STUDI TENTANG SIFAT-SIFAT STRUKTUR GRUP-M FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
IRMA YUNI LESTARI
NIM. 09610098

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

STUDI TENTANG SIFAT-SIFAT STRUKTUR GRUP-M FUZZY

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IRMA YUNI LESTARI
NIM. 09610098

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

STUDI TENTANG SIFAT-SIFAT STRUKTUR GRUP-M FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
IRMA YUNI LESTARI
NIM. 09610098

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 08 Februari 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

STUDI TENTANG SIFAT-SIFAT STRUKTUR GRUP-M FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
IRMA YUNI LESTARI
NIM. 09610098

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 02 Maret 2013

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	________________
Ketua Penguji	: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP.19710420 200003 1 003	________________
Sekretaris Penguji	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Irma Yuni Lestari

Nim : 09610098

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Februari 2013
Yang membuat pernyataan,

Irma Yuni Lestari
NIM. 09610098

MOTTO

... إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا۟ مَا بِأَنفُسِهِمْ ۗ ... ﴿١١﴾

"Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri"

(QS. Ar-Ra'd: 11)

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(QS. Al-Insyirah: 6)

أَلثَّرْوَةُ فِي الْحَيَاةِ لَيْسَتْ إِلَى كَمْ حَصَلْنَا بَلْ كَيْفَ نَلْنَا هَذِهِ الثَّرْوَةَ

"Yang berharga dalam hidup bukan berapa hasil yang kita peroleh tetapi bagaimana kita memperolehnya"

HALAMAN PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Teriring do'a dan rasa syukur atas nikmat, rahmat, berkah, dan karunia Allah, maka penulis persembahkan karya tulis ini kepada:

Ibu dan Ayah Tercinta

(Ibu Nur Sholikhah dan Bapak Sumarto)

Keluarga Tercinta

(Yai Tulus, Ibu Tulipha, Ibu Rohimah, Mbak Tuflikhna, Mas Suparman, Dwi Wahyudi, dan Abdul Ghoni Setiawan)

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, nikmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullahu ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si dan Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan saran, bantuan, dan bimbingannya selama penulisan skripsi ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan ilmu yang dapat dijadikan bekal di masa depan.

6. Kepala Dinas Pendidikan Kabupaten Lamongan yang telah memberikan biaya pendidikan selama masa perkuliahan.
7. Ayah, Ibu, dan keluarga tercinta yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Seluruh guru penulis terutama *abah* Prof. Dr. KH. Ahmad Mudhor, S.H yang telah memberikan ilmu, nasihat, serta wacana kehidupan baru bagi penulis.
9. Teman-teman Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
10. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009, terima kasih atas semangat, do'a, dan kenangan yang kalian berikan.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya ilmu matematika, Amin.

Malang, Februari 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Lestari, Irma Yuni. 2013. **Studi tentang Sifat-sifat Struktur Grup-M Fuzzy**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Drs. H. Turmudi, M.Si.
II. Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: Himpunan Fuzzy, Grup-M, Grup-M Fuzzy.

Seiring perkembangan zaman, teori grup dan himpunan fuzzy semakin berkembang. Rosenfeld (1971) mengembangkan teori grup fuzzy, suatu fungsi yang memetakan grup ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang berada pada interval tertutup [0,1]. Berdasarkan penelitian Rosenfeld, maka Nagarajan dan Solairaju (2010) mengembangkannya dengan sifat-sifat pada grup fuzzy dan menggunakan bilangan fuzzy-L, yaitu tentang *Structure on Fuzzy Groups and L-Fuzzy Number*. Berdasarkan penelitian Nagarajan dan Solairaju, selanjutnya Subramanian, dkk. (2012) mengembangkan penelitian tersebut dengan domain yang berbeda yaitu berupa grup-M, dimana fungsinya memetakan grup-M ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang berada pada interval tertutup [0,1]. Adapun judul penelitiannya adalah *Structure Properties of M-Fuzzy Groups*.

Pada skripsi ini akan dikaji sifat-sifat struktur grup-M fuzzy dari penelitian Subramanian, dkk. (2012). Bagian awal kajian akan dimulai dengan mendeskripsikan definisi dari grup-M dan grup-M fuzzy beserta contoh-contohnya. Selanjutnya, sifat-sifat struktur grup-M fuzzy disajikan dalam bentuk teorema yang kemudian dikaji dengan pembuktian teorema dan disertai deskripsi contohnya. Dari hasil kajian yang dilakukan diperoleh empat bentuk sifat yang memenuhi syarat-syarat grup-M fuzzy, yaitu bentuk subgrup-M fuzzy, perpangkatan grup-M fuzzy, gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy, dan irisan dari perpangkatan grup-M fuzzy.

ABSTRACT

Lestari, Irma Yuni. 2013. **Study Structure Properties of M-Fuzzy Groups**. Thesis. Mathematics Department Science and Technology Faculty State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Supervisor: I. Drs. H. Turmudi, M.Si.
II. Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Fuzzy Set, M-Groups, M-Fuzzy Groups.

Along with the times, the theory of groups and fuzzy sets were developed. Rosenfeld (1971) developed a fuzzy groups theory, that is a function maps groups to degree of membership on close interval [0,1]. Based on research Rosenfeld, then Nagarajan and Solairaju (2010) develop it with the properties of fuzzy groups and using L-fuzzy number, that is about *Structure on Fuzzy Groups and L-Fuzzy Number*. Based on research Nagarajan and Solairaju, then Subramanian, et al. (2012) developed it with different domain, that is M-groups where it function maps M-groups to degree of membership on close interval [0,1]. The title of his research is *Structure Properties of M-Fuzzy Groups*.

In this thesis will be studied structure properties of M-fuzzy group of research Subramanian, et al. (2012). The early part of the study will begun by describing the definition of M-groups and M-fuzzy groups and their example. Then the properties of M-fuzzy groups are presented by the form of theorems and then examined by proving theorems and will be given examples every theorems. From the results obtained, there are five forms properties that complete conditions of M-fuzzy groups. The properties are form of M-fuzzy subgroups, the powers of M-fuzzy groups, union of the powers of M-fuzzy groups, and section of the power of M-fuzzy groups.

ملخص

لستاري، إيرما يوني. ٢٠١٣. **دراسة عن أوصاف التركيب فرقة-M "فوزى"**. رسالة البحث. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشريف: (١) دكتورأندوس الحج ترمدي الماجستير
(٢) فخرالرازي الماجستير

كلمات البحث: مجموعة فوزى ، فرقة-M، فرقة-M فوزى.

جانبا إلى جنب مع الزمن، نظرية فرقة ومجموعة فوزى متنامية. وضعت روزنفيلد (١٩٧١) نظرية فرقة فوزى أن يبحث عمل يخيط الفرقة إلى فاصلة مستترة [١،٠]. بناء على أبحاث روزنفيلد، ثم ناغاراجان وسولائيرجو (٢٠١٠) تطويره بخصائص من فرقة فوزى واستعمال عدد الضبابي-L. موضوع من بحثه هو التركيب فرقة فوزى وعدد الضبابي-L. بناء على أبحاث ناغاراجان وسولائيرجو، ثم سوبرامانيان وأصدقائه (٢٠١٢) تطويره بمجال مختلف هو فرقة-M حيث عمل يخيط فرقة-M إلى فاصلة مستترة [١،٠]. موضوع من بحثه هو أوصاف التركيب فرقة-M فوزى.

في هذا رسالة البحث سيدرس أوصاف التركيب فرقة-M فوزى من البحوث سوبرامانيان وأصدقائه (٢٠١٢). الجزء الأول من الدراسة تبدأ بوصف تعريف فرقة-M وفرقة-M فوزى وأمثلتهم. ثم أوصافها سيبحث في شكل نظريات ودراستها تثبت النظريات ويرافقها الأمثلة. هذاالبحث يحصل أربعة أوصاف من فرقة-M فوزي التي قد ثبت بشكل فرقة-M فوزي. أشكال من أوصافها هم فرقة-M فوزي جزئيا و رتبة من فرقة-M فوزى و انظمام من رتبة فرقة-M فوزى وقدة من رتبة فرقة-M فوزى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Himpunan merupakan sekumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan baik. Himpunan dapat mewakili sekelompok manusia tertentu, kumpulan data, kumpulan sifat-sifat tertentu dan lainnya. Himpunan beserta operasi-operasinya dapat membantu menggambarkan bermacam-macam situasi dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan himpunan dalam matematika sudah dimulai sejak akhir abad 19. Orang pertama yang membuat konsep himpunan adalah seorang ahli matematika bangsa Jerman bernama George Cantor. Konsep himpunan yang dikenalkan olehnya biasa disebut dengan himpunan klasik. Pada himpunan klasik, kententuan anggotanya, hanya mengenal anggota dan bukan anggota. Konsep himpunan yang seperti itu dianggap terlalu kaku untuk mendeskripsikan realita kehidupan dunia yang sangat kompleks.

Untuk itulah Lotfi Asker Zadeh, seorang guru besar pada *University of California*, Berkeley, Amerika Serikat mengembangkan konsep himpunan baru yang lebih fleksibel dengan menggunakan derajat keanggotaan yang akan mampu menyelesaikan berbagai permasalahan di dunia, yaitu tentang himpunan fuzzy (himpunan kabur). Konsep himpunan tersebut dikembangkan dengan menggunakan konsep logika fuzzy. Oleh karena itu dalam himpunan fuzzy, Zadeh mendefinisikannya dengan menggunakan fungsi keanggotaan yang nilainya berada di dalam interval tertutup yaitu [0,1] (Susilo, 2006:5).

Selain himpunan fuzzy, dalam matematika juga dikenal konsep grup. Adapun definisi grup adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi sifat-sifat asosiatif, mempunyai identitas, dan mempunyai invers dalam grup tersebut. Misal $*$ adalah operasi elemen-elemen pada himpunan S maka disebut biner jika $S \times S \rightarrow S$ dimana untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $(a * b) \in S$ atau dapat dikatakan bahwa operasi $*$ bersifat tertutup di S.

Dalam perkembangannya, muncul istilah grup dengan operator. Konsep grup dengan operator pertama kali dipertimbangkan oleh Krull dan Emmy Noether. Jika diberikan $(\mathrm{M}, \bullet)$ himpunan tak kosong dan $(G, *)$ grup maka yang dikatakan sebagai grup dengan operator adalah fungsi yang memetakan himpunan pasangan terurut $G \times \mathrm{M}$ ke G sehingga jika $a \bullet m$ menunjukkan elemen di G dengan $a \in G$ dan $m \in \mathrm{M}$ maka untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $(a * b) \bullet m = (a \bullet m) * (b \bullet m)$, artinya operasi $\bullet$ di M bersifat distributif kanan terhadap operasi $*$ di G (Jacobson, 1951:128). Dengan kata lain, dalam grup dengan operator dapat dikatakan bahwa himpunan M beraksi dari kanan di G.

Dalam Jacobson (1951:130) disebutkan bahwa jika himpunan M juga beraksi dari kiri di G atau memenuhi aksi keduanya (beraksi dari kanan dan kiri) maka G dapat dikatakan sebagai grup dengan operator himpunan $(\mathrm{M}, \bullet)$ atau grup-M dengan definisi yang mengacu pada grup dengan operator. Jadi pada grup-M, himpunan M beraksi dari kanan, kiri, atau kedua-duanya di G. Dengan kata lain, grup-M merupakan grup dengan operator yang himpunan M di dalamnya juga dapat beraksi dari kiri atau kedua-duanya.

Seiring perkembangan zaman, penggunaan grup dan himpunan fuzzy juga semakin berkembang. Para peneliti terdahulu telah melakukan penelitian tentang penggabungan antara grup dengan himpunan fuzzy, sehingga Rosenfeld (1971) berhasil mengembangkan teori grup fuzzy, suatu fungsi yang memetakan grup ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang terletak pada interval tertutup [0,1] dengan syarat-syarat tertentu. Berdasarkan penelitian Rosenfeld, maka Nagarajan dan Solairaju (2010) mengembangkan grup fuzzy melalui sifat-sifatnya dan menggunakan bilangan fuzzy-L, yaitu tentang *Structure on Fuzzy Groups and L-Fuzzy Number*.

Selanjutnya, berdasarkan penelitian Nagarajan dan Solairaju, maka Subramanian, dkk. (2012) mengembangkan penelitian tersebut dengan domain fungsi yang berbeda yaitu berupa grup-M, dimana fungsinya memetakan grup-M ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang terletak pada interval tertutup [0,1] dengan syarat-syarat tertentu serta menyelediki sifat-sifatnya yaitu tentang *Structure Properties of M-Fuzzy Groups*. Penelitian serupa tentang fungsi yang memetakan grup-M ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang terletak pada interval tertutup [0,1] juga telah dilakukan oleh Zhan dan Than (2004) tentang *Intuitionistic M-Fuzzy Groups* serta Sundararajan dan Muthuraj (2011) tentang *Anti M-Fuzzy Subgroup and its Lower Level M-Subgroups*. Penelitian-penelitian yang serupa tersebut hanya memiliki perbedaan syarat terpenuhinya sebagai anggota dengan penelitian yang dilakukan Subramanian, dkk. (2012).

Islam diturunkan sebagai agama pembawa rahmat dan petunjuk bagi manusia. Segala petunjuk Islam yang membawa kebenaran telah termuat dalam kitab suci Al-Qur’an. Al-Qur’an merupakan wahyu Allah yang berisi tentang berbagai hal yang menyangkut masa lalu dan masa yang akan datang, baik dalam urusan ibadah, hukum, dan lain sebagainya. Selain itu, Al-Qur’an juga berisi petunjuk-petunjuk untuk memudahkan manusia dalam mengatasi berbagai permasalahan kehidupan. Allah berfirman dalam Q.S. Al-Insyirah ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٦

Artinya: “*Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.*”(Q.S. Al-Insyirah, 94:6).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa setiap kesulitan yang dialami seseorang pasti mendapatkan kemudahan, termasuk dalam urusan ibadah, takdir dan lain sebagainya. Sehingga dalam hal ini, manusia diwajibkan berfikir (ijtihad) untuk mengatasi suatu permasalahan tanpa harus mengubah dan meninggalkan syariat dan hukum yang berlaku pada masalah tersebut. Menurut tafsir Al-Qurthubi (2009), pengulangan bunyi ayat 5 dalam ayat 6 merupakan penguat terhadap perkataan sebelumnya yang menunjukkan bahwa dalam satu kesulitan terdapat dua kemudahan.

Oleh karena itu, untuk memberikan kemudahan dan tambahan wawasan keilmuan bagi pembaca maka penulis tertarik untuk merepresentasikan penjelasan sifat-sifat struktur grup fuzzy-M dari penelitian yang dilakukan Subramanian, dkk. (2012) melalui teorema-teorema yang berlaku dan diikuti oleh pembuktiannya. Sehingga dalam penelitian ini, penulis mengambil judul “Studi tentang Sifat-sifat Struktur Grup-M Fuzzy”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan judul dan uraian latar belakang di atas, maka masalah yang dapat dirumuskan adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk subgrup-M fuzzy?
2. Apakah perpangkatan dari grup-M fuzzy dapat membentuk grup-M fuzzy?
3. Apakah gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy dapat membentuk grup-M fuzzy?
4. Apakah irisan dari perpangkatan grup-M fuzzy dapat membentuk grup-M fuzzy?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mendeskripsikan bentuk subgrup-M fuzzy.
2. Untuk mendeskripsikan bentuk perpangkatan dari grup-M fuzzy.
3. Untuk mendeskripsikan bentuk gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy.
4. Untuk mendeskripsikan bentuk gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy.

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi permasalahan yang akan dikaji dalam penelitian ini maka representasi sifat-sifat struktur grup-M fuzzy akan dipaparkan dalam bentuk teorema-teorema yang berlaku pada sifat-sifat struktur grup-M fuzzy sebagai berikut:

1. Teorema tentang subgrup-M fuzzy
2. Teorema perpangkatan grup-M fuzzy yang akan dibuktikan bahwa sifat perpangkatan tersebut membentuk grup-M fuzzy.
3. Teorema tentang gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy yang akan dibuktikan bahwa sifat tersebut akan membentuk grup-M fuzzy.
4. Teorema tentang irisan dari perpangkatan grup-M fuzzy yang akan dibuktikan bahwa sifat tersebut akan membentuk grup-M fuzzy.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, di antaranya:

1. Bagi Penulis

   Sebagai bentuk partisipasi penulis dalam memberikan konstribusi terhadap pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang ilmu matematika tentang perkembangan dari grup-M fuzzy.

2. Bagi Lembaga

   Untuk menambah bahan kepustakaan yang dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan matematika khususnya tentang grup-M fuzzy.

3. Bagi Pembaca

   a. Dapat menambah khazanah keilmuan matematika khususnya di bidang aljabar.

   b. Dapat dijadikan sebagai salah satu rujukan dalam melakukan kajian teori grup-M fuzzy.

c. Sebagai motivasi kepada pembaca agar dapat mempelajari dan mengembangkan matematika, khususnya teori grup-M fuzzy.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan grup-M dan grup-M fuzzy
2. Merepresentasikan sifat-sifat struktur grup-M fuzzy melalui teorema-teorema yang berlaku yang meliputi:
   a. Teorema subgrup-M fuzzy
   b. Teorema perpangkatan grup-M fuzzy
   c. Teorema gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy
   d. Teorema irisan dari perpangkatan grup-M fuzzy
3. Melakukan pembuktian teorema-teorema yang berlaku pada sifat-sifat struktur grup-M fuzzy serta mengkajinya.
4. Memberikan contoh pada setiap definisi dan teorema yang berlaku serta mendeskripsikannya.
5. Membuat kesimpulan dari pembahasan penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari beberapa subbab yang dirinci sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab kajian pustaka berisi konsep-konsep atau dasar-dasar teori yang mendukung bagian pembahasan yaitu grup, sifat-sifat grup, logika fuzzy, himpunan fuzzy, fungsi keanggotaan himpunan fuzzy, operasi pada himpunan fuzzy, grup fuzzy, dan kajian Islam mengenai grup.

Bab III Pembahasan

Bab pembahasan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab penutup memaparkan kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

Grup merupakan salah satu pokok bahasan yang terdapat dalam matematika aljabar. Grup membahas tentang himpunan tak kosong yang dikenai operasi biner dan memenuhi aksioma asosiatif, mempunyai identitas terhadap operasi biner, dan mempunyai invers. Jadi sebelum membahas lebih jauh tentang grup, maka perlu diketahui terlebih dahulu pembahasan mengenai operasi biner. Dummit dan Foote (2004:17) mendefinisikan operasi biner sebagai berikut:

Definisi 1:

Diketahui G himpunan tak kosong maka $*$ dapat dikatakan sebagai operasi biner pada G jika $*$ pada G merupakan sebuah fungsi $*: G \times G \to G$ dan untuk $*(a,b)$ berlaku $a*b$, untuk setiap $a,b \in G$. Kemudian jika $a*(b*c)=(a*b)*c$, untuk setiap $a,b,c \in G$ maka operasi biner $*$ pada G dikatakan asosiatif. Adapun jika $a*b=b*a$, untuk setiap $a,b \in G$ maka operasi biner $*$ pada G akan dikatakan komutatif.

Contoh 2.1:

1. Operasi penjumlahan (+) dan perkalian (×) merupakan operasi biner yang komutatif pada himpunan bilangan bulat $(\mathbb{Z})$, himpunan bilangan rasional $(\mathbb{Q})$, himpunan bilangan real $(\mathbb{R})$, maupun pada himpunan bilangan kompleks $(\mathbb{C})$.

2. Operasi pengurangan $(-)$ merupakan operasi biner yang tidak komutatif pada himpunan bilangan bulat $(\mathbb{Z})$ karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ pada saat $a \neq b$ berlaku $a - b \neq b - a$.
3. Operasi pengurangan $(-)$ merupakan operasi yang tidak biner di $\mathbb{Z}^+$ karena jika $a < b$ maka $a - b \notin \mathbb{Z}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, artinya $-$ merupakan fungsi yang tidak memetakan $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ ke $\mathbb{Z}^+$. (Dummit& Foote, 2004:17).

Adapun definisi dari grup maka Raisinghania dan Aggarwal (1980:31) mendefinisikannya sebagai berikut:

Definisi 2:

Diberikan struktur aljabar $(G,*)$ dimana G merupakan sebuah himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada G, maka himpunan G disebut grup terhadap operasi $*$ jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Operasi $*$ bersifat asosiatif di G

   Operasi $*$ dikatakan bersifat asosiatif di G jika dan hanya jika untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. G mempunyai elemen identitas terhadap operasi $*$

   G dikatakan mempunyai elemen identitas terhadap operasi $*$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, e \in G$ dan e merupakan identitas di G berlaku $e * a = a * e = a$.
3. Setiap elemen di G mempunyai invers

   Setiap elemen di G dikatakan mempunyai invers jika dan hanya jika untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ dimana a^{-1} merupakan invers dari a

sehingga berlaku $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$, dengan e merupakan elemen identitas di G.

Jika setelah memenuhi keempat aksioma tersebut kemudian operasi $*$ juga komutatif di G artinya untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ maka $(G, *)$ disebut grup abelian atau grup yang komutatif.

Contoh 2.2:

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap operasi + karena:

1. Operasi + memenuhi syarat operasi biner di $\mathbb{Z}$ karena + merupakan fungsi yang memetakan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ artinya jika $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$ atau bersifat tertutup.
2. Operasi + bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$, karena untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. $\mathbb{Z}$ mempunyai elemen identitas pada operasi + yaitu 0, karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $0 + a = a + 0 = a$.
4. Setiap elemen di $\mathbb{Z}$ mempunyai invers yaitu $-a$ dimana $-a \in \mathbb{Z}$ karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $-a + a = a + -a = 0$.

2.2 Sifat-Sifat Grup

Dalam Dummit dan Foote (2004:19-21) sifat-sifat dari grup terangkum dalam proposisi-proposisi berikut:

Proposisi 1:

Jika diberikan $(G, *)$ adalah grup maka:

1) Elemen identitas di G tunggal.

2) Setiap elemen di G mempunyai invers yang tunggal artinya untuk setiap $a \in G,$ maka a^{-1} tunggal.

3) Untuk setiap $a \in G,$ maka $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a.$

4) Untuk setiap $a, b \in G,$ maka $\left(a * b\right)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$

Bukti:

1) Misalkan g dan h adalah elemen identitas di G dan andaikan $g \neq h$ maka:

(i) $h * g = g * h = g$, jika h sebagai elemen identitas.

(ii) $g * h = h * g = h$, jika g sebagai elemen identitas.

Karena $h * g$ dan $g * h$ adalah elemen tunggal pada G maka dari (i) dan (ii) berakibat $h = g$. Oleh karenanya pernyataan tersebut kontradiksi dengan pengandaian yang telah diberikan sehingga elemen identitas di G adalah tunggal.

2) Misalkan $a \in G,$ andaikan a^{-1} dan $b^{-1} \in G$ merupakan invers dari a dengan $a^{-1} \neq b^{-1}$ artinya elemen di G tidak mempunyai invers yang tunggal maka untuk setiap $a \in G$ berlaku:

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, dimana e adalah elemen identitas di G

$a * b^{-1} = b^{-1} * a = e$, dimana e adalah elemen identitas di G

Kemudian,

$$a^{-1} = a^{-1} * e \quad (e \text{ identitas di } G)$$

$$= a^{-1} * \left(a * b^{-1}\right) \quad (\text{karena } e = a * b^{-1})$$

$$= \left(a^{-1} * a\right) * b^{-1} \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$= e * b^{-1} \quad (\text{karena } e = a * b^{-1})$$

$$= b^{-1}$$

Jadi diperoleh $a^{-1} = b^{-1}$, maka pernyataan ini kontradiksi dengan pengandaian yang diberikan sehingga setiap elemen di G mempunyai invers yang tunggal.

3) Misalkan $a \in G$ maka invers dari a atau dapat ditulis $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, dengan e adalah elemen identitas di G. Untuk membuktikan bahwa $(a^{-1})^{-1} = a$ maka digunakan sifat invers pada grup sebagai awal dimulai pembuktian berikut:

Bukti (i)

$$a * a^{-1} = e$$

Kemudian sebelah kanan kedua ruas dioperasikan dengan $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ sehingga:

$$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e * (a^{-1})^{-1}$$

$$a * (a^{-1} * (a^{-1})^{-1}) = e * (a^{-1})^{-1} \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$a * (a^{-1} * (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \quad (\text{sifat identitas})$$

$$a * e = (a^{-1})^{-1} \quad (\text{sifat invers})$$

$$a = (a^{-1})^{-1} \quad (\text{sifat identitas})$$

Bukti (ii)

$$a^{-1} * a = e$$

Kemudian sebelah kiri kedua ruas dioperasikan dengan $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ sehingga:

$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * e$

$((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a = (a^{-1})^{-1} * e$ (sifat asosiatif)

$((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a = (a^{-1})^{-1}$ (sifat identitas)

$e * a = (a^{-1})^{-1}$ (sifat invers)

$a = (a^{-1})^{-1}$ (sifat identitas)

Dari bukti (i) dan (ii) yang telah dilakukan maka terbukti bahwa $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

4) Misalkan $c = \left(a^{-1} * b^{-1}\right)$ maka sesuai sifat invers berlaku $(a * b) * c = e$, dengan e merupakan elemen identitas di G. Karena sifat asosiatif yang berlaku di G maka berlaku $a * (b * c) = e$. Kemudian pada sebelah kiri kedua ruas dioperasikan dengan a^{-1} sehingga:

$a^{-1} * (a * (b * c)) = a^{-1} * e$

$(a^{-1} * a) * (b * c) = a^{-1} * e$ (sifat asosiatif)

$e * b * c = a^{-1} * e$ (sifat invers)

$b * c = a^{-1}$ (sifat identitas)

Selanjutnya, sebelah kiri kedua ruas dioperasikan dengan b^{-1}, sehingga:

$b^{-1} * (b * c) = b^{-1} * a^{-1}$

$(b^{-1} * b) * c = b^{-1} * a^{-1}$ (sifat asosiatif)

$e * c = b^{-1} * a^{-1}$ (sifat invers)

$c = b^{-1} * a^{-1}$ (sifat identitas)

Karena dari permisalan awal yang diberikan adalah $c=(a*b)^{-1}$ maka $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

Proposisi 2:

Misalkan $(G,*)$ grup dan $a,b\in G$, maka persamaan $a*x=b$ dan $y*a=b$ mempunyai solusi tunggal untuk setiap $x,y\in G$. Secara khusus, maka dapat dikatakan bahwa kanselasi kiri dan kanan berlaku di G, artinya:

1) Jika $a*u=a*v,$ maka $u=v$, yang disebut dengan kanselasi kiri.

2) Jika $u*b=v*b,$ maka $u=v$, yang disebut dengan kanselasi kanan.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa persamaan $a*x=b$ dan $y*a=b$ mempunyai solusi tunggal untuk setiap $x,y\in G$ maka sebelah kiri kedua ruas pada persamaan $a*x=b$ dioperasikan dengan invers dari a yaitu $a^{-1}\in G$ sehingga:

$$a^{-1}*(a*x)=a^{-1}*b$$

$$(a^{-1}*a)*x=a^{-1}*b \qquad \text{(sifat asosiatif)}$$

$$e*x=a^{-1}*b \qquad \text{(sifat invers)}$$

$$x=a^{-1}*b \qquad \text{(sifat identitas)}$$

Jadi diperoleh solusi tunggal di x karena berdasarkan proposisi 1 invers dari a yaitu $a^{-1}\in G$ adalah tunggal. Kemudian sebelah kanan kedua ruas pada persamaan $y*a=b$ dioperasikan dengan invers dari a yaitu $a^{-1}\in G$ sehingga:

$$(y*a)*a^{-1}=b*a^{-1}$$

$$y*(a^{-1}*a)=b*a^{-1} \quad \text{(sifat asosiatif)}$$

$$y*e=b*a^{-1} \quad \text{(sifat invers)}$$

$$y=b*a^{-1} \quad \text{(sifat identitas)}$$

Jadi diperoleh solusi tunggal di y karena berdasarkan proposisi 1 invers dari a yaitu $a^{-1} \in G$ adalah tunggal.

Adapun bukti dari pernyataan 1) adalah sebagai berikut:

Misalkan $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ dimana a mempunyai invers yaitu a^{-1} di G. Kemudian sebelah kiri kedua ruas pada persamaan $a*u=a*v$ dioperasikan dengan a^{-1} sehingga:

$$a^{-1}*(a*u)=a^{-1}*(a*v)$$

$$(a^{-1}*a)*u=(a^{-1}*a)*v \quad \text{(sifat asosiatif)}$$

$$e*u=e*v \quad \text{(sifat invers)}$$

$$u=v \quad \text{(sifat identitas)}$$

Jadi terbukti bahwa jika $a*u=a*v$, maka $u=v$ sehingga hukum kanselasi kiri berlaku pada grup.

Adapun bukti dari pernyataan 2) adalah sebagai berikut:

Misalkan $b \in G$ maka $b^{-1} \in G$ dimana b mempunyai invers yaitu b^{-1} di G. Kemudian sebelah kanan kedua ruas pada persamaan $u*b=v*b$ dioperasikan dengan b^{-1} sehingga:

$$(u*b)*b^{-1}=(v*b)*b^{-1}$$

$$u*(b*b^{-1})=v*(b*b^{-1}) \quad \text{(sifat asosiatif)}$$

$u*e = v*e$ (sifat invers)

$u = v$ (sifat identitas)

Jadi terbukti bahwa jika $u*b = v*b$, maka $u = v$ sehingga hukum kanselasi kanan berlaku pada grup.

2.3 Logika Fuzzy

Dalam kamus *Oxford*, istilah fuzzy didefinisikan sebagai *blurred* (kabur atau remang-remang), *indistinct* (tidak jelas), *imprecisely defined* (didefinisikan secara tidak presisi), *confused* (membingungkan), *vague* (tidak jelas). Namun penggunaan istilah "sistem fuzzy" tidak diartikan sebagai sebuah sistem yang tidak jelas/kabur/remang-remang definisinya, cara kerjanya, atau deskripsinya. Sebaliknya, yang dimaksud dengan sistem fuzzy adalah sebuah sistem yang dibangun dengan definisi, cara kerja, dan deskripsi yang jelas berdasarkan pada teori fuzzy *logic* (Naba, 2009:1).

Logika fuzzy merupakan sebuah logika yang memiliki nilai kebenaran atau kesamaan (*fuzzyness*) antara benar dan salah. Dalam teori logika fuzzy sebuah nilai bisa bernilai benar dan salah secara bersamaan namun berapa besar kebenaran dan kesalahan suatu nilai tergantung kepada bobot keanggotaan yang dimilikinya. Dalam sumber lain dijelaskan bahwa Istilah logika fuzzy saat ini digunakan dalam dua pengertian yang berbeda. Dalam pengertian sempit, logika fuzzy adalah suatu sistem logis pada suatu informasi logis yang bertujuan pada suatu formalisasi dari taksiran pemikiran. Dalam pengertian luas, logika fuzzy adalah hampir sinonim dengan teori himpunan fuzzy. Teori himpunan fuzzy pada dasarnya suatu teori dari pengelompokan dengan batas-batas yang tidak tajam. Teori himpunan fuzzy lebih luas dibandingkan dengan logika fuzzy dalam arti sempit dan memiliki cabang lebih dari satu. Diantara cabang-cabang tersebut adalah aritmetika fuzzy, topologi fuzzy, teori grafik fuzzy, dan analisis data fuzzy (Munawaroh, 2007:26).

Logika fuzzy adalah suatu cara yang tepat untuk memetakan suatu ruang input ke dalam suatu ruang output (Kusumadewi, dkk., 2002:2). Sebagai contoh diberikan sebagai berikut:

1. Pelayan restoran memberikan pelayanan terhadap tamu, kemudian tamu akan memberikan tips yang sesuai atas baik tidaknya pelayanan yang diberikan.
2. Penumpang taksi berkata pada sopir taksi seberapa cepat laju kendaraan yang diinginkan, sopir taksi akan mengatur pijakan gas taksinya.

Ada beberapa alasan mengapa orang menggunakan logika fuzzy, diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Konsep logika fuzzy mudah untuk dimengerti.
2. Logika fuzzy sangat fleksibel.
3. Logika fuzzy memiliki toleransi terhadap data-data yang tidak tepat.
4. Logika fuzzy mampu memodelkan fungsi-fungsi nonlinier yang sangat kompleks.
5. Logika fuzzy dapat membangun dan mengaplikasikan pengalaman-pengalaman para pakar secara langsung tanpa harus melalui proses pelatihan.
6. Logika fuzzy dapat bekerjasama dengan teknik-teknik kendali secara konvensional.

7. Logika fuzzy didasarkan pada bahasa alami. (Naba, 2009:3).

2.4 Konsep Dasar Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy merupakan nama lain dari himpunan kabur yakni bahasa yang diciptakan oleh Lotfi Asker Zadeh, seorang guru besar di *University of California*, Berkeley, Amerika Serikat. Sejak tahun 1960, Zadeh telah merasa bahwa sistem analisis matematik tradisional yang dikenal sampai saat itu bersifat terlalu eksak sehingga tidak dapat berfungsi dalam banyak masalah dunia nyata yang seringkali amat kompleks (Susilo, 2006:4).

Pada himpunan klasik, keberadaan suatu elemen x dalam suatu himpunan A, hanya memiliki dua kemungkinan keanggotaan, yaitu x menjadi anggota A atau x tidak menjadi anggota A. Suatu nilai yang menunjukkan besarnya tingkat keanggotaan suatu elemen x dalam suatu himpunan A biasa disebut dengan nilai keanggotaan, yang biasa ditulis dengan $\mu_A(x)$. Pada himpunan klasik, nilai keanggotaan hanya memasangkan nilai 0 atau 1 untuk unsur-unsur pada semesta pembicaraan, yang menyatakan anggota atau bukan anggota. Jika X adalah himpunan semesta, maka nilai keanggotaan untuk himpunan A adalah fungsi $\mu_A: X \to \{0,1\}$ dengan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

(Klir & Yuan, 1995:6).

$\mu_A(x)$ dalam himpunan klasik biasa disebut dengan fungsi karakteristik. Dengan memperluas konsep fungsi karakteristik tersebut Zadeh mendefinisikan himpunan fuzzy dengan menggunakan fungsi keanggotaan yang nilainya berada dalam interval tertutup [0,1]. Jadi dengan begitu keanggotaan dalam himpunan fuzzy tidak lagi merupakan sesuatu yang tegas (Susilo, 2006:5). Adapun definisi dari himpunan fuzzy, maka dalam Kusumadewi, dkk. (2002:17) didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3:

Jika X adalah koleksi dari obyek-obyek yang dinotasikan secara generik oleh x, maka suatu himpunan fuzzy A dalam X adalah himpunan pasangan berurutan:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

dengan $\mu_A(x)$ adalah derajat keanggotan $x \in X$ yang memetakan X ke ruang keanggotaan yang terletak pada interval [0,1], yaitu $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$.

Nilai fungsi sama dengan 1 menyatakan keanggotaan penuh, dan nilai fungsi sama dengan 0 menyatakan sama sekali bukan anggota himpunan fuzzy itu. Maka himpunan klasik juga dapat dikatakan sebagai kejadian khusus dari himpunan fuzzy, yaitu himpunan fuzzy yang fungsi keanggotaannya hanya bernilai 0 atau 1 saja (Susilo, 2006:50). Apabila semesta X adalah adalah himpunan yang kontinu, maka himpunan fuzzy A seringkali dinyatakan dengan:

$$A = \int_{x \in X} \mu_A(x) / x$$

dimana lambang $\int$ bukan lambang integral seperti yang dikenal dalam kalkulus, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan kabur A. Adapun jika semesta X adalah himpunan yang diskrit maka himpunan fuzzy A seringkali dinyatakan dengan:

$$V = \sum_{x \in X} \mu_A(x) / x$$

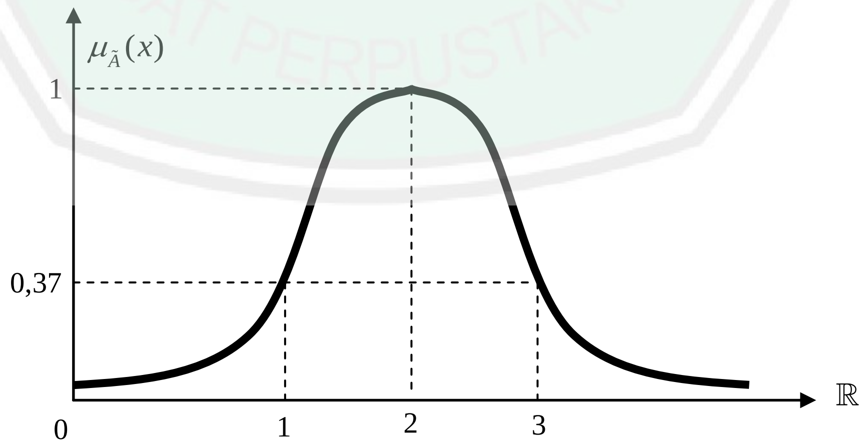
dimana lambang $\sum$ bukan lambang operasi jumlahan seperti yang dikenal dalam aritmatika, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan fuzzy A (Susilo, 2006:51).

Contoh 2.3:

Misalkan $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real adalah semesta himpunan dan A adalah himpunan "bilangan real yang dekat dengan 2", maka himpunan fuzzy A tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$A = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-(\pi-2)^2} / x$$

dimana $\mu_A(x) = e^{-(x-2)^2}$ adalah fungsi keanggotaan A yang dapat digambarkan dalam bentuk grafik berikut:



Gambar 2.1 Grafik Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy "Bilangan Real yang Dekat dengan 2" (Susilo, 2006:56).

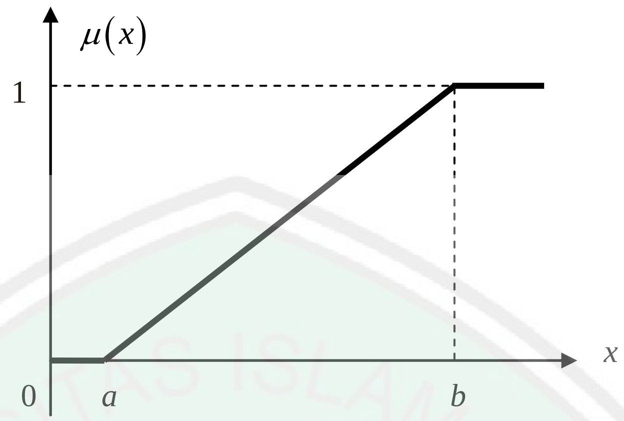
2.5 Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy

Setiap himpunan fuzzy dapat dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan. Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan fuzzy dengan fungsi keanggotaannya. Untuk semesta hingga diskrit biasanya dipakai cara daftar, yaitu daftar anggota-anggota semesta bersama dengan derajat keanggotaannya. Adapun untuk semesta takhingga yang kontinu, cara yang paling sering digunakan adalah cara analitik untuk merepresentasikan fungsi keanggotaan himpunan fuzzy yang bersangkutan dalam bentuk suatu formula matematis yang dapat disajikan dalam bentuk grafik (Susilo, 2006:55).

Fungsi keanggotaan adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah dengan melalui pendekatan fungsi. Dalam Kusumadewi, dkk. (2006) dikatakan bahwa beberapa fungsi keanggotaan himpunan fuzzy yang biasa digunakan adalah sebagai berikut:

A. Representasi Linier

Pada representasi linier, pemetaan input ke derajat keanggotaannya digambarkan sebagai suatu garis lurus. Bentuk ini paling sederhana dan menjadi pilihan yang baik untuk mendekati suatu konsep yang kurang jelas. Ada dua keadaan himpunan fuzzy yang linier. Pertama, kenaikan himpunan dimulai pada nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan 0 bergerak ke kanan menuju ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih tinggi yang dapat digambarkan dalam grafik berikut:

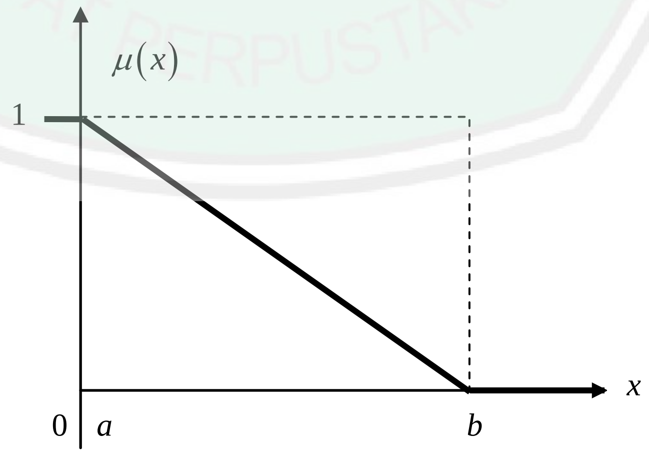


Gambar 2.2 Representasi Linier Naik

Adapun fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{untuk } a \le x \le b \\ 1 & \text{untuk } x \ge b \end{cases}$$

Kedua, merupakan kebalikan yang pertama. Garis lurus dimulai dari nilai domain dengan derajat keanggotaan tertinggi pada sisi kiri, kemudian bergerak menurun ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih rendah yang dapat digambarkan dalam grafik berikut:



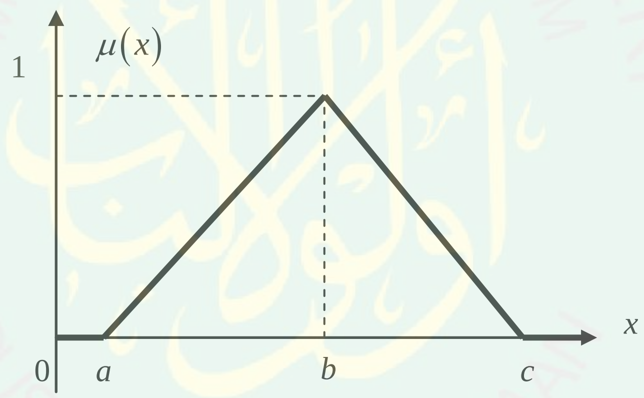
Gambar 2.3 Representasi Linier Turun

Adapun fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \geq b \\ \dfrac{b-x}{b-a} & \text{untuk } a \leq x \leq b \end{cases}$$

B. Representasi Kurva Segitiga

Kurva segitiga pada dasarnya merupakan gabungan antara 2 garis (linear) serta ditandai oleh adanya tiga parameter $\{a,b,c\}$ yang akan menentukan koordinat x dari tiga sudut. Bentuk kurva segitiga dapat digambarkan sebagai berikut:



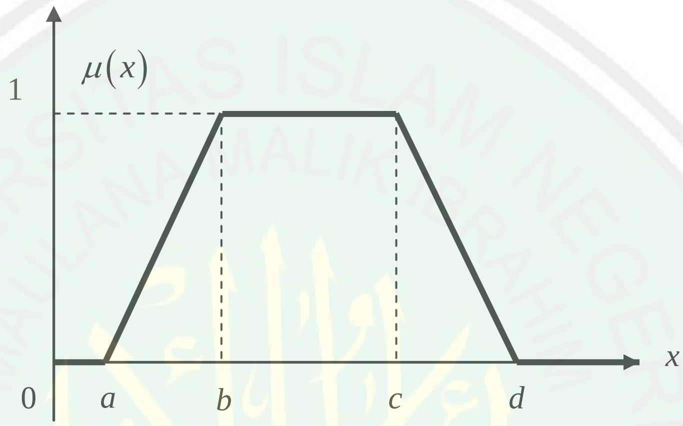
Gambar 2.4 Kurva Segitiga

Adapun fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{untuk } b \leq x \leq c \end{cases}$$

C. Representasi Kurva Trapesium

Kurva trapesium pada dasarnya seperti bentuk segitiga, tetapi ada beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan 1. Bentuk kurva trapesium dapat digambarkan sebagai berikut:



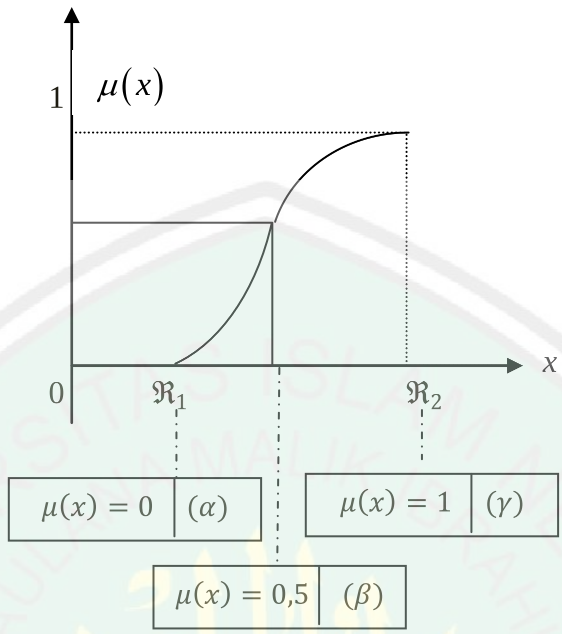
Gambar 2.5 Kurva Trapesium

Adapun fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \le a \text{ atau } x \ge d \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{untuk } a \le x \le b \\ 1 & \text{untuk } b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & \text{untuk } c \le x \le d \end{cases}$$

D. Representasi Kurva-S

Kurva pertumbuhan dan penyusutan merupakan kurva-S atau *sigmoid* yang berhubungan dengan kenaikan dan penurunan permukaan secara tak linear. Kurva-S didefinisikan dengan menggunakan tiga parameter, yaitu: nilai keanggotaan nol (α), nilai keanggotaan lengkap (γ), dan titik infleksi atau *crossover* (β) yaitu titik yang memiliki domain 50% benar. Bentuk kurva-S dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.6 Karakteristik fungsi kurva-S

Untuk fungsi keanggotaan pada kurva pertumbuhan adalah sebagai berikut:

$$S(x;\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} 0 & \text{untuk } x \le \alpha \\ 2\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{untuk } \alpha \le x \le \beta \\ 1-2\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{untuk } \beta \le x \le \gamma \\ 1 & \text{untuk } x \ge \gamma \end{cases}$$

Adapun fungsi keanggotaan pada kurva penyusutan adalah sebagai berikut:

$$S(x;\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} 1 & \text{untuk } x \le \alpha \\ 1-2\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{untuk } \alpha \le x \le \beta \\ 2\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{untuk } \beta \le x \le \gamma \\ 0 & \text{untuk } x \ge \gamma \end{cases}$$

E. Representasi Kurva Bentuk Lonceng

Untuk mempresentasikan bilangan fuzzy, biasanya digunakan kurva berbentuk lonceng. Kurva berbentuk lonceng ini terbagi atas 3 kelas, yaitu: himpunan fuzzy phi, beta, dan gauss. Perbedaan kurva ini terletak pada gradiennya.

a) Kurva Phi (π)

Kurva π berbentuk lonceng dengan derajat keanggotaan 1 terletak pada pusat dengan domain (γ), dan lebar kurva (β). Adapun fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut:

$$\Pi(x,\beta,\gamma)=\begin{cases} S\left(x;\gamma-\beta,\gamma-\dfrac{\beta}{2},\gamma\right) & \text{untuk } x\le\gamma \\ 1-S\left(x;\gamma,\gamma+\dfrac{\beta}{2},\gamma+\beta\right) & \text{untuk } x>\gamma \end{cases}$$

b) Kurva Beta (β)

Kurva beta (β) berbentuk lonceng namun lebih rapat. Kurva ini juga didefinisikan dengan 2 parameter, yaitu nilai pada domain yang menunjukkan pusat kurva (γ), dan setengah lebar kurva (β). Adapun fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut:

$$B(x;\gamma,\beta)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-\gamma}{\beta}\right)^2}$$

c) Kurva Gauss (γ)

Jika kurva phi (π) dan kurva (β) menggunakan 2 parameter yaitu (γ) dan (β), Kurva gauss menggunakan (γ) untuk menunjukkan nilai domain pada pusat kurva, dan (k) yang menunjukkan lebar kurva. Adapun fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut:

$$G(x: k, \gamma) = e^{-k(\gamma - x)^2}$$

2.6 Operasi pada Himpunan Fuzzy

Seperti halnya pada himpunan tegas, himpunan fuzzy juga mempunyai operasi-operasi khusus yaitu operasi *uner* (komplemen) dan operasi *biner* (gabungan dan irisan). Berikut ini definisi dari masing-masing operasi pada himpunan fuzzy:

A. Komplemen

Misal A himpunan fuzzy pada himpunan semesta X dengan fungsi keanggotaan μ_A. Komplemen dari suatu himpunan fuzzy A adalah himpunan fuzzy A' yang memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{A'}$ dengan $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_{A'}(x)$, untuk setiap $x \in X$.

B. Gabungan (*union*)

Misal A dan B adalah himpunan fuzzy pada himpunan semesta X dengan fungsi keanggotaan masing-masing μ_A dan μ_B. Gabungan dua buah himpunan fuzzy A dan B dilambangkan dengan $A \cup B$ yang memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{A\cup B}$ dengan $\mu_{A\cup B}(x) = max\,\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, untuk setiap $x \in X$.

C. Irisan

Misal A dan B adalah himpunan fuzzy dari semesta X dengan fungsi keanggotaan masing-masing μ_A dan μ_B. Irisan dua buah himpunan fuzzy A dan B

dilambangkan dengan $A \cap B$ yang memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{A\cap B}$ dengan $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, untuk setiap $x \in X$. (Susilo, 2006:64-67).

2.7 Grup Fuzzy

Sebagaimana uraian sebelumnya, untuk mengenal grup maka perlu diketahui beberapa hal yang berkaitan dengan pokok pembahasan tersebut. Begitu pula untuk pokok pembahasan grup fuzzy, maka definisi yang mendasari teori grup fuzzy adalah sebagai berikut:

Definisi 4:

Misalkan X adalah himpunan tak kosong sebagai semesta himpunan, maka yang disebut subset fuzzy adalah fungsi yang memetakan X ke interval $[0,1]$. Kemudian himpunan dari semua subset fuzzy dari X dinamakan himpunan *fuzzy power* dari X yang dinotasikan dengan $\mathcal{FP}(X)$ (Moderson, dkk., 2005:1).

Definisi 5:

Misalkan $(G,*)$ grup dan $S \in \mathcal{FP}(G)$, maka S dapat dikatakan sebagai subgrup fuzzy dari G jika memenuhi dua aksioma berikut:

(i) $\mu_S(x*y) \geq \min\{\mu_S(x), \mu_S(y)\}, \forall x, y \in G$

(ii) $\mu_S(x^{-1}) \geq \mu_S(x), \forall x \in G$ (Moderson, dkk., 2005:6).

Definisi 6:

Misalkan A adalah himpunan fuzzy dan $(G,*)$ adalah grup. Kemudian μ_A adalah fungsi yang didefinisikan sebagai $\mu_A : G \to [0,1]$ sehingga untuk setiap $x, y \in G$, A disebut grup fuzzy dari G jika memenuhi dua aksioma berikut:

(i) $\mu_A\left(x * y\right) \geq \min\left\{\mu_A\left(x\right), \mu_A\left(y\right)\right\}$

(ii) $\mu_A\left(x^{-1}\right) = \mu_A\left(x\right)$

Kemudian jika dari definisi grup fuzzy tersebut terdapat tambahan kondisi $\mu_A\left(e_G\right) = 1$ maka grup fuzzy dapat disebut sebagi grup fuzzy standar, dengan e_G merupakan identitas dari grup $(G,*)$ (Subramanian, dkk., 2012:546).

Contoh 2.4:

Diberikan X himpunan bilangan sebagai semesta himpunan, A adalah himpunan fuzzy pada X, dan $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup. Kemudian μ_A didefinisikan sebagai $\mu_A : \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ dengan:

$$\mu_A\left(x\right) = \begin{cases} \alpha & \text{untuk } x \in 2\mathbb{Z} \\ \beta & \text{untuk } x \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

jika $\alpha > \beta$, $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$, maka buktikan bahwa $(A,+)$ adalah grup fuzzy dari $(\mathbb{Z},+)$.

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa $(A,+)$ adalah grup fuzzy dari $(\mathbb{Z},+)$ maka digunakan dua aksioma pada definisi 6 sebagai berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A\left(x+y\right) \geq \min\left\{\mu_A\left(x\right), \mu_A\left(y\right)\right\}$ dengan beberapa kondisi sebagai berikut:

1. Untuk setiap $x, y \in 2\mathbb{Z}$

   Jika untuk setiap $x, y \in 2\mathbb{Z}$ maka berlaku $x + y \in 2\mathbb{Z}$ sehingga:

   (a) $\mu_A(x) = \alpha$

   (b) $\mu_A(y) = \alpha$

   (c) $\mu_A(x+y) = \alpha$

   Jadi $\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$

   Berdasarkan uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(x+y) = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$.

2. Untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$

   Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$, dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku $x + y \in 2\mathbb{Z}+1$, sehingga:

   (a) $\mu_A(x) = \alpha$

   (b) $\mu_A(y) = \beta$

   (c) $\mu_A(x+y) = \beta$

   Jadi $\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} = \min\{\alpha, \beta\} = \beta$

   Berdasarkan uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(x+y) = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$.

3. Untuk setiap $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$

   Jika untuk setiap $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku $x + y \in 2\mathbb{Z}$, sehingga:

   (a) $\mu_A(x) = \beta$

   (b) $\mu_A(y) = \beta$

   (c) $\mu_A(x+y) = \alpha$

   Jadi $\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} = \min\{\beta, \beta\} = \beta$

Berdasarkan uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(x+y) > \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$.

Aksioma (ii)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A(x) = \mu_A(x^{-1})$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$

   Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}$ sehingga $\mu_A(x) = \alpha$ dan $\mu_A(x^{-1}) = \alpha$.

   Jadi pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(x) = \mu_A(x^{-1})$.

2. Untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}+1$

   Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$ sehingga $\mu_A(x) = \beta$ dan $\mu_A(x^{-1}) = \beta$. Jadi pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(x) = \mu_A(x^{-1})$.

Dari beberapa kondisi pada aksioma (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa:

(i) $\mu_A(x+y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$

(ii) $\mu_A(x) = \mu_A(x^{-1})$

Jadi aksioma (i) dan (ii) pada definisi 6 telah terpenuhi sehingga terbukti bahwa $(A,+)$ adalah grup fuzzy pada $(\mathbb{Z},+)$.

2.8 Kajian Islam Mengenai Grup

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah menjadi penjelas dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Banyak konsep matematika yang memperjelas maksud bahkan konsep yang tertera di dalam Al-Qur'an. Salah satu cabang ilmu matematika yang menjadi penjelas dari ayat yang ada dalam Al-Qur'an adalah teori grup.

Misalkan $*$ adalah operasi biner, maka grup $(G, *)$ merupakan himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi tiga aksioma, yaitu asosiatif, mempunyai identitas, dan mempunyai invers. Jadi dapat dikatakan bahwa grup mempunyai tiga syarat, yaitu himpunan tak kosong, operasi biner, dan aksioma-aksioma yang harus dipenuhi agar menjadi suatu grup.

Himpunan merupakan sekumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan baik. Konsep himpunan telah dibahas dalam Al-Qur'an walaupun tidak secara eksplisit. Sebagaimana firman Allah dalam Q.S. Muhammad ayat 12-13 sebagai berikut:

إِنَّ ٱللَّهَ يُدۡخِلُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَعَمِلُواْ ٱلصَّٰلِحَٰتِ جَنَّٰتٖ تَجۡرِي مِن تَحۡتِهَا ٱلۡأَنۡهَٰرُۖ وَٱلَّذِينَ كَفَرُواْ
يَتَمَتَّعُونَ وَيَأۡكُلُونَ كَمَا تَأۡكُلُ ٱلۡأَنۡعَٰمُ وَٱلنَّارُ مَثۡوٗى لَّهُمۡ ١٢ وَكَأَيِّن مِّن قَرۡيَةٍ هِيَ أَشَدُّ قُوَّةٗ مِّن
قَرۡيَتِكَ ٱلَّتِيٓ أَخۡرَجَتۡكَ أَهۡلَكۡنَٰهُمۡ فَلَا نَاصِرَ لَهُمۡ ١٣

Artinya: *Sesungguhnya Allah memasukkan orang-orang mukmin dan beramal saleh ke dalam jannah yang mengalir di bawahnya sungai-sungai. dan orang-orang kafir bersenang-senang (di dunia) dan mereka makan seperti makannya binatang. dan Jahannam adalah tempat tinggal mereka. Dan betapa banyaknya negeri yang (penduduknya) lebih kuat dari pada (penduduk) negerimu (Muhammad) yang telah mengusirmu itu. Kami telah membinasakan mereka, Maka tidak ada seorang penolongpun bagi mereka* (Q.S. Muhammad, 47:12-13).

Dalam ayat 12-13 Q.S. Muhammad tersebut dijelaskan bahwa manusia terbagi menjadi dua golongan, yaitu mukmin dan kafir. Keduanya memiliki sifat yang kontradiktif dan balasan untuk mereka juga bertolak belakang. Orang mukmin diberikan balasan surga, sedangkan orang kafir dimasukkan ke dalam neraka.

Sehingga kedua golongan manusia ini memiliki ciri-ciri yang sangat jelas. Oleh karena itu, dalam ayat tersebut terdapat konsep matematika yaitu kumpulan objek-objek yang mempunyai ciri-ciri sangat jelas. Inilah yang dalam matematika disebut dengan himpunan. Dalam hal ini, berarti himpunan dalam ayat 12-13 Q.S. Muhammad tersebut adalah himpunan orang mukmin dan kafir.

Dalam dunia nyata operasi biner merupakan interaksi-interaksi yang terjadi antara sesama makhluk. Jadi sekalipun makhluk-makhluk tersebut berinteraksi dengan berbagai macam pola akan tetapi berada dalam himpunan tersebut yaitu himpunan ciptaan-Nya. Salah satu makhluk yang akan dijelaskan dalam subbab kali ini adalah orang mukmin. Bentuk interaksi seorang mukmin dapat dilihat dari caranya bersikap dengan mukmin lainnya. Dalam Al-Qur'an sikap-sikap yang dianjurkan untuk dilakukan seorang mukmin salah satunya seperti dalam Q.S. An-Nisa' ayat 86 sebagai berikut:

وَإِذَا حُيِّيتُم بِتَحِيَّةٍ فَحَيُّوا۟ بِأَحْسَنَ مِنْهَآ أَوْ رُدُّوهَآ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ حَسِيبًا ﴿٨٦﴾

Artinya: *Apabila kamu diberi penghormatan dengan sesuatu penghormatan, Maka balaslah penghormatan itu dengan yang lebih baik dari padanya, atau balaslah penghormatan itu (dengan yang serupa). Sesungguhnya Allah memperhitungankan segala sesuatu* (Q.S. An-Nisa', 4:86).

Dalam Q.S. An-Nisa' ayat 86 tersebut mengandung anjuran saling menghormati antar sesamanya. Sikap saling menghormati merupakan salah satu bentuk interaksi yang diperintahkan terhadap seorang mukmin. Bahkan dalam ayat tersebut dianjurkan untuk membalas penghormatan yang diberikan seseorang dengan penghormatan yang lebih baik. Bentuk penghormatan merupakan salah satu bentuk kebaikan, jadi seorang mukmin dianjurkan untuk membalas kebaikan yang diberikan seseorang dengan kebaikan yang lebih baik.

Selain anjuran saling menghormati, maka seorang mukmin juga dianjurkan bersikap lemah lembut dan saling memaafkan antar sesamanya. Anjuran ini sebagaimana dalam Q.S. An-Nisa' ayat 149 sebagai berikut:

إِن تُبْدُواْ خَيْرًا أَوْ تُخْفُوهُ أَوْ تَعْفُواْ عَن سُوٓءٍ فَإِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَفُوًّا قَدِيرًا ﴿١٤٩﴾

Artinya: *Jika kamu melahirkan sesuatu kebaikan atau menyembunyikan atau memaafkan sesuatu kesalahan (orang lain), maka sesungguhnya Allah Maha Pemaaf lagi Maha Kuasa* (Q.S. An-Nisa', 4:149).

Menurut Shihab (2007), ayat ini menekankan bahwa yang dianjurkan adalah jika seseorang menyatakan sesuatu kebaikan sehingga diketahui orang lain, baik dilihat atau didengarnya, atau menyembunyikan kebaikan itu sehingga tidak ada yang mengetahuinya kecuali Allah serta memaafkan kesalahan yang dilakukan orang lain. Sesungguhnya Allah juga akan memaafkan kesalahan yang dilakukan oleh seseoang, karena Dia Maha Pemaaf lagi Maha Kuasa. Jika seseorang melakukan hal yang demikian maka sesungguhnya ia telah meneladani Allah dalam sifat-sifatNya yang sempurna sesuai kemampuannya. Bentuk sikap semacam ini dianjurkan bagi seorang mukmin dalam berinteraksi dengan mukmin lainnya.

Jadi dari uraian yang telah disebutkan maka sikap-sikap yang dianjurkan kepada seorang mukmin dalam berinteraksi kepada sesamanya adalah sikap saling menghormati, lemah lembut, dan saling memaafkan. Jika sikap-sikap tersebut dilakukan dalam berinteraksi sesama mukmin maka seorang mukmin akan tetap dalam golongan orang-orang mukmin. Dalam matematika konsep semacam ini dikenal dengan sifat tertutup yang merupakan syarat dari ketentuan operasi biner. Kemudian dalam Q.S. Ali Imron ayat 190-191, Allah berfirman:

إِنَّ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفِ ٱلَّيۡلِ وَٱلنَّهَارِ لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِي ٱلۡأَلۡبَٰبِ ١٩٠ ٱلَّذِينَ
يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمۡ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ رَبَّنَا مَا
خَلَقۡتَ هَٰذَا بَٰطِلٗا سُبۡحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

Artinya: *Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka* (Q.S. Ali Imran, 3:190-191).

Dalam Q.S. Ali Imron ayat 190-191 tersebut dijelaskan bahwa sekelompok manusia yang disebut *ulul albab* adalah orang-orang yang senantiasa mengingat Allah, baik saat berdiri, duduk, dan berbaring, serta memikirkan segala penciptaan Allah baik yang di langit maupun di bumi dengan keyakinan bahwa semua itu tidaklah sia-sia. Dalam matematika sifat-sifat yang dimiliki kelompok manusia yang *ulul albab* tersebut dikenal dengan aturan atau aksioma. Aturan atau aksioma tersebut harus dipenuhi agar suatu kelompok dapat disebut kelompok tertentu atau kelompok yang lebih khusus lagi.

Dari uraian sebelumnya, suatu himpunan dikatakan sebagai grup jika memiliki syarat-syarat seperti himpunan tak kosong, operasi biner, dan aturan atau aksioma yang harus dipenuhi agar menjadi suatu grup. Sebagai contoh seperti yang telah disebutkan adalah grup *ulul albab*. *Ulul albab* awalnya merupakan himpunan manusia yang saling berinteraksi sebagaimana manusia lainnya. Namun selain berinteraksi, mereka juga senantiasa mengingat Allah, baik saat berdiri, duduk, dan berbaring, serta memikirkan segala penciptaan Allah baik yang di langit maupun di bumi dengan keyakinan bahwa semua itu tidaklah sia-sia. Inilah yang membedakan mereka dengan manusia lain sehingga disebut sebagai manusia yang *ulul albab*. Dengan demikian dapat dilihat perbedaan sifat yang jelas antara *ulul albab* dengan manusia biasa umumnya. Seseorang yang senantiasa mengingat Allah belum tentu disebut *ulul albab.* Begitu juga seseorang yang memikirkan penciptaan-Nya belum tentu disebut *ulul albab*. Namun, seseorang sudah tentu disebut *ulul albab* jika senantiasa mengingat Allah dan memikirkan penciptaan-Nya (Khotimah, 2010:57).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Definisi Grup-M dan Grup-M Fuzzy

Dalam literatur terdapat istilah grup dengan operator dan grup-M. Adapun istilah grup-M berawal dari definisi grup dengan operator. Dalam Jacobson (1951:128), grup dengan operator didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 7:

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan $(\mathrm{M},\bullet)$ adalah himpunan tak kosong, maka yang dikatakan sebagai grup dengan operator adalah fungsi yang memetakan himpunan pasangan terurut $G\times \mathrm{M}$ ke G sehingga jika $a\bullet m$ menunjukkan elemen di G dengan $a\in G$ dan $m\in \mathrm{M}$ maka untuk setiap $a,b\in G$ berlaku:

$$(a*b)\bullet m=(a\bullet m)*(b\bullet m)$$

artinya operasi $\bullet$ di M bersifat distributif kanan terhadap operasi $*$ di G.

Contoh 3.1:

Diberikan $(\mathbb{R},\times)$ himpunan bilangan real dengan operasi perkalian dan $(V,+)$ adalah grup dengan V merupakan himpunan vektor-vektor dimensi tiga dimana bentuk umumnya adalah $u=(u_1,u_2,u_3)$ untuk setiap $u\in V$ dan $u_1,u_2,u_3\in\mathbb{R}$. Kemudian diberikan fungsi φ yang memetakan himpunan pasangan terurut $V\times\mathbb{R}$ ke V didefinisikan $\varphi(u,t)=ut,\ \forall t\in\mathbb{R}$ dan $u\in V,$ sehingga:

$$ut=(u_1t,u_2t,u_3t)\in V$$

Oleh karenanya $\forall u,v\in V$ berlaku:

$$(u+v)t=(ut)+(vt)$$

$$((u_1+u_2+u_3)+(v_1+v_2+v_3))t=(u_1+u_2+u_3)t+(v_1+v_2+v_3)t$$
$$=(u_1t+u_2t+u_3t)+(v_1t+v_2t+v_3t)$$

artinya operasi $(\times)$ di $\mathbb{R}$ bersifat distributif kanan terhadap operasi (+) di *V*. Oleh karenanya, maka $\mathbb{R}$ dapat dikatakan sebagai grup dengan operator.

Dalam definisi 7 juga dapat dinyatakan bahwa himpunan M beraksi dari kanan di *G*. Dalam Jacobson (1951:130) disebutkan bahwa jika himpunan M juga beraksi dari kiri di *G*, artinya "fungsinya memetakan $\mathrm{M}\times G$ ke *G* sehingga jika $m\bullet a$ menunjukkan elemen di G dengan $a\in G$ dan $m\in \mathrm{M}$ maka untuk setiap $a,b\in G$ berlaku $m\bullet(a*b)=(m\bullet a)*(m\bullet b)$" atau memenuhi aksi keduanya (beraksi dari kanan dan kiri) maka G dapat dikatakan sebagai grup dengan operator himpunan $(\mathrm{M},\bullet)$ atau grup-M dengan definisi yang mengacu pada grup dengan operator. Jadi pada grup-M, himpunan M beraksi dari kanan, kiri, atau kedua-duanya di *G*. Dengan kata lain, grup-M merupakan grup dengan operator yang himpunan M di dalamnya juga dapat beraksi dari kiri atau kedua-duanya di G dimana aksi tersebut mengakibatkan terpenuhinya sifat distributif operasi $\bullet$ pada himpunan M terhadap operasi $*$ di *G*.

Contoh 3.2:

Berdasarkan contoh 3.1, jika diberikan juga fungsi g yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{R}\times V$ ke V yang didefinisikan $g(t,u)=tu,\ \forall t\in\mathbb{R}$ dan $u\in V$, sehingga:

$$tu=(tu_1,tu_2,tu_3)\in V$$

Oleh karenanya $\forall u, v \in V$ berlaku:

$$t(u+v) = (tu)+(tv)$$

$$t((u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)) = t(u_1,u_2,u_3)+t(v_1,v_2,v_3)$$

$$= (tu_1,tu_2,tu_3)+(tv_1,tv_2,tv_3)$$

artinya operasi $(\times)$ di $\mathbb{R}$ bersifat distributif kiri terhadap operasi $(+)$ di *V*. Karena himpunan $(\mathbb{R},\times)$ beraksi dari kanan dan kiri di $(V,+)$ mengakibatkan terpenuhinya sifat distributif operasi $(\times)$ di $\mathbb{R}$ terhadap operasi $(+)$ di *V*, maka $(V,+)$ dapat dikatakan sebagai grup dengan operator himpunan $(\mathbb{R},\times)$ atau grup-$\mathbb{R}$.

Contoh 3.3:

Diberikan $(\mathbb{N},\times)$ himpunan bilangan asli dengan operasi perkalian dan $(M_{2\times 2},+)$ himpunan matriks ordo 2×2 dengan operasi penjumlahan adalah grup dengan $(M_{2\times 2},+)$ didefinisikan $M_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$. Kemudian diberikan fungsi φ yang memetakan himpunan pasangan terurut $M_{2\times 2}\times\mathbb{N}$ ke $M_{2\times 2}$ didefinisikan $\varphi(m,n) = mn,\ \forall n \in \mathbb{N}$ dan $m \in M_{2\times 2}$, sehingga:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} n = \begin{pmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{pmatrix} \in M_{2\times 2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Oleh karenanya berlaku:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix} \right) n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} n + \begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix} n$$

artinya operasi $(\times)$ di $\mathbb{N}$ bersifat distributif kanan terhadap operasi $(+)$ di $M_{2\times 2}$. Jika diberikan juga fungsi g yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{N}\times M_{2\times 2}$ ke $M_{2\times 2}$ yang didefinisikan $g(n,m)=mn,\ \forall n\in\mathbb{N}$ dan $m\in M_{2\times 2}$, sehingga:

$$n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{pmatrix}\in M_{2\times 2},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Oleh karenanya berlaku:

$$n\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix}\right)=n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

artinya operasi $(\times)$ di $\mathbb{N}$ bersifat distributif kiri terhadap operasi $(+)$ di $M_{2\times 2}$. Karena himpunan $(\mathbb{N},\times)$ beraksi dari kanan dan kiri di $(M_{2\times 2},+)$ mengakibatkan terpenuhinya sifat distributif operasi $(\times)$ di $\mathbb{N}$ terhadap operasi $(+)$ di $M_{2\times 2}$, maka $(M_{2\times 2},+)$ dapat dikatakan sebagai grup dengan operator himpunan $(\mathbb{N},\times)$ atau grup-$\mathbb{N}$.

Contoh 3.4:

Diberikan $(Y,\times)$ himpunan matriks ordo 2×2 dengan operasi perkalian dan $(X,+)$ himpunan matriks ordo 2×2 dengan operasi penjumlahan adalah grup. Kemudian X dan Y didefinisikan dengan $X=Y=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2\right\}$ yang anggota-anggotanya adalah:

A = $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ E = $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ I = $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ M = $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ $\quad J = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$ $\quad G = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ $\quad K = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ $\quad O = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ $\quad L = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$

Karena anggota-anggota X cukup banyak, maka digunakan tabel 3.1 untuk mempermudah perhitungan operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 3.1 Operasi (+) terhadap Anggota-anggota X

+	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**
A	P	O	E	F	C	D	N	I	H	K	J	M	L	G	B	A
B	O	P	F	E	D	C	J	M	L	G	N	I	H	K	A	B
C	E	F	P	O	A	B	L	K	J	I	H	G	N	M	D	C
D	F	E	D	P	B	A	H	G	N	M	L	J	J	I	C	D
E	C	D	A	B	P	O	M	J	K	H	I	N	G	L	F	E
F	D	C	B	A	O	P	I	N	G	L	M	J	K	H	E	F
G	N	J	L	H	M	I	P	D	F	B	O	E	E	A	K	G
H	I	M	K	G	J	N	D	P	A	G	C	O	B	F	L	H
I	H	L	J	N	K	G	F	A	P	C	E	B	O	D	M	I
J	K	G	I	M	H	L	B	G	C	P	A	F	D	O	N	J
K	J	N	H	L	I	M	O	C	E	A	P	D	F	B	G	K
L	M	I	G	K	N	J	C	O	B	F	D	P	A	E	H	L
M	L	H	N	J	G	K	E	B	O	D	F	A	P	C	I	M
N	G	K	M	I	L	H	A	F	D	O	B	E	C	P	J	N
O	B	A	D	C	F	E	K	L	M	N	G	H	I	J	P	O
P	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

Sumber: Analisis Penulis, 2013

Dalam tabel 3.1 tampak bahwa P atau matriks identitas di X membentuk pola diagonal kiri dalam tabel. Diagonal tersebut tampak seperti cermin sehingga membagi anggota-anggotanya secara simetris. Dalam tabel tersebut juga menunjukkan bahwa setiap anggota di X jika dioperasikan dengan operasi penjumlahan terhadap anggota X maka hasilnya tetap anggota X, atau secara matematis dapat ditulis $P + A = A,\ \forall A, P \in X$. Dengan kata lain operasi penjumlahan tertutup di X. Kemudian sebagaimana tabel 3.1, maka untuk mempermudah perhitungan operasi perkalian terhadap anggota-anggota Y juga disajikan dalam tabel 3.2 berikut:

Tabel 3.2 Operasi ($\times$) terhadap Anggota-anggota Y

$\times$	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**
A	A	B	P	O	A	B	A	B	O	O	B	A	P	P	O	P
B	A	B	O	P	B	A	O	O	B	A	P	P	A	B	O	P
C	P	P	C	C	C	C	N	M	M	N	N	P	M	N	P	P
D	P	P	D	D	D	D	K	L	L	K	K	L	L	K	P	P
E	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
F	A	B	D	C	F	E	J	I	H	G	N	M	L	K	O	P
G	L	K	C	O	G	H	E	F	J	I	B	A	M	N	D	P
H	L	K	O	H	H	G	B	J	F	E	N	M	A	B	D	P
I	M	N	O	D	I	J	H	G	E	F	K	L	A	B	C	P
J	M	N	D	O	J	I	F	E	G	H	B	A	L	K	C	P
K	L	K	D	P	K	L	D	D	K	L	P	P	L	K	D	P
L	L	K	P	D	L	K	L	K	D	D	K	L	P	P	D	P
M	M	N	P	C	M	N	M	N	C	C	N	M	P	P	C	P
N	M	N	C	P	N	M	C	C	N	M	P	P	M	N	C	P
O	P	P	O	O	O	O	B	A	A	B	B	A	A	B	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

Sumber : Analisis Penulis, 2013

Berbeda dengan tabel 3.1 maka pada tabel 3.2 tidak terlihat pola yang jelas sebagaimana tabel 3.1, hanya saja pada bagian kanan dan bawah tabel diisi semua oleh P atau matrik identitas di X. Dalam tabel 3.2 juga menunjukkan bahwa setiap anggota di Y jika dioperasikan dengan operasi perkalian terhadap anggota Y maka hasilnya tetap anggota Y, atau secara matematis dapat ditulis $B \times C = O,\ \forall B, C, O \in Y$. Dengan kata lain operasi perkalian tertutup di Y. Selanjutnya diberikan fungsi φ yang memetakan himpunan pasangan terurut $X \times Y$ ke X didefinisikan $\varphi(B, A) = B \times A,\ \forall A \in Y$ dan $B \in X$, sehingga $B \times A \in X$. Oleh karenanya, berdasarkan tabel 3.1 dan tabel 3.2 maka $\forall A \in Y$ dan $B, C \in X$ berlaku:

$$
\begin{aligned}
(B+C)\times A &= (B\times A)+(C\times A)\\
F\times A &= A+P\\
A &= A
\end{aligned}
$$

artinya operasi $(\times)$ di Y bersifat distributif kanan terhadap operasi (+) di X. Jika diberikan juga fungsi g yang memetakan himpunan pasangan terurut $Y \times X$ ke X didefinisikan $g(A, B) = A \times B,\ \forall A \in Y$ dan $B \in X$, sehingga $A \times B \in X$. Oleh karenanya, berdasarkan tabel 3.1 dan tabel 3.2 maka $\forall A \in Y$ dan $B, C \in X$ berlaku:

$$
\begin{aligned}
A\times(B+C) &= (A\times B)+(A\times C)\\
A\times F &= B+P\\
B &= B
\end{aligned}
$$

artinya operasi $(\times)$ di Y bersifat distributif kiri terhadap operasi (+) di X. Karena himpunan $(Y, \times)$ beraksi dari kanan dan kiri di $(X, +)$ mengakibatkan terpenuhinya sifat distributif operasi $(\times)$ di Y terhadap operasi (+) di X, maka

$(X,+)$ dapat dikatakan sebagai grup dengan operator himpunan $(Y,\times)$ atau grup-Y.

Contoh 3.5:

Diberikan $(\mathbb{N},\times)$ himpunan bilangan asli dengan operasi perkalian dan $(\mathbb{Z},+)$ himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan adalah grup. Kemudian diberikan juga fungsi φ yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ ke $\mathbb{R}$ didefinisikan $\varphi(a,n)=an,\ \forall a\in\mathbb{R}$ dan $n\in\mathbb{N}$ sehingga $an\in\mathbb{Z}.$ Oleh karenanya $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ berlaku:

$$(a+b)n=(an)+(bn)$$

artinya operasi $(\times)$ di $\mathbb{N}$ bersifat distributif kanan terhadap operasi (+) di $\mathbb{Z}$. Jika diberikan juga fungsi g yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ yang didefinisikan $\varphi(na)=na,\ \forall a\in\mathbb{R}$ dan $n\in\mathbb{N},$ sehingga $na\in\mathbb{Z}.$ Oleh karenanya $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ berlaku:

$$n(a+b)=(na)+(nb)$$

artinya operasi $(\times)$ di $\mathbb{N}$ bersifat distributif kiri terhadap operasi (+) di $\mathbb{Z}$. Karena himpunan $(\mathbb{N},\times)$ beraksi dari kanan dan kiri di $(\mathbb{Z},+)$ mengakibatkan terpenuhinya sifat distributif operasi $(\times)$ di $\mathbb{N}$ terhadap operasi (+) di $\mathbb{Z}$ maka $(\mathbb{Z},+)$ dapat dikatakan sebagai grup dengan operator himpunan $(\mathbb{N},\times)$ atau grup-$\mathbb{N}$.

Contoh 3.6:

Diberikan $(\mathbb{Z},+)$ himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan $(\mathbb{Q},\times)$ himpunan bilangan rasional tak nol dengan operasi perkalian adalah grup. Kemudian diberikan fungsi φ yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Q}$ didefinisikan $\varphi(a,z)=a+z,\ \forall a\in\mathbb{Q}$ dan $z\in\mathbb{Z}$, sehingga $a+z\in\mathbb{Q}$. Oleh karenanya $\forall a,b\in\mathbb{Q}$ berlaku:

$$(a\times b)+z\neq(a+z)\times(b+z)$$

artinya operasi $(+)$ di $\mathbb{Z}$ tidak bersifat distributif kanan terhadap operasi $(\times)$ di $\mathbb{Q}$. Jika diberikan juga fungsi g yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ ke $\mathbb{Q}$ yang didefinisikan $g(z,a)=z+a,\ \forall a\in\mathbb{Q}$ dan $z\in\mathbb{Z}$, sehingga $z+a\in\mathbb{Q}$. Oleh karenanya $\forall a,b\in\mathbb{Q}$ berlaku:

$$z+(a\times b)\neq(z+a)\times(z+b)$$

artinya operasi (+) di $\mathbb{Z}$ tidak bersifat distributif kiri terhadap operasi $(\times)$ di $\mathbb{Q}$. Karena himpunan $(\mathbb{Z},+)$ yang beraksi dari kanan dan kiri dalam $(\mathbb{Q},\times)$ mengakibatkan tidak terpenuhinya sifat distributif operasi $(+)$ di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi $(\times)$ di $\mathbb{Q}$, maka $(\mathbb{Q},\times)$ tidak dapat dikatakan sebagai grup dengan operator $(\mathbb{Z},+)$ atau tidak dapat dikatakan sebagai grup-$\mathbb{Z}$.

Contoh 3.7:

Diberikan $(\mathbb{C},+)$ himpunan bilangan kompleks dengan operasi penjumlahan adalah grup. Kemudian diberikan juga fungsi φ yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ ke $\mathbb{C}$ didefinisikan $\varphi(c,a)=c+a,\ \forall a,c\in\mathbb{C},$ sehingga $c+a\in\mathbb{C}$. Oleh karenanya $\forall a,b\in\mathbb{C}$ berlaku $n+(a+b)\neq(n+a)+(n+b)$ dan $(a+b)+n\neq(a+n)+(b+n)$ tetapi $n+(a+b)=(n+a)+b$ dan $(a+b)+n=a+(b+n)$, artinya operasi (+) di $\mathbb{C}$ tidak bersifat distributif terhadap operasi (+) di $\mathbb{C}$ tetapi bersifat komutatif. Karena himpunan $(\mathbb{C},+)$ yang beraksi dari kanan dan kiri terhadap dirinya sendiri mengakibatkan tidak terpenuhinya sifat distributif operasi $(+)$ di $\mathbb{C}$ terhadap operasi (+) di $\mathbb{C}$, maka $(\mathbb{C},+)$ tidak dapat dikatakan sebagai grup dengan operator $(\mathbb{C},+)$ atau tidak dapat dikatakan sebagai grup-$\mathbb{C}$.

Contoh 3.8:

Diberikan $(\mathbb{R},+)$ himpunan bilangan real dengan operasi penjumlahan adalah grup dan $(\mathbb{Z},+)$ himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dengan $(\mathbb{Z},+)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{R},+)$. Kemudian diberikan fungsi φ yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{R}$ yang didefinisikan $\varphi(a,z)=a+z,\ \forall z\in\mathbb{Z}$ dan $a\in\mathbb{R}$, sehingga $a+z\in\mathbb{R}$. Oleh karenanya $\forall a,b\in\mathbb{R}$ berlaku:

$$(a+b)+z\neq(a+z)+(b+z)$$

tetapi,

$$(a+b)+z=a+(b+z)$$

artinya operasi (+) di $\mathbb{Z}$ tidak bersifat distributif kanan terhadap operasi (+) di $\mathbb{R}$ tetapi bersifat komutatif. Jika diberikan juga fungsi g yang memetakan himpunan pasangan terurut $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ yang didefinisikan $g(z,a)=z+a$, $\forall z\in\mathbb{Z}$ dan $a\in\mathbb{R}$, sehingga $z+a\in\mathbb{R}$. Oleh karenanya $\forall a,b\in\mathbb{R}$ berlaku:

$$z+(a+b)\neq(z+a)+(z+b)$$

tetapi,

$$z+(a+b)=(z+a)+b$$

artinya operasi (+) di $\mathbb{Z}$ tidak bersifat distributif kiri terhadap operasi (+) di $\mathbb{R}$ tetapi bersifat komutatif. Karena himpunan $(\mathbb{Z},+)$ yang beraksi dari kanan dan kiri dalam $(\mathbb{R},+)$ mengakibatkan tidak terpenuhinya sifat distributif operasi $(+)$ di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi (+) di $\mathbb{R}$, maka $(\mathbb{R},+)$ tidak dapat dikatakan sebagai grup dengan operator $(\mathbb{Z},+)$ atau tidak dapat dikatakan sebagai grup-$\mathbb{Z}$.

Dari beberapa contoh yang diberikan, misalkan $(G,*)$ grup dan $(\mathrm{M},\bullet)$ himpunan tak kosong maka M dapat dikatakan sebagai grup-M jika operasi $\bullet$ di M bersifat distributif terhadap operasi $*$ di G dan M bukan subgrup dari G.

Dalam bab II telah dijelaskan mengenai grup fuzzy yang merupakan fungsi yang memetakan grup ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang berada pada interval tertutup [0,1] dengan dua aksioma yang memenuhinya. Artinya pada grup fuzzy, fungsi keanggotaan himpunan fuzzy memiliki domain berupa grup dan kodomainnya adalah interval terutup [0,1]. Sedangkan dalam pembahasan ini, fungsinya akan dipetakan dari grup-M ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang berada pada interval tertutup [0,1] dengan dua aksioma yang memenuhinya atau dikenal dengan grup-M fuzzy. Sehingga dalam grup-M fuzzy, domain fungsinya berupa grup-M dan kodomainnya adalah interval tertutup [0,1]. Jadi perbedaan jelas antara grup fuzzy dengan grup-M fuzzy terletak pada domain fungsinya. Lebih jelasnya, dalam Subramanian, dkk. (2012:546) grup-M fuzzy didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 8:

Misalkan A adalah himpunan fuzzy dalam semesta himpunan U dan $*$ didefinisikan $*: G\times G \to G$ dengan $(G,*)$ adalah grup dengan operator himpunan $(\mathrm{M},\bullet)$ atau grup-M, maka A dapat disebut sebagai grup-M fuzzy dari G jika fungsi μ_A yang didefinisikan sebagai $\mu_A : G \to [0,1]$ memenuhi dua aksioma berikut:

(i) $\mu_A\left(m\bullet(x*y)\right) \geq \min\{\mu_A(m\bullet x), \mu_A(m\bullet y)\}$

(ii) $\mu_A\left(m\bullet x^{-1}\right) = \mu_A(m\bullet x),\ \forall x, y \in A$

Kemudian jika dari definisi grup-M fuzzy tersebut terdapat tambahan kondisi $\mu_A(m\bullet e_G) = 1$ maka grup-M fuzzy dapat disebut sebagai grup-M fuzzy standar, dengan e_G merupakan identitas dari $(G,*)$.

Aksioma (i) menegaskan bahwa syarat untuk menjadi grup-M fuzzy adalah derajat keanggotaan dari $\left(m\bullet(x*y)\right)$ di A harus lebih besar atau sama dengan $\min\{\mu_A(m\bullet x), \mu_A(m\bullet y)\}$ dimana $\bullet$ adalah operasi pada himpunan M dan $*$ adalah operasi biner di G. Adapun aksioma (ii) menegaskan bahwa derajat keanggotaan dari $m\bullet x^{-1}$ di A sama dengan derajat keanggotaan $m\bullet x$ di A.

Grup-M fuzzy merupakan perluasan dari grup-M. Hal ini disebabkan karena pada grup-M fuzzy, anggota-anggota dari grup-M dipetakan ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang terletak dalam interval tertutup [0,1] dengan beberapa syarat tertentu. Jadi terlihat perbedaan yang jelas antara grup-M dengan grup-M fuzzy.

Contoh 3.9:

Diberikan $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real sebagai semesta himpunan, A adalah himpunan fuzzy dalam $\mathbb{R}$, dan $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ dengan $\times$ adalah operasi di $\mathbb{N}$. Kemudian μ_A didefinisikan sebagai $\mu_A : \mathbb{Z} \to [0,1]$ dengan:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \alpha & \text{untuk } x \in 2\mathbb{Z} \\ \beta & \text{untuk } x \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

jika $\alpha > \beta$ dengan $\alpha, \beta \in [0,1]$ maka buktikan bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(\mathbb{Z},+)$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(\mathbb{Z},+)$ maka akan ditunjukkan menggunakan dua aksioma pada definisi 8 berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A(n(x+y)) \geq \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

(c) $n(x+y) = (nx) + (ny) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(ny) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y)) = \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N},\ x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N},\ x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

(c) $n(x+y) = (nx) + (ny) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(ny) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}=\min\{\alpha,\alpha\}=\alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(n(x+y))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}=\alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y))=\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}$.

3. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $x,y\in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $x,y\in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx\in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny\in 2\mathbb{Z}$

(c) $n(x+y)=(nx)+(ny)\in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx)=\alpha$

(b) $\mu_A(ny)=\alpha$

(c) $\mu_A(n(x+y))=\alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}=\min\{\alpha,\alpha\}=\alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(n(x+y))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}=\alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y))=\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}$.

4. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1$ dan $x,y\in 2\mathbb{Z}$

Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1$ dan $x,y\in 2\mathbb{Z}$ maka berlaku:

(a) $nx\in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny\in 2\mathbb{Z}$

(c) $n(x+y)=(nx)+(ny)\in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(ny) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y)) = \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$.

5. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1,\ x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N},\ x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}+1$

(c) $n(x+y) = (nx)+(ny) \in 2\mathbb{Z}+1$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(ny) = \beta$

(c) $\mu_A(n(x+y)) = \beta$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \min\{\alpha, \beta\} = \beta$. Jadi dari uraian pada kondisi 5 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) = \beta$ dan $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \beta$ sehingga $\mu_A(n(x+y)) = \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$.

6. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}+1$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}+1$

(c) $n(x+y)=(nx)+(ny) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx)=\beta$

(b) $\mu_A(ny)=\beta$

(c) $\mu_A(n(x+y))=\alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}=\min\{\beta,\beta\}=\beta$. Jadi dari uraian pada kondisi 6 diperoleh $\mu_A(n(x+y))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}=\beta$ sehingga $\mu_A(n(x+y))>\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}$.

Aksioma (ii)

Pada aksioma (ii) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A(nx)=\mu_A(nx^{-1})$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x \in 2\mathbb{Z}$

   Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}$ sehingga:

   (a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

   (b) $nx^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_A(nx)=\alpha$

   (b) $\mu_A(nx^{-1})=\alpha$

   Jadi dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(nx)=\mu_A(nx^{-1})$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$ sehingga:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $nx^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(nx^{-1}) = \alpha$

Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(mx) = \mu_A(mx^{-1})$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x \in 2\mathbb{Z}$

Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}$ sehingga:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $nx^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(nx^{-1}) = \alpha$

Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(nx) = \mu_A(nx^{-1})$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$ sehingga:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}+1$

(b) $nx^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \beta$

(b) $\mu_A(nx^{-1}) = \beta$

Jadi dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_A(nx) = \mu_A(nx^{-1})$.

Berdasarkan beberapa kondisi pada aksioma (i) dan (ii) yang telah diberikan maka dapat disimpulkan bahwa:

(a) $\mu_A(n(x+y)) \geq \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$

(b) $\mu_A(nx) = \mu_A(nx^{-1})$

Jadi aksioma (i) dan (ii) pada definisi 8 telah terpenuhi sehingga terbukti bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(\mathbb{Z},+)$.

Contoh 3.10:

Berdasarkan contoh 3.9 jika $\alpha < \beta$ dengan $\alpha, \beta \in [0,1]$ maka buktikan bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(\mathbb{Z},+)$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(\mathbb{Z},+)$ maka akan ditunjukkan menggunakan dua aksioma pada definisi 8 berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A(n(x+y)) \geq \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

(c) $n(x+y) = (nx)+(ny) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(ny) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y)) = \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N},\ x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N},\ x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

(c) $n(x+y) = (nx)+(ny) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(ny) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y)) = \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

   (a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

   (b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

   (c) $n(x+y) = (nx)+(ny) \in 2\mathbb{Z}$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_A(nx) = \alpha$

   (b) $\mu_A(ny) = \alpha$

   (c) $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$

   Akibatnya $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y)) = \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$ maka berlaku:

   (a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

   (b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

   (c) $n(x+y) = (nx)+(ny) \in 2\mathbb{Z}$

   Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(ny) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y)) = \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$.

5. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$, $x \in 2\mathbb{Z}$, dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$, $x \in 2\mathbb{Z}$, dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}+1$

(c) $n(x+y) = (nx)+(ny) \in 2\mathbb{Z}+1$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(ny) = \beta$

(c) $\mu_A(n(x+y)) = \beta$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \min\{\alpha, \beta\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 5 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) = \beta$ dan $\min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(x+y)) > \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$.

6. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}+1$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}+1$

(c) $n(x+y)=(nx)+(ny) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx)=\beta$

(b) $\mu_A(ny)=\beta$

(c) $\mu_A(n(x+y))=\alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}=\min\{\beta,\beta\}=\beta$. Jadi dari uraian pada kondisi 6 diperoleh $\mu_A(n(x+y))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}=\beta$ sehingga $\mu_A(n(x+y))<\min\{\mu_A(nx),\mu_A(ny)\}$.

Aksioma (ii)

Pada aksioma (ii) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A(nx)=\mu_A(nx^{-1})$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x \in 2\mathbb{Z}$

   Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}$ sehingga:

   (a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

   (b) $nx^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_A(nx)=\alpha$

   (b) $\mu_A(nx^{-1})=\alpha$

   Jadi dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(nx)=\mu_A(nx^{-1})$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$ sehingga:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $nx^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(nx^{-1}) = \alpha$

Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(mx) = \mu_A(mx^{-1})$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x \in 2\mathbb{Z}$

Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}$ sehingga:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $nx^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \alpha$

(b) $\mu_A(nx^{-1}) = \alpha$

Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(nx) = \mu_A(nx^{-1})$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $x^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$ sehingga:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}+1$

(b) $nx^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nx) = \beta$

(b) $\mu_A(nx^{-1}) = \beta$

Jadi dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_A(nx) = \mu_A(nx^{-1})$.

Berdasarkan beberapa kondisi pada aksioma (i) dan (ii) yang telah diberikan maka dapat disimpulkan bahwa:

(a) Untuk aksioma (i) pada kondisi 1 sampai 5 dapat disimpulkan bahwa $\mu_A(n(x+y)) \geq \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$ sedangkan pada kondisi 6 diperoleh $\mu_A(n(x+y)) < \min\{\mu_A(nx), \mu_A(ny)\}$

(b) Untuk aksioma (ii), dari semua kondisi yang diberikan telah diperoleh $\mu_A(nx) = \mu_A(nx^{-1})$

sehingga $(A,+)$ tidak dapat dikatakan sebagai grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(\mathbb{Z},+)$ karena pada kondisi 6 di aksioma (i) tidak memenuhi definisi 8.

Contoh 3.11:

Diberikan semesta himpunan $(M,+)$ himpunan matriks ordo 2×2 dengan $(M,+)$ didefinisikan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$, A adalah himpunan fuzzy dalam *M*, dan $(K,+)$ himpunan matriks ordo 2×2 dengan $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah grup-$\mathbb{N}$ dimana $\times$ adalah operasi di $\mathbb{N}$. Jika himpunan F dan G didefinisikan $F = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \middle| p,q,r,s \in 2\mathbb{Z} \right\}$ dan $F = \left\{ \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} \middle| t,u,v,w \in 2\mathbb{Z}+1 \right\}$ dengan fungsi μ_A didefinisikan sebagai $\mu_A : K \to [0,1]$ dimana:

$$\mu_A(X) = \begin{cases} \alpha & \text{untuk } X \in F \\ \beta & \text{untuk } X \in G \end{cases}$$

maka buktikan bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(K,+)$ untuk $\alpha > \beta$ dan $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(K,+)$ maka akan ditunjukkan menggunakan dua aksioma pada definisi 8 berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A\left(n(X+Y)\right) \geq \min\left\{\mu_A(nX), \mu_A(nY)\right\}$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $X, Y \in F$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $X, Y \in F$ maka berlaku:

   (a) $nX = n\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np & nq \\ nq & np \end{pmatrix} \in F$

   (b) $nY = n\begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nr & ns \\ ns & nr \end{pmatrix} \in F$

   (c) $n(X+Y) = (nX) + (nY) = \begin{pmatrix} np & nq \\ nq & np \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} nr & ns \\ ns & nr \end{pmatrix}$

   $$= \begin{pmatrix} np+nr & nq+ns \\ nq+ns & np+nr \end{pmatrix} \in F$$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_A(nX) = \alpha$

   (b) $\mu_A(nY) = \alpha$

   (c) $\mu_A\left(n(X+Y)\right) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}=\min\{\alpha,\alpha\}=\alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(n(X+Y))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}=\alpha$ sehingga $\mu_A(n(X+Y))=\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}$.

2. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$, $X\in F$, $Y\in G$

   Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$, $X\in F$, $Y\in G$ maka berlaku:

   (a) $nX=n\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} np & nq \\ nr & ns \end{pmatrix}\in F$

   (b) $nY=n\begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} nt & nu \\ nv & nw \end{pmatrix}\in F$

   (c) $n(X+Y)=(nX)+(nY)=\begin{pmatrix} np & nq \\ nr & ns \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} nt & nu \\ nv & nw \end{pmatrix}$

   $$=\begin{pmatrix} np+nt & nq+nu \\ nr+nv & ns+nw \end{pmatrix}\in F$$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_A(nX)=\alpha$

   (b) $\mu_A(nY)=\alpha$

   (c) $\mu_A(n(X+Y))=\alpha$

   Akibatnya $\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}=\min\{\alpha,\alpha\}=\alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(n(X+Y))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}=\alpha$ sehingga $\mu_A(n(X+Y))=\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}$.

3. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $X,Y\in G$

   Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $X,Y\in G$ maka berlaku:

(a) $nX = n\begin{pmatrix} t & u \\ u & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nt & nu \\ nu & nt \end{pmatrix} \in F$

(b) $nY = n\begin{pmatrix} v & w \\ w & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nv & nw \\ nw & nv \end{pmatrix} \in F$

(c) $n(X+Y) = (nX)+(nY) = \begin{pmatrix} nt & nu \\ nu & nt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} nv & nw \\ nw & nv \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} nt+nu & nv+nw \\ nu+nt & nw+nv \end{pmatrix} \in F$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nX) = \alpha$

(b) $\mu_A(nY) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(X+Y)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nX), \mu_A(nY)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(n(X+Y)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nX), \mu_A(nY)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(X+Y)) = \min\{\mu_A(nX), \mu_A(nY)\}$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $X, Y \in F$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $X, Y \in F$ maka berlaku:

(a) $nX = n\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np & nq \\ nq & np \end{pmatrix} \in F$

(b) $nY = n\begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nr & ns \\ ns & nr \end{pmatrix} \in F$

(c) $n(X+Y) = (nX)+(nY) = \begin{pmatrix} np & nq \\ nq & np \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} nr & ns \\ ns & nr \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} np+nr & nq+ns \\ nq+ns & np+nr \end{pmatrix} \in F$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nX) = \alpha$

(b) $\mu_A(nY) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(X+Y)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nX), \mu_A(nY)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_A(n(X+Y)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nX), \mu_A(nY)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(X+Y)) = \min\{\mu_A(nX), \mu_A(nY)\}$.

5. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$, $X \in F$, dan $Y \in G$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$, $X \in F$, $Y \in G$ maka berlaku:

(a) $nX = n\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np & nq \\ nr & ns \end{pmatrix} \in F$

(b) $nY = n\begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nt & nu \\ nv & nw \end{pmatrix} \in G$

(c) $n(X+Y) = (nX) + (nY) = \begin{pmatrix} np & nq \\ nr & ns \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} nt & nu \\ nv & nw \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} np+nt & nq+nu \\ nr+nv & ns+nw \end{pmatrix} \in G$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nX) = \alpha$

(b) $\mu_A(nY) = \beta$

(c) $\mu_A(n(X+Y)) = \beta$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}=\min\{\alpha,\beta\}=\beta$. Jadi dari uraian pada kondisi 5 diperoleh $\mu_A(n(X+Y))=\beta$ dan $\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}=\beta$ sehingga $\mu_A(n(X+Y))=\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}$.

6. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1$ dan $X,Y\in G$

Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1$ dan $X,Y\in G$ maka berlaku:

(a) $nX=n\begin{pmatrix} t & u \\ u & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} nt & nu \\ nu & nt \end{pmatrix}\in G$

(b) $nY=n\begin{pmatrix} v & w \\ w & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} nv & nw \\ nw & nv \end{pmatrix}\in G$

(c) $n(X+Y)=(nX)+(nY)=\begin{pmatrix} nt & nu \\ nu & nt \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} nv & nw \\ nw & nv \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} nt+nu & nv+nw \\ nu+nt & nw+nv \end{pmatrix}\in F$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nX)=\beta$

(b) $\mu_A(nY)=\beta$

(c) $\mu_A(n(X+Y))=\alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}=\min\{\beta,\beta\}=\beta$. Jadi dari uraian pada kondisi 6 diperoleh $\mu_A(n(X+Y))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}=\beta$ sehingga $\mu_A(n(X+Y))>\min\{\mu_A(nX),\mu_A(nY)\}$.

Aksioma (ii)

Pada aksioma (ii) akan akan ditunjukkan bahwa $\mu_A(nX)=\mu_A(nX^{-1})$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$, dan $X \in F$

Jika $X \in F$, dengan $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \forall p,q,r,s \in 2\mathbb{Z}$ maka $X^{-1} = \begin{pmatrix} -p & -q \\ -r & -s \end{pmatrix}$

sehingga $X^{-1} \in F$, akibatnya:

(a) $nX = n\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np & nq \\ nr & ns \end{pmatrix} \in F$

(b) $nX^{-1} = n\begin{pmatrix} -p & -q \\ -r & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -np & -nq \\ -nr & -ns \end{pmatrix} \in F$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nX) = \alpha$

(b) $\mu_A(nX^{-1}) = \alpha$

Jadi dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(nX) = \mu_A(nX^{-1})$.

2. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $X \in G$

Jika $X \in G$, dengan $X = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}, \forall t,u,v,w \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $X^{-1} = \begin{pmatrix} -t & -u \\ -v & -w \end{pmatrix}$

sehingga $X^{-1} \in G$, akibatnya:

(a) $nX = n\begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nt & nu \\ nv & nw \end{pmatrix} \in F$

(b) $nX^{-1} = n\begin{pmatrix} -t & -u \\ -v & -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -nt & -nu \\ -nv & -nw \end{pmatrix} \in F$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nX) = \alpha$

(b) $\mu_A(nX^{-1}) = \alpha$

Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(nX) = \mu_A(nX^{-1})$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$, dan $X \in F$

Jika $X \in F$, dengan $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \forall p,q,r,s \in 2\mathbb{Z}$ maka $X^{-1} = \begin{pmatrix} -p & -q \\ -r & -s \end{pmatrix}$

sehingga $X^{-1} \in F$, akibatnya:

(a) $nX = n\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np & nq \\ nr & ns \end{pmatrix} \in F$

(b) $nX^{-1} = n\begin{pmatrix} -p & -q \\ -r & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -np & -nq \\ -nr & -ns \end{pmatrix} \in F$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nX) = \alpha$

(b) $\mu_A(nX^{-1}) = \alpha$

Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(nX) = \mu_A(nX^{-1})$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$, dan $X \in G$

Jika $X \in G$, dengan $X = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}, \forall t,u,v,w \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $X^{-1} = \begin{pmatrix} -t & -u \\ -v & -w \end{pmatrix}$

sehingga $X^{-1} \in G$, akibatnya:

(a) $nX = n\begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nt & nu \\ nv & nw \end{pmatrix} \in G$

(b) $nX^{-1} = n\begin{pmatrix} -t & -u \\ -v & -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -nt & -nu \\ -nv & -nw \end{pmatrix} \in G$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nX) = \beta$

(b) $\mu_A(nX^{-1}) = \beta$

Jadi dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_A(nX) = \mu_A(nX^{-1})$.

Berdasarkan beberapa kondisi pada aksioma (i) dan (ii) yang telah diberikan maka dapat disimpulkan bahwa:

(a) $\mu_A\left(n\left(X+Y\right)\right)\geq \min\left\{\mu_A\left(nX\right),\mu_A\left(nY\right)\right\}$

(b) $\mu_A\left(nX\right)=\mu_A\left(nY^{-1}\right)$

Jadi aksioma (i) dan (ii) pada definisi 8 telah terpenuhi sehingga terbukti bahwa $\left(A,+\right)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $\left(K,+\right)$.

Contoh 3.12:

Diberikan $\left(U,+\right)$ himpunan vektor-vektor dimensi tiga dengan operasi penjumlahan di mana U didefinisikan $u=\left(u_1,u_2,u_3\right)$, $\forall u\in V$ dan $u_1,u_2,u_3\in\mathbb{C}$ sebagai semesta himpunan, A adalah himpunan fuzzy dalam $\left(U,+\right)$. Kemudian diberikan juga $\left(V,+\right)$ sebagai grup-$\mathbb{N}$ dengan $\times$ adalah operasi di $\mathbb{N}$ dimana $\left(V,+\right)$ adalah himpunan vektor-vektor dimensi tiga dengan operasi penjumlahan yang didefinisikan $v=\left(v_1,v_2,v_3\right)$, $\forall v\in V$ dan $v_1,v_2,v_3\in\mathbb{Z}$. Jika $\left(P,+\right)$ dan $\left(Q,+\right)$ himpunan vektor-vektor dimensi tiga dengan operasi penjumlahan didefinisikan $p=\left(p_1,p_2,p_3\right),\forall p\in P, v_1,v_2,v_3\in 2\mathbb{Z}$ dan $q=\left(q_1,q_2,q_3\right),\forall q\in Q,$ $q_1,q_2,q_3\in 2\mathbb{Z}+1$ dengan fungsi μ_A didefinisikan sebagai $\mu_A:V\rightarrow\left[0,1\right]$ dimana:

$$\mu_A\left(x\right)=\begin{cases}\alpha & \text{untuk } x\in P\\ \beta & \text{untuk } x\in Q\end{cases}$$

maka buktikan bahwa $\left(A,+\right)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $\left(V,+\right)$ untuk $\alpha>\beta$ dengan $\alpha,\beta\in[0,1]$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V,+)$ maka akan ditunjukkan menggunakan dua aksioma pada definisi 8 sebagai berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A(n(u+v))=\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\}$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $u,v\in P$

   Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $u,v\in P$ maka berlaku:

   (a) $nu=n(u_1,u_2,u_3)=(nu_1,nu_2,nu_3)\in P$

   (b) $nv=n(v_1,v_2,v_3)=(nv_1,nv_2,nv_3)\in P$

   (c) $n(u+v)=n(u_1,u_2,u_3)+n(v_1,v_2,v_3)$

   $$=(nu_1,nu_2,nu_3)+(nv_1,nv_2,nv_3)$$

   $$=(nu_1+nv_1,nu_2+nv_2,nu_3+nv_3)\in P$$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_A(nu)=\alpha$

   (b) $\mu_A(nu)=\alpha$

   (c) $\mu_A(n(u+v))=\alpha$

   Akibatnya $\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\}=\min\{\alpha,\alpha\}=\alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(n(u+v))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\}=\alpha$ sehingga $\mu_A(n(u+v))=\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\}$.

2. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N},\ u\in P,$ dan $v\in Q$

   Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N},\ u\in P,$ dan $v\in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nu) = \alpha$

(b) $\mu_A(nu) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(u+v)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(n(u+v)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(u+v)) = \min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\}$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in Q$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nu) = \alpha$

(b) $\mu_A(nu) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(u+v)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha.$ Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(n(u+v)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\} = \alpha$ sehingga $\mu_A(n(u+v)) = \min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\}.$

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u, v \in P$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u, v \in P$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nu) = \alpha$

(b) $\mu_A(nu) = \alpha$

(c) $\mu_A(n(u+v)) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha.$ Jadi dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_A(n(u+v)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\} = \alpha.$ sehingga $\mu_A(n(u+v)) = \min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\}.$

5. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1,\ u \in P,$ dan $v \in Q$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1,\ u \in P,$ dan $v \in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1,u_2,u_3) = (nu_1,nu_2,nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1,v_2,v_3) = (nv_1,nv_2,nv_3) \in Q$

(c) $n(u+v) = n(u_1,u_2,u_3) + n(v_1,v_2,v_3)$

$$= (nu_1,nu_2,nu_3) + (nv_1,nv_2,nv_3)$$

$$= (nu_1+nv_1, nu_2+nv_2, nu_3+nv_3) \in Q$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nu) = \alpha$

(b) $\mu_A(nu) = \beta$

(c) $\mu_A(n(u+v)) = \beta$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\} = \min\{\beta,\beta\} = \beta.$ Jadi dari uraian pada kondisi 5 diperoleh $\mu_A(n(u+v)) = \beta$ dan $\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\} = \beta$ sehingga $\mu_A(n(u+v)) = \min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\}.$

6. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u,v \in Q$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u,v \in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1,u_2,u_3) = (nu_1,nu_2,nu_3) \in Q$

(b) $nv = n(v_1,v_2,v_3) = (nv_1,nv_2,nv_3) \in Q$

(c) $n(u+v) = n(u_1,u_2,u_3) + n(v_1,v_2,v_3)$

$$= (nu_1,nu_2,nu_3) + (nv_1,nv_2,nv_3)$$

$$= (nu_1+nv_1, nu_2+nv_2, nu_3+nv_3) \in P$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nu)=\beta$

(b) $\mu_A(nu)=\beta$

(c) $\mu_A(n(u+v))=\alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\}=\min\{\beta,\beta\}=\beta.$ Jadi dari uraian pada kondisi 6 diperoleh $\mu_A(n(u+v))=\alpha$ dan $\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\}=\beta$ sehingga $\mu_A(n(u+v))>\min\{\mu_A(nu),\mu_A(nv)\}.$

Aksioma (ii)

Pada aksioma (ii) akan ditunjukkan bahwa $\mu_A(nv)=\mu_A(nv^{-1})$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $v\in P$

   Jika $v\in P,$ dengan $v=(v_1,v_2,v_3),\ \forall v_1,v_2,v_3\in 2\mathbb{Z}$ maka $v^{-1}=(-v_1,-v_2,-v_3)\in P$, akibatnya:

   (a) $nv=n(v_1,v_2,v_3)=(nv_1,nv_2,nv_3)\in P$

   (b) $nv^{-1}=n(-v_1,-v_2,-v_3)=(-nv_1,-nv_2,-nv_3)\in P$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_A(nv)=\alpha$

   (b) $\mu_A(nv^{-1})=\alpha$

   Jadi, dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_A(nv)=\mu_A(nv^{-1}).$

2. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $v\in Q$

   Jika $v\in Q,$ dengan $v=(v_1,v_2,v_3),\ \forall v_1,v_2,v_3\in 2\mathbb{Z}+1$ maka

$v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in Q$, akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nv) = \alpha$

(b) $\mu_A(nv^{-1}) = \alpha$

Jadi, dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_A(nv) = \mu_A(nv^{-1})$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $v \in P$

Jika $v \in P$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}$ maka

$v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in P$, akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nv) = \alpha$

(b) $\mu_A(nv^{-1}) = \alpha$

Jadi, dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_A(nv) = \mu_A(nv^{-1})$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $v \in Q$

Jika $v \in Q$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}+1$ maka

$v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in Q$, akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in Q$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in Q$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_A(nv) = \beta$

(b) $\mu_A(nv^{-1}) = \beta$

Jadi, dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_A(nv) = \mu_A(nv^{-1})$.

Dari beberapa kondisi yang diberikan pada aksioma (i) dan (ii) maka dapat disimpulkan:

(a) $\mu_A(n(u+v)) \geq \min\{\mu_A(nu), \mu_A(nv)\}$

(b) $\mu_A(nv) = \mu_A(nv^{-1})$

Jadi aksioma (i) dan (ii) telah memenuhi definisi 8 sehingga terbukti bahwa $(A,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V,+)$.

3.2 Sifat-sifat Struktur Grup-M fuzzy

Dalam pemaparan sifat-sifat struktur grup-M fuzzy, penulis mengkaji sifat-sifat struktur grup-M fuzzy dari penelitian Subramanian, dkk. (2012) dalam empat bentuk sifat, yaitu bentuk subgrup-M fuzzy, bentuk perpangkatan grup-M fuzzy, gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy, dan irisan dari perpangkatan grup-M fuzzy. Sifat-sifat tersebut dipaparkan berdasarkan teorema-teorema yang berlaku sebagai berikut:

3.2.1 Bentuk Subgrub Fuzzy-M

Sifat struktur grup-M fuzzy yang pertama adalah subgrup-M fuzzy yang dijamin oleh teorema berikut:

Teorema 1:

Misalkan $(G,*)$ adalah grup-M dengan $\bullet$ adalah operasi di M, $(A,*)$ adalah grup-M fuzzy dari $(G,*)$ dan S subset fuzzy dari A maka $(S,*)$ disebut subgrup-M fuzzy dari A jika dan hanya jika:

$$\mu_S\left(m\bullet\left(x*y^{-1}\right)\right)\geq \min\left\{\mu_S\left(m\bullet x\right),\mu_S\left(m\bullet y\right)\right\},\forall x,y\in S$$

Bukti:

1. Diketahui $(S,*)$ adalah subgrup-M fuzzy dari A, akan dibuktikan:

$$\mu_S\left(m\bullet\left(x*y^{-1}\right)\right)\geq \min\left\{\mu_S\left(m\bullet x\right),\mu_S\left(m\bullet y\right)\right\},\forall x,y\in S$$

Bukti:

Karena $(S,*)$ adalah subgrup-M fuzzy dari A maka $(S,*)$ juga dapat disebut sebagai grup-M fuzzy sehingga fungsi μ_S dapat didefinisikan $\mu_S : G\to[0,1]$.

Berdasarkan definisi grup-M fuzzy maka aksioma (i) dan (ii) pada definisi 8 terpenuhi juga di S sehingga berlaku:

$$\mu_S\left(m\bullet\left(x*y^{-1}\right)\right)\geq \min\left\{\mu_S\left(m\bullet x\right),\mu_S\left(m\bullet y^{-1}\right)\right\}$$

Berdasarkan aksioma (ii) pada definisi 8 bahwa $\mu_S\left(m\bullet y^{-1}\right)=\mu_S\left(m\bullet y\right)$ maka:

$$\begin{aligned}\mu_S\left(m\bullet\left(x*y^{-1}\right)\right)&\geq \min\left\{\mu_S\left(m\bullet x\right),\mu_S\left(m\bullet y^{-1}\right)\right\}\\&=\min\left\{\mu_S\left(m\bullet x\right),\mu_S\left(m\bullet y\right)\right\}\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\mu_S\left(m\bullet\left(x*y^{-1}\right)\right)\geq \min\left\{\mu_S\left(m\bullet x\right),\mu_S\left(m\bullet y\right)\right\},\forall x,y\in S.$

2. Diketahui $\mu_S\left(m\bullet\left(x*y^{-1}\right)\right)\geq\min\left\{\mu_S\left(m\bullet x\right),\mu_S\left(m\bullet y\right)\right\},\forall x,y\in S$, akan dibuktikan $(S,*)$ adalah subgrup-M fuzzy dari A dengan menunjukkan terpenuhinya dua aksioma berikut:

   (i) $\mu_S\left(m\bullet(x*y)\right)\geq\min\left\{(m\bullet x)*(m\bullet y)\right\}$

   (ii) $\mu_S\left(m\bullet x\right)=\left(m\bullet x^{-1}\right)$

   Bukti:

   Untuk mempermudah pembuktiannya maka akan ditunjukkan terlebih dahulu terpenuhinya aksioma (ii) seperti berikut:

   Aksioma (ii)

   Bukti (a)

   Misalkan e adalah elemen identitas di G maka $e*x=x*e=x$ sehingga:

$$\mu_S\left(m\bullet x\right)=\mu_S\left(m\bullet\left(x^{-1}\right)^{-1}\right)\quad\text{(proposisi 1)}$$

$$=\mu_S\left(m\bullet\left(e*\left(x^{-1}\right)^{-1}\right)\right)\quad\text{(sifat identitas)}$$

$$\geq\min\left\{\mu_S\left(m\bullet e\right),\mu_S\left(m\bullet x^{-1}\right)\right\}\quad\text{(dari yang diketahui)}$$

   Untuk mengetahui hasil dari $\min\left\{\mu_S\left(m\bullet e\right),\mu_S\left(m\bullet x^{-1}\right)\right\}$ maka $\mu_S\left(m\bullet e\right)$ diuraikan terlebih dahulu seperti berikut:

$$\mu_S\left(m\bullet e\right)=\mu_S\left(m\bullet\left(x^{-1}*x\right)\right)\quad\text{(sifat invers)}$$

$$=\mu_S\left(m\bullet\left(x^{-1}*\left(x^{-1}\right)^{-1}\right)\right)\quad\text{(proposisi 1)}$$

$$\geq\min\left\{\mu_S\left(m\bullet x^{-1}\right),\mu_S\left(m\bullet x^{-1}\right)\right\}\quad\text{(dari yang diketahui)}$$

$$=\mu_S\left(m\bullet x^{-1}\right)$$

Oleh karenanya diperoleh $\mu_A(m \bullet e) \geq \mu_S(m \bullet x^{-1})$ sehingga berakibat:

$\min\{\mu_S(m \bullet e), \mu_S(m \bullet x^{-1})\} = \mu_S(m \bullet x^{-1})$

Jadi diperoleh $\mu_S(m \bullet x) \geq \mu_S(m \bullet x^{-1})$

Bukti (b)

Misalkan e adalah elemen identitas di G maka $e * x^{-1} = x^{-1} * e = x^{-1}$ sehingga:

$$\mu_S(m \bullet x^{-1}) = \mu_S(m \bullet (e * x^{-1})) \quad \text{(proposisi 1)}$$
$$\geq \min\{\mu_S(m \bullet e), \mu_S(m \bullet x)\} \quad \text{(dari yang diketahui)}$$

Untuk mengetahui hasil dari $\min\{\mu_S(m \bullet e), \mu_S(m \bullet x)\}$ maka $\mu_S(m \bullet e)$ diuraikan terlebih dahulu seperti berikut:

$$\mu_S(m \bullet e) = \mu_S(m \bullet (x * x^{-1})) \quad \text{(sifat invers)}$$
$$\geq \min\{\mu_S(m \bullet x), \mu_S(m \bullet x^{-1})\} \quad \text{(dari yang diketahui)}$$

Berdasarkan aksioma (ii) pada definisi 5 bahwa $\mu_S(x^{-1}) \geq \mu_S(x), \forall x \in G$ maka $\forall m \bullet x \in G$ juga berlaku $\mu_S(m \bullet x^{-1}) = \mu_S((m \bullet x)^{-1}) \geq \mu_S(m \bullet x)$ sehingga $\min\{\mu_S(m \bullet x), \mu_S(m \bullet x^{-1})\} = \mu_S(m \bullet x)$. Oleh karenanya diperoleh $\mu_A(m \bullet e) \geq \mu_S(m \bullet x)$ sehingga mengakibatkan

$\min\{\mu_S(m \bullet e), \mu_S(m \bullet x)\} = \mu_S(m \bullet x)$.

Jadi diperoleh $\mu_S(m \bullet x^{-1}) \geq \mu_S(m \bullet x)$.

Berdasarkan bukti (a) dan (b) maka diperoleh:

(1) $\mu_S(m \bullet x) \geq \mu_S(m \bullet x^{-1})$

(2) $\mu_S\left(m \bullet x^{-1}\right) \geq \mu_S\left(m \bullet x\right)$

Pernyataan (1) mengakibatkan $\mu_S\left(m \bullet x\right) \supseteq \mu_S\left(m \bullet x^{-1}\right)$ dan pernyataan (2) mengakibatkan $\mu_S\left(m \bullet x^{-1}\right) \supseteq \mu_S\left(m \bullet x\right)$ sehingga akibat dari kedua pernyataan tersebut adalah saling subset. Oleh karenanya maka dapat disimpulkan bahwa $\mu_S\left(m \bullet x\right) = \mu_S\left(m \bullet x^{-1}\right), \ \forall x \in S.$

Aksioma (i)

$$\mu_S\left(m \bullet \left(x * y^{-1}\right)\right) \geq \min\left\{\mu_S\left(m \bullet x\right), \mu_S\left(m \bullet y\right)\right\}$$

Berdasarkan aksioma (ii) yang telah dibuktikan bahwa $\mu_S\left(m \bullet y\right) = \mu_S\left(m \bullet y^{-1}\right)$ untuk setiap $y \in S,$ maka:

$$\begin{aligned}\mu_S\left(m \bullet \left(x * y^{-1}\right)\right) &\geq \min\left\{\mu_S\left(m \bullet x\right), \mu_S\left(m \bullet y\right)\right\} \\ &= \min\left\{\mu_S\left(m \bullet x\right), \mu_S\left(m \bullet y^{-1}\right)\right\}\end{aligned}$$

Jadi diperoleh $\mu_S\left(m \bullet \left(x * y^{-1}\right)\right) \geq \min\left\{\mu_S\left(m \bullet x\right), \mu_S\left(m \bullet y^{-1}\right)\right\}, \forall x, y \in S$

Karena telah memenuhi aksioma (i) dan (ii) maka $(S, *)$ dapat dikatakan subgrup-M fuzzy dari A.

Karena bukti 1) dan 2) teleh terpenuhi maka terbukti bahwa $(S, *)$ dapat dikatakan subgrup-M fuzzy dari A jika dan hanya jika:

$$\mu_S\left(m \bullet \left(x * y^{-1}\right)\right) \geq \min\left\{\mu_S\left(m \bullet x\right), \mu_S\left(m \bullet y^{-1}\right)\right\}, \forall x, y \in S$$

Contoh 3.13:

Berdasarkan contoh 3.9 jika S adalah subset fuzzy dari A dan μ_S didefinisikan $\mu_S : \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ dimana:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} \alpha & \text{untuk } x \in 2\mathbb{Z} \\ \beta & \text{untuk } x \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

maka buktikan bahwa $(S,+)$ adalah subgrup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(A,+)$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $(S,+)$ adalah subgrup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(A,+)$ maka akan ditunjukkan bahwa $(S,+)$ memenuhi:

$$\mu_S\left(n\left(x+y^{-1}\right)\right) \geq \min\left\{\mu_S(nx), \mu_S\left(ny^{-1}\right)\right\}, \forall x, y \in S$$

dengan menggunakan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$ maka berlaku:

   (a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

   (b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

   (c) $y^{-1} \in 2\mathbb{Z} \rightarrow ny^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

   (d) $n(x+y) = (nx) + \left(ny^{-1}\right) \in 2\mathbb{Z}$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_S(nx) = \alpha$

   (b) $\mu_S(ny) = \alpha$

   (c) $\mu_S\left(n\left(x+y^{-1}\right)\right) = \alpha$

   Akibatnya $\min\left\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\right\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_S\left(n\left(x+y^{-1}\right)\right) = \alpha$ dan $\min\left\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\right\} = \alpha$ sehingga $\mu_S\left(n\left(x+y^{-1}\right)\right) = \min\left\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\right\}$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}, x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}, x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

(c) $y^{-1} \in 2\mathbb{Z} \rightarrow ny^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

(d) $n(x+y) = (nx) + (ny^{-1}) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_S(nx) = \alpha$

(b) $\mu_S(ny) = \alpha$

(c) $\mu_S(n(x+y^{-1})) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_S(n(x+y^{-1})) = \alpha$ dan $\min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_S(n(x+y^{-1})) = \min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\}$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

(c) $y^{-1} \in 2\mathbb{Z} \rightarrow ny^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

(d) $n(x+y) = (nx) + (ny^{-1}) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_S(nx) = \alpha$

(b) $\mu_S(ny) = \alpha$

(c) $\mu_S(n(x + y^{-1})) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_S(n(x + y^{-1})) = \alpha$ dan $\min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_S(n(x + y^{-1})) = \min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\}$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N} + 1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N} + 1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}$

(c) $y^{-1} \in 2\mathbb{Z} \to ny^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

(d) $n(x + y) = (nx) + (ny^{-1}) \in 2\mathbb{Z}$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_S(nx) = \alpha$

(b) $\mu_S(ny) = \alpha$

(c) $\mu_S(n(x + y^{-1})) = \alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$. Jadi dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_S(n(x + y^{-1})) = \alpha$ dan $\min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\} = \alpha$ sehingga $\mu_S(n(x + y^{-1})) = \min\{\mu_S(nx), \mu_S(ny)\}$.

5. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N} + 1, x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z} + 1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N} + 1, x \in 2\mathbb{Z},$ dan $y \in 2\mathbb{Z} + 1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}+1$

(c) $y^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1 \rightarrow ny^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$

(d) $n(x+y)=(nx)+(ny^{-1}) \in 2\mathbb{Z}+1$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_S(nx)=\alpha$

(b) $\mu_S(ny)=\beta$

(c) $\mu_S(n(x+y^{-1}))=\beta$

Akibatnya $\min\{\mu_S(nx),\mu_S(ny)\}=\min\{\beta,\beta\}=\beta$. Jadi dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_S(n(x+y^{-1}))=\beta$ dan $\min\{\mu_S(nx),\mu_S(ny)\}=\beta$ sehingga $\mu_S(n(x+y^{-1}))=\min\{\mu_S(nx),\mu_S(ny)\}$.

6. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$ maka berlaku:

(a) $nx \in 2\mathbb{Z}+1$

(b) $ny \in 2\mathbb{Z}+1$

(c) $y^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1 \rightarrow ny^{-1} \in 2\mathbb{Z}+1$

(d) $n(x+y)=(nx)+(ny^{-1}) \in 2\mathbb{Z}$

Sehingga:

(a) $\mu_S(nx)=\beta$

(b) $\mu_S(ny)=\beta$

(c) $\mu_S(n(x+y^{-1}))=\alpha$

Akibatnya $\min\{\mu_S(nx),\mu_S(ny)\}=\min\{\beta,\beta\}=\beta$. Jadi dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_S\left(n\left(x+y^{-1}\right)\right)=\alpha$ dan $\min\{\mu_S(nx),\mu_S(ny)\}=\beta$ sehingga $\mu_S\left(n\left(x+y^{-1}\right)\right)>\min\{\mu_S(nx),\mu_S(ny)\}$.

Dari beberapa kondisi yang diberikan maka dapat disimpulkan bahwa:

$\mu_S\left(n\left(x+y^{-1}\right)\right)\geq\min\{\mu_S(nx),\mu_S(ny)\}$.

sehingga terbukti bahwa $(S,+)$ adalah subgrup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(A,+)$.

3.2.2 Bentuk Perpangkatan Grup-M fuzzy

Bentuk sifat yang kedua adalah bentuk perpangkatan dari grup-M fuzzy yang dijamin oleh teorema berikut:

Teorema 2:

Misalkan $(G,*)$ sebagai grup-M dengan $\bullet$ adalah operasi di M. Jika $(A,*)$ adalah grup-M fuzzy dari $(G,*)$ maka A^p juga merupakan grup-M fuzzy dimana A^p didefinisikan sebagai:

$$A^p=\left\{(m\bullet x),(\mu_A(m\bullet x))^p \middle| m\bullet x\in G\right\}$$

dengan,

$$(\mu_A(m\bullet x))^p=\underbrace{(\mu_A(m\bullet x))\times(\mu_A(m\bullet x))\times\ldots\times(\mu_A(m\bullet x))}_{p}$$

merupakan fungsi keanggotaan grup-M fuzzy yang dipangkatkan sebesar p untuk setiap p bilangan asli.

Bukti:

Telah diketahui bahwa $(A,*)$ adalah grup-M fuzzy dari $(G,*)$, dengan $(G,*)$ adalah grup-M. Misalkan $m \bullet x$ dan $m \bullet y \in A^p$, dengan p adalah sebarang bilangan bulat positif. Maka untuk membuktikan bahwa $A^p = \left\{ (m \bullet x), (\mu_A(m \bullet x))^p \middle| m \bullet x \in G \right\}$ adalah grup-M fuzzy akan digunakan aksioma pada definisi grup-M fuzzy sebagai berikut:

Aksioma (i)

$$\mu_{A^p}(m \bullet (x * y)) = (\mu_A(m \bullet (x * y)))^p$$

$$= \underbrace{(\mu_A(m \bullet (x * y))) \times (\mu_A(m \bullet (x * y))) \times \ldots \times (\mu_A(m \bullet (x * y)))}_{p}$$

Telah diketahui bahwa A grup-M fuzzy sehingga:

Misalkan $d = \underbrace{(\mu_A(m \bullet (x * y))) \times (\mu_A(m \bullet (x * y))) \times \ldots \times (\mu_A(m \bullet (x * y)))}_{p}$ maka:

$$d \geq \underbrace{\min\{\mu_A(m \bullet x), \mu_A(m \bullet y)\} \times \ldots . \times \min\{\mu_A(m \bullet x), \mu_A(m \bullet y)\}}_{p}$$

$$= \min \underbrace{\{\{\mu_A(m \bullet x), \mu_A(m \bullet y)\} \times \ldots . \times \{\mu_A(m \bullet x), \mu_A(m \bullet y)\}\}}_{p}$$

$$= \min \left\{ \underbrace{(\mu_A(m \bullet x) \times \ldots \times \mu_A(m \bullet x))}_{p}, \underbrace{(\mu_A(m \bullet y) \times \ldots \times \mu_A(m \bullet y))}_{p} \right\}$$

$$= \min \left\{ (\mu_A(m \bullet x))^p, (\mu_A(m \bullet y))^p \right\}$$

$$= \min \{\mu_{A^p}(m \bullet x), \mu_{A^p}(m \bullet y)\}$$

Jadi diperoleh $\mu_{A^p}(m \bullet (x * y)) \geq \min\{\mu_{A^p}(m \bullet x), \mu_{A^p}(m \bullet y)\}$ sehingga aksioma (i) terpenuhi.

Aksioma (ii)

$$\mu_{A^p}(m \bullet x) = \left(\mu_A(m \bullet x)\right)^p$$

Karena telah diketahui bahwa A grup-M fuzzy maka berlaku:

$$\begin{aligned}
\left(\mu_A(m \bullet x)\right)^p &= \underbrace{\left(\mu_A(m \bullet x)\right) \times \left(\mu_A(m \bullet x)\right) \times \ldots \times \left(\mu_A(m \bullet x)\right)}_{p} \\
&= \underbrace{\left(\mu_A\left(m \bullet x^{-1}\right)\right) \times \left(\mu_A\left(m \bullet x^{-1}\right)\right) \times \ldots \times \left(\mu_A\left(m \bullet x^{-1}\right)\right)}_{p} \\
&= \left(\mu_A\left(m \bullet x^{-1}\right)\right)^p \\
&= \mu_{A^p}\left(m \bullet x^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh $\mu_{A^p}(m \bullet x) = \mu_{A^p}\left(m \bullet x^{-1}\right)$ sehingga aksioma (ii) terpenuhi. Dari uraian di atas, maka terbukti bahwa $(A^p, *)$ memenuhi kedua aksioma pada grup-M fuzzy sehingga dapat dikatakan bahwa $(A^p, *)$ adalah grup-M fuzzy.

Contoh 3.14:

Berdasarkan contoh 3.12, buktikan bahwa $\left(A^3, +\right)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V, +)$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $\left(A^3, +\right)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V, +)$ maka akan ditunjukkan menggunakan dua aksioma pada definisi 8 sebagai berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\mu_{A^3}\left(n(u+v)\right) \geq \min\left\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\right\}$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in P$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in P$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$

$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nu))^3 = \alpha^3$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nv))^3 = \alpha^3$

(c) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = (\mu_A(n(u+v)))^3 = \alpha^3$

Akibatnya $\min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\} = \min\{\alpha^3, \alpha^3\} = \alpha^3$. Jadi berdasarkan uraian pada kondisi 1 maka diperoleh $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \alpha^3$ dan $\min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\} = \alpha^3$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\}$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$, $u \in P$, dan $v \in Q$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$, $u \in P$, dan $v \in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nu))^3 = \alpha^3$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nv))^3 = \alpha^3$

(c) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = (\mu_A(n(u+v)))^3 = \alpha^3$

Akibatnya $\min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\} = \min\{\alpha^3, \alpha^3\} = \alpha^3$. Jadi berdasarkan uraian pada kondisi 2 maka diperoleh $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \alpha^3$ dan $\min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\} = \alpha^3$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\}$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in Q$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nu))^3 = \alpha^3$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nv))^3 = \alpha^3$

(c) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = (\mu_A(n(u+v)))^3 = \alpha^3$

Akibatnya $\min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\} = \min\{\alpha^3, \alpha^3\} = \alpha^3$. Jadi berdasarkan uraian pada kondisi 3 maka diperoleh $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \alpha^3$ dan $\min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\} = \alpha^3$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\}$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u, v \in P$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u, v \in P$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nu))^3 = \alpha^3$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nv))^3 = \alpha^3$

(c) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = (\mu_A(n(u+v)))^3 = \alpha^3$

Akibatnya $\min\{\mu_{A^3}(nu),\mu_{A^3}(nv)\}=\min\{\alpha^3,\alpha^3\}=\alpha^3$. Jadi pada uraian kondisi 4 diperoleh $\mu_{A^3}(n(u+v))=\alpha^3$ dan $\min\{\mu_{A^3}(nu),\mu_{A^3}(nv)\}=\alpha^3$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^3}(n(u+v))=\min\{\mu_{A^3}(nu),\mu_{A^3}(nv)\}$.

5. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1,\ u\in P,$ dan $v\in Q$

   Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1,\ u\in P,$ dan $v\in Q$ maka berlaku:

   (a) $nu=n(u_1,u_2,u_3)=(nu_1,nu_2,nu_3)\in P$

   (b) $nv=n(v_1,v_2,v_3)=(nv_1,nv_2,nv_3)\in Q$

   (c) $n(u+v)=n(u_1,u_2,u_3)+n(v_1,v_2,v_3)$

   $$=(nu_1,nu_2,nu_3)+(nv_1,nv_2,nv_3)$$

   $$=(nu_1+nv_1,nu_2+nv_2,nu_3+nv_3)\in Q$$

   Oleh karenanya maka:

   (a) $\mu_{A^3}(nu)=(\mu_A(nu))^3=\alpha^3$

   (b) $\mu_{A^3}(nu)=(\mu_A(nv))^3=\beta^3$

   (c) $\mu_{A^3}(n(u+v))=(\mu_A(n(u+v)))^3=\beta^3$

   Akibatnya $\min\{\mu_{A^3}(nu),\mu_{A^3}(nv)\}=\min\{\alpha^3,\beta^3\}=\beta^3$. Jadi berdasarkan uraian pada kondisi 5 maka diperoleh $\mu_{A^3}(n(u+v))=\beta^3$ dan $\min\{\mu_{A^3}(nu),\mu_{A^3}(nv)\}=\beta^3$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^3}(n(u+v))=\min\{\mu_{A^3}(nu),\mu_{A^3}(nv)\}$.

6. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1$ dan $u,v\in Q$

   Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1$ dan $u,v\in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in Q$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in Q$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nu))^3 = \beta^3$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = (\mu_A(nv))^3 = \beta^3$

(c) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = (\mu_A(n(u+v)))^3 = \alpha^3$

Akibatnya $\min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\} = \min\{\alpha^3, \alpha^3\} = \alpha^3$. Jadi berdasarkan uraian pada kondisi 6 maka diperoleh $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \alpha^3$ dan $\min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\} = \beta^3$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^3}(n(u+v)) > \min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\}$

Aksioma (ii)

Pada aksioma (ii) akan ditunjukkan bahwa A memenuhi $\mu_{A^3}(nv) = \mu_{A^3}(nv^{-1})$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $v \in P$

   Jika $v \in P$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}$ maka $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in P$ akibatnya:

   (a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

   (b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nv) = (\mu_A(nv))^3 = \alpha^3$

(b) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = (\mu_A(nv^{-1}))^3 = \alpha^3$

Jadi, dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_{A^3}(nv) = \alpha^3$ dan $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \alpha^3$ sehingga $\mu_{A^3}(nv) = \mu_{A^3}(nv^{-1})$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $v \in Q$

Jika $v \in Q$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in Q$ akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nv) = (\mu_A(nv))^3 = \alpha^3$

(b) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = (\mu_A(nv^{-1}))^3 = \alpha^3$

Jadi, dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_{A^3}(nv) = \alpha^3$ dan $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \alpha^3$ sehingga $\mu_{A^3}(nv) = \mu_{A^3}(nv^{-1})$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $v \in P$

Jika $v \in P$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}$ maka $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in P$ akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nv) = (\mu_A(nv))^3 = \alpha^3$

(b) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = (\mu_A(nv^{-1}))^3 = \alpha^3$

Jadi, dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_{A^3}(nv) = \alpha^3$ dan $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \alpha^3$ sehingga $\mu_{A^3}(nv) = \mu_{A^3}(nv^{-1})$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $v \in Q$

Jika $v \in Q$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}+1$ maka $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in Q$ akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in Q$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in Q$

Oleh karenanya maka:

(a) $\mu_{A^3}(nv) = (\mu_A(nv))^3 = \beta^3$

(b) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = (\mu_A(nv^{-1}))^3 = \beta^3$

Jadi, dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_{A^3}(nv) = \beta^3$ dan $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \beta^3$ sehingga $\mu_{A^3}(nv) = \mu_{A^3}(nv^{-1})$.

Dari beberapa kondisi yang diberikan pada aksioma (i) dan (ii) maka dapat disimpulkan:

(i) $\mu_{A^3}(n(u+v)) \geq \min\{\mu_{A^3}(nu), \mu_{A^3}(nv)\}$

(ii) $\mu_{A^3}(nv) = \mu_{A^3}(nv^{-1})$

Jadi aksioma (i) dan (ii) pada definisi 8 telah terpenuhi sehingga terbukti bahwa $(A^3,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V,+)$.

3.2.3 Bentuk Gabungan dari Perpangkatan Grup-M fuzzy

Bentuk sifat struktur grup-M fuzzy ketiga adalah gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy yang dijamin oleh teorema berikut:

Teorema 3:

Misalkan $(G,*)$ adalah grup-M dengan $\bullet$ adalah operasi di M. Jika $(A^i, *)$ dan $(A^j, *)$ adalah grup-M fuzzy dari G maka $(A^i \cup A^j, *)$ juga merupakan grup-M fuzzy dari G untuk setiap $i, j \in$ bilangan asli.

Bukti:

Telah diketahui bahwa $(A^i, *)$ dan $(A^j, *)$ adalah grup-M fuzzy dari G. Andaikan $i < j$ maka berlaku $\mu_{A^i}(x) > \mu_{A^j}(x), \forall\, x \in A$. Untuk membuktikan $A^i \cup A^j$ merupakan grup-M fuzzy dari G maka digunakan dua aksioma pada definisi 8 sebagai berikut:

Aksioma (i)

Berdasarkan gabungan fuzzy standar, maka:

$$\mu_{A^i \cup A^j}(m\bullet(x*y)) = \max\{\mu_{A^i}(m\bullet(x*y)), \mu_{A^j}(m\bullet(x*y))\}$$

$$= \max\left\{\left(\mu_A(m\bullet(x*y))\right)^i, \left(\mu_A(m\bullet(x*y))\right)^j\right\}$$

$$= \left(\mu_A(m\bullet(x*y))\right)^i$$

$$= \mu_{A^i}(m\bullet(x*y))$$

Berdasarkan teorema 2 maka:

$$\mu_{A^i}\left(m\bullet(x*y)\right)\geq \min\left\{\mu_{A^i}(m\bullet x),\mu_{A^j}(m\bullet y)\right\}$$
$$=\min\left\{\max\left\{\mu_{A^i}(m\bullet x),\mu_{A^j}(m\bullet x)\right\},\max\left\{\mu_{A^i}(m\bullet y),\mu_{A^j}(m\bullet y)\right\}\right\}$$
$$\geq \min\left\{\mu_{A^i\cup A^j}(m\bullet x),\mu_{A^i\cup A^j}(m\bullet y)\right\}$$

Jadi diperoleh $\mu_{A^i\cup A^j}\left(m\bullet(x*y)\right)\geq \min\left\{\mu_{A^i\cup A^j}(m\bullet x),\mu_{A^i\cup A^j}(m\bullet y)\right\}$ sehingga aksioma (i) terpenuhi.

Aksioma (ii)

$$\mu_{A^i\cup A^j}(m\bullet x)=\max\left\{\mu_{A^i}(m\bullet x),\mu_{A^j}(m\bullet x)\right\}$$
$$=\max\left\{\left(\mu_A(m\bullet x)\right)^i,\left(\mu_A(m\bullet x)\right)^j\right\}$$

Berdasarkan teorema 2 maka:

$$\max\left\{\left(\mu_A(m\bullet x)\right)^i,\left(\mu_A(m\bullet x)\right)^j\right\}=\max\left\{\left(\mu_A(m\bullet x^{-1})\right)^i,\left(\mu_A(m\bullet x^{-1})\right)^j\right\}$$
$$=\max\left\{\mu_{A^i}(m\bullet x^{-1}),\mu_{A^j}(m\bullet x^{-1})\right\}$$
$$=\mu_{A^i\cup A^j}(m\bullet x^{-1})$$

Jadi diperoleh $\mu_{A^i\cup A^j}(m\bullet x)=\mu_{A^i\cup A^j}(m\bullet x^{-1})$ sehingga aksioma (ii) terpenuhi. Dengan terpenuhinya aksioma (i) dan (ii) maka terbukti jika $(A^i,*)$ dan $(A^j,*)$ adalah grup-M fuzzy maka $(A^i\cup A^j,*)$ juga merupakan grup-M fuzzy untuk setiap $i,j\in$ bilangan asli.

Contoh 3.15:

Berdasarkan contoh 3.14 jika $(A^2,+)$ dan $(A^3,+)$ adalah grup fuzzy-$\mathbb{N}$ dari $(V,+)$ dengan μ_{A^2} dan μ_{A^3} didefinisikan sebagai $\mu_{A^2},\mu_{A^3}:V\to[0,1]$ dengan:

$$\mu_{A^2}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{untuk } x \in P \\ \beta & \text{untuk } x \in Q \end{cases}$$

$$\mu_{A^3}(x) = \begin{cases} \gamma & \text{untuk } x \in P \\ \lambda & \text{untuk } x \in Q \end{cases}$$

maka buktikan bahwa $\left(A^2 \cup A^3, +\right)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V,+)$ untuk $\alpha > \beta, \gamma > \lambda$ dan $\alpha, \beta > \gamma, \lambda$ dengan $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in [0,1]$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $\left(A^2 \cup A^3, +\right)$ adalah grup fuzzy-$\mathbb{N}$ dari $(V,+)$ maka akan ditunjukkan menggunakan dua aksioma pada definisi 8 sebagai berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\left(A^2 \cup A^3, +\right)$ memenuhi $\mu_{A^2 \cup A^3}\left(n(u+v)\right) \geq \min\left\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu), \mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\right\}$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in P$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in P$ maka berlaku:

   (a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

   (b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

   (c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

   $$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

   $$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

   Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu)=\alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nu)=\gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv)=\alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv)=\gamma$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v))=\alpha$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v))=\gamma$

Akibatnya:

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v)) &= \max\{\mu_{A^2}(n(u+v)),\mu_{A^3}(n(u+v))\}\\ &= \max\{\alpha,\gamma\}\\ &= \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^2}(nu) &= \max\{\mu_{A^2}(nu),\mu_{A^3}(nu)\}\\ &= \max\{\alpha,\gamma\}\\ &= \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^2}(nv) &= \max\{\mu_{A^2}(nv),\mu_{A^3}(nv)\}\\ &= \max\{\alpha,\gamma\}\\ &= \alpha\end{aligned}$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}=\min\{\alpha,\alpha\}=\alpha$

Berdasarkan uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v))=\alpha$ dan $\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}=\alpha$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v))=\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}$.

2. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}, u\in P,$ dan $v\in Q$

   Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}, u\in P,$ dan $v\in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v)) = \alpha$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \gamma$

Akibatnya:

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v)) &= \max\{\mu_{A^2}(n(u+v)), \mu_{A^3}(n(u+v))\} \\ &= \max\{\alpha, \gamma\} \\ &= \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^2}(nu) &= \max\{\mu_{A^2}(nu), \mu_{A^3}(nu)\} \\ &= \max\{\alpha, \gamma\} \\ &= \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^2}(nv) &= \max\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\} \\ &= \max\{\alpha, \gamma\} \\ &= \alpha\end{aligned}$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu), \mu_{A^2\cup A^3}(nv)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$

Berdasarkan uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_{A^2 \cup A^3}\left(n(u+v)\right)=\alpha$ dan $\min\left\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu),\mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\right\}=\alpha$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2 \cup A^3}\left(n(u+v)\right)=\min\left\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu),\mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\right\}$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u,v \in Q$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u,v \in Q$ maka berlaku:

   (a) $nu = n(u_1,u_2,u_3)=(nu_1,nu_2,nu_3) \in P$

   (b) $nv = n(v_1,v_2,v_3)=(nv_1,nv_2,nv_3) \in P$

   (c) $n(u+v)=n(u_1,u_2,u_3)+n(v_1,v_2,v_3)$

   $$=(nu_1,nu_2,nu_3)+(nv_1,nv_2,nv_3)$$

   $$=(nu_1+nv_1,nu_2+nv_2,nu_3+nv_3) \in P$$

   Sehingga:

   (a) $\mu_{A^2}(nu)=\alpha$

   (b) $\mu_{A^3}(nu)=\gamma$

   (c) $\mu_{A^2}(nv)=\alpha$

   (d) $\mu_{A^3}(nv)=\gamma$

   (e) $\mu_{A^2}\left(n(u+v)\right)=\alpha$

   (f) $\mu_{A^3}\left(n(u+v)\right)=\gamma$

   Akibatnya:

   $$\begin{aligned}\mu_{A^2 \cup A^3}\left(n(u+v)\right) &= \max\left\{\mu_{A^2}\left(n(u+v)\right),\mu_{A^3}\left(n(u+v)\right)\right\} \\ &= \max\{\alpha,\gamma\} \\ &= \alpha\end{aligned}$$

$$\mu_{A^2 \cup A^2}(nu) = \max\{\mu_{A^2}(nu), \mu_{A^3}(nu)\}$$
$$= \max\{\alpha, \gamma\}$$
$$= \alpha$$

$$\mu_{A^2 \cup A^2}(nv) = \max\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\}$$
$$= \max\{\alpha, \gamma\}$$
$$= \alpha$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu), \mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$

Berdasarkan uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_{A^2 \cup A^3}(n(u+v)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu), \mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\} = \alpha$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2 \cup A^3}(n(u+v)) = \min\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu), \mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\}$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u, v \in P$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u, v \in P$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$
$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$
$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv)=\gamma$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v))=\alpha$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v))=\gamma$

Akibatnya:

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v)) &= \max\{\mu_{A^2}(n(u+v)),\mu_{A^3}(n(u+v))\}\\ &= \max\{\alpha,\gamma\}\\ &= \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^2}(nu) &= \max\{\mu_{A^2}(nu),\mu_{A^3}(nu)\}\\ &= \max\{\alpha,\gamma\}\\ &= \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^2}(nv) &= \max\{\mu_{A^2}(nv),\mu_{A^3}(nv)\}\\ &= \max\{\alpha,\gamma\}\\ &= \alpha\end{aligned}$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}=\min\{\alpha,\alpha\}=\alpha$

Berdasarkan uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v))=\alpha$ dan $\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}=\alpha$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v))=\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}$.

5. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1, u\in P,$ dan $v\in Q$

Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1, u\in P,$ dan $v\in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in Q$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$

$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in Q$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv) = \beta$

(d) $\mu_{A^3}(nv) = \lambda$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v)) = \beta$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \lambda$

Akibatnya:

$$\mu_{A^2 \cup A^3}(n(u+v)) = \max\{\mu_{A^2}(n(u+v)), \mu_{A^3}(n(u+v))\}$$

$$= \max\{\beta, \lambda\}$$

$$= \beta$$

$$\mu_{A^2 \cup A^2}(nu) = \max\{\mu_{A^2}(nu), \mu_{A^3}(nu)\}$$

$$= \max\{\alpha, \gamma\}$$

$$= \alpha$$

$$\mu_{A^2 \cup A^2}(nv) = \max\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\}$$

$$= \max\{\beta, \lambda\}$$

$$= \beta$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}=\min\{\alpha,\beta\}=\beta$

Berdasarkan uraian pada kondisi 5 diperoleh $\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v))=\beta$ dan $\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}=\beta$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v))=\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}$.

6. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1$ dan $u,v\in Q$

Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1$ dan $u,v\in Q$ maka berlaku:

(a) $nu=n(u_1,u_2,u_3)=(nu_1,nu_2,nu_3)\in Q$

(b) $nv=n(v_1,v_2,v_3)=(nv_1,nv_2,nv_3)\in Q$

(c) $n(u+v)=n(u_1,u_2,u_3)+n(v_1,v_2,v_3)$

$$=(nu_1,nu_2,nu_3)+(nv_1,nv_2,nv_3)$$

$$=(nu_1+nv_1,nu_2+nv_2,nu_3+nv_3)\in P$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu)=\beta$

(b) $\mu_{A^3}(nu)=\lambda$

(c) $\mu_{A^2}(nv)=\beta$

(d) $\mu_{A^3}(nv)=\lambda$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v))=\alpha$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v))=\gamma$

Akibatnya:

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v))&=\max\{\mu_{A^2}(n(u+v)),\mu_{A^3}(n(u+v))\}\\&=\max\{\alpha,\gamma\}\\&=\alpha\end{aligned}$$

$$\mu_{A^2 \cup A^2}(nu) = \max\{\mu_{A^2}(nu), \mu_{A^3}(nu)\}$$
$$= \max\{\beta, \lambda\}$$
$$= \beta$$

$$\mu_{A^2 \cup A^2}(nv) = \max\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\}$$
$$= \max\{\beta, \lambda\}$$
$$= \beta$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu), \mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\} = \min\{\beta, \beta\} = \beta$

Berdasarkan uraian pada kondisi 6 diperoleh $\mu_{A^2 \cup A^3}(n(u+v)) = \alpha$ dan $\min\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu), \mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\} = \beta$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2 \cup A^3}(n(u+v)) > \min\{\mu_{A^2 \cup A^3}(nu), \mu_{A^2 \cup A^3}(nv)\}$.

Aksioma (ii)

Pada aksioma (ii) akan ditunjukkan $(A^2 \cup A^3, +)$ bahwa memenuhi $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1})$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $v \in P$

   Jika $v \in P$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}$ maka $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in P$ akibatnya:

   (a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

   (b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

   Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv^{-1}) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \gamma$

Akibatnya:

(a) $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \max\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\} = \max\{\alpha, \gamma\} = \alpha$

(b) $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1}) = \max\{\mu_{A^2}(nv^{-1}), \mu_{A^3}(nv^{-1})\} = \max\{\alpha, \gamma\} = \alpha$

Jadi, dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \alpha$ dan $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1}) = \alpha$ sehingga $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1})$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $v \in Q$

Jika $v \in Q$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z} + 1$ maka

$v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in Q$ akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv^{-1}) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \gamma$

Akibatnya:

(a) $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \max\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\} = \max\{\alpha, \gamma\} = \alpha$

(b) $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1}) = \max\{\mu_{A^2}(nv^{-1}), \mu_{A^3}(nv^{-1})\} = \max\{\alpha, \gamma\} = \alpha$

Jadi, dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \alpha$ dan $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1}) = \alpha$ sehingga $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1})$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $v \in P$

Jika $v \in P$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}$ maka $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in P$ akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv^{-1}) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \gamma$

Akibatnya:

(a) $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \max\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\} = \max\{\alpha, \gamma\} = \alpha$

(b) $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1}) = \max\{\mu_{A^2}(nv^{-1}), \mu_{A^3}(nv^{-1})\} = \max\{\alpha, \gamma\} = \alpha$

Jadi, dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \alpha$ dan $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1}) = \alpha$ sehingga $\mu_{A^2 \cup A^3}(nv) = \mu_{A^2 \cup A^3}(nv^{-1})$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $v \in Q$

Jika $v \in Q$, dengan $v=(v_1,v_2,v_3)$, $\forall v_1,v_2,v_3 \in 2\mathbb{Z}+1$ maka

$v^{-1}=(-v_1,-v_2,-v_3) \in Q$ akibatnya:

(a) $nv = n(v_1,v_2,v_3)=(nv_1,nv_2,nv_3) \in Q$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1,-v_2,-v_3)=(-nv_1,-nv_2,-nv_3) \in Q$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nv)=\beta$

(b) $\mu_{A^3}(nv)=\lambda$

(c) $\mu_{A^2}(nv^{-1})=\beta$

(d) $\mu_{A^3}(nv^{-1})=\lambda$

Akibatnya:

(a) $\mu_{A^2\cup A^3}(nv)=\max\{\mu_{A^2}(nv),\mu_{A^3}(nv)\}=\max\{\beta,\lambda\}=\beta$

(b) $\mu_{A^2\cup A^3}(nv^{-1})=\max\{\mu_{A^2}(nv^{-1}),\mu_{A^3}(nv^{-1})\}=\max\{\beta,\lambda\}=\beta$

Jadi, dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_{A^2\cup A^3}(nv)=\beta$ dan $\mu_{A^2\cup A^3}(nv^{-1})=\beta$ sehingga $\mu_{A^2\cup A^3}(nv)=\mu_{A^2\cup A^3}(nv^{-1})$.

Dari beberapa kondisi yang diberikan pada aksioma (i) dan (ii) maka dapat disimpulkan bahwa:

(i) $\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v)) \geq \min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}$

(ii) $\mu_{A^2\cup A^3}(nv)=\mu_{A^2\cup A^3}(nv^{-1})$

Jadi aksioma (i) dan (ii) pada definisi 8 telah terpenuhi sehingga terbukti bahwa $(A^2\cup A^3,+)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V,+)$.

3.2.4 Bentuk Irisan dari Perpangkatan Grup-M fuzzy

Bentuk sifat struktur grup-M fuzzy yang keempat adalah irisan dari perpangkatan grup-M fuzzy yang dijamin oleh teorema berikut:

Teorema 4:

Misalkan $(G,*)$ adalah grup-M dengan $\bullet$ adalah operasi di M. Jika $(A^i,\ *)$ dan $(A^j,\ *)$ adalah grup-M fuzzy dari G maka $(A^i \cap A^j,\ *)$ juga merupakan grup-M fuzzy dari G untuk setiap $i, j \in$ bilangan asli.

Bukti:

Telah diketahui bahwa $(A^i,\ *)$ dan $(A^j,\ *)$ adalah grup-M fuzzy. Andaikan $i < j$ maka berlaku $\mu_{A^i}(x) > \mu_{A^j}(x), \forall\, x \in A$. Untuk membuktikan $A^i \cap A^j$ maka digunakan dua aksioma pada definisi grup-M fuzzy sebagai berikut:

Aksioma (i)

Berdasarkan irisan fuzzy standar maka:

$$\begin{aligned}
\mu_{A^i \cap A^j}(m \bullet (x * y)) &= \min\{\mu_{A^i}(m \bullet (x * y)), \mu_{A^j}(m \bullet (x * y))\} \\
&= \min\left\{\left(\mu_A(m \bullet (x * y))\right)^i, \left(\mu_A(m \bullet (x * y))\right)^j\right\} \\
&= \left(\mu_A(m \bullet (x * y))\right)^j \\
&= \mu_{A^j}(m \bullet (x * y))
\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 2 maka:

$$\mu_{A^j}\left(m\bullet(x*y)\right) \geq \min\left\{\mu_{A^j}(m\bullet x), \mu_{A^j}(m\bullet y)\right\}$$

$$= \min\left\{\min\left\{\mu_{A^i}(m\bullet x), \mu_{A^j}(m\bullet x)\right\}, \min\left\{\mu_{A^i}(m\bullet y), \mu_{A^j}(m\bullet y)\right\}\right\}$$

$$\geq \min\left\{\mu_{A^i\cap A^j}(m\bullet x), \mu_{A^i\cap A^j}(m\bullet y)\right\}$$

Jadi diperoleh $\mu_{A^i\cap A^j}\left(m\bullet(x*y)\right) \geq \min\left\{\mu_{A^i\cap A^j}(m\bullet x), \mu_{A^i\cap A^j}(m\bullet y)\right\}$ sehingga aksioma (i) terpenuhi.

Aksioma (ii)

$$\mu_{A^i\cap A^j}(m\bullet x) = \min\{\mu_{A^i}(m\bullet x), \mu_{A^j}(m\bullet x)\}$$

$$= \min\left\{\left(\mu_A(m\bullet x)\right)^i, \left(\mu_A(m\bullet x)\right)^j\right\}$$

$$= \min\left\{\left(\mu_A(m\bullet x^{-1})\right)^i, \left(\mu_A(m\bullet x^{-1})\right)^j\right\}$$

$$= \min\{\mu_{A^i}(m\bullet x^{-1}), \mu_{A^j}(m\bullet x^{-1})\}$$

$$= \mu_{A^i\cap A^j}(m\bullet x^{-1})$$

Jadi diperoleh $\mu_{A^i\cap A^j}(m\bullet x) = \mu_{A^i\cap A^j}(m\bullet x^{-1})$ sehingga aksioma (ii) terpenuhi. Dengan terpenuhinya aksioma (i) dan (ii) maka terbukti jika $(A^i, *)$ dan $(A^j, *)$ adalah grup-M fuzzy maka $(A^i \cap A^j, *)$ juga merupakan grup-M fuzzy untuk setiap $i, j \in$ bilangan asli.

Contoh 3.16:

Berdasarkan contoh 3.15 maka buktikan bahwa $(A^2 \cap A^3, +)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V, +)$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $(A^2 \cap A^3, +)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V, +)$ maka akan ditunjukkan menggunakan dua aksioma pada definisi 8 sebagai berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma (i) akan ditunjukkan bahwa $\left(A^2 \cap A^3, +\right)$ memenuhi $\mu_{A^2 \cap A^3}\left(n(u+v)\right) \geq \min\left\{\mu_{A^2 \cap A^3}(nu), \mu_{A^2 \cap A^3}(nv)\right\}$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in P$

   Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in P$ maka berlaku:

   (a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

   (b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

   (c) $$\begin{aligned} n(u+v) &= n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3) \\ &= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3) \\ &= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P \end{aligned}$$

   Sehingga:

   (a) $\mu_{A^2}(nu) = \alpha$

   (b) $\mu_{A^3}(nu) = \gamma$

   (c) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

   (d) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

   (e) $\mu_{A^2}\left(n(u+v)\right) = \alpha$

   (f) $\mu_{A^3}\left(n(u+v)\right) = \gamma$

   Akibatnya:

   $$\begin{aligned} \mu_{A^2 \cap A^3}\left(n(u+v)\right) &= \min\left\{\mu_{A^2}\left(n(u+v)\right), \mu_{A^3}\left(n(u+v)\right)\right\} \\ &= \min\{\alpha, \gamma\} \\ &= \gamma \end{aligned}$$

$$\mu_{A^2 \cap A^2}(nu) = \min\{\mu_{A^2}(nu), \mu_{A^3}(nu)\}$$
$$= \min\{\alpha, \gamma\}$$
$$= \gamma$$

$$\mu_{A^2 \cap A^2}(nv) = \min\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\}$$
$$= \min\{\alpha, \gamma\}$$
$$= \gamma$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2 \cap A^3}(nu), \mu_{A^2 \cap A^3}(nv)\} = \min\{\gamma, \gamma\} = \gamma$

Berdasarkan uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_{A^2 \cap A^3}(n(u+v)) = \gamma$ dan $\min\{\mu_{A^2 \cap A^3}(nu), \mu_{A^2 \cap A^3}(nv)\} = \gamma$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2 \cap A^3}(n(u+v)) = \min\{\mu_{A^2 \cap A^3}(nu), \mu_{A^2 \cap A^3}(nv)\}$.

2. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}, u \in P,$ dan $v \in Q$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}, u \in P,$ dan $v \in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$

$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$
$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v)) = \alpha$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \gamma$

Akibatnya:

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cap A^3}(n(u+v)) &= \min\{\mu_{A^2}(n(u+v)), \mu_{A^3}(n(u+v))\}\\ &= \min\{\alpha,\gamma\}\\ &= \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cap A^2}(nu) &= \min\{\mu_{A^2}(nu), \mu_{A^3}(nu)\}\\ &= \min\{\alpha,\gamma\}\\ &= \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cap A^2}(nv) &= \min\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\}\\ &= \min\{\alpha,\gamma\}\\ &= \gamma\end{aligned}$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu), \mu_{A^2\cap A^3}(nv)\} = \min\{\gamma,\gamma\} = \gamma$

Berdasarkan uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_{A^2\cap A^3}(n(u+v)) = \gamma$ dan $\min\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu), \mu_{A^2\cap A^3}(nv)\} = \alpha$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2\cap A^3}(n(u+v)) = \min\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu), \mu_{A^2\cap A^3}(nv)\}$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in Q$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $u, v \in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $$\begin{aligned} n(u+v) &= n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3) \\ &= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3) \\ &= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P \end{aligned}$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v)) = \alpha$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \gamma$

Akibatnya:

$$\begin{aligned} \mu_{A^2 \cap A^3}(n(u+v)) &= \min\{\mu_{A^2}(n(u+v)), \mu_{A^3}(n(u+v))\} \\ &= \min\{\alpha, \gamma\} \\ &= \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{A^2 \cap A^2}(nu) &= \min\{\mu_{A^2}(nu), \mu_{A^3}(nu)\} \\ &= \min\{\alpha, \gamma\} \\ &= \gamma \end{aligned}$$

$$\mu_{A^2 \cap A^2}(nv) = \min\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\}$$
$$= \min\{\alpha, \gamma\}$$
$$= \gamma$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2 \cap A^3}(nu), \mu_{A^2 \cap A^3}(nv)\} = \min\{\gamma, \gamma\} = \gamma$

Berdasarkan uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_{A^2 \cap A^3}(n(u+v)) = \gamma$ dan $\min\{\mu_{A^2 \cap A^3}(nu), \mu_{A^2 \cap A^3}(nv)\} = \gamma$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2 \cap A^3}(n(u+v)) = \min\{\mu_{A^2 \cap A^3}(nu), \mu_{A^2 \cap A^3}(nv)\}$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u, v \in P$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u, v \in P$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1, u_2, u_3) = (nu_1, nu_2, nu_3) \in P$

(b) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(c) $n(u+v) = n(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3)$
$$= (nu_1, nu_2, nu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3)$$
$$= (nu_1 + nv_1, nu_2 + nv_2, nu_3 + nv_3) \in P$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v)) = \alpha$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \gamma$

Akibatnya:

$$\mu_{A^2\cap A^3}\left(n(u+v)\right)=\min\left\{\mu_{A^2}\left(n(u+v)\right),\mu_{A^3}\left(n(u+v)\right)\right\}$$
$$=\min\{\alpha,\gamma\}$$
$$=\gamma$$

$$\mu_{A^2\cap A^2}(nu)=\min\left\{\mu_{A^2}(nu),\mu_{A^3}(nu)\right\}$$
$$=\min\{\alpha,\gamma\}$$
$$=\gamma$$

$$\mu_{A^2\cap A^2}(nv)=\min\left\{\mu_{A^2}(nv),\mu_{A^3}(nv)\right\}$$
$$=\min\{\alpha,\gamma\}$$
$$=\gamma$$

Oleh karenanya maka $\min\left\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu),\mu_{A^2\cap A^3}(nv)\right\}=\min\{\gamma,\gamma\}=\gamma$

Berdasarkan uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_{A^2\cap A^3}\left(n(u+v)\right)=\gamma$ dan $\min\left\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu),\mu_{A^2\cap A^3}(nv)\right\}=\gamma$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2\cap A^3}\left(n(u+v)\right)=\min\left\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu),\mu_{A^2\cap A^3}(nv)\right\}$.

5. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1, u\in P$, dan $v\in Q$

Jika untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}+1, u\in P$, dan $v\in Q$ maka berlaku:

(a) $nu=n(u_1,u_2,u_3)=(nu_1,nu_2,nu_3)\in P$

(b) $nv=n(v_1,v_2,v_3)=(nv_1,nv_2,nv_3)\in Q$

(c) $n(u+v)=n(u_1,u_2,u_3)+n(v_1,v_2,v_3)$
$$=(nu_1,nu_2,nu_3)+(nv_1,nv_2,nv_3)$$
$$=(nu_1+nv_1,nu_2+nv_2,nu_3+nv_3)\in Q$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu)=\alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nu)=\gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv)=\beta$

(d) $\mu_{A^3}(nv)=\lambda$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v))=\beta$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v))=\lambda$

Akibatnya:

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cap A^3}(n(u+v)) &= \min\{\mu_{A^2}(n(u+v)),\mu_{A^3}(n(u+v))\}\\ &= \min\{\beta,\lambda\}\\ &= \lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cap A^2}(nu) &= \min\{\mu_{A^2}(nu),\mu_{A^3}(nu)\}\\ &= \min\{\alpha,\gamma\}\\ &= \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A^2\cap A^2}(nv) &= \min\{\mu_{A^2}(nv),\mu_{A^3}(nv)\}\\ &= \min\{\beta,\lambda\}\\ &= \lambda\end{aligned}$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu),\mu_{A^2\cap A^3}(nv)\}=\min\{\gamma,\lambda\}=\lambda$

Berdasarkan uraian pada kondisi 5 diperoleh $\mu_{A^2\cap A^3}(n(u+v))=\lambda$ dan $\min\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu),\mu_{A^2\cap A^3}(nv)\}=\lambda$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2\cup A^3}(n(u+v))=\min\{\mu_{A^2\cup A^3}(nu),\mu_{A^2\cup A^3}(nv)\}$.

6. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u,v \in Q$

Jika untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $u,v \in Q$ maka berlaku:

(a) $nu = n(u_1,u_2,u_3) = (nu_1,nu_2,nu_3) \in Q$

(b) $nv = n(v_1,v_2,v_3) = (nv_1,nv_2,nv_3) \in Q$

(c) $n(u+v) = n(u_1,u_2,u_3) + n(v_1,v_2,v_3)$

$$= (nu_1,nu_2,nu_3) + (nv_1,nv_2,nv_3)$$

$$= (nu_1+nv_1, nu_2+nv_2, nu_3+nv_3) \in P$$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nu) = \beta$

(b) $\mu_{A^3}(nu) = \lambda$

(c) $\mu_{A^2}(nv) = \beta$

(d) $\mu_{A^3}(nv) = \lambda$

(e) $\mu_{A^2}(n(u+v)) = \alpha$

(f) $\mu_{A^3}(n(u+v)) = \gamma$

Akibatnya:

$$\mu_{A^2 \cap A^3}(n(u+v)) = \min\{\mu_{A^2}(n(u+v)), \mu_{A^3}(n(u+v))\}$$

$$= \min\{\alpha,\gamma\}$$

$$= \gamma$$

$$\mu_{A^2 \cap A^2}(nu) = \min\{\mu_{A^2}(nu), \mu_{A^3}(nu)\}$$

$$= \min\{\beta,\lambda\}$$

$$= \lambda$$

$$\mu_{A^2\cap A^2}(nv) = \min\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\}$$
$$= \min\{\beta, \lambda\}$$
$$= \lambda$$

Oleh karenanya maka $\min\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu), \mu_{A^2\cap A^3}(nv)\} = \min\{\lambda, \lambda\} = \lambda$

Berdasarkan uraian pada kondisi 6 diperoleh $\mu_{A^2\cap A^3}(n(u+v)) = \gamma$ dan $\min\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu), \mu_{A^2\cap A^3}(nv)\} = \lambda$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mu_{A^2\cap A^3}(n(u+v)) > \min\{\mu_{A^2\cap A^3}(nu), \mu_{A^2\cap A^3}(nv)\}$.

Aksioma (ii)

Pada aksioma (ii) akan ditunjukkan $(A^2 \cap A^3, +)$ bahwa memenuhi $\mu_{A^2\cap A^3}(nv) = \mu_{A^2\cap A^3}(nv^{-1})$ dengan beberapa kondisi berikut:

1. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}$ dan $v \in P$

Jika $v \in P$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}$ maka $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in P$ akibatnya:

(a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

(b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv^{-1}) = \alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \gamma$

Akibatnya:

(a) $\mu_{A^2\cap A^3}(nv)=\min\{\mu_{A^2}(nv),\mu_{A^3}(nv)\}=\min\{\alpha,\gamma\}=\gamma$

(b) $\mu_{A^2\cap A^3}(nv^{-1})=\min\{\mu_{A^2}(nv^{-1}),\mu_{A^3}(nv^{-1})\}=\min\{\alpha,\gamma\}=\gamma$

Jadi, dari uraian pada kondisi 1 diperoleh $\mu_{A^2\cap A^3}(nv)=\gamma$ dan $\mu_{A^2\cap A^3}(nv^{-1})=\gamma$ sehingga $\mu_{A^2\cap A^3}(nv)=\mu_{A^2\cap A^3}(nv^{-1})$.

2. Untuk setiap $n\in 2\mathbb{N}$ dan $v\in Q$

Jika $v\in Q$, dengan $v=(v_1,v_2,v_3)$, $\forall v_1,v_2,v_3\in 2\mathbb{Z}+1$ maka $v^{-1}=(-v_1,-v_2,-v_3)\in Q$ akibatnya:

(a) $nv=n(v_1,v_2,v_3)=(nv_1,nv_2,nv_3)\in P$

(b) $nv^{-1}=n(-v_1,-v_2,-v_3)=(-nv_1,-nv_2,-nv_3)\in P$

Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nv)=\alpha$

(b) $\mu_{A^3}(nv)=\gamma$

(c) $\mu_{A^2}(nv^{-1})=\alpha$

(d) $\mu_{A^3}(nv^{-1})=\gamma$

Akibatnya:

(a) $\mu_{A^2\cap A^3}(nv)=\min\{\mu_{A^2}(nv),\mu_{A^3}(nv)\}=\min\{\alpha,\gamma\}=\gamma$

(b) $\mu_{A^2\cap A^3}(nv^{-1})=\min\{\mu_{A^2}(nv^{-1}),\mu_{A^3}(nv^{-1})\}=\min\{\alpha,\gamma\}=\gamma$

Jadi, dari uraian pada kondisi 2 diperoleh $\mu_{A^2\cap A^3}(nv)=\gamma$ dan $\mu_{A^2\cap A^3}(nv^{-1})=\gamma$ sehingga $\mu_{A^2\cap A^3}(nv)=\mu_{A^2\cap A^3}(nv^{-1})$.

3. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $v \in P$

   Jika $v \in Q$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}+1$ maka

   $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in Q$ akibatnya:

   (a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in P$

   (b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in P$

   Sehingga:

   (a) $\mu_{A^2}(nv) = \alpha$

   (b) $\mu_{A^3}(nv) = \gamma$

   (c) $\mu_{A^2}(nv^{-1}) = \alpha$

   (d) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \gamma$

   Akibatnya

   (a) $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv) = \min\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\} = \min\{\alpha, \gamma\} = \gamma$

   (b) $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv^{-1}) = \min\{\mu_{A^2}(nv^{-1}), \mu_{A^3}(nv^{-1})\} = \min\{\alpha, \gamma\} = \gamma$

   Jadi, dari uraian pada kondisi 3 diperoleh $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv) = \gamma$ dan $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv^{-1}) = \gamma$ sehingga $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv) = \mu_{A^2 \cap A^3}(nv^{-1})$.

4. Untuk setiap $n \in 2\mathbb{N}+1$ dan $v \in Q$

   Jika $v \in Q$, dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in 2\mathbb{Z}+1$ maka

   $v^{-1} = (-v_1, -v_2, -v_3) \in Q$ akibatnya:

   (a) $nv = n(v_1, v_2, v_3) = (nv_1, nv_2, nv_3) \in Q$

   (b) $nv^{-1} = n(-v_1, -v_2, -v_3) = (-nv_1, -nv_2, -nv_3) \in Q$

   Sehingga:

(a) $\mu_{A^2}(nv) = \beta$

(b) $\mu_{A^3}(nv) = \lambda$

(c) $\mu_{A^2}(nv^{-1}) = \beta$

(d) $\mu_{A^3}(nv^{-1}) = \lambda$

Akibatnya:

(a) $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv) = \min\{\mu_{A^2}(nv), \mu_{A^3}(nv)\} = \min\{\beta, \lambda\} = \lambda$

(b) $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv^{-1}) = \min\{\mu_{A^2}(nv^{-1}), \mu_{A^3}(nv^{-1})\} = \min\{\beta, \lambda\} = \lambda$

Jadi, dari uraian pada kondisi 4 diperoleh $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv) = \lambda$ dan $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv^{-1}) = \lambda$ sehingga $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv) = \mu_{A^2 \cap A^3}(nv^{-1})$.

Dari beberapa kondisi yang diberikan pada aksioma (i) dan (ii) maka dapat disimpulkan:

(i) $\mu_{A^2 \cap A^3}(n(u+v)) \geq \min\{\mu_{A^2 \cap A^3}(nu), \mu_{A^2 \cap A^3}(nv)\}$

(ii) $\mu_{A^2 \cap A^3}(nv) = \mu_{A^2 \cap A^3}(nv^{-1})$

Jadi aksioma (i) dan (ii) pada definisi 8 telah terpenuhi sehingga terbukti bahwa $(A^2 \cap A^3, +)$ adalah grup-$\mathbb{N}$ fuzzy dari $(V, +)$.

3.3 Kajian Islam Mengenai Grup Fuzzy

Grup fuzzy secara umum merupakan fungsi yang memetakan grup ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang berada pada interval tertutup [0,1] dengan syarat-syarat tertentu. Dalam kajian sebelumnya disebutkan bahwa salah satu contoh grup dalam kehidupan adalah grup *ulul albab*. Dalam pembahasan ini, grup *ulul albab* akan dipetakan ke dalam tingkat keimanannya. Dalam penelitian

Hotmiyah (2007:80), tingkat keimanan seseorang berdasarkan karakteristiknya terbagi menjadi empat tingkatan, yaitu:

1. Iman yang sempurna

Seseorang akan dikatakan memiliki iman sempurna jika benar-benar telah diyakinkan dengan hati, diikrarkan dengan lisan, dan dibuktikan dengan amal perbuatan. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Q.S. Al-Anfaal ayat 2-4 dan Al-Hujurat ayat 15 sebagai berikut:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ ٱلَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ ٱللَّهُ وَجِلَتْ قُلُوبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ ءَايَٰتُهُۥ زَادَتْهُمْ
إِيمَٰنًا وَعَلَىٰ رَبِّهِمْ يَتَوَكَّلُونَ ﴿٢﴾ ٱلَّذِينَ يُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَمِمَّا رَزَقْنَٰهُمْ يُنفِقُونَ
﴿٣﴾ أُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُؤْمِنُونَ حَقًّا ۚ لَّهُمْ دَرَجَٰتٌ عِندَ رَبِّهِمْ وَمَغْفِرَةٌ وَرِزْقٌ كَرِيمٌ ﴿٤﴾

Artinya: *Sesungguhnya orang-orang yang beriman (orang yang sempurna imannya) ialah mereka yang bila disebut nama Allah (menyebut sifat-sifat yang mengagungkan dan memuliakanNya) gemetarlah hati mereka, dan apabila dibacakan ayat-ayatNya bertambahlah iman mereka (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah mereka bertawakkal. (yaitu) orang-orang yang mendirikan shalat dan yang menafkahkan sebagian dari rezki yang Kami berikan kepada mereka. Itulah orang-orang yang beriman dengan sebenar-benarnya. mereka akan memperoleh beberapa derajat ketinggian di sisi Tuhannya dan ampunan serta rezki (nikmat) yang mulia* (Q.S. Al-Anfaal, 8:2-4).

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ بِٱللَّهِ وَرَسُولِهِۦ ثُمَّ لَمْ يَرْتَابُوا۟ وَجَٰهَدُوا۟ بِأَمْوَٰلِهِمْ
وَأَنفُسِهِمْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ ۚ أُو۟لَٰٓئِكَ هُمُ ٱلصَّٰدِقُونَ ﴿١٥﴾

Artinya: *Sesungguhnya orang-orang yang beriman itu hanyalah orang-orang yang percaya (beriman) kepada Allah dan Rasul-Nya, kemudian mereka tidak ragu-ragu dan mereka berjuang (berjihad) dengan harta dan jiwa mereka pada jalan Allah. Mereka Itulah orang-orang yang benar* (Q.S. Al-Hujurat, 49:15).

Jadi, iman yang sempurna meliputi dua hal, yaitu pertama, amalan hati yaitu niat, penerimaan, keikhlasan, ketundukan, kecintaan,dan keinginannya untuk melakukan amal shaleh, dan kedua, amalan lisan dan anggota badan yaitu melakukan semua perintah dan meninggalkan segala larangan baik lahir maupun batin. Selain itu, seseorang yang beriman sempurna juga memenuhi seluruh cabang-cabang iman sebagaimana yang disebutkan dalam *Qomi'uth Thughyan* (1996).

2. Iman tidak sempurna

   Tingkat iman yang tidak sempurna yakni iman yang dilalui dengan mengikrarkan dua syahadat dengan lisannya dan meyakini keesaan Allah dengan hatinya, tetapi masih belum sempurna dalam mengamalkan hal-hal yang diimaninya dan meninggalkan hal-hal yang dilarang oleh syariat. Sehingga pada tingkat ini di dunia dapat dikategorikan mukmin dengan keimanannya dan fasik dengan maksiat yang dilakukannya. Sedangkan di akhirat, ia berada di bawah kehendak Allah, jika berkehendak, Dia mengampuninya dan jika berkehendak Dia mengadzabnya. Selain itu, dalam tingkatan ini seseorang belum sempurna dalam melaksanakan cabang-cabang iman sebagaimana yang disebutkan dalam *Qomi'uth Thughyan* (1996).

3. Tingkat iman yang paling lemah

   Tingkat iman yang paling lemah yaitu iman yang hanya dilalui dengan mengikrarkan dua syahadat dengan lisannya dan meyakini keesaan Allah dengan hatinya, tanpa melakukan hal-hal yang diperintahkan dan meninggalkan hal-halyang dilarang oleh syari'ah Islam. Selain itu, dalam tingkatan ini seseorang sama sekali tidak melaksanakan cabang-cabang iman sebagaimana yang disebutkan dalam *Qomi'uth Thughyan* (1996).

4. Kafir

   Kafir adalah tingkatan yang dinyatakan tidak berhak menyandang predikat muslim karena telah mengingkari hal-hal yang bersifat pokok dalam syariat Islam. Pada tingkat ini pelakunya dapat dikategorikan kufur sebagai lawan dari iman.

Menurut Hotmiyah (2007:86), sempurnanya pengaruh positif iman seseorang sangat tergantung pada perawatan amal-amal shaleh sehingga terhindar dari naluri negatif yang membawa pada perbuatan maksiat. Demikian pula, meninggalkan kewajiban dan melakukan larangan dapat melemahkan akar keimanan, bahkan dapat mengubah esensi keimanan yang sudah tertanam kokoh yakni berubahnya iman menjadi kafir. Pengaruh positif dan negatif itulah yang menyebabkan kondisi iman dalam masing-masing jiwa manusia sangat fleksibel, yakni selalu berubah-rubah sesuai dengan kondisi yang dihadapi saat itu. Sehingga pemakaian konsep himpunan biasa yang menyatakan suatu permasalahan dengan fungsi keanggotaan bernilai diskrit 0 dan 1 dalam menyatakan keimanan sangat tidak adil, karena adanya perbuatan maksiat kecil saja yang menyebabkan berubahnya kondisi keimanan akan mengakibatkan perbedaan kategori yang sangat signifikan yaitu keluar dari predikat Islam (kafir). Kondisi tersebut tidak benar karena berapapun dosa yang telah diperbuat kecuali dosa syirik, maka seseorang masih dikatakan iman walaupun tingkat imannya tidak sempurna atau bahkan sangat lemah. Dari sini dapat diketahui bahwa keimanan cenderung merupakan suatu tingkatan dengan batasan yang tidak jelas karena penilaian iman tidaknya seseorang tergantung dari presepsi masing-masing individu. Oleh karena itu dikarakteristikkan dengan fungsi keanggotaan yang bernilai dalam interval tertutup [0,1].

Jadi jika diimplementasikan dalam himpunan fuzzy maka misalkan X adalah semesta himpunan dan x variabel keimanan merupakan subset dari X. Himpunan fuzzy A pada variabel keimanan secara matematis dapat ditulis:

$$A = \left\{ x, \mu_A(x) \middle| x \in X \right\}$$

Dengan $\mu_A(x)$ merupakan derajat keanggotan tingkat keimanan seseorang yang berada pada interval tertutup [0,1], dimana untuk iman sempurna bernilai 1 dan kafir bernilai 0, sedangkan iman tidak sempurna dan iman paling lemah berada dalam interval (0,1).

Jika diintegrasikan dengan teori grup fuzzy, maka grup ulul albab memiliki fungsi yang memetakan grup ulul albab kepada tingkat keimanan dalam interval tertutup [0,1]. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

Misalkan G adalah grup ulul albab dan A adalah himpunan tingkat keimanan, maka fungsi μ_A *dapat didefinisikan* $\mu_A : G \to [0,1]$.

Sebagaimana manusia lainnya, seseorang yang *ulul albab* juga memiliki tingkat keimanan dengan batasan yang tidak jelas, artinya keempat tingkatan keimanan yang telah disebutkan juga berlaku bagi *ulul albab*. Jadi untuk melihat nilai keanggotan keimanan seorang yang *ulul albab* juga diperlukan fungsi keanggotaan himpunan fuzzy agar nilai keanggotan yang diperoleh lebih fleksibel dan sesuai dengan kondisi kehidupan nyata.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan dapat disimpulkan bahwa grup-M fuzzy merupakan suatu fungsi yang memetakan grup-M ke derajat keanggotaan himpunan fuzzy yang terletak pada interval tertutup [0,1] dengan syarat-syarat tertentu. Secara matematis dapat dituliskan sebaga berikut:

Misalkan $(G, *)$ adalah grup dengan operator himpunan $(\mathrm{M}, \bullet)$ atau grup-M dan A adalah himpunan fuzzy dalam semesta himpunan U, maka A dikatakan grup-M fuzzy jika fungsi μ_A yang didefinisikan $\mu_A : G \to [0,1]$ memenuhi dua aksioma berikut:

(i) $\mu_A(m \bullet (x * y)) \geq \min\{\mu_A(m \bullet x), \mu_A(m \bullet y)\}, \forall x, y \in A$

(ii) $\mu_A(m \bullet x^{-1}) = \mu_A(m \bullet x)$

Berdasarkan definisi grup-M fuzzy tersebut kemudian diperoleh teorema-teorema tentang grup-M fuzzy yang terangkum menjadi sifat-sifat grup-M fuzzy sebagai berikut:

1. Subgrup-M fuzzy merupakan subset fuzzy dari grup-M fuzzy yang memenuhi $\mu_S(m \bullet (x * y^{-1})) \geq \min\{\mu_S(m \bullet x), \mu_S(m \bullet y)\}, \forall x, y \in S$ dengan S adalah subset fuzzy dari grup-M fuzzy.

2. Perpangkatan grup-M fuzzy yakni A^p untuk setiap A grup-M fuzzy dan p bilangan asli telah terbukti membentuk grup-M fuzzy karena memenuhi dua aksioma yang diberikan pada definisi grup-M fuzzy.
3. Gabungan dari perpangkatan grup-M fuzzy yakni $A^i \cup A^j$ untuk setiap A grup-M fuzzy dan i, j bilangan asli telah terbukti membentuk grup-M fuzzy, karena memenuhi dua aksioma yang diberikan pada definisi grup-M fuzzy.
4. Irisan dari perpangkatan grup-M fuzzy yakni $A^i \cap A^j$ untuk setiap A grup-M fuzzy dan i, j bilangan asli telah terbukti membentuk grup-M fuzzy, karena memenuhi dua aksioma yang diberikan pada definisi grup-M fuzzy.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pokok bahasan sifat-sifat grup-M fuzzy pada bentuk subgrup-M fuzzy, perpangkatan grup-M fuzzy, serta gabungan dan irisan dari perpangkatan grup-M fuzzy. Maka dari itu, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih lanjut tentang sifat-sifat lain yang dapat memenuhi syarat-syarat pada grup-M fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

Al Qurtubi, S.I.. 2009. *Tafsir Al-Qurtubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Dummit, D. dan Foote, R.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall International, Inc.

Hotmiyah, E.. 2007. Implementasi Fuzzy Set dalam Menggambarkan Keimanan. *Skripsi* Tidak diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Jacobson, N.. 1951. *Lectures in Abstract Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Khotimah, H.. 2010. Penerapan *Lemma Goursat* pada Grup *Direct Product Rank* Dua. *Skripsi* Tidak diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Klir, G.J. dan Yuan, B.. 1995. *Fuzzy Set and Fuzzy Logic Theory and Applications*. New York: Prentice Hall International, Inc.

Kusumadewi, S., Artati, S., Harjoko, A., dan Wardoyo, R.. 2006. *Fuzzy Multi-Attribut Decision Making*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Munawaroh, S.. 2007. Graf Fuzzy. *Skripsi* Tidak diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Moderson, J.N., Buthani, K.R., dan Rosenfeld, A.. 2005. *Fuzzy Group Theory*. New York: Springer-Verlag.

Naba, E.A.. 2009. *Belajar Cepat Fuzzy Logic Menggunakan Matlab*. Yogyakarta: ANDI.

Nawawi, M.. 1996. *Qomi'uth Thughyan (Maghligai 77 Cabang Iman)*. Surabaya: AL-MIFTAH.

Raisinghania, M.D. dan Aggrawal, R.S.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Shihab, M.Q.. 2007. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Nagarajan, R. dan Solairaju, A.. 2010. Structure on Fuzzy Groups and L-Fuzzy Number. *International Jurnal of Computer Applications*, Vol. 6, Hal. 18-22.

Subramanian, S., Nagarajan, R., dan Chellapa, B.. 2012. Structure Properties of M-Fuzzy Groups. *Accepted for Publications Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, Hal. 545-552.

Sundararajan, P. dan Muthuraj, R.. 2011. Anti M-Fuzzy Subgroup and its Lower Level M-Subgroups. *International Journal of Computer Applications*, Vol. 26, Hal. 32-35.

Susilo, F.. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Zhan, J. dan Tan, Z.. 2004. Intuitionistic M-Fuzzy Groups. *Shoochow Journal of Mathematics*, Vol. 30, Hal. 85-90.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Irma Yuni Lestari
Nim : 09610098
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Studi tentang Sifat-sifat Struktur Grup-M Fuzzy
Pembimbing I : Drs. H. Turmudi, M.Si
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	29 Oktober 2012	Konsultasi BAB I	1.
2	20 November 2012	Konsultasi Kajian Agama	2.
3	22 November 2012	Konsultasi BAB I, II	3.
4	23 November 2012	Konsultasi Kajian Agama	4.
5	22 Januari 2013	Konsultasi BAB III	5.
6	02 Februari 2013	Konsultasi Kajian Agama	6.
7	04 Februari 2013	Konsultasi BAB III, IV	7.
8	06 Februari 2013	Konsultasi Kajian Agama	8.
9	08 Februari 2013	ACC Kajian Agama	9.
10	09 Februari 2013	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 09 Februari 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd.
NIP. 19751006 200312 1 001