)\frac{(1-2p)}{n} \\
 &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p) \\
 LCL &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}((-3)^2 - 1)\frac{(1-2p)}{n} \\
 &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Sehingga batas-batas pengendali dan garis tengah  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher untuk nilai  $p$  yang diketahui adalah

$$\begin{aligned}
 UCL &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p) \\
 CL &= p \\
 LCL &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

### 3.4 Aplikasi $p$ -Chart Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher

#### a. Kasus 1

Dalam penelitian ini  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher akan diaplikasikan pada suatu contoh proses produksi botol IBTC 175ml. Data diperoleh berdasarkan penelitian Karina Mayananda (2012), mahasiswa Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, yang meneliti tentang Pengontrolan Kualitas Produk PT. Iglas (Persero) menggunakan grafik pengendali

$p$  multivariat. Dengan ukuran sampel ( $n$ ) sebesar 576, diambil setiap hari selama 48 hari (48 subgrup) pada tanggal 2 Juli-18 Agustus 2011.

Penelitian ini meneliti 4 karakteristik kualitas, yaitu 2 kategori tidak sesuai kritis dan 2 kategori tidak sesuai major. Tidak sesuai kritis merupakan suatu cacat botol yang membahayakan orang lain, sedangkan tidak sesuai major merupakan cacat pada botol yang mengakibatkan kegagalan dalam proses pelanggan. 4 karakteristik kualitas tersebut sebagai berikut:

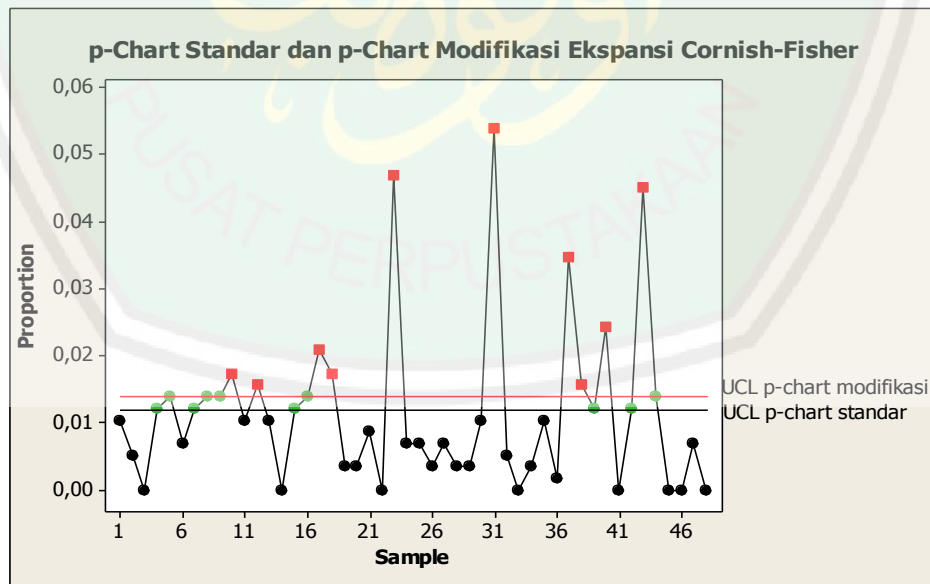
1. *Over Press*, adalah kelebihan gelas tajam yang menonjol ke atas pada lubang *finish*.
2. *Bird Swing*, adalah sebetuk gelas yang melintang di dalam botol.
3. *Chipped finish*, adalah sedikit pecah pada bibir botol.
4. *Cr Shoulder*, adalah retak pada pundak botol.

Diperoleh data ketidaksesuaian produk pada lampiran 1. Selanjutnya, misalkan perusahaan menentukan nilai standar ( $p$ ) yang digunakan sebesar 0,004, sehingga batas-batas pengendali untuk  $p$ -chart standar dan  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 UCL_1 &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
 &= 0,004 + 3\sqrt{\frac{0,004(1-0,004)}{576}} = 0,012 \\
 CL_1 &= 0,004 \\
 LCL_1 &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
 &= 0,004 - 3\sqrt{\frac{0,004(1-0,004)}{576}} = -0,004 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 UCL_2 &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p) \\
 &= 0,004 + 3\sqrt{\frac{0,004(1-0,004)}{576}} + \frac{4}{3 \cdot 576}(1-2 \cdot 0,004) \\
 &= 0,0142 \\
 CL_2 &= 0,004 \\
 LCL_2 &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p) \\
 &= 0,004 - 3\sqrt{\frac{0,004(1-0,004)}{576}} + \frac{4}{3 \cdot 576}(1-2 \cdot 0,004) = -0,0016 = 0
 \end{aligned}$$

$UCL_1$ ,  $LCL_1$ , dan  $CL_1$  merupakan batas pengendali atas, batas pengendali bawah, dan garis tengah untuk  $p$ -chart standar, sedangkan  $UCL_2$ ,  $LCL_2$ , dan  $CL_2$  merupakan batas pengendali atas, batas pengendali bawah, dan garis tengah untuk  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. Selanjutnya grafik pengendali untuk kasus di atas sebagai berikut:



Gambar 3.1  $p$ -Chart Standar dan  $p$ -Chart Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher dengan  $n = 576$  dan  $\hat{p} = 0,004$

Gambar di atas menunjukkan grafik pengendali untuk dua  $p$ -chart. Karena nilai LCL adalah negatif dan menjadi nol, sehingga grafik di atas hanya menggunakan batas pengendali atas atau UCL. Pada grafik di atas ada beberapa titik yang diindikasikan *out of control* oleh  $p$ -chart standar, namun titik tersebut masih berada di dalam batas-batas pengendali  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. Ada 20 titik yang keluar dari batas pengendali (*out of control*)  $p$ -chart standar maupun  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. 20 titik tersebut ada 10 titik yang dinyatakan dalam keadaan terkendali (*in control*) oleh  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. 10 titik tersebut berada di antara UCL  $p$ -chart standar dan UCL  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher.

Selanjutnya dicari nilai  $\alpha$ , untuk mengetahui seberapa besar probabilitas bahwa suatu titik dikatakan *out of control* ketika proses terkendali.

Tabel 3.1 Batas-Batas Pengendali dan *Error Tipe I* ( $\alpha$ ) dari Gambar 3.1

	$\hat{p}$	UCL	$n$ UCL	LCL	$n$ LCL	Alfa ( $\alpha$ )
$p$ -chart standar	0,004	0,012	6,85	0	0	0,009
$p$ -chart modifikasi	0,004	0,0142	8,171	0	0	0,0006

Penelitian ini menggunakan batas toleransi ( $\alpha_0$ ) sebesar 0,0027. Tabel di atas menunjukkan perbandingan  $\alpha$  dari  $p$ -chart standar dan  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. Untuk  $p$ -chart standar diperoleh nilai  $\alpha$  yang besar, sedangkan  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher memiliki nilai  $\alpha$  yang sangat kecil. Sehingga untuk nilai  $\hat{p} = 0,004$  dengan ukuran sampel ( $n$ ) sebesar 576,  $p$ -chart modifikasi lebih baik daripada  $p$ -chart standar dalam mengendalikan suatu proses produksi.

### b. Kasus 2

Dalam sebuah produksi cokelat, dengan ukuran sampel ( $n$ ) sebesar 20, diambil setiap hari selama 150 hari dan dianalisis beberapa kecacatannya. Cokelat dikatakan tidak sesuai jika terdapat satu atau lebih karakteristik sebagai berikut (Joeques dan Barbosa, 2011):

1. Cokelat tidak utuh, misalnya bentuk cokelat ada yang hancur ketika proses pembungkusan.
2. Bungkus cokelat hanya membungkus sebagian cokelat, atau ada bagian cokelat yang tidak terbungkus.
3. Lipatan pada bungkus terbuka.

Berdasarkan beberapa karakteristik ketidaksesuaian di atas, maka diperoleh data ketidaksesuaian produk pada lampiran 2. Dalam kasus ini perusahaan menginginkan proporsi ketidaksesuaian proses sebesar 0,004. Sehingga batas-batas pengendali  $p$ -chart sebagai berikut:

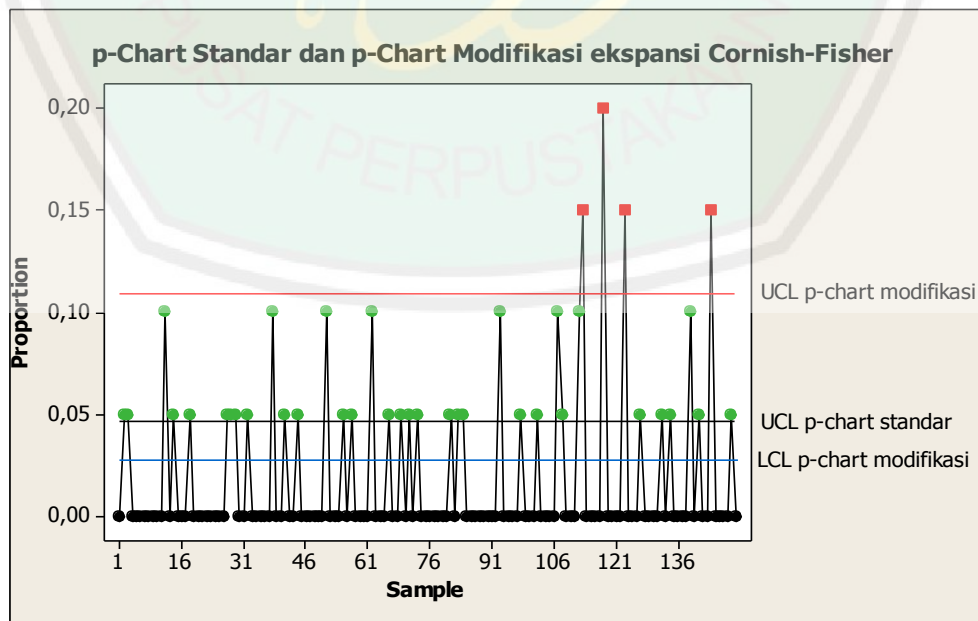
$$\begin{aligned}
 UCL_1 &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
 &= 0,004 + 3\sqrt{\frac{0,004(1-0,004)}{20}} = 0,0463
 \end{aligned}$$

$$CL_1 = 0,004$$

$$\begin{aligned}
 LCL_1 &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
 &= 0,004 - 3\sqrt{\frac{0,004(1-0,004)}{20}} = -0,0383 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 UCL_2 &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p) \\
 &= 0,004 + 3\sqrt{\frac{0,004(1-0,004)}{20}} + \frac{4}{3 \cdot 20}(1-2 \cdot 0,004) \\
 &= 0,1125 \\
 CL_2 &= 0,004 \\
 LCL_2 &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p) \\
 &= 0,004 - 3\sqrt{\frac{0,004(1-0,004)}{20}} + \frac{4}{3 \cdot 20}(1-2 \cdot 0,004) \\
 &= 0,0278
 \end{aligned}$$

$UCL_1$ ,  $LCL_1$ , dan  $CL_1$  merupakan batas pengendali atas, batas pengendali bawah, dan garis tengah untuk  $p$ -chart standar, sedangkan  $UCL_2$ ,  $LCL_2$ , dan  $CL_2$  merupakan batas pengendali atas, batas pengendali bawah, dan garis tengah untuk  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. Grafik pengendali dari kasus di atas ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 3.2  $p$ -Chart Standar dan  $p$ -Chart Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher dengan  $n = 20$  dan  $\hat{p} = 0,004$

Gambar di atas menunjukkan grafik pengendali untuk dua *p-chart*. Karena nilai LCL untuk *p-chart* standar bernilai negatif dan menjadi nol, sehingga grafik di atas hanya menggunakan batas pengendali atas atau UCL dari kedua *p-chart*, dan batas pengendali bawah atau LCL dari *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. Pada gambar di atas untuk *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher menunjukkan titik yang keluar dari batas pengendali lebih banyak dari *p-chart* standar, khususnya titik yang berada di bawah LCL *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. Selanjutnya dicari nilai  $\alpha$ , untuk mengetahui seberapa besar probabilitas bahwa suatu produk dikatakan *out of control* ketika proses terkendali.

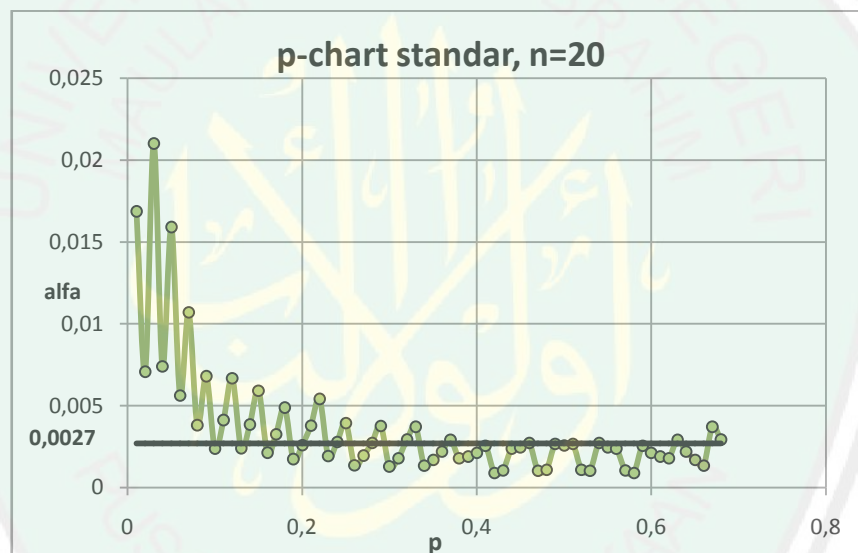
Tabel 3.2 Batas-Batas Pengendali dan *Error Tipe I* ( $\alpha$ ) dari Gambar 3.2

	$\hat{p}$	UCL	$n$ UCL	LCL	$n$ LCL	Alfa ( $\alpha$ )
<i>p-chart</i> standar	0,004	0,0463	0,927	0	0	0,077
<i>p-chart</i> modifikasi	0,004	0,1125	2,25	0,0278	0,556	0,923

Dengan  $\alpha_0$  sebesar 0,0027, pada *p-chart* modifikasi diperoleh nilai  $\alpha$  yang besar dan sangat jauh dari batas toleransi. Pada *p-chart* standar meskipun nilai  $\alpha$  jauh dari batas toleransi, namun lebih kecil dari *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. Untuk nilai  $\hat{p} = 0,004$  dengan ukuran sampel ( $n$ ) sebesar 20, *p-chart* modifikasi tidak lebih baik dari *p-chart* standar. Sehingga saat nilai  $n$  atau  $p$  yang terlalu kecil *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dengan satu penyesuaian akan mengalami *error* yang besar.

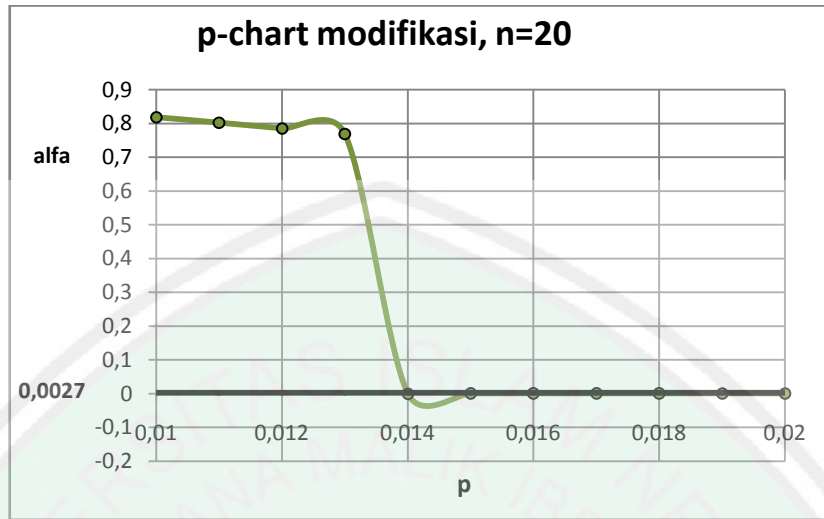
### 3.5 Perbandingan Grafik *Error Tipe I p-Chart* Standar dan *p-Chart* Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher

Pada penelitian ini, hanya menggunakan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dengan satu penyesuaian. Sehingga pada nilai  $n$  dan  $p$  tertentu *p-chart* ini akan memberikan *error* yang besar. Grafik di bawah ini akan menunjukkan perbandingan *error* tipe I *p-chart* standar dan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dengan ukuran sampel ( $n$ ) sebesar 20 dan  $p \geq 0,01$ .



Gambar 3.3 Grafik *Error Tipe I p-Chart* Standar dengan  $n = 20$

Grafik di atas menunjukkan  $\alpha$  untuk *p-chart* standar naik turun, dan meskipun mempunyai nilai  $\alpha$  yang kecil namun tidak terlalu dekat dengan batas toleransi 0,0027. Sedangkan untuk *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher, adalah sebagai berikut:



Gambar 3.4 Grafik Error Tipe I *p-Chart* Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher dengan  $n = 20$

Grafik di atas, menunjukkan bahwa untuk  $n$  sebesar 20,  $p$  minimum pada *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher adalah 0,014.  $p$  minimum merupakan nilai  $p$  terkecil yang menghasilkan  $\alpha$  kecil, yaitu di sekitar 0,0027 atau  $\alpha$  mendekati 0.

Berdasarkan grafik *error* tipe I pada lampiran 3, di bawah ini akan ditunjukkan beberapa nilai  $n$  dan  $p$  minimum yang baik digunakan untuk *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dan *p-chart* standar:

Tabel 3.3 Nilai  $n$  dan  $p$  Minimum *p-Chart* Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher Berdasarkan Error Tipe I

$n$	$p$	$np$	$np(1 - p)$
3	0,074	0,22	0,205
5	0,049	0,24	0,233
10	0,027	0,27	0,263
20	0,014	0,28	0,276
25	0,012	0,3	0,296
50	0,006	0,3	0,298
60	0,005	0,3	0,299
100	0,003	0,3	0,299
200	0,0015	0,3	0,3
500	0,0006	0,3	0,3

Tabel di atas menunjukkan nilai  $p$  minimum pada  $p$ -chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher.  $p$ -Chart modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dengan satu penyesuaian ini akan memberikan hasil yang baik ketika  $np(1 - p) > 0,2$ . Untuk  $p$ -chart standar, ditunjukkan dalam tabel berikut ini:

Tabel 3.4 Nilai  $n$  dan  $p$  Minimum  $p$ -Chart Standar Berdasarkan Error Tipe I

$n$	$p$	$np$	$np(1 - p)$
3	-	-	-
5	-	-	-
10	0,35	3,5	2,27
20	0,34	6,8	4,5
25	0,33	8,25	5,53
50	0,23	11,5	8,85
60	0,2	12	9,6
100	0,15	15	12,75
200	0,08	16	14,72
500	0,07	35	32,55

Tabel di atas menunjukkan nilai  $n$  dan  $p$  minimum untuk  $p$ -chart standar. Untuk  $n = 3$  dan  $n = 5$  tidak mempunyai nilai  $p$  minimum karena berapapun nilai  $p$ , akan menghasilkan error tipe I yang besar.  $p$ -Chart standar akan memberikan hasil yang baik ketika  $np(1 - p) > 2,5$ .

### 3.6 Kajian Keagamaan

$p$ -Chart merupakan salah satu grafik pengendali atribut yang digunakan sebagai alat untuk memberikan informasi mengenai kemampuan proses produksi berdasarkan proporsi ketidaksesuaian produk. Fungsi  $p$ -chart standar atau  $p$ -chart yang biasa digunakan saat ini memiliki kelemahan pada saat tingkat ketidaksesuaian produk adalah kecil. Kelemahan tersebut adalah semakin banyak produk yang keluar dari batas pengendali, ketika produk dalam keadaan baik atau

proses terkendali. Kelemahan ini dapat menimbulkan kerugian bagi produsen. Sehingga *p-chart* standar tidak sesuai untuk digunakan dalam pengendalian kualitas pada saat tingkat ketidaksesuaian kecil.

Dalam Islam diajarkan untuk memperhatikan ukuran, agar tidak ada penyesalan setelahnya disebabkan kerugian yang terjadi. Dalam surat As-Syuara ayat 181 dan 182, Allah berfirman:

أَوْفُوا الْكَيْلَ وَلَا تَكُونُوا مِنَ الْمُخْسِرِينَ ﴿١٨١﴾ وَزِنُوا بِالْقِسْطَاسِ الْمُسْتَقِيمِ ﴿١٨٢﴾

**Artinya:** “Sempurnakanlah takaran dan janganlah kamu termasuk orang-orang yang merugikan. Dan timbanglah dengan timbangan yang lurus”.

Pada ayat di atas, manusia dianjurkan untuk memperhatikan ukuran. Dalam pengendalian kualitas, untuk proporsi ketidaksesuaian produk, besar dan kecilnya nilai  $p$  sangat berpengaruh kepada grafik pengendali yang digunakan. Untuk dapat mencapai hasil yang baik, diperlukan penggunaan grafik pengendali yang sesuai. *p-Chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher merupakan *p-chart* yang dibentuk berdasarkan ekspansi Cornish-Fisher. *p-Chart* ini dibentuk berdasarkan aproksimasi kuantil- $\alpha$  proporsi distribusi binomial. *p-Chart* ini lebih menguntungkan daripada *p-chart* standar karena dapat digunakan untuk pengendalian proses ketika nilai  $p$  kecil. Dengan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher, resiko produsen dapat berkurang karena probabilitas terjadi *error* tipe I semakin sedikit.

Setiap perusahaan selalu menginginkan keuntungan yang maksimal. Upaya untuk meningkatkan kualitas produk selalu diutamakan. Dengan menggunakan metode yang lebih baik untuk mengendalikan kualitas dapat memberikan keuntungan lebih bagi perusahaan. Allah SWT menganjurkan

mahluk-Nya untuk menggunakan metode yang lebih baik. Dalam surat Al-Fatihah ayat 6 yang berbunyi:

أَهْدِنَا الصِّرَاطَ الْمُسْتَقِيمَ ﴿٦﴾

**Artinya:** “Tunjukkan kami jalan yang lurus”.

Pada ayat di atas, *Shiraatal mustaqim* artinya jalan yang lurus atau jalan yang benar. Menurut Ahmad bin Muhammad bin Ibrahim Ats-Tsa’labi, jalan yang lurus adalah jalannya Nabi Muhammad dan para keturunannya. Nabi Muhammad mengajak umat manusia kepada agama Allah, ajakan keimanan dan amal saleh, yang mengangkat manusia pada puncak kemampuan, hidayah, martabat, dan keutamaan manusia (Imani, 2006:50).

Dalam Tafsir Nurul Qur’an (Imani, 2006), ada dua jenis hidayah, hidayah Ilahiah dan hidayah agama. Hidayah Ilahiah adalah kecerdasan yang dicurahkan pada manusia oleh Allah. Dengan kecerdasan ini, ia mengetahui perbedaan antara baik dan buruk, benar dan salah, untung dan rugi, senang dan sedih, kebaikan dan keburukan, dan lain-lain. Sedangkan hidayah agama artinya Allah mengutus para nabi, kitab-kitab samawi, dan peraturan untuk membimbing manusia terhadap manfaat yang ada di dunia ini dan di akhirat, serta menyadarkannya akan kesusahan dan kepedihan yang ada.

Kecenderungan manusia untuk menggunakan metode yang lebih baik dalam mengerjakan suatu pekerjaan termasuk dalam hidayah Ilahiah. Pelaku kegiatan industri selalu berupaya meningkatkan kualitas produksinya, dengan berbagai macam prosedur pengendalian statistik. Mereka akan menerapkan suatu

metode yang paling efektif yang dapat membawa kepada keberhasilan bisnisnya, salah satunya adalah *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penjelasan pada bab-bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dibentuk berdasarkan ekspansi Cornish-Fisher. Ekspansi Cornish-Fisher menunjukkan kuantil- $\alpha$  proporsi distribusi binomial berdasarkan pada kuantil- $\alpha$  distribusi normal standar dan *cumulant* dari proporsi distribusi binomial. *Cumulant* ke-3 menunjukkan *skewness* distribusi, sedangkan *cumulant* ke-4 menunjukkan kurtosis distribusi. Untuk *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher satu penyesuaian nilai *kurtosis* diabaikan, sehingga hanya mempertimbangkan nilai *skewness* atau *cumulant* ke-3.

Dalam pengendalian proses untuk tingkat ketidaksesuaian yang kecil *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher memberikan hasil yang lebih baik dari *p-chart* standar. Karena pada saat tingkat ketidaksesuaian kecil, *error* tipe I (peluang suatu produk dikatakan *out of control* ketika proses terkendali dari *p-chart* standar lebih besar dari *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher. Untuk *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher akan memberikan hasil yang baik ketika  $np(1 - p) > 0,2$ . Nilai tersebut merupakan nilai minimum dari  $n$  dan  $p$ , yaitu nilai  $p$  terkecil dengan ukuran sampel  $n$  yang menghasilkan  $\alpha$  kecil, atau  $\alpha$  mendekati nol. Sedangkan untuk *p-chart* standar akan memberikan hasil yang baik ketika  $np(1 - p) > 2,5$ .

#### 4.2 Saran

Penelitian ini masih dapat dikembangkan lebih banyak lagi. Sehingga saran untuk penelitian selanjutnya diharapkan menggunakan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher untuk nilai  $p$  yang tidak diketahui. Selain itu dapat menggunakan *p-chart* modifikasi ekspansi Cornish-Fisher dengan dua penyesuaian, sehingga ekspansi Cornish-Fisher akan dihitung sampai pada *cumulant* ke-4 yang mempertimbangkan nilai *kurtosis* distribusi.



## DAFTAR PUSTAKA

- Bekki, J.M., Fowler, J.W., Mackulak, G.T., dan Nelson, B.L.. 2003. *Indirect Cycle-Time Quantile Estimation Using The Cornish-Fisher Expansion*. Arizona: Department of Industrial Engineering, Arizona State University. Vol. 2 Hal. 1377-1382.
- Chan, L.Y., Lin, D.K.J., Xie, M., dan Goh T.N.. 2002. Cumulative Probability Control Chart for Geometric and Exponential Process Characteristics. *International Journal of Production Research*. Vol. 14 Hal. 133-150.
- Dudewicz, E.J. dan Mishra, S.N.. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Imani, A.K.F.. 2006. *Tafsir Nurul Qur'an*. Jakarta: Penerbit Al-Huda.
- Joekes, S. dan Barbosa, E.P.. 2011. *An Improved p-Chart for Monitoring High Quality Processes Based on Cornish-Fisher Quantile Correction*. Cordoba: Instituto de Estadística, Universidad Nacional de Cordoba.
- Lungan, R.. 2006. *Aplikasi Statistika dan Hitung Peluang*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Mayananda, K.. 2012. Pengontrolan Kualitas Produk PT IGLAS (Persero) Gresik Menggunakan Diagram  $p$  Multivariat. *Skripsi* tidak diterbitkan. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Montgomery, D.C.. 1990. *Pengantar Pengendalian Kualitas Statistik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Octavia, T., Prajogo, D.I., dan Prabudy, L.M.. 2000. Studi Tentang Peta Kendali  $p$  yang Distandarisasi untuk Proses Pendek Kualitas. *Jurnal Teknik Industri*. Vol. 2 Hal. 53-64.
- Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Simbolon, H.. 2009. *Statistika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Spiegel, M.R., Schiller, J., dan Srinivasan, R.A.. 2004. *Probabilitas dan Statistik*. Jakarta: Erlangga.
- Supranto, J.. 2001. *Statistik Teori dan Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

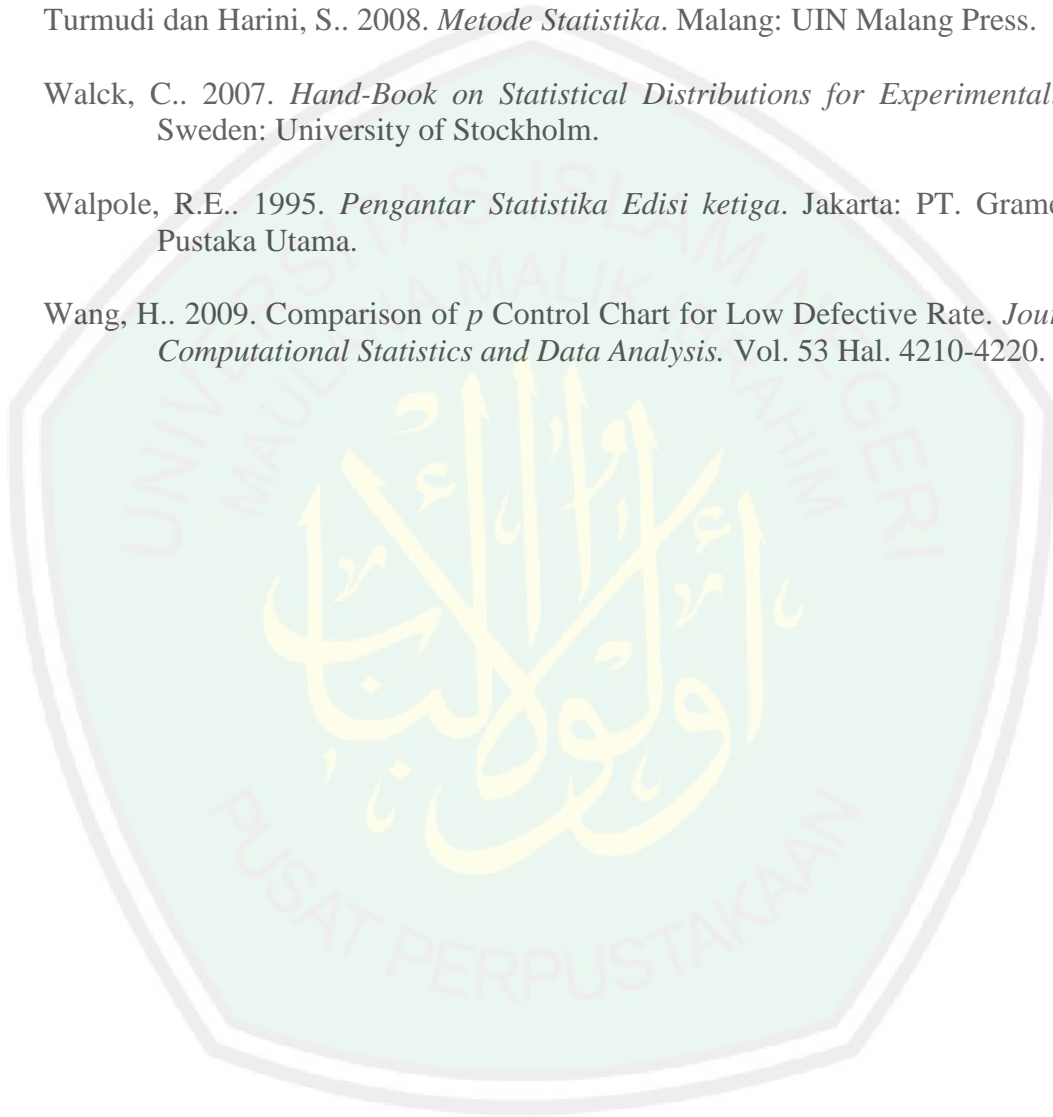
Tirta, I.M.. 2004. *Diktat Kuliah Pengantar Statistika Matematika*. Jember: Penerbit FMIPA Universitas Jember.

Turmudi dan Harini, S.. 2008. *Metode Statistika*. Malang: UIN Malang Press.

Walck, C.. 2007. *Hand-Book on Statistical Distributions for Experimentalists*. Sweden: University of Stockholm.

Walpole, R.E.. 1995. *Pengantar Statistika Edisi ketiga*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.

Wang, H.. 2009. Comparison of  $p$  Control Chart for Low Defective Rate. *Journal Computational Statistics and Data Analysis*. Vol. 53 Hal. 4210-4220.



## LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Ketidaksesuaian Produksi Botol IBTC 175ml

Hari ke-	<i>over press</i>	<i>Bird Swing</i>	<i>Chipped Finish</i>	<i>cr shoulder</i>	Jumlah ketidaksesuaian	proporsi
1	3	0	1	2	6	0,01042
2	0	0	3	0	3	0,00521
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	7	0	7	0,01215
5	3	0	5	0	8	0,01389
6	0	4	0	0	4	0,00694
7	0	0	7	0	7	0,01215
8	3	0	5	0	8	0,01389
9	1	0	7	0	8	0,01389
10	0	2	8	0	10	0,01736
11	0	0	6	0	6	0,01042
12	0	4	5	0	9	0,01563
13	0	0	4	2	6	0,01042
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	7	0	7	0,01215
16	0	0	8	0	8	0,01389
17	0	0	12	0	12	0,02083
18	0	0	10	0	10	0,01736
19	0	0	0	2	2	0,00347
20	0	0	0	2	2	0,00347
21	0	5	0	0	5	0,00868
22	0	0	0	0	0	0
23	26	0	0	1	27	0,04688
24	4	0	0	0	4	0,00694
25	0	0	0	4	4	0,00694
26	0	0	2	0	2	0,00347
27	0	0	4	0	4	0,00694
28	2	0	0	0	2	0,00347
29	2	0	0	0	2	0,00347
30	0	0	0	6	6	0,01042
31	29	0	0	2	31	0,05382
32	0	0	0	3	3	0,00521
33	0	0	0	0	0	0
34	2	0	0	0	2	0,00347

35	0	0	0	6	6	0,01042
36	0	0	0	1	1	0,00174
37	3	0	0	17	20	0,03472
38	0	0	0	9	9	0,01563
39	0	0	0	7	7	0,01215
40	0	0	0	14	14	0,02431
41	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	7	7	0,01215
43	0	0	0	26	26	0,04514
44	0	0	0	8	8	0,01389
45	0	0	0	0	0	0
46	0	0	0	0	0	0
47	4	0	0	0	4	0,00694
48	0	0	0	0	0	0

**Lampiran 2. Data Ketidaksesuaian Produksi Cokelat**

hari ke-	banyak ketidaksesuaian	proporsi
1	0	0
2	1	0,05
3	1	0,05
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0
11	0	0
12	2	0,1
13	0	0
14	1	0,05
15	0	0
16	0	0
17	0	0
18	1	0,05
19	0	0
20	0	0
21	0	0
22	0	0
23	0	0
24	0	0
25	0	0
26	0	0
27	1	0,05
28	1	0,05
29	1	0,05
30	0	0
31	0	0
32	1	0,05
33	0	0
34	0	0
35	0	0
36	0	0
37	0	0

hari ke-	banyak ketidaksesuaian	proporsi
38	2	0,1
39	0	0
40	0	0
41	1	0,05
42	0	0
43	0	0
44	1	0,05
45	0	0
46	0	0
47	0	0
48	0	0
49	0	0
50	0	0
51	2	0,1
52	0	0
53	0	0
54	0	0
55	1	0,05
56	0	0
57	1	0,05
58	0	0
59	0	0
60	0	0
61	0	0
62	2	0,1
63	0	0
64	0	0
65	0	0
66	1	0,05
67	0	0
68	0	0
69	1	0,05
70	0	0
71	1	0,05
72	0	0
73	1	0,05
74	0	0

hari ke-	banyak ketidaksesuaian	proporsi
75	0	0
76	0	0
77	0	0
78	0	0
79	0	0
80	0	0
81	1	0,05
82	0	0
83	1	0,05
84	1	0,05
85	0	0
86	0	0
87	0	0
88	0	0
89	0	0
90	0	0
91	0	0
92	0	0
93	2	0,1
94	0	0
95	0	0
96	0	0
97	0	0
98	1	0,05
99	0	0
100	0	0
101	0	0
102	1	0,05
103	0	0
104	0	0
105	0	0
106	0	0
107	2	0,1
108	1	0,05
109	0	0
110	0	0
111	0	0
112	2	0,1

hari ke-	banyak ketidaksesuaian	proporsi
113	3	0,15
114	0	0
115	0	0
116	0	0
117	0	0
118	4	0,2
119	0	0
120	0	0
121	0	0
122	0	0
123	3	0,15
124	0	0
125	0	0
126	0	0
127	1	0,05
128	0	0
129	0	0
130	0	0
131	0	0
132	1	0,05
133	0	0
134	1	0,05
135	0	0
136	0	0
137	0	0
138	0	0
139	2	0,1
140	0	0
141	1	0,05
142	0	0
143	0	0
144	3	0,15
145	0	0
146	0	0
147	0	0
148	0	0
149	1	0,05
150	0	0

**Lampiran 3. Perbandingan Nilai *Error Tipe I* *p-Chart* Standar dan *p-Chart* Modifikasi Ekspansi Cornish-Fisher**

