

**SOLUSI NUMERIK MODEL REAKSI-DIFUSI (*TURING*)
DENGAN METODE BEDA HINGGA IMPLISIT**

SKRIPSI

Oleh:
JUNIK RAHAYU
NIM. 09610095



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**SOLUSI NUMERIK MODEL REAKSI-DIFUSI (*TURING*)
DENGAN METODE BEDA HINGGA IMPLISIT**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
JUNIK RAHAYU
NIM. 09610095

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**SOLUSI NUMERIK MODEL REAKSI-DIFUSI (*TURING*)
DENGAN METODE BEDA HINGGA IMPLISIT**

SKRIPSI

Oleh:
JUNIK RAHAYU
NIM. 09610095

Telah Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 16 Maret 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK MODEL REAKSI-DIFUSI (*TURING*)
DENGAN METODE BEDA HINGGA IMPLISIT**

SKRIPSI

Oleh:
JUNIK RAHAYU
NIM. 09610095

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 2 April 2013

Penguji Utama	: <u>Dr. Agus Suryanto, M.Sc</u> NIP. 19690807 199412 1 001	_____
Ketua Penguji	: <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	_____
Sekretaris Penguji	: <u>Dr. Usman Pagalay, M.Si</u> NIP. 19650414 200312 1 001	_____
Anggota Penguji	: <u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u> NIP. 19770521 200501 2 004	_____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Junik Rahayu

NIM : 09610095

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Solusi Numerik Model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan Metode
Beda Hingga Implisit

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Maret 2013

Yang membuat pernyataan,

Junik Rahayu
NIM. 09610095

MOTTO

*Semuanya berawal dari niat,
perbaikilah niatmu sebelum melakukan sesuatu!*



PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan kepada:
Bapak Suparmin dan Ibu Siti Marfu'ah
Zainudin





KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, puji syukur hanya milik Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan ridha-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana malik ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul “Solusi Numerik Model Reaksi-Difusi (*Turing*)” dengan baik. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, dan para sahabat beliau.

Dengan rasa syukur penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si dan Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan bimbingan dengan baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan ilmu kepada penulis.

6. Kedua orang tua penulis Bapak Suparmin dan Ibu Siti Marfu'ah, yang mengajarkan kerja keras, sabar, mengalah dan tawakkal dalam mencapai kesuksesan. Berkat do'a, kebaikan dan ridho mereka pula Allah memberi berbagai kemudahan pada penulis.
7. Kakak penulis, Zainudin yang memotivasi untuk selalu istiqomah.
8. Moh. Subadar yang selalu menemani penulis dalam penulisan skripsi ini.
9. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009, khususnya Ibnu Atho'ilah, Imro'atul Mukaromah, Moch. Chayrul Fuad, Dian Alphy Pratiwi, Ainun Rosyida, Fithrotul Ma'ula, Lutfi Wicaksono dan F. Kurnia Nirmala S. yang menjadi keluarga kecil penulis di Jurusan Matematika.
10. Teman-teman kos, Riadhlotus Sholekhah, Alfa Rizqy Sundy, Nurul Imamah Aini, Nur Jazilah, Roro Kusuma Ifa, Iswahyuni Purwanti, Fitri Purworini, Siti Miftaqul Jannah, Ariani Puji Winarni, Zakiya dan Hasniyah yang senantiasa membimbing penulis untuk menjadi dewasa.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spirituail, penulis ucapkan *jazakumullah khoiron katsiron*.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi, *amin*.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Maret 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
ABSTRAK ...	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
 BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Analisis Persamaan Diferensial Parsial Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>)	7
2.2 Analisis Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>)	13
2.3 Metode Beda Hingga Skema Implisit untuk Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>)	21
2.4 Manfaat Shalat Tahajud	25
 BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Analisis Skema Beda Hingga Implisit Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>)	28
3.2 Penyelesaian Numerik pada Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>)	39
3.3 Interpretasi Hasil Penyelesaian Numerik Implisit pada Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>)	50
3.4 Perhitungan Waktu Pelaksanaan Shalat Tahajud	51
 BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	54
4.2 Saran	55

DAFTAR PUSTAKA	56
LAMPIRAN	57



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.3.1 Gambar Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Beda Hingga	21
Gambar 2.3.2 Jaringan Titik Hitun (<i>grid</i>) pada Bidang $x - t$	22
Gambar 2.3.3 Skema Implisit	25
Gambar 3.1.1 Stensil untuk Persamaan (3.1.5)	29
Gambar 3.1.2 Stensil untuk Persamaan (3.1.9) ..	30
Gambar 3.1.3 Jaringan Titik Hitung Skema Beda Hingga Implisit untuk Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>).....	32
Gambar 3.2.1 Jaringan Titik Hitung Skema Beda Hingga Implisit untuk Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>) dengan Parameter x dan t	42
Gambar 3.2.2 Solusi Numerik untuk $u(x,t)$ dengan $\rho = 0.001$	43
Gambar 3.2.3 Solusi Numerik untuk $v(x,t)$ dengan $\rho = 0.001$	43
Gambar 3.2.4 Solusi Numerik untuk $u(x,t)$ dengan $\rho = 0.05$	46
Gambar 3.2.5 Solusi Numerik untuk $v(x,t)$ dengan $\rho = 0.05$	47
Gambar 3.2.6 Solusi Numerik untuk $u(x,t)$ dengan $\rho = 0.01$	50
Gambar 3.2.7 Solusi Numerik untuk $v(x,t)$ dengan $\rho = 0.01$	50

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Program Matlab Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>) dengan $\rho = 0.001$	57
Lampiran 2	Program Matlab Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>) dengan $\rho = 0.05$	59
Lampiran 3	Program Matlab Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (<i>Turing</i>) dengan $\rho = 0.01$	61

ABSTRAK

Rahayu, Junik. 2013. **Solusi Numerik Model Reaksi-Difusi (*Turing*) Dengan Metode Beda Hingga Implisit**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, Drs. M.Si
(II) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd.

Kata Kunci: Model Reaksi-Difusi (*Turing*), Metode Beda Hingga, Skema Implisit.

Alan Turing (1952) mengemukakan bahwa sistem interaksi bahan kimia dipengaruhi oleh difusi yang tidak stabil yang kemudian berkembang menjadi pola spasial. Hasil dari penelitian ini disebut dengan model reaksi-difusi (*Turing*). Barras dkk. (2006) mengganti mekanisme Murray (2003) dalam menganalisis model ini, sehingga terbentuklah model dengan rasio pertumbuhan domain yang tumbuh secara eksponensial sebagai difusifitasnya.

Metode numerik dalam pencarian solusi dari suatu sistem jarang digunakan akhir-akhir ini. Paper ini membahas penyelesaian numerik pada contoh model. Dipelajari solusi numerik pada model reaksi-difusi (*Turing*) dengan metode beda hingga. Metode beda hingga merupakan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Digunakan metode beda hingga skema implisit beda mundur untuk turunan pertama terhadap waktu dan beda simetrik untuk turunan kedua terhadap ruang dalam menyelesaikan seperti model reaksi-difusi (*Turing*).

Dari penyelesaian numerik diperoleh bahwa domain pertumbuhan (ρ) mempengaruhi konsentrasi dalam model dan penyelesaian numerik.

Peneliti lain di harapkan dapat mengembangkan penelitian ini dalam kasus dua dimensi ataupun dengan menurunkan model reaksi-difusi (*Turing*) yang berupa persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa sehingga dapat dibandingkan hasilnya dengan penelitian ini.

ABSTRACT

Rahayu, Junik. 2013. **Numerical Solution of Reaction-Diffusion (Turing's) Model with Finite Difference Method Implisit Scheme**. Thesis. Departement of Mathematics. Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (I) Dr. Usman Pagalay, Drs. M.Si
(II) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd.

Keywords: Reaction-Diffusion (Turing's) Model, Finite difference methods, Implicit Scheme.

In 1952, Alan Turing suggested that the chemical interaction of the system is affected by an unstable diffusion which later evolved into spatial pattern. The results of this study are called reaction-diffusion (Turing's) model. Barras et al. (2006) to replace the mechanisms Murray (2003) in analyzing this model, thus forming a domain model with a growth rate that is growing exponentially as coefficient diffusion.

Numerical methods in the search for solutions of a system is rarely used these days. This paper discusses the numerical solution to the model example. Studied numerical solutions in reaction-diffusion (Turing) model with a finite difference method. Finite difference method is a numerical method that can be used to solve partial differential equations. Used finite difference method implicit difference schemes for the first derivative of the backward time and symmetric difference for the second derivative of the space in the finish as the reaction-diffusion (Turing's) model.

Of the numerical solution is obtained that domain affects the concentration of growth in the model and the numerical solution.

Another researcher is expected to develop this study in the case of two dimensions or by lowering the reaction-diffusion (Turing's) model in the form of partial differential equations into ordinary differential equations that can be compared with the results of this study.

ملخص

راهايو، جونيك. 2013. **حل الأرقام الأسلوب التفاعل من أعلى إلى سفلى (تورينج) ومخطط ضمني تحليل الاستقرار.** البحث الجامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم التكنولوجية. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: 1. الدكتور عسمان فاجالي، 2. أري كوسومستوتي، الماجستير.

كلمات البحث : أسلوب التفاعل من أعلى إلى سفلى (تورينج)، طريقة الفروق المحدودة، ومخطط ضمني، تحليل الاستقرار.

آلن تورينج (1952) يقول أن نظام المحاول الكميائي يؤثر على ديفوسي الذي غير استدامة وينشأ على الرموز المتغيرة. نتائج هذا البحث يسمى بأسلوب تورينج. باراس وآخرون (2006) يبدلون تقنية لـ موري (2003) في تحليل هذا الأسلوب، ويشكل أسلوب بالنماء التي ينشأ بمثلي كمعامل التفاعل من أعلى إلى سفلى. طريقة الأرقام في بحث تحليل من ناحية نظام مازال نادر. هذا البحث يبحث عن تحليل الأرقام لنمط الأسلوب. يدرس عن تحليل الأرقام على أسلوب التفاعل من أعلى إلى سفلى (تورينج). بطريقة الفروق المحدودة. طريقة الفروق المحدودة ومخطط ضمني هي طريقة الأرقام التي يستخدمها لحل المساواة التفريق الجزئية بأسلوب التفاعل من أعلى إلى سفلى (تورينج) ، الذي صنف به عملية التفاعل من أعلى إلى سفلى بجانب النماء التي ينشأ بممثلي. استخدام طريقة الفروق المحدودة ومخطط ضمني لنسخة على أوقات أمّا الفروق المركزي لنسخة على غرف لحل أسلوب التفاعل من أعلى إلى سفلى (تورينج). تأسس على تحليل الأرقام يعرف أن كبير أو صغر القيمة النماء (ρ) في عملية التفاعل لا يؤثر على نتائج الأرقام التفاعل من أعلى إلى سفلى (تورينج). ولبحث الآخرون يرجى على تنمية هذا البحث في المشكلة الابعاد الثانية أو أخبط الأسلوب التفاعل من أعلى إلى سفلى (تورينج) المساواة التفريق الجزئية ينتج على المساواة التفريق العادي حتى بفرق نتائجها بهذا البحث.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an merupakan sumber inspirasi umat Islam dan sumber dari segala sumber ilmu pengetahuan. Cerita orang-orang terdahulu dan masa datang terkandung di dalamnya, dalam QS. Fushshilat ayat 53 Allah berfirman:

سَنُرِيهِمْ ءَايَاتِنَا فِي الْأَفَاقِ وَفِي أَنْفُسِهِمْ حَتَّىٰ يَتَبَيَّنَ لَهُمْ أَنَّهُ الْحَقُّ ۗ أَوَلَمْ يَكْفِ بِرَبِّكَ أَنَّهُ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ شَهِيدٌ ﴿٥٣﴾

Artinya: “Kami akan memperlihatkan kepada mereka tanda-tanda (kekuasaan) kami di segala wilayah bumi dan pada diri mereka sendiri, hingga jelas bagi mereka bahwa Al-Qur'an itu adalah benar. Tiadakah cukup bahwa Sesungguhnya Tuhanmu menjadi saksi atas segala sesuatu?”.

Dalam ayat ini dijelaskan adanya tanda-tanda kekuasaan-Nya pada diri manusia yang terungkap melalui penelitian dan pengamatan ilmuwan, dan yang kesemuanya membuktikan keesaan dan kekuasaan-Nya sekaligus menunjukkan kebenaran informasi Al-Qur'an (Shihab, 2003:440). Penelitian Alan Turing (1952) merupakan salah satu penelitian yang dapat mengungkap keesaan dan kekuasaan Allah dalam diri manusia, yaitu adanya difusi. Dalam penelitiannya Alan Turing mengemukakan bahwa sistem interaksi bahan kimia dipengaruhi oleh difusi yang tidak stabil yang kemudian berkembang menjadi pola spasial. Dalam era integrasi biologi, model hasil penelitian Alan Turing merupakan salah satu contoh pertama bagaimana mengintegrasikan proses sederhana yang dapat memberikan hasil yang kompleks, dalam hal ini, kombinasi dari proses

penyetabilan yang menghasilkan sistem yang tidak stabil. Pada model tersebut, diasumsikan bahwa sel tidak bergerak tetapi hanya menanggapi perbedaan isyarat kimia. Hasil dari penelitian ini disebut dengan model reaksi-difusi (*Turing*). Salah satu studi yang dapat diterapkan pada model tersebut adalah dilakukannya pencarian solusi dengan menggunakan metode numerik. Salah satu metode numerik untuk penyelesaian model reaksi-difusi (*Turing*) adalah metode beda hingga implisit yang stabil tanpa syarat.

Penelitian terdahulu, Mutholiah (2008) membandingkan penggunaan metode beda hingga skema crank-nicholson dengan metode beda hingga skema implisit untuk menyelesaikan persamaan massa reaktor. Penelitian ini bertujuan membandingkan kedua skema tersebut. Hasilnya kedua skema mempunyai galat yang hampir sama. Menindaklanjuti saran penelitian tersebut untuk mengembangkan penelitian pada model lain, maka penulis memilih model reaksi-difusi (*Turing*).

Model reaksi-difusi (*Turing*) telah diteliti sebelumnya oleh Barras dkk. (2006) dalam jurnal yang berjudul “*Mode Transitions in a Model Reaction-Diffusion System Driven by Domain Growth and Noise*”. Dalam jurnal ini Barras dkk. (2006) mengungkapkan bahwa proses transisi dalam sebuah model reaksi-difusi (*Turing*) mencapai puncak didorong oleh pertumbuhan domain sehingga menghasilkan urutan pola. Urutan pola inilah yang mempercepat pertumbuhan domain pada sebuah fenomena *mode doubling*. Urutan pola tersebut mampu mengandalkan seleksi tertentu hingga pola akhir, sehingga dapat mengatasi masalah yang melekat pada mekanisme model reaksi-difusi (*Turing*). Pada tingkat

pertumbuhan ini, domain lebih lambat dalam penggandaan mode dapat rusak dengan adanya dinamika gangguan kecil. Selanjutnya dari sinilah diperiksa urutan penggandaan mode dan mempertimbangkan implikasi dari perilaku ini dalam meningkatkan berbagai pola akhir, sehingga diketahui bahwa kegagalan pola dipengaruhi oleh domain pertumbuhan.

Menurut Barras dkk. (2006) model reaksi-difusi (*Turing*) adalah 2 persamaan diferensial parsial dan 1 persamaan diferensial biasa, sehingga membentuk sistem. Persamaan pertama adalah perubahan konsentrasi $u(x,t)$ terhadap waktu sebanding dengan satu per kuadrat dari panjang domain pertumbuhan sebanyak kuadrat turunan kedua konsentrasi $u(x,t)$ terhadap ruang yang dipengaruhi oleh adanya energi kinetik dan dihambat oleh konsentrasi awal u sebanyak kuadrat dari konsentrasi v serta adanya efek dilusi. Persamaan kedua adalah perubahan konsentrasi $v(x,t)$ terhadap waktu sebanding dengan rasio koefisien difusi per kuadrat dari panjang domain pertumbuhan sebanyak kuadrat turunan kedua konsentrasi $v(x,t)$ terhadap ruang yang dipengaruhi oleh adanya energi kinetik dan dihambat oleh konsentrasi awal u sebanyak kuadrat dari konsentrasi v , konsentrasi awal v serta adanya efek dilusi. Persamaan ketiga adalah perubahan jumlah panjang domain pertumbuhan terhadap waktu sebanding dengan rasio domain pertumbuhan sebanyak panjang domain pertumbuhan.

Diasumsikan proses difusi terjadi dalam kasus pertumbuhan domain yang tumbuh secara eksponensial. Nilai parameter dalam skripsi ini mengacu pada keterangan Barras dkk. (2006), dengan ρ merupakan rasio pertumbuhan domain, $-\rho u$ dan $-\rho v$ adalah efek dilusi, energi kinetik pada $a = 0.9$ dan $b = 0.1$ dan

koefisien difusi $d = 0.06$. Beberapa nilai ρ yang sesuai dengan keterangan Barras dkk. (2006) yaitu $\rho = 0.001$, $\rho = 0.05$ dan $\rho = 0.01$.

Menurut Keller dan Segel (1970) model reaksi-difusi (*Turing*) dapat diterapkan pada aplikasi ilustratif dalam ekologi. Hal ini dibuktikan dengan adanya pembentukan pola dalam sel-sel amoeboid dari cetakan lendir yang timbul sebagai hasil dari ketidakstabilan *chemotactic*. Hasil penelitian ini kemudian menjadi inspirasi untuk berbagai model kedokteran (khususnya model untuk penyembuhan luka dan kanker).

Penelitian ini bertujuan untuk mencari solusi numerik dari model reaksi-difusi (*Turing*) serta analisis dari setiap perbandingan perilaku pada nilai parameter ρ . Oleh karena itu penulis merancang penelitian yang terdiri dari proses pendiskritisasian sehingga terbentuk pola iterasi untuk solusi numerik dan analisis perbandingan perilaku terhadap nilai ρ .

Penelitian ini penting untuk dilakukan dalam rangka menyiapkan prosedur di lapangan yang lebih representatif jika dilakukan dengan metode numerik. Metode numerik dalam pencarian solusi dari suatu sistem juga jarang digunakan akhir-akhir ini. Oleh karena itu penulis tertarik melakukan penelitian ini dengan mengangkat judul “*Solusi Numerik Model Reaksi-Difusi (Turing) dengan Metode Beda Hingga Implisit*”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimanakah penyelesaian numerik model reaksi-difusi (*Turing*) dengan metode beda hingga implisit?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menyelesaikan model reaksi-difusi (*Turing*) dengan metode beda hingga implisit.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, diberikan batasan masalah sesuai Barras dkk. (2006):

1. Parameter model reaksi-difusi (*Turing*) yang digunakan adalah $a = 0.9$; $b = 0.1$; $d = 0.06$ dan $L(0) = 1$.
2. Kondisi awal diberikan $u(x, t) = 0.9$; $u(R, t) = 0.9$; $v(x, t) = 1$ dan $v(R, t) = 1$.
3. Syarat batas diberikan $u(0, t) = v(0, t) = e^{0t}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat antara lain:

1. Memahami konsep metode beda hingga implisit sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial.
2. Mendapatkan analisis penyelesaian model reaksi-difusi (*Turing*).
3. Mendapatkan interpretasi terhadap penyelesaian numerik model reaksi-difusi (*Turing*).

1.6 Metode Penelitian

Pada pembahasan mengenai solusi numerik model reaksi-difusi (*Turing*) dengan metode beda hingga implisit, penulis menerapkan beberapa langkah berikut:

1. Implementasi skema implisit yang telah dibentuk dengan deret Taylor pada model reaksi-difusi (*Turing*).
2. Penyelesaian numerik model reaksi-difusi (*Turing*) dengan kondisi awal, kondisi batas, serta parameter-parameter yang ditentukan.
3. Interpretasi hasil penyelesaian numerik model reaksi-difusi (*Turing*).

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab berikut:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Teori

Dalam bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi persamaan diferensial parsial model reaksi-difusi (*Turing*), analisis model reaksi-difusi (*Turing*), metode beda hingga implisit model reaksi-difusi (*Turing*) dan manfaat shalat tahajud.

Bab III Pembahasan

Dalam bab ini akan dibahas solusi numerik dan interpretasi model reaksi-difusi (*Turing*).

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan dan disertai dengan saran-saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Analisis Persamaan Diferensial Parsial pada Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Suatu persamaan yang di dalamnya terdapat turunan parsial dan terdapat dua atau lebih variabel bebas maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial (*partial differential equation/pde*) (Ayres, 1992:1).

Misalkan f suatu fungsi dua variabel x dan y . Turunan parsial f terhadap x adalah suatu fungsi yang dinyatakan oleh:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (2.1.1)$$

apabila limit ini ada. Dengan cara yang sama, turunan parsial f terhadap y adalah suatu fungsi yang dinyatakan oleh:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (2.1.2)$$

(Purcell dan Varberg, 1987:115)

Tingkat (orde) dari persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan yang muncul pada persamaan tersebut (Ayres, 1992:1).

Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear orde 2 dalam 2 variabel bebas adalah:

$$Af_{xx} + Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y + Ff = G \quad (2.1.3)$$

dimana A, B, C, D, E dan F adalah fungsi dari x dan y . Didefinisikan turunan parsialnya sebagai berikut:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (2.1.4)$$

(Djojodihardjo, 2000:304)

Menurut Sasongko (2010:143) persamaan (2.1.3) dapat dinyatakan sebagai kondisi-kondisi berikut:

1. Apabila koefisien A, B, C, D, E, F, G adalah konstanta atau fungsi yang terdiri dari variabel bebas saja, maka persamaan tersebut disebut linier.
2. Apabila koefisien A, B, C, D, E, F, G adalah fungsi dari variabel tak bebas (Ff) dan atau merupakan turunan dengan orde yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$, maka persamaan tersebut disebut kuasilinier.
3. Apabila koefisien A, B, C, D, E, F, G merupakan fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)$, maka persamaan tersebut disebut persamaan non-linier.

Sebagai contoh persamaan difusi berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.1.5)$$

Misalkan $L = 1$ yang merupakan konstanta, maka persamaan berbentuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2.1.5a)$$

sehingga persamaaan (2.1.5a) merupakan persamaan diferensial parsial linier. Jika $L = e^{\rho t}$ yang merupakan fungsi dari variabel tak bebas (bergantung pada waktu), maka persamaan (2.4) berbentuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{e^{\rho t}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2.1.5b)$$

sehingga persamaan (2.1.5b) merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear.

Jika $L = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ yang merupakan turunan dengan pangkat sama dengan orde persamaan diferensialnya, maka persamaan (2.4) berbentuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2.1.5c)$$

sehingga persamaan (2.1.5c) merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier.

Menurut Sasongko (2010:144) tipe dari persamaan diferensial orde dua ditentukan oleh determinan (D), jika:

- $D = B^2 - 4AC < 0$, maka bertipe Eliptik.
- $D = B^2 - 4AC = 0$, maka bertipe Parabolik.
- $D = B^2 - 4AC > 0$, maka bertipe Hiperbolik.

Berdasar definisi di atas, maka model reaksi-difusi (*Turing*) yang berbentuk:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b + uv^2 - v - \rho v \\ \frac{dL}{dt} = \rho L \end{cases} \quad (2.1.6)$$

dengan mengubah persamaan $\frac{dL}{dt} = \rho L$ menjadi persamaan biasa, dengan cara melakukan perkalian silang, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$\frac{1}{L} dL = \rho dt$$

sehingga dapat diturunkan menjadi:

$$\ln|L| = \rho t + \ln|C|,$$

dengan memindah $\ln|C|$ ke ruas kiri, maka di atas dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\ln \frac{L}{C} = \rho t,$$

dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{L}{C} = e^{\rho t}.$$

Dilakukan perkalian silang maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$L = Ce^{\rho t}.$$

Karena L adalah suatu fungsi yang bergantung waktu maka diperoleh,

$$L(t) = Ce^{\rho t}.$$

C merupakan konstanta, sehingga nilainya dapat diabaikan. Maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$L(t) = e^{\rho t}. \quad (2.1.7)$$

Setelah persamaan $\frac{dL}{dt} = \rho L$ dirubah, maka model reaksi-difusi (*Turing*)

(2.1.6) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u \\ v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v \\ L(t) = e^{\rho t} \end{cases} \quad (2.1.8)$$

u_t merupakan turunan parsial terhadap t , sedangkan u_{xx} merupakan turunan parsial kedua terhadap x . Sedangkan v_t merupakan turunan parsial terhadap t , sedangkan v_{xx} merupakan turunan parsial kedua terhadap x . Oleh karena itu model reaksi-difusi (*Turing*) merupakan persamaan diferensial parsial dari dua variabel bebas yaitu x dan t .

Orde tertinggi dari turunan parsial dalam model reaksi-difusi (*Turing*) terletak pada u_{xx} dan v_{xx} yang berorde dua, sehingga model reaksi-difusi (*Turing*) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua.

Meninjau model reaksi-difusi (*Turing*) (2.1.8) di mana $L(t) = e^{\rho t}$ yang merupakan fungsi dari variabel tak bebas (bergantung pada waktu), sehingga model reaksi-difusi (*Turing*) merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear orde dua.

Berdasar persamaan (2.1.8), untuk persamaan $u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u$

diperoleh koefisien $A = \frac{1}{L(t)^2}$, $B = 0$, $C = 0$ sehingga dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial Parabolik karena diskriminannya memenuhi:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \frac{1}{L(t)^2} 0 = 0.$$

Selanjutnya untuk persamaan $v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v$ diperoleh

koefisien $A = \frac{d}{L(t)^2}$, $B = 0$, $C = 0$ sehingga dapat diklasifikasikan sebagai

persamaan diferensial parsial Parabolik karena diskriminannya memenuhi:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \frac{d}{L(t)^2} 0 = 0.$$

Karena nilai dari determinan persamaan $u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u$ dan

$v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v$ adalah nol, maka model reaksi-difusi (*Turing*)

merupakan persamaan diferensial kuasilinear orde dua tipe Parabolik.

Solusi model reaksi-difusi (*Turing*) adalah fungsi $u(x, t)$ dan $v(x, t)$ yang memenuhi persamaan (2.1.8). Solusi tersebut merupakan solusi umum, sehingga diperlukan substitusi kondisi batas dan kondisi awal agar didapatkan solusi khusus. Kondisi batas yang digunakan pada model reaksi-difusi (*Turing*) adalah *Dirichlet Boundary Conditions*. Untuk interval $0 \leq t \leq 0.002$ dan $0 \leq x \leq 1$. Nilai batas $u(0, t) = 0.9$; $u(1, 0.002) = 0.9$; $v(0, t) = 1$ dan $v(1, 0.002) = 1$ untuk semua t . Sedangkan kondisi awal yang digunakan untuk model reaksi-difusi (*Turing*) adalah $L(t)$ yang dirumuskan sebagai berikut:

$$u(x, 0) = v(x, 0) = L(t) = e^{\rho t}. \quad (2.1.9)$$

Persamaan (2.1.9) tersebut akan digunakan untuk membuat iterasi numerik pada bab 3.

2.2 Analisis Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Pemodelan Matematika mengenai model reaksi-difusi dikemukakan oleh Alan Turing (1952) yang mengidentifikasi perkembangan embrio menjadi dewasa. Dalam penelitiannya Alan Turing mengasumsikan bahwa sistem interaksi bahan kimia dipengaruhi oleh difusi yang tidak stabil yang kemudian berkembang menjadi pola spasial.

Barras dkk. (2006) mengganti mekanisme model Murray (2003) dalam menganalisis model reaksi-difusi (*Turing*) dengan domain pertumbuhan menggunakan kinetika *Schnakenberg*, yang timbul dari suatu penerapan hukum aksi massa untuk skema *trimolecular*. Model reaksi-difusi (*Turing*) disimbolkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u \\ v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v \\ L(t) = e^{\rho t} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

dengan $u(x,t)$ konsentrasi dari Y dan $v(x,t)$ konsentrasi dari X . Konsentrasi X pada bidang satu dimensi dengan panjang $L(t)$ yang tumbuh secara eksponensial, akan tetapi kontinu pada interval $x \in [0, 1]$.

Selanjutnya mengenai *random walks* dan *brownian motion* untuk model reaksi-difusi (*Turing*). Untuk persamaan $u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u$ dapat dituliskan sebagai,

$$u_t - \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} - a + uv^2 + \rho u = 0. \quad (2.2.2)$$

Menurut Zauderer (1998:2-5), untuk menyelesaikan persamaan (2.2.2) digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Ekspektasi dari variabel acak x atau disebut juga sebagai lokasi perpindahan partikel dalam gelombang yang didefinisikan:

$$E(x) = x = (p - q)\delta,$$

dengan C adalah kecepatan difusi, dan dalam masalah ini kecepatan difusi dianggap sama dengan nol.

2. Varian dari suatu variabel acak x atau disebut juga dengan besarnya perpindahan yang terjadi dari suatu proses difusi, didefinisikan sebagai berikut:

$$V(x) = 4p\delta^2,$$

dengan D adalah konstanta atau koefisien difusi yang dalam hal ini diasumsikan besarnya sama dengan $\frac{2}{L(t)^2}$.

3. Asumsi dasar difusi yang digunakan adalah $u(x, t)$ yang merupakan distribusi peluang. Dimana distribusi peluang dari suatu partikel pada langkah x dan pada waktu yang ke $t + \tau$ sama dengan peluang ketika berada pada titik $x - \delta$ pada waktu t dikalikan dengan peluang perpindahan partikel ke arah kanan (p) pada suatu langkah ditambah dengan peluang partikel pada saat berada di titik $x + \delta$ pada waktu t dikalikan dengan probabilitas perpindahan ke arah kiri (q) pada suatu langkah, dimana $p + q = 1$, yang dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$u(x, t + \tau) = pu(x - \delta, t) + qu(x + \delta, t), \quad (2.2.3)$$

dimana τ merupakan partisi waktu.

4. p adalah peluang perpindahan partikel ke arah kanan, sedangkan q adalah peluang perpindahan partikel ke arah kiri, dimana $p, q \in R$.

Untuk menyelesaikan *brownian motion* persamaan (2.2.3) digunakan deret Taylor sebagai berikut:

- Untuk $u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau u_t(x, t)$.
- Untuk $u(x - \delta, t) = u(x, t) - \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t)$.
- Untuk $u(x + \delta, t) = u(x, t) + \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t)$.

Selanjutnya disubstitusikan deret Taylor pada point a, b dan c di atas pada persamaan (2.2.3) sehingga diperoleh,

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = p \left(u(x, t) - \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t) \right) + q \left(u(x, t) + \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t) \right). \quad (2.2.4)$$

Persamaan (2.2.4) dapat disederhanakan menjadi:

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = (p + q)u(x, t) + (-p + q)\delta u_x(x, t) + (p + q)\frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t).$$

Diasumsikan $p + q = 1$, sehingga persamaan (2.2.4) dapat ditulis dalam bentuk berikut,

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = u(x, t) + (-p + q)\delta u_x(x, t) + (p + q)\frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t). \quad (2.2.5)$$

Persamaan (2.2.5) dapat ditulis dalam bentuk,

$$\tau u_t(x, t) = u(x, t) + (q - p) \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t) - u(x, t),$$

kemudian persamaan di atas dibagi dengan τ , sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \tau u_t(x, t) &= u(x, t) + (q - p) \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t) - u(x, t) \\ u_t(x, t) &= (q - p) \frac{\delta}{\tau} u_x(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\tau} u_{xx}(x, t). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Jika diasumsikan bahwa,

$$\lim (q - p) \frac{\delta}{\tau} \approx -C \quad \text{dan} \quad \lim \frac{\delta^2}{\tau} \approx D, \quad \forall \frac{1}{\tau} \approx 4pq.$$

Sehingga persamaan (2.2.6) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$u_t(x, t) = -C u_x(x, t) + \frac{1}{2} D u_{xx}(x, t). \quad (2.2.7)$$

Diasumsikan $C = 0$ dan $D = \frac{2}{L(t)^2}$, sehingga persamaan (2.2.7) dapat ditulis menjadi:

$$u_t(x, t) = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx}(x, t). \quad (2.2.8)$$

Proses reaksi-difusi yang pertama dirumuskan Barras dkk (2006) dipengaruhi oleh adanya energi kinetik dan dihambat oleh konsentrasi awal u sebanyak kuadrat dari v serta adanya efek dilusi, sehingga model reaksi-difusi (*Turing*) pada reaksi pertama berbentuk:

$$u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u. \quad (2.2.9)$$

Selanjutnya untuk persamaan $v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v$ dapat ditulis

sebagai:

$$v_t - \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} - b - uv^2 + v + \rho v = 0. \quad (2.2.10)$$

Menurut Zauderer (1998:2-5), untuk menyelesaikan persamaan (2.2.10) digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Ekspektasi dari variabel acak x atau disebut juga sebagai lokasi perpindahan partikel dalam gelombang yang didefinisikan:

$$E(x) = x = (p - q)\delta,$$

dengan C adalah kecepatan difusi, dan dalam masalah ini kecepatan difusi dianggap sama dengan nol.

2. Varian dari suatu variabel acak x atau disebut juga dengan besarnya perpindahan yang terjadi dari suatu proses difusi, didefinisikan sebagai berikut:

$$V(x) = 4p\delta^2,$$

dengan D adalah konstanta atau koefisien difusi yang dalam hal ini diasumsikan besarnya sama dengan $\frac{2d}{L(t)^2}$.

3. Asumsi dasar difusi yang digunakan adalah $v(x, t)$ yang merupakan distribusi peluang. Dimana distribusi peluang dari suatu partikel pada langkah x dan pada waktu yang ke $t + \tau$ sama dengan peluang ketika berada pada titik $x - \delta$ pada waktu t dikalikan dengan peluang perpindahan partikel ke

arah kanan (p) pada suatu langkah ditambah dengan peluang partikel pada saat berada di titik $x + \delta$ pada waktu t dikalikan dengan probabilitas perpindahan ke arah kiri (q) pada suatu langkah, dimana $p + q = 1$, yang dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$v(x, t + \tau) = pv(x - \delta, t) + qv(x + \delta, t), \quad (2.2.11)$$

dimana τ merupakan partisi waktu.

4. p adalah peluang perpindahan partikel ke arah kanan, sedangkan q adalah peluang perpindahan partikel ke arah kiri, dimana $p, q \in R$.

Untuk menyelesaikan *brownian motion* persamaan (2.2.11), digunakan deret Taylor sebagai berikut:

- Untuk $v(x, t + \tau) = v(x, t) + \tau v_t(x, t)$.
- Untuk $v(x - \delta, t) = v(x, t) - \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t)$.
- Untuk $v(x + \delta, t) = v(x, t) + \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t)$.

Selanjutnya disubstitusikan deret Taylor pada point a, b dan c diatas pada persamaan (2.2.11) sehingga diperoleh,

$$v(x, t) + \tau v_t(x, t) = p \left(v(x, t) - \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t) \right) + q \left(v(x, t) + \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t) \right). \quad (2.2.12)$$

Persamaan (2.2.12) dapat disederhanakan menjadi:

$$v(x, t) + \tau v_t(x, t) = (p + q)v(x, t) + (-p + q)\delta v_x(x, t) + (p + q)\frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x, t),$$

diasumsikan $p + q = 1$, sehingga persamaan (2.2.12) dapat ditulis dalam bentuk berikut,

$$v(x, t) + \tau v_t(x, t) = v(x, t) + (-p + q) \delta v_x(x, t) + (p + q) \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t). \quad (2.2.13)$$

Persamaan (2.2.13) dapat ditulis dalam bentuk,

$$\tau v_t(x, t) = v(x, t) + (q - p) \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t) - v(x, t).$$

Kemudian persamaan di atas dibagi dengan τ , sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \tau v_t(x, t) &= v(x, t) + (q - p) \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t) - v(x, t) \\ v_t(x, t) &= (q - p) \frac{\delta}{\tau} v_x(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\tau} v_{xx}(x, t). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Jika diasumsikan bahwa,

$$\lim (q - p) \frac{\delta}{\tau} \approx -C \quad \text{dan} \quad \lim \frac{\delta^2}{\tau} \approx D, \quad \forall \frac{1}{\tau} \approx 4pq.$$

Sehingga persamaan (2.2.14) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$v_t(x, t) = -C v_x(x, t) + \frac{1}{2} D v_{xx}(x, t). \quad (2.2.15)$$

Diasumsikan $C = 0$ dan $D = \frac{2d}{L(t)^2}$, sehingga persamaan (2.2.15) dapat ditulis

menjadi:

$$v_t(x, t) = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx}(x, t). \quad (2.2.16)$$

Proses reaksi-difusi yang kedua dirumuskan Barras dkk. (2006) dipengaruhi oleh adanya energi kinetik dan dihambat oleh konsentrasi awal u sebanyak kuadrat dari konsentrasi v , konsentrasi awal v serta

adanya efek dilusi, sehingga model reaksi-difusi (*Turing*) pada reaksi kedua berbentuk:

$$v_t - \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} - b - uv^2 + v + \rho v = 0. \quad (2.2.17)$$

Selanjutnya proses reaksi-difusi yang ketiga dirumuskan Barras dkk. (2006) yaitu proses reaksi-difusi yang terjadi pada domain pertumbuhan yang tumbuh secara eksponensial, sehingga terbentuk persamaan:

$$L(t) = e^{\rho t}. \quad (2.2.18)$$

Model reaksi-difusi (*Turing*) bertujuan menggambarkan model gelombang yang berjalan dengan proses transisi, persamaan difusi yang dipengaruhi dan dihambat oleh beberapa faktor sehingga terbentuklah model reaksi-difusi (*Turing*). Difusi adalah peristiwa berpindahnya suatu zat dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Hukum pertama Fick tentang difusi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.2.19)$$

dengan D adalah difusivitas (Atkins, 1999:288). Umumnya persamaan difusi, difusivitasnya merupakan konstanta, akan tetapi pada model reaksi-difusi (*Turing*) difusivitasnya yaitu pertumbuhan domain yang tumbuh secara eksponensial.

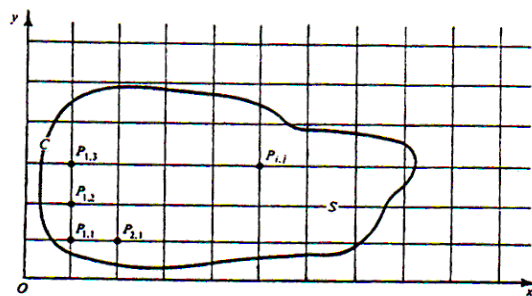
Model reaksi-difusi (*Turing*) diklasifikasikan menjadi persamaan reaksi difusi dan disebut persamaan difusi model *Turing*, namun pada umumnya tetap digunakan sebutan model reaksi-difusi (*Turing*).

Pada persamaan (2.2.1) diasumsikan proses difusi dalam kasus pertumbuhan domain yang tumbuh secara eksponensial. Nilai parameter, kondisi

awal dan kondisi batas mengacu pada keterangan Barras dkk. (2006) dengan ρ merupakan rasio domain pertumbuhan, $-\rho u$ dan $-\rho v$ adalah efek dilusi, energi kinetik $a = 0.9$ dan $b = 0.1$ dan koefisien difusi $d = 0.06$. Beberapa nilai ρ yang sesuai dengan keterangan Barras dkk. (2006) yaitu $\rho = 0.001$, $\rho = 0.05$ dan $\rho = 0.01$.

2.3 Metode Beda Hingga Skema Implisit untuk Model Reaksi-Difusi (Turing)

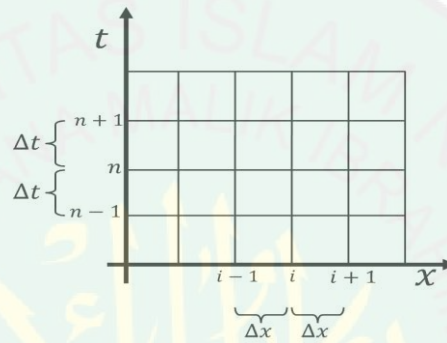
Metode beda hingga dapat digunakan menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan kondisi awal dan batas. Untuk itu dibuat jaringan titik hitungan pada daerah tinjauan. Sebagai contoh penyelesaian persamaan parabola pada daerah S yang dibatasi oleh kurva C seperti tampak pada Gambar 2.3.1 daerah tinjauan S dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan P) dengan jarak antara pias adalah Δx dan Δy . Kondisi di mana variabel terikat u harus memenuhi di sekeliling kurva C disebut dengan kondisi batas. Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan nilai u pada titik-titik hitungan $P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{i,j}, \dots$ (Triatmodjo, 2002:200).



Gambar 2.3.1. Gambar Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

dengan Metode Beda Hingga

Meninjau model reaksi-difusi (*Turing*) yang memuat variabel bebas x dan t , skema beda hingga dibentuk dengan membuat jaringan titik hitungan pada bidang $x-t$ (Gambar 2.3.2) yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang (Δx) dan waktu (Δt).



Gambar 2.3.2. Gambar Jaringan Titik Hitung (*grid*) pada Bidang $x-t$

Turunan parsial dalam persamaan diferensial parsial pada setiap titik *grid* didekati dari nilai-nilai tetangga dengan menggunakan deret Taylor. Dibentuk skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi u dan v yang terdiri dari dua variabel bebas x dan t . Berikut merupakan deret Taylor:

$$u(x_0 + \Delta x, t) = u(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx}(x_0, t) + \dots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} u_{(n-1)}(x_0, t) + O(\Delta x^n), \quad (2.3.1)$$

dengan $O(\Delta x^n)$ merupakan galat. Memotong persamaan (2.3.1) sampai turunan pertama diperoleh:

$$u(x_i + \Delta x, t_n) = u(x_i, t_n) + \Delta x u_x(x_i, t_n) + O(\Delta x^2), \quad (2.3.2)$$

sehingga skema beda hingga dalam turunan parsial sebagai berikut:

$$u_x(x_i, t_n) = \frac{u(x_i + \Delta x, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} - \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$u_x(x_i, t_n) = \frac{u(x_i + \Delta x, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x). \quad (2.3.3)$$

Karena Δx konstan sehingga $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, persamaan (2.3.3) menjadi:

$$u_x(x_i, t_n) = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x). \quad (2.3.4)$$

Apabila notasi $u(x_i, t_n)$ dituliskan sebagai u_i^n , maka berikut merupakan skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi u pada x :

$$u_x(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}. \quad (2.3.5)$$

Persamaan (2.3.5) disebut beda maju untuk x . Skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi u pada t dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan (2.3.1) dengan $u(x, t_0 + \Delta t)$, sehingga didapatkan persamaan berikut yang merupakan skema beda maju untuk t :

$$u_t(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.3.6)$$

Selanjutnya akan dibentuk skema beda hingga untuk turunan kedua fungsi u terhadap x dengan menggunakan deret Taylor orde 4 berikut:

$$u(x_0 + \Delta x, t) = u(x_0, t) + \Delta x u_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx}(x_0, t) + \frac{\Delta x^3}{3!} u_{xxx}(x_0, t) + O(\Delta x^4). \quad (2.3.7)$$

$$u(x_0 - \Delta x, t) = u(x_0, t) - \Delta x u_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx}(x_0, t) - \frac{\Delta x^3}{3!} u_{xxx}(x_0, t) + O(\Delta x^4). \quad (2.3.8)$$

Menjumlahkan persamaan (2.3.7) dan (2.3.8) maka diperoleh:

$$u(x_0 + \Delta x, t) + u(x_0 - \Delta x, t) = 2u(x_0, t) + \Delta x^2 u_{xx}(x_0, t) + O(\Delta x^4)$$

$$u_{i+1}^n + u_{i-1}^n = 2u_i^n + \Delta x^2 u_{xx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4)$$

$$u_{xx}(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - O(x^2)$$

$$u_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.3.9)$$

Persamaan (2.3.9) merupakan beda simetrik untuk x . Skema beda hingga untuk turunan parsial kedua fungsi u pada t , dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan (2.3.7) dan (2.3.8) dengan $u(x_0 + \Delta x, t)$ dan $u(x_0 - \Delta x, t)$. Sehingga didapatkan persamaan berikut yang merupakan skema beda simetrik untuk t :

$$u_t(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta t^2} \quad (2.3.10)$$

Berdasar definisi di atas, $u(x_i, t_n)$ dapat dinyatakan sebagai u_i^n dan $v(x_i, t_n)$ dapat dinyatakan sebagai v_i^n . Transformasi beda mundur untuk turunan terhadap waktu dan beda simetrik untuk turunan kedua terhadap ruang dapat dinyatakan sebagai berikut:

Untuk nilai turunan $u_t(x_i, t_{n+1})$ dihitung

$$u_t(x_i, t_{n+1}) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}. \quad (2.3.11)$$

Untuk $v_t(x_i, t_{n+1})$ dihitung

$$v_t(x_i, t_{n+1}) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t}. \quad (2.3.12)$$

Untuk $u_{xx}(x_i, t_{n+1})$ dihitung

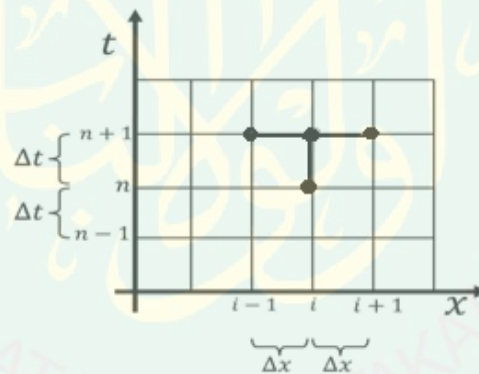
$$u_{xx}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}. \quad (2.3.13)$$

Untuk $v_{xx}(x_i, t_{n+1})$ dihitung

$$v_{xx}(x_i, t_{n+1}) = \frac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}. \quad (2.3.14)$$

(Causon dan Mingham, 2010:19-23)

Penyelesaian persamaan tipe Parabolik dengan menggunakan metode beda hingga dapat dibedakan menjadi dua metode (skema) dasar, yaitu skema eksplisit dan skema implisit. Dalam skema implisit, untuk menghitung variabel di suatu titik perlu dibuat suatu sistem persamaan yang mengandung variabel di titik tersebut dan titik-titik sekitarnya pada waktu yang sama (Triatmodjo, 2002:206). Berikut merupakan langkah iterasi pada skema implisit:



Gambar 2.3.3 Gambar Iterasi pada Skema Implisit

2.4 Manfaat Shalat Tahajud

Salah satu shalat sunah yang tidak pernah ditinggalkan oleh Rasulullah sepanjang hayatnya adalah shalat tahajud. Dalam surat Al-Isra ayat 79, Allah berfirman :

وَمِنَ اللَّيْلِ فَتَهَجَّدْ بِهِ ۚ نَافِلَةً لَّكَ عَسَىٰ أَن يَبْعَثَكَ رَبُّكَ مَقَامًا مَّحْمُودًا ﴿٧٩﴾

Artinya: *“Dan pada sebahagian malam hari bersembahyang tahajudlah kamu sebagai suatu ibadah tambahan bagimu, mudah-mudahan Tuhan-mu mengangkat kamu ke tempat yang terpuji”*.

Suasana hening malam ketika menjalankan shalat tahajud menghantarkan kepada kemantapan, kekhusyu'an, kejernihan pikiran serta mensucikan Allah (menjauhkan diri dari perbuatan buruk). Mensucikan Allah dapat diartikan mengendalikan emosi negatif (Shihab, 2002:520-521).

Di dalam tubuh, emosi berkaitan erat dengan hipotalamus. Hipotalamus berperan mengatur fungsi emosional. Di dalam hipotalamus terdapat hormon kortisol. Hormon kortisol berfungsi untuk mempertahankan integritas tubuh, sifat responsif pembuluh darah dan volume cairan tubuh (Guyton, dalam Sholeh, 2006:13). Sekresi kortisol dipengaruhi oleh rangsangan otak sebagai respons terhadap stres (Sholeh, 2006:21). Kortisol mempengaruhi tingkah laku dan emosi. Kelebihan kortisol dalam jangka panjang dapat menyebabkan berbagai gangguan psikologis, seperti emosi yang labil, mudah tersinggung dan depresi. Sehingga kortisol perlu disekresi dari hipotalamus.

Kortisol yang terbentuk tersebut akan berdifusi dalam sirkulasi darah. Dalam penelitian Barras dkk. (2006) hal ini dianalogikan dengan kortisol sebagai konsentrasi $u(x,t)$ di dalam darah atau $v(x,t)$. Di mana kadar kortisol $u(x,t)$ dalam darah $v(x,t)$ haruslah seimbang agar tidak terjadi stres. Dari penelitian Barras dkk. (2006) ini terungkaplah sumber ilmu pengetahuan dalam Al-Qur'an, yaitu adanya proses difusi. Selain itu dapat diungkap pula bahwa difusi terjadi secara maksimal ketika seseorang menjalankan shalat tahajud.

Adapun manfaat shalat tahajud untuk kesehatan, sesuai sabda Rasulullah Saw. dalam sebuah hadis: “*shalat tahajud dapat menghapus dosa, mendatangkan ketenangan dan menghindarkan dari penyakit*” (H.R Tirmidzi). Sabda Nabi ini dapat dihubungkan dengan fakta dalam sebuah penelitian yang membuktikan bahwa ketenangan dapat meningkatkan ketahanan tubuh, mengurangi terkena penyakit jantung dan meningkatkan usia harapan (Lieben, dalam Sholeh, 2006:2). Sebaliknya stres dapat menimbulkan munculnya penyakit pada diri manusia, sehingga tahajud dapat digunakan sebagai obat untuk menyembuhkan berbagai penyakit.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Skema Beda Hingga Implisit pada Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Berikut merupakan model reaksi-difusi (*Turing*) persamaan (2.2.1):

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u \\ v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v \\ L(t) = e^{\rho t} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Substitusikan persamaan (2.3.11) dan (2.3.13) pada persamaan

$u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u$, maka dapat dinyatakan bentuk diskritnya sebagai

berikut:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{L(t)^2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n \\ - \frac{1}{L(t)^2 \Delta x^2} u_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + 2 \frac{1}{L(t)^2 \Delta x^2} \right) u_i^{n+1} - \frac{1}{L(t)^2 \Delta x^2} u_{i+1}^{n+1} &= \frac{u_i^n}{\Delta t} + \left(a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n \right). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Jika dikalikan dengan Δt , persamaan (3.1.2) dapat disederhanakan menjadi:

$$- \frac{\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} u_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2 \frac{\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} \right) u_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n \right). \quad (3.1.3)$$

Jika didefinisikan bilangan *Courant*:

$$\alpha = \frac{\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2},$$

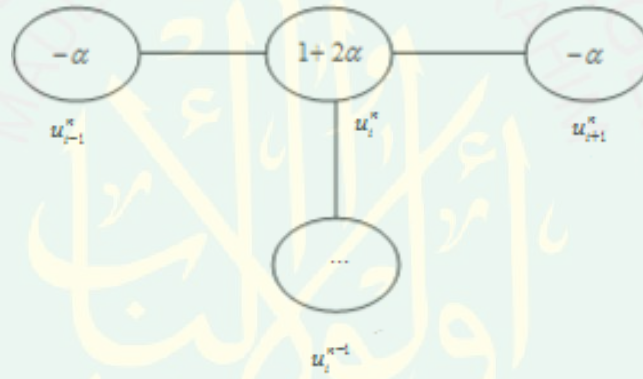
maka persamaan (3.1.3) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$-\alpha u_{i-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_i^{n+1} - \alpha u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \Delta t(a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n). \quad (3.1.4)$$

Jika iterasi n dimulai dari $n-1$, maka persamaan (3.1.4) dapat ditulis menjadi:

$$-\alpha u_{i-1}^n + (1+2\alpha)u_i^n - \alpha u_{i+1}^n = u_i^{n-1} + \Delta t \left(a - u_i^{n-1} v_i^{n-1^2} - \rho u_i^{n-1} \right). \quad (3.1.5)$$

Stensil skema beda hingga implisit untuk persamaan (3.1.5) dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1.1 Stensil untuk Persamaan (3.1.5)

Selanjutnya substitusikan persamaan (2.3.12) dan (2.3.14) pada persamaan

$v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v$, maka dapat dinyatakan bentuk diskritnya sebagai

berikut:

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} &= \frac{d}{L(t)^2} \left(\frac{v_{i-1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + b + u_i^n v_i^{n^2} - v_i^n - \rho v_i^n. \\ -\frac{d}{L(t)^2 \Delta x^2} v_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + 2\frac{d}{L(t)^2 \Delta x^2} \right) v_i^{n+1} - \frac{d}{L(t)^2 \Delta x^2} v_{i+1}^{n+1} &= \frac{v_i^n}{\Delta t} + b + u_i^n v_i^{n^2} - v_i^n - \rho v_i^n. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Jika dikalikan dengan Δt , maka persamaan (3.1.6) dapat disederhanakan menjadi:

$$-\frac{d\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} v_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2\frac{d\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2}\right) v_i^{n+1} - \frac{d\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} v_{i+1}^{n+1} = v_i^n + \Delta t \left(b + u_i^n v_i^{n^2} - v_i^n - \rho v_i^n\right). \quad (3.1.7)$$

Jika didefinisikan bilangan *Courant*:

$$\beta = d \frac{\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} = d\alpha,$$

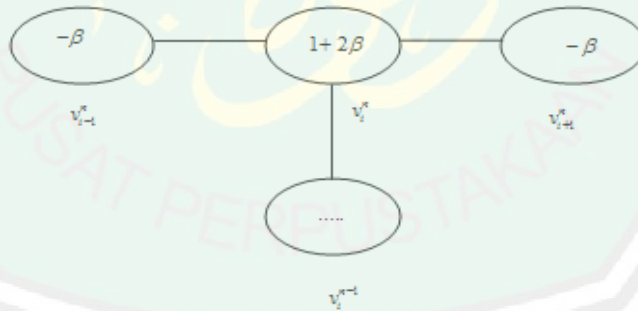
maka persamaan (3.1.7) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$-\beta v_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\beta) v_i^{n+1} - \beta v_{i+1}^{n+1} = v_i^n + \Delta t (b + u_i^n v_i^{n^2} - v_i^n - \rho v_i^n). \quad (3.1.8)$$

Jika iterasi n dimulai dari $n-1$, maka persamaan (3.1.8) dapat ditulis menjadi:

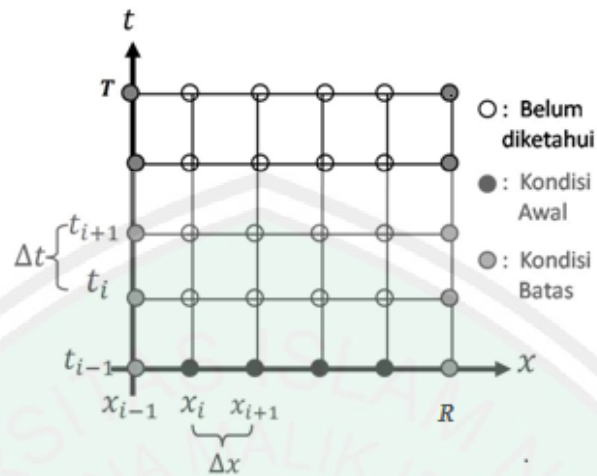
$$-\beta v_{i-1}^n + (1 + 2\beta) v_i^n - \beta v_{i+1}^n = v_i^{n-1} + \Delta t (b + u_i^{n-1} v_i^{n-1^2} - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1}). \quad (3.1.9)$$

Stensil skema beda hingga implisit untuk persamaan (3.1.9) dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1.2 Stensil untuk Persamaan (3.1.9)

Selanjutnya jaringan titik hitung beda hingga implisit untuk model reaksi-difusi (*Turing*) pada daerah $x_0 \leq x \leq R$ dan $t_0 \leq t \leq T$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1.3 Jaringan Titik Hitung Beda Hingga Implisit untuk Model Reaksi-Difusi (Turing)

Didefinisikan $r = \frac{R}{\Delta x}$ sehingga banyak titik *grid* untuk x adalah $r+1$ dan

$k = \frac{T}{\Delta t}$ sehingga banyak titik *grid* untuk k adalah $k+1$. Langkah selanjutnya

yaitu dilakukan iterasi dengan kondisi awal, dan digunakan kondisi awal sebagai berikut:

$$u(x, 0) = 0,9 + \text{bilangan random}$$

$$v(x, 0) = 1 + \text{bilangan random}$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.1.5) dan (3.1.9) sesuai jaringan titik hitung pada Gambar 3.1.3. Deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu dapat dinyatakan sebagai berikut:

a. Untuk persamaan (3.1.5)

untuk $n = 1$

$$\begin{aligned}
 (1+2\alpha)u_1^1 - \alpha u_2^1 &= \alpha u_0^1 + u_1^0 + \Delta t \left(a - u_1^0 (v_1^0)^2 - \rho u_1^0 \right) \\
 -\alpha u_1^1 + (1+2\alpha)u_2^1 - \alpha u_3^1 &= u_2^0 + \Delta t \left(a - u_2^0 (v_2^0)^2 - \rho u_2^0 \right) \\
 -\alpha u_2^1 + (1+2\alpha)u_3^1 - \alpha u_4^1 &= u_3^0 + \Delta t \left(a - u_3^0 (v_3^0)^2 - \rho u_3^0 \right) \\
 -\alpha u_3^1 + (1+2\alpha)u_4^1 - \alpha u_5^1 &= u_4^0 + \Delta t \left(a - u_4^0 (v_4^0)^2 - \rho u_4^0 \right) \\
 &\vdots \\
 -\alpha u_{r-4}^1 + (1+2\alpha)u_{r-3}^1 - \alpha u_{r-2}^1 &= u_{r-3}^0 + \Delta t \left(a - u_{r-3}^0 (v_{r-3}^0)^2 - \rho u_{r-3}^0 \right) \\
 -\alpha u_{r-3}^1 + (1+2\alpha)u_{r-2}^1 - \alpha u_{r-1}^1 &= u_{r-2}^0 + \Delta t \left(a - u_{r-2}^0 (v_{r-2}^0)^2 - \rho u_{r-2}^0 \right) \\
 -\alpha u_{r-2}^1 + (1+2\alpha)u_{r-1}^1 &= u_{r-1}^0 + \Delta t \left(a - u_{r-1}^0 (v_{r-1}^0)^2 - \rho u_{r-1}^0 \right) + \alpha u_r^1
 \end{aligned}$$

untuk $n = 2$

$$\begin{aligned}
 (1+2\alpha)u_1^2 - \alpha u_2^2 &= u_1^1 + \alpha u_0^2 + \Delta t \left(a - u_1^1 (v_1^1)^2 - \rho u_1^1 \right) \\
 -\alpha u_1^2 + (1+2\alpha)u_2^2 - \alpha u_3^2 &= u_2^1 + \Delta t \left(a - u_2^1 (v_2^1)^2 - \rho u_2^1 \right) \\
 -\alpha u_2^2 + (1+2\alpha)u_3^2 - \alpha u_4^2 &= u_3^1 + \Delta t \left(a - u_3^1 (v_3^1)^2 - \rho u_3^1 \right) \\
 -\alpha u_3^2 + (1+2\alpha)u_4^2 - \alpha u_5^2 &= u_4^1 + \Delta t \left(a - u_4^1 (v_4^1)^2 - \rho u_4^1 \right) \\
 &\vdots \\
 -\alpha u_{r-4}^2 + (1+2\alpha)u_{r-3}^2 - \alpha u_{r-2}^2 &= u_{r-3}^1 + \Delta t \left(a - u_{r-3}^1 (v_{r-3}^1)^2 - \rho u_{r-3}^1 \right) \\
 -\alpha u_{r-3}^2 + (1+2\alpha)u_{r-2}^2 - \alpha u_{r-1}^2 &= u_{r-2}^1 + \Delta t \left(a - u_{r-2}^1 (v_{r-2}^1)^2 - \rho u_{r-2}^1 \right) \\
 -\alpha u_{r-2}^2 + (1+2\alpha)u_{r-1}^2 &= u_{r-1}^1 + \Delta t \left(a - u_{r-1}^1 (v_{r-1}^1)^2 - \rho u_{r-1}^1 \right) + \alpha u_r^2
 \end{aligned}$$

untuk $n = 3$

$$\begin{aligned}
 (1+2\alpha)u_1^3 - \alpha u_2^3 &= u_1^2 + \alpha u_0^3 + \Delta t \left(a - u_1^2 (v_1^2)^2 - \rho u_1^2 \right) \\
 -\alpha u_1^3 + (1+2\alpha)u_2^3 - \alpha u_3^3 &= u_2^2 + \Delta t \left(a - u_2^2 (v_2^2)^2 - \rho u_2^2 \right) \\
 -\alpha u_2^3 + (1+2\alpha)u_3^3 - \alpha u_4^3 &= u_3^2 + \Delta t \left(a - u_3^2 (v_3^2)^2 - \rho u_3^2 \right) \\
 -\alpha u_3^3 + (1+2\alpha)u_4^3 - \alpha u_5^3 &= u_4^2 + \Delta t \left(a - u_4^2 (v_4^2)^2 - \rho u_4^2 \right) \\
 &\vdots \\
 -\alpha u_{r-4}^3 + (1+2\alpha)u_{r-3}^3 - \alpha u_{r-2}^3 &= u_{r-3}^2 + \Delta t \left(a - u_{r-3}^2 (v_{r-3}^2)^2 - \rho u_{r-3}^2 \right) \\
 -\alpha u_{r-3}^3 + (1+2\alpha)u_{r-2}^3 - \alpha u_{r-1}^3 &= u_{r-2}^2 + \Delta t \left(a - u_{r-2}^2 (v_{r-2}^2)^2 - \rho u_{r-2}^2 \right) \\
 -\alpha u_{r-2}^3 + (1+2\alpha)u_{r-1}^3 &= u_{r-1}^2 + \Delta t \left(a - u_{r-1}^2 (v_{r-1}^2)^2 - \rho u_{r-1}^2 \right) + \alpha u_r^3
 \end{aligned}$$

untuk $i = 1$ dan $n = k$

$$\begin{aligned}
 (1+2\alpha)u_1^k - \alpha u_2^k &= -\alpha u_0^k + u_1^{k-1} + \Delta t \left(a - u_1^{k-1} (v_1^{k-1})^2 - \rho u_1^{k-1} \right) \\
 -\alpha u_1^k + (1+2\alpha)u_2^k - \alpha u_3^k &= u_2^{k-1} + \Delta t \left(a - u_2^{k-1} (v_2^{k-1})^2 - \rho u_2^{k-1} \right) \\
 -\alpha u_2^k + (1+2\alpha)u_3^k - \alpha u_4^k &= u_3^{k-1} + \Delta t \left(a - u_3^{k-1} (v_3^{k-1})^2 - \rho u_3^{k-1} \right) \\
 -\alpha u_3^k + (1+2\alpha)u_4^k - \alpha u_5^k &= u_4^{k-1} + \Delta t \left(a - u_4^{k-1} (v_4^{k-1})^2 - \rho u_4^{k-1} \right) \\
 &\vdots \\
 -\alpha u_{r-4}^k + (1+2\alpha)u_{r-3}^k - \alpha u_{r-2}^k &= u_{r-3}^{k-1} + \Delta t \left(a - u_{r-3}^{k-1} (v_{r-3}^{k-1})^2 - \rho u_{r-3}^{k-1} \right) \\
 -\alpha u_{r-3}^k + (1+2\alpha)u_{r-2}^k - \alpha u_{r-1}^k &= u_{r-2}^{k-1} + \Delta t \left(a - u_{r-2}^{k-1} (v_{r-2}^{k-1})^2 - \rho u_{r-2}^{k-1} \right) \\
 -\alpha u_{r-2}^k + (1+2\alpha)u_{r-1}^k &= u_{r-1}^{k-1} + \Delta t \left(a - u_{r-1}^{k-1} (v_{r-1}^{k-1})^2 - \rho u_{r-1}^{k-1} \right) + \alpha u_r^k
 \end{aligned}$$

b. Untuk persamaan (3.1.9)

untuk $i = 1$ dan $n = 1$

$$\begin{aligned}
 (1+2\beta)v_1^1 - \beta v_2^1 &= -\beta v_0^1 + v_1^0 \Delta t \left(b - u_1^0 (v_1^0)^2 - v_1^0 - \rho v_1^0 \right) \\
 -\beta v_1^1 + (1+2\beta)v_2^1 - \beta v_3^1 &= u_2^0 + \Delta t \left(b - u_2^0 (v_2^0)^2 - v_2^0 - \rho v_2^0 \right) \\
 -\beta v_2^1 + (1+2\beta)v_3^1 - \beta v_4^1 &= v_3^0 + \Delta t \left(b - u_3^0 (v_3^0)^2 - v_3^0 - \rho v_3^0 \right) \\
 -\beta v_3^1 + (1+2\beta)v_4^1 - \beta v_5^1 &= v_4^0 + \Delta t \left(b - u_4^0 (v_4^0)^2 - v_4^0 - \rho v_4^0 \right) \\
 &\vdots \\
 -\beta v_{r-4}^1 + (1+2\beta)v_{r-3}^1 - \beta v_{r-2}^1 &= v_{r-3}^0 + \Delta t \left(b - u_{r-3}^0 (v_{r-3}^0)^2 - v_{r-3}^0 - \rho v_{r-3}^0 \right) \\
 -\beta v_{r-3}^1 + (1+2\beta)v_{r-2}^1 - \beta v_{r-1}^1 &= v_{r-2}^0 + \Delta t \left(b - u_{r-2}^0 (v_{r-2}^0)^2 - v_{r-2}^0 - \rho v_{r-2}^0 \right) \\
 -\beta v_{r-2}^1 + (1+2\beta)v_{r-1}^1 &= v_{r-1}^0 + \Delta t \left(b - u_{r-1}^0 (v_{r-1}^0)^2 - v_{r-1}^0 - \rho v_{r-1}^0 \right) + \beta v_r^1
 \end{aligned}$$

untuk $i = 1$ dan $n = 2$

$$\begin{aligned}
 (1+2\beta)v_1^2 - \beta v_2^2 &= \beta v_0^2 + v_1^1 + \Delta t \left(b + u_1^1 (v_1^1)^2 - v_1^1 - \rho v_1^1 \right) \\
 -\beta v_1^2 + (1+2\beta)v_2^2 - \beta v_3^2 &= v_1^1 + \Delta t \left(b + u_1^1 (v_1^1)^2 - v_1^1 - \rho v_1^1 \right) \\
 -\beta v_2^2 + (1+2\beta)v_3^2 - \beta v_4^2 &= v_3^1 + \Delta t \left(b - u_3^1 (v_3^1)^2 - v_3^1 - \rho v_3^1 \right) \\
 -\beta v_3^2 + (1+2\beta)v_4^2 - \beta v_5^2 &= v_4^1 + \Delta t \left(b - u_4^1 (v_4^1)^2 - v_4^1 - \rho v_4^1 \right) \\
 &\vdots \\
 -\beta v_{r-4}^2 + (1+2\beta)v_{r-3}^2 - \beta v_{r-2}^2 &= v_{r-3}^1 + \Delta t \left(b - u_{r-3}^1 (v_{r-3}^1)^2 - v_{r-3}^1 - \rho v_{r-3}^1 \right) \\
 -\beta v_{r-3}^2 + (1+2\beta)v_{r-2}^2 - \beta v_{r-1}^2 &= v_{r-2}^1 + \Delta t \left(b - u_{r-2}^1 (v_{r-2}^1)^2 - v_{r-2}^1 - \rho v_{r-2}^1 \right) \\
 -\beta v_{r-2}^2 + (1+2\beta)v_{r-1}^2 &= v_{r-1}^1 + \Delta t \left(b - u_{r-1}^1 (v_{r-1}^1)^2 - v_{r-1}^1 - \rho v_{r-1}^1 \right) + \beta v_r^2
 \end{aligned}$$

untuk $n = 3$

$$\begin{aligned}
 (1+2\beta)v_1^3 - \beta v_2^3 &= \beta v_0^3 + v_1^2 + \Delta t \left(b - u_1^2 (v_1^2)^2 - v_1^2 - \rho v_1^2 \right) \\
 -\beta v_1^3 + (1+2\beta)v_2^3 - \beta v_3^3 &= v_2^2 + \Delta t \left(b - u_2^2 (v_2^2)^2 - v_2^2 - \rho v_2^2 \right) \\
 -\beta v_2^3 + (1+2\beta)v_3^3 - \beta v_4^3 &= v_3^2 + \Delta t \left(b - u_3^2 (v_3^2)^2 - v_3^2 - \rho v_3^2 \right) \\
 -\beta v_3^3 + (1+2\beta)v_4^3 - \beta v_5^3 &= v_4^2 + \Delta t \left(b - u_4^2 (v_4^2)^2 - v_4^2 - \rho v_4^2 \right) \\
 &\vdots \\
 -\beta v_{r-4}^3 + (1+2\beta)v_{r-3}^3 - \beta v_{r-2}^3 &= v_{r-3}^2 + \Delta t \left(b - u_{r-3}^2 (v_{r-3}^2)^2 - v_{r-3}^2 - \rho v_{r-3}^2 \right) \\
 -\beta v_{r-3}^3 + (1+2\beta)v_{r-2}^3 - \beta v_{r-1}^3 &= v_{r-2}^2 + \Delta t \left(b - u_{r-2}^2 (v_{r-2}^2)^2 - v_{r-2}^2 - \rho v_{r-2}^2 \right) \\
 -\beta v_{r-2}^3 + (1+2\beta)v_{r-1}^3 &= v_{r-1}^2 + \Delta t \left(b - u_{r-1}^2 (v_{r-1}^2)^2 - v_{r-1}^2 - \rho v_{r-1}^2 \right) + \beta v_r^3
 \end{aligned}$$

untuk $i = 1$ dan $n = k$

$$\begin{aligned}
 (1+2\beta)v_1^k - \beta v_2^k &= \beta v_0^k + v_1^{k-1} + \Delta t \left(b - u_1^{k-1} (v_1^{k-1})^2 - v_1^{k-1} - \rho u_1^{k-1} \right) \\
 -\beta v_1^k + (1+2\beta)v_2^k - \beta v_3^k &= v_2^{k-1} + \Delta t \left(b - u_2^{k-1} (v_2^{k-1})^2 - v_2^{k-1} - \rho v_2^{k-1} \right) \\
 -\beta v_2^k + (1+2\beta)v_3^k - \beta v_4^k &= v_3^{k-1} + \Delta t \left(b - u_3^{k-1} (v_3^{k-1})^2 - v_3^{k-1} - \rho v_3^{k-1} \right) \\
 -\beta v_3^k + (1+2\beta)v_4^k - \beta v_5^k &= v_4^{k-1} + \Delta t \left(b - u_4^{k-1} (v_4^{k-1})^2 - v_4^{k-1} - \rho v_4^{k-1} \right) \\
 &\vdots \\
 -\beta v_{r-4}^k + (1+2\beta)v_{r-3}^k - \beta v_{r-2}^k &= v_{r-3}^{k-1} + \Delta t \left(b - u_{r-3}^{k-1} (v_{r-3}^{k-1})^2 - v_{r-3}^{k-1} - \rho v_{r-3}^{k-1} \right) \\
 -\beta v_{r-3}^k + (1+2\beta)v_{r-2}^k - \beta v_{r-1}^k &= v_{r-2}^{k-1} + \Delta t \left(b - u_{r-2}^{k-1} (v_{r-2}^{k-1})^2 - v_{r-2}^{k-1} - \rho v_{r-2}^{k-1} \right) \\
 -\beta v_{r-2}^k + (1+2\beta)v_{r-1}^k &= v_{r-1}^{k-1} + \Delta t \left(b - u_{r-1}^{k-1} (v_{r-1}^{k-1})^2 - v_{r-1}^{k-1} - \rho v_{r-1}^{k-1} \right) + \beta v_r^k
 \end{aligned}$$

Skema beda hingga implisit dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$(r+1)x(k+1)$ yang secara sederhana dituliskan sebagai berikut:

a. Untuk persamaan (3.1.5)

Untuk $n = 1$

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1+2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ \vdots \\ u_{r-3}^1 \\ u_{r-2}^1 \\ u_{r-1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_0^1 + u_1^0 + \Delta t \left(a - u_1^0 (v_1^0)^2 - \rho u_1^0 \right) \\ u_2^0 + \Delta t \left(a - u_2^0 (v_2^0)^2 - \rho u_2^0 \right) \\ u_3^0 + \Delta t \left(a - u_3^0 (v_3^0)^2 - \rho u_3^0 \right) \\ u_4^0 + \Delta t \left(a - u_4^0 (v_4^0)^2 - \rho u_4^0 \right) \\ \vdots \\ u_{r-3}^0 + \Delta t \left(a - u_{r-3}^0 (v_{r-3}^0)^2 - \rho u_{r-3}^0 \right) \\ u_{r-2}^0 + \Delta t \left(a - u_{r-2}^0 (v_{r-2}^0)^2 - \rho u_{r-2}^0 \right) \\ u_{r-1}^0 + \Delta t \left(a - u_{r-1}^0 (v_{r-1}^0)^2 - \rho u_{r-1}^0 \right) + \alpha u_r^1 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 2$

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1+2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ \vdots \\ u_{r-3}^2 \\ u_{r-2}^2 \\ u_{r-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_0^2 + u_1^1 + \Delta t \left(a - u_1^1 (v_1^1)^2 - \rho u_1^1 \right) \\ u_2^1 + \Delta t \left(a - u_2^1 (v_2^1)^2 - \rho u_2^1 \right) \\ u_3^1 + \Delta t \left(a - u_3^1 (v_3^1)^2 - \rho u_3^1 \right) \\ u_4^1 + \Delta t \left(a - u_4^1 (v_4^1)^2 - \rho u_4^1 \right) \\ \vdots \\ u_{r-3}^1 + \Delta t \left(a - u_{r-3}^1 (v_{r-3}^1)^2 - \rho u_{r-3}^1 \right) \\ u_{r-2}^1 + \Delta t \left(a - u_{r-2}^1 (v_{r-2}^1)^2 - \rho u_{r-2}^1 \right) \\ u_{r-1}^1 + \Delta t \left(a - u_{r-1}^1 (v_{r-1}^1)^2 - \rho u_{r-1}^1 \right) + \alpha u_r^2 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 3$

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1+2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ \vdots \\ u_{r-3}^3 \\ u_{r-2}^3 \\ u_{r-1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_0^3 + u_1^2 + \Delta t \left(a - u_1^2 (v_1^2)^2 - \rho u_1^2 \right) \\ u_2^2 + \Delta t \left(a - u_2^2 (v_2^2)^2 - \rho u_2^2 \right) \\ u_3^2 + \Delta t \left(a - u_3^2 (v_3^2)^2 - \rho u_3^2 \right) \\ u_4^2 + \Delta t \left(a - u_4^2 (v_4^2)^2 - \rho u_4^2 \right) \\ \vdots \\ u_{r-3}^2 + \Delta t \left(a - u_{r-3}^2 (v_{r-3}^2)^2 - \rho u_{r-3}^2 \right) \\ u_{r-2}^2 + \Delta t \left(a - u_{r-2}^2 (v_{r-2}^2)^2 - \rho u_{r-2}^2 \right) \\ u_{r-1}^2 + \Delta t \left(a - u_{r-1}^2 (v_{r-1}^2)^2 - \rho u_{r-1}^2 \right) + \alpha u_r^3 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = k$

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1+2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \\ u_4^k \\ \vdots \\ u_{r-3}^k \\ u_{r-2}^k \\ u_{r-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{k-1} + \Delta t \left(a - u_1^{k-1} (v_1^{k-1})^2 - \rho u_1^{k-1} \right) + \alpha u_0^k \\ u_2^{k-1} + \Delta t \left(a - u_2^{k-1} (v_2^{k-1})^2 - \rho u_2^{k-1} \right) \\ u_3^{k-1} + \Delta t \left(a - u_3^{k-1} (v_3^{k-1})^2 - \rho u_3^{k-1} \right) \\ u_4^{k-1} + \Delta t \left(a - u_4^{k-1} (v_4^{k-1})^2 - \rho u_4^{k-1} \right) \\ \vdots \\ u_{r-2}^{k-1} + \Delta t \left(a - u_{r-2}^{k-1} (v_{r-2}^{k-1})^2 - \rho u_{r-2}^{k-1} \right) \\ u_{r-1}^{k-1} + \Delta t \left(a - u_{r-1}^{k-1} (v_{r-1}^{k-1})^2 - \rho u_{r-1}^{k-1} \right) \\ u_r^{k-1} + \Delta t \left(a - u_r^{k-1} (v_r^{k-1})^2 - \rho u_r^{k-1} \right) + \alpha u_r^k \end{bmatrix}$$

b. Untuk Persamaan (3.9)

Untuk $n = 1$

$$\begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 1+2\beta & -\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 1+2\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\beta & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta & 1+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ v_4^1 \\ \vdots \\ v_{r-3}^1 \\ v_{r-2}^1 \\ v_{r-1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta v_0^1 + v_1^0 + \Delta t \left(b - u_1^0 (v_1^0)^2 - v_1^0 - \rho u_1^0 \right) \\ v_2^0 + \Delta t \left(b - u_2^0 (v_2^0)^2 - v_2^0 - \rho u_2^0 \right) \\ v_3^0 + \Delta t \left(b - u_3^0 (v_3^0)^2 - v_3^0 - \rho u_3^0 \right) \\ v_4^0 + \Delta t \left(b - u_4^0 (v_4^0)^2 - v_4^0 - \rho u_4^0 \right) \\ \vdots \\ v_{r-3}^0 + \Delta t \left(b - u_{r-2}^1 (v_{r-2}^0)^2 - v_{r-2}^0 - \rho u_{r-2}^0 \right) \\ v_{r-2}^0 + \Delta t \left(b - u_{r-2}^1 (v_{r-2}^0)^2 - v_{r-2}^0 - \rho u_{r-2}^0 \right) \\ v_{r-1}^0 + \Delta t \left(b - u_{r-1}^1 (v_{r-1}^0)^2 - v_{r-1}^0 - \rho u_{r-1}^0 \right) + \beta v_r^1 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 2$

$$\begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 1+2\beta & -\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 1+2\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\beta & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta & 1+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \\ v_4^2 \\ \vdots \\ v_{r-3}^2 \\ v_{r-2}^2 \\ v_{r-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta v_0^2 + v_1^1 + \Delta t \left(b - u_1^1 (v_1^1)^2 - v_1^1 - \rho u_1^1 \right) \\ v_2^1 + \Delta t \left(b - u_2^1 (v_2^1)^2 - v_2^1 - \rho u_2^1 \right) \\ v_3^1 + \Delta t \left(b - u_3^1 (v_3^1)^2 - v_3^1 - \rho u_3^1 \right) \\ v_4^1 + \Delta t \left(b - u_4^1 (v_4^1)^2 - v_4^1 - \rho u_4^1 \right) \\ \vdots \\ v_{r-3}^1 + \Delta t \left(b - u_{r-3}^1 (v_{r-3}^1)^2 - v_{r-3}^1 - \rho u_{r-3}^1 \right) \\ v_{r-2}^1 + \Delta t \left(b - u_{r-2}^1 (v_{r-2}^1)^2 - v_{r-2}^1 - \rho u_{r-2}^1 \right) \\ v_{r-1}^1 + \Delta t \left(b - u_{r-1}^1 (v_{r-1}^1)^2 - v_{r-1}^1 - \rho u_{r-1}^1 \right) + \beta v_r^2 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 3$

$$\begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 1+2\beta & -\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 1+2\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\beta & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta & 1+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \\ v_4^3 \\ \vdots \\ v_{r-3}^3 \\ v_{r-2}^3 \\ v_{r-1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta v_0^3 + v_1^2 + \Delta t \left(b - u_1^2 (v_1^2)^2 - v_1^2 - \rho u_1^2 \right) \\ v_2^2 + \Delta t \left(b - u_2^2 (v_2^2)^2 - v_2^2 - \rho u_2^2 \right) \\ v_3^2 + \Delta t \left(b - u_3^2 (v_3^2)^2 - v_3^2 - \rho u_3^2 \right) \\ v_4^2 + \Delta t \left(b - u_4^2 (v_4^2)^2 - v_4^2 - \rho u_4^2 \right) \\ \vdots \\ v_{r-3}^2 + \Delta t \left(b - u_{r-3}^2 (v_{r-3}^2)^2 - v_{r-3}^2 - \rho u_{r-3}^2 \right) \\ v_{r-2}^2 + \Delta t \left(b - u_{r-2}^2 (v_{r-2}^2)^2 - v_{r-2}^2 - \rho u_{r-2}^2 \right) \\ v_{r-1}^2 + \Delta t \left(b - u_{r-1}^2 (v_{r-1}^2)^2 - v_{r-1}^2 - \rho u_{r-1}^2 \right) + \beta v_r^3 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = k$

$$\begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 1+2\beta & -\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 1+2\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\beta & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta & 1+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ v_3^k \\ v_4^k \\ \vdots \\ v_{r-3}^k \\ v_{r-2}^k \\ v_{r-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta v_0^k + v_1^{k-1} + \Delta t \left(b - u_1^{k-1} (v_1^{k-1})^2 - v_1^{k-1} - \rho u_1^{k-1} \right) \\ v_2^{k-1} + \Delta t \left(b - u_2^{k-1} (v_2^{k-1})^2 - v_2^{k-1} - \rho u_2^{k-1} \right) \\ v_3^{k-1} + \Delta t \left(b - u_3^{k-1} (v_3^{k-1})^2 - v_3^{k-1} - \rho u_3^{k-1} \right) \\ v_4^{k-1} + \Delta t \left(b - u_4^{k-1} (v_4^{k-1})^2 - v_4^{k-1} - \rho u_4^{k-1} \right) \\ \vdots \\ v_{r-3}^{k-1} + \Delta t \left(b - u_{r-3}^{k-1} (v_{r-3}^{k-1})^2 - v_{r-3}^{k-1} - \rho u_{r-3}^{k-1} \right) \\ v_{r-2}^{k-1} + \Delta t \left(b - u_{r-2}^{k-1} (v_{r-2}^{k-1})^2 - v_{r-2}^{k-1} - \rho u_{r-2}^{k-1} \right) \\ v_{r-1}^{k-1} + \Delta t \left(b - u_{r-1}^{k-1} (v_{r-1}^{k-1})^2 - v_{r-1}^{k-1} - \rho u_{r-1}^{k-1} \right) + \beta v_r^k \end{bmatrix}$$

3.2 Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Dalam sub bab ini akan dibahas penyelesaian numerik model reaksi-difusi (*Turing*). Diselesaikan contoh reaksi-difusi (*Turing*) pada daerah batas $0 < x < 1$ dan $0 < t < 0.002$. Rasio pertumbuhan domain $\rho = 0.001$, energi kinetik $a = 0.9$

dan $a = 0.1$ serta rasio koefisien difusi $d = 0.06$ sehingga persamaan (2.2.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.001u \\ v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.001v \\ L(t) = e^{\rho t} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0.00002$ dan $\Delta x = 0.01$ Sehingga nilai bilangan *Courant* pada

persamaan $u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.001u$ adalah:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} \\ &= \frac{0.00002}{(1)^2 \cdot 0.01} \\ &= 0.0020, \end{aligned}$$

dan nilai bilangan *Courant* pada persamaan $v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.001v$

adalah:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{d \Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} \\ &= \frac{0.06 \cdot (0.00002)}{(1)^2 \cdot (0.01)^2} \\ &= 0.0120 \end{aligned}$$

Substitusi nilai α pada skema beda hingga untuk persamaan

$$u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.001u \text{ sesuai dengan persamaan (3.1.5) adalah}$$

sebagai berikut:

$$-0.0020u_{i-1}^n + 1.0040u_i^n - 0.0020u_{i+1}^n = u_i^{n-1} + 0.00002 \left(0.9 - u_i^{n-1} (v_i^{n-1})^2 - (0.001)u_i^{n-1} \right). \quad (3.2.2)$$

Selanjutnya substitusi nilai β pada skema beda hingga untuk persamaan

$$v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.001v \text{ sesuai dengan persamaan (3.1.9) adalah}$$

sebagai berikut:

$$-0.0120u_{i-1}^n + 1.0240u_i^n - 0.0120u_{i+1}^n = u_i^{n-1} + 0.00002 \left(0.1 - u_i^{n-1} (v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - (0.001)u_i^{n-1} \right). \quad (3.2.3)$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $r+1$ dengan nilai r

sebagai berikut:

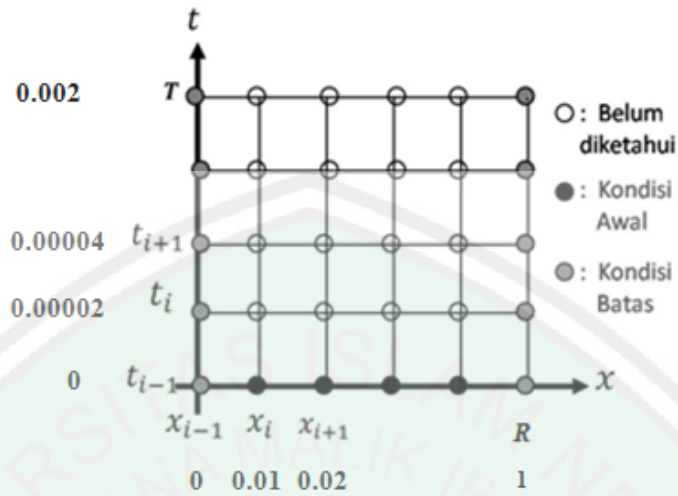
$$r = \frac{R - x_0}{\Delta x} = \frac{1 - 0}{0.01} = 100.$$

Secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k+1$

dengan nilai k sebagai berikut:

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{0.002 - 0}{0.00002} = 100,$$

stensil untuk kondisi tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2.1 Jaringan Titik Hitung Skema Beda Hingga Implisit untuk Model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan Parameter x dan t

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.2.2) adalah $u(x_0, t) = u(0, t) = 0.9$ dan $u(R, t) = u(1, t) = 0.9$. Sedangkan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.2.3) adalah $v(x_0, t) = v(0, t) = 1$ dan $v(R, t) = v(1, t) = 1$. Sehingga diperoleh nilai $u_i^n = 0.9, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100, \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots, 100$ dan $v_i^n = 1, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100, \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots, 100$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

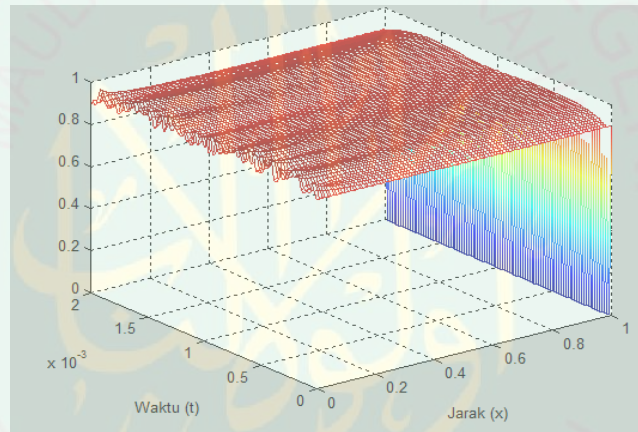
$$\begin{array}{ll}
 u_0^0 = 0.9 & v_0^0 = 1 \\
 u_0^1 = 0.9 & v_0^1 = 1 \\
 u_0^2 = 0.9 & v_0^2 = 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 u_0^{100} = 0.9 & v_0^{100} = 1 \\
 u_{100}^0 = 0.9 & v_{100}^0 = 1 \\
 u_{100}^1 = 0.9 & v_{100}^1 = 1 \\
 u_{100}^2 = 0.9 & v_{100}^2 = 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 u_{100}^{100} = 0.9 & v_{100}^{100} = 1.
 \end{array}
 \quad \text{dan}$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut:

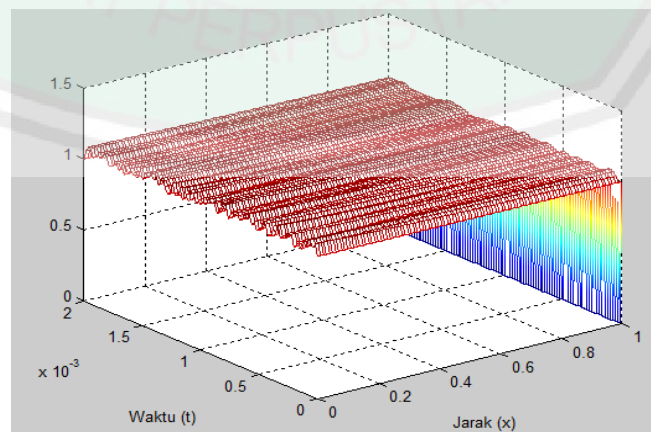
$$u_i^n = f(t_i) = 0,9 + \text{bilangan random}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

$$v_i^n = g(t_i) = 1 + \text{bilangan random}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.2.2) dan (3.2.3) sesuai jaringan titik hitung pada Gambar 3.2.1. Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada Lampiran 1.



Gambar 3.2.2 Solusi Numerik $u(x,t)$ terhadap dengan $\rho=0.001$



Gambar 3.2.3 Solusi Numerik untuk $v(x,t)$ dengan $\rho=0.001$

Diselesaikan contoh kedua model reaksi-difusi (*Turing*) pada daerah batas $0 < x < 1$ dan $0 < t < 0.002$. Rasio pertumbuhan domain $\rho = 0.05$, energi kinetik $a = 0.9$ dan $a = 0.1$ serta rasio koefisien difusi $d = 0.06$ sehingga persamaan (2.2.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.05u \\ v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.05v \\ L(t) = e^{\rho t} \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0.00002$ dan $\Delta x = 0.01$ Sehingga nilai bilangan *Courant* pada

persamaan $u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.05u$ adalah

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} \\ &= \frac{0.00002}{(1)^2 \cdot 0.01} \\ &= 0.0020, \end{aligned}$$

dan nilai bilangan *Courant* pada persamaan $v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.05v$

adalah

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{d \Delta t}{L(t)^2 \Delta x^2} \\ &= \frac{0.06 \cdot (0.00002)}{(1)^2 \cdot (0.01)^2} \\ &= 0.0120 \end{aligned}$$

Substitusi nilai α pada skema beda hingga untuk persamaan

$$u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.05u \quad \text{sesuai dengan persamaan (3.1.5) adalah sebagai}$$

berikut:

$$-0.0020u_{i-1}^n + 1.0040u_i^n - 0.0020u_{i+1}^n = u_i^{n-1} + 0.00002 \left(0.9 - u_i^{n-1} (v_i^{n-1})^2 - (0.05)u_i^{n-1} \right). \quad (3.2.5)$$

Selanjutnya substitusi nilai β pada skema beda hingga untuk persamaan

$$v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.05v \quad \text{sesuai dengan persamaan (3.1.9) adalah}$$

sebagai berikut:

$$-0.0120u_{i-1}^n + 1.0240u_i^n - 0.0120u_{i+1}^n = u_i^{n-1} + 0.00002 \left(0.1 - u_i^{n-1} (v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - (0.05)u_i^{n-1} \right). \quad (3.2.6)$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $r+1$ dengan nilai r

sebagai berikut:

$$r = \frac{R - x_0}{\Delta x} = \frac{1 - 0}{0.01} = 100.$$

Secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k+1$

dengan nilai k sebagai berikut:

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{0.002 - 0}{0.00002} = 100.$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.2.5) adalah

$$u(x_0, t) = u(0, t) = 0.9 \quad \text{dan} \quad u(R, t) = u(1, t) = 0.9. \quad \text{Sedangkan iterasi kondisi batas}$$

$$\text{untuk persamaan (3.2.6) adalah } v(x_0, t) = v(0, t) = 1 \quad \text{dan} \quad v(R, t) = v(1, t) = 1.$$

Sehingga diperoleh nilai $u_i^n = 0.9, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100, \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots, 100$ dan

$v_i^n = 1, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100, \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots, 100$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

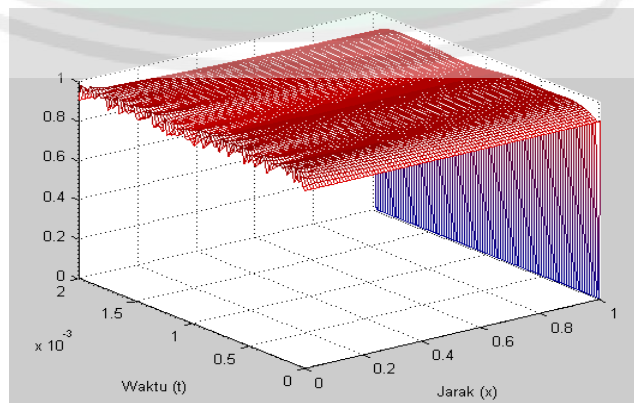
$$\begin{array}{ll} u_0^0 = 0.9 & v_0^0 = 1 \\ u_0^1 = 0.9 & v_0^1 = 1 \\ u_0^2 = 0.9 & v_0^2 = 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_0^{100} = 0.9 & \text{dan } v_0^{100} = 1 \\ u_{100}^0 = 0.9 & v_{100}^0 = 1 \\ u_{100}^1 = 0.9 & v_{100}^1 = 1 \\ u_{100}^2 = 0.9 & v_{100}^2 = 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_{100}^{100} = 0.9 & v_{100}^{100} = 1. \end{array}$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut:

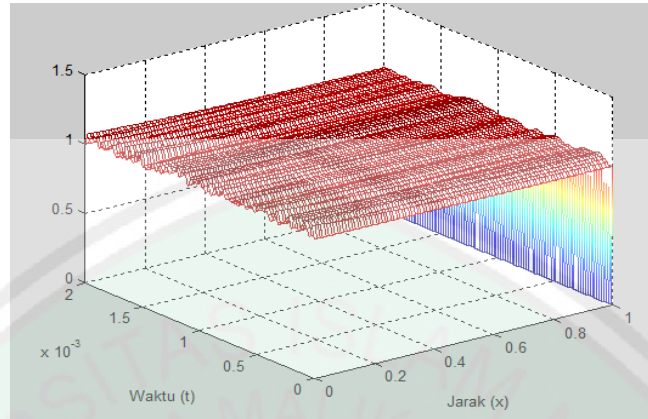
$$u_i^n = f(t_i) = 0.9 + \text{bilangan random}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

$$v_i^n = g(t_i) = 1 + \text{bilangan random}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.2.5) dan (3.2.6) sesuai jaringan titik hitung pada Gambar 3.2.1. Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada Lampiran 3.



Gambar 3.2.4 Solusi Numerik $u(x, t)$ terhadap dengan $\rho = 0.05$



Gambar 3.2.5 Solusi Numerik untuk $v(x,t)$ dengan $\rho=0.05$

Diselesaikan contoh ketiga model reaksi-difusi (*Turing*) pada daerah batas $0 < x < 1$ dan $0 < t < 0.002$. Rasio pertumbuhan domain $\rho = 0.01$, energi kinetik $a = 0.9$ dan $a = 0.1$ serta rasio koefisien difusi $d = 0.06$ sehingga persamaan (2.2.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.01u \\ v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.01v \\ L(t) = e^{\rho t} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0.00002$ dan $\Delta x = 0.01$ Sehingga nilai bilangan *Courant* pada

persamaan $u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.01u$ adalah

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta t}{L^2 \Delta x^2} \\ &= \frac{0.00002}{(1)^2 \cdot 0.01} \end{aligned}$$

$$= 0.0020,$$

dan nilai bilangan *Courant* pada persamaan $v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.01v$

adalah

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{d\Delta t}{L^2 \Delta x^2} \\ &= \frac{0.06 \cdot (0.00002)}{(1)^2 \cdot (0.01)^2} \\ &= 0.0120\end{aligned}$$

Substitusi nilai α pada skema beda hingga untuk persamaan

$$u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + 0.9 - uv^2 - 0.01u \quad \text{sesuai dengan persamaan (3.1.5) adalah sebagai}$$

berikut:

$$-0.0020u_{i-1}^n + 1.0040u_i^n - 0.0020u_{i+1}^n = u_i^{n-1} + 0.00002 \left(0.9 - u_i^{n-1} \left(v_i^{n-1} \right)^2 - (0.01)u_i^{n-1} \right). \quad (3.2.8)$$

Selanjutnya substitusi nilai β pada skema beda hingga untuk persamaan

$$v_t = \frac{0.06}{L(t)^2} v_{xx} + 0.1 + uv^2 - v - 0.01v \quad \text{sesuai dengan persamaan (3.1.9) adalah}$$

sebagai berikut:

$$-0.0120u_{i-1}^n + 1.0240u_i^n - 0.0120u_{i+1}^n = u_i^{n-1} + 0.00002 \left(0.1 - u_i^{n-1} \left(v_i^{n-1} \right)^2 - v_i^{n-1} - (0.01)u_i^{n-1} \right). \quad (3.2.9)$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $r+1$ dengan nilai r

sebagai berikut:

$$r = \frac{R - x_0}{\Delta x} = \frac{1 - 0}{0.01} = 100.$$

Secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k+1$ dengan nilai k sebagai berikut:

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{0.002 - 0}{0.00002} = 100.$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.2.8) adalah $u(x_0, t) = u(0, t) = 0.9$ dan $u(R, t) = u(1, t) = 0.9$. Sedangkan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.2.9) adalah $v(x_0, t) = v(0, t) = 1$ dan $v(R, t) = v(1, t) = 1$. Sehingga diperoleh nilai $u_i^n = 0.9, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100, \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots, 100$ dan $v_i^n = 1, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100, \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots, 100$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} u_0^0 = 0.9 & v_0^0 = 1 \\ u_0^1 = 0.9 & v_0^1 = 1 \\ u_0^2 = 0.9 & v_0^2 = 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_0^{100} = 0.9 & \text{dan } v_0^{100} = 1 \\ u_{100}^0 = 0.9 & v_{100}^0 = 1 \\ u_{100}^1 = 0.9 & v_{100}^1 = 1 \\ u_{100}^2 = 0.9 & v_{100}^2 = 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_{100}^{100} = 0.9 & v_{100}^{100} = 1. \end{array}$$

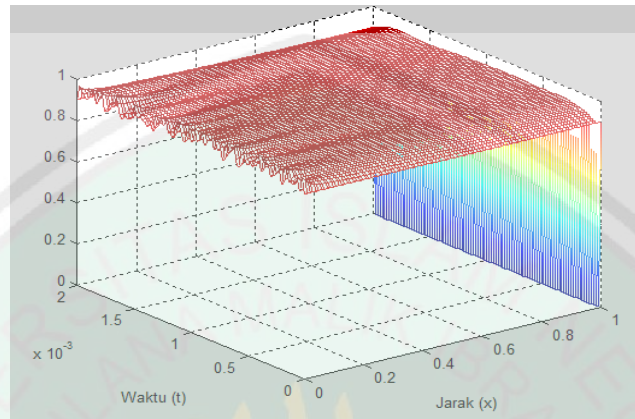
Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut:

$$u_i^n = f(t_i) = 0.9 + \text{bilangan random}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

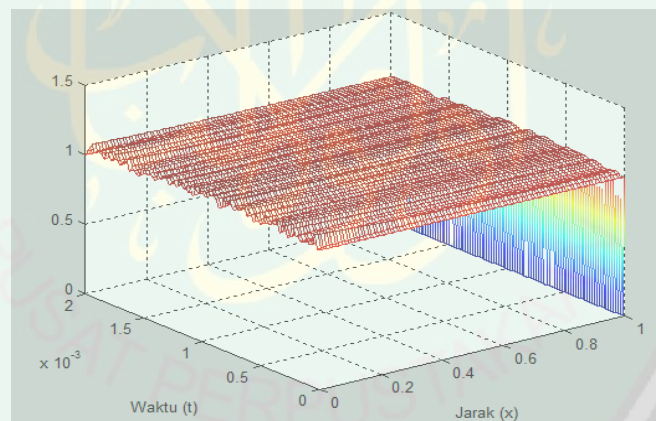
$$v_i^n = g(t_i) = 1 + \text{bilangan random}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.2.8) dan (3.2.9) sesuai jaringan titik hitung pada Gambar 3.2.1. Hasil

perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada Lampiran 3.



Gambar 3.2.6 Solusi Numerik $u(x,t)$ terhadap dengan $\rho=0.01$



Gambar 3.2.7 Solusi Numerik untuk $v(x,t)$ dengan $\rho=0.01$

3.3 Interpretasi Hasil Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Kondisi batas yang digunakan dalam pembahasan ini adalah $u(x_0, t) = u(0, t) = 0.9$, $u(R, t) = u(1, t) = 0.9$, $v(x_0, t) = v(0, t) = 1$ dan $v(R, t) = v(1, t) = 1$. Hal tersebut diinterpretasi bahwa x_0 dan R merupakan batas domain yang diselesaikan sehingga efek difusi sebelum x_0 dan R diabaikan. Nilai batas 0.9

dapat dimaknai bahwa energi kinetik non-dimensional pada titik $x_0 = 0$ sebesar 0.9 dan nilai batas 1 dapat dimaknai bahwa energi kinetik non-dimensional pada titik $x_n = R$ sebesar 1 pada masing-masing konsentrasi untuk semua waktu t . Dengan adanya kondisi batas yang diberikan, maka dapat memberikan batasan daerah yang akan diselesaikan.

Parameter-parameter yang digunakan di dalam model reaksi-difusi (*Turing*) yaitu ρ merupakan rasio pertumbuhan domain, $-\rho u$ dan $-\rho v$ adalah *dilution effect*, energi kinetik pada $a = 0.9$ dan $b = 0.1$ dan koefisien difusi $d = 0.06$.

Kondisi awal yang digunakan dalam pembahasan contoh model reaksi-difusi (*Turing*) adalah sebagai berikut:

$$u_i^n = f(t_i) = 0.9 + \text{bilangan random}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

$$v_i^n = g(t_i) = 1 + \text{bilangan random}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Kondisi tersebut dapat dimaknai bahwa energi kinetik non-dimensional pada titik x_0 pada waktu t_i untuk masing-masing konsentrasi dipengaruhi oleh adanya penambahan bilangan random di belakang suatu konstanta.

3.4 Perhitungan Waktu Pelaksanaan Shalat Tahajud

Shalat tahajud adalah sholat sunah yang dikerjakan pada waktu malam, dimulai selepas waktu shalat isya' sampai menjelang subuh. Pelaksanaan shalat tahajud dalam surat Al-Muzzammil ayat 1-4 Allah SWT berfirman:

يَا أَيُّهَا الْمَزْمَلُ ﴿١﴾ فَمِ اللَّيْلِ إِلَّا قَلِيلًا ﴿٢﴾ نَصَفَهُ أَوْ أَنْقَصَ مِنْهُ قَلِيلًا ﴿٣﴾ أَوْ زِدَ عَلَيْهِ وَرَتِّلِ الْقُرْآنَ أَنْ تَرَْتِيلًا ﴿٤﴾

Artinya: “Hai yang berselimut. Bangunlah (untuk sembahyang) di malam hari, kecuali sedikit (daripadanya), (yaitu) seperduanya atau kurangilah dari seperdua itu sedikit. Atau lebih dari seperdua itu. dan bacalah Al-Qur'an itu dengan perlahan-lahan”.

Sembahyang di sini diartikan perintah untuk melaksanakan shalat *al-Lail* (tahajud). Waktu untuk melaksanakannya yaitu selama seperdua malam atau sepertiga malam. Ada berbagai pandangan ulama' dalam menafsirkan waktu pelaksanaan shalat tahajud ini. Berikut cara menentukan waktu seperdua malam:

1. Ditentukan waktu tenggelamnya matahari dan waktu terbit fajar.
2. Dihitung jarak waktu antara keduanya.
3. Hasilnya perhitungan dibagi dua .
4. Hasil pembagian tersebut dijumlah dengan waktu tenggelamnya matahari (hasil penjumlahan tersebut adalah waktu pertengahan malam).

Secara matematis digambarkan berikut ini:

$$A = B + \left(\frac{C - B}{2} \right)$$

dengan

A = Waktu tengah malam.

B = Waktu tenggelam matahari

C = Waktu terbit fajar

Misalnya, jika waktu tenggelamnya matahari adalah pukul 18.00 dan waktu terbit fajar hari berikutnya adalah pukul 05.00, maka jarak waktu antara keduanya

setelah dihitung adalah 11 jam. Waktu 11 jam ini kemudian dibagi menjadi dua, maka hasilnya adalah 5 jam 30 menit. Kemudian hasil pembagian tersebut ditambahk dengan waktu matahari tenggelam, maka $18.00 + 5.30 = 23.30$, maka jadilah waktu pertengahan malam adalah 23.30 (pukul setengah 12 malam).

Sedangkan untuk menentukan waktu sepertiga malam yang akhir:

1. Dicari selisih perbedaan waktu antara waktu matahari tenggelam dengan waktu fajar terbit sebagaimana di atas.
2. Hasilnya dibagi tiga.

Sepertiga malam, yaitu:

$$\begin{aligned}
 &= 18.00 + \left(\frac{11}{3} \text{ jam} \right) \\
 &= 18.00 + 03.40 \\
 &= 01.20.
 \end{aligned}$$

Jadi pukul 01.20.

3. Hasil pembagian tersebut kemudian dipakai untuk mengurangi waktu terbit fajar keesokan hari (dalam contoh ini waktu terbit pukul 05.00).

Sepertiga malam, yaitu:

$$\begin{aligned}
 &= 05.00 - \left(\frac{11}{3} \text{ jam} \right) \\
 &= 05.00 - 03.40 \\
 &= 01.20.
 \end{aligned}$$

Jadi, pukul 01.20.

Maka permulaan sepertiga malam yang akhir adalah pada pukul 01.20 pagi (dini hari). Waktu ini tidaklah tetap, akan tetapi akan berubah-ubah dari satu musim ke musim yang lain (Zuhudi, 2008).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat diperoleh bahwa untuk menyelesaikan model reaksi-difusi (*Turing*) yang berbentuk:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u \\ v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v \\ L(t) = e^{\rho t} \end{cases}$$

yaitu ditransformasikan persamaan $u_t = \frac{1}{L(t)^2} u_{xx} + a - uv^2 - \rho u$ dan

$v_t = \frac{d}{L(t)^2} v_{xx} + b + uv^2 - v - \rho v$ dalam bentuk skema beda hingga implisit

menggunakan beda maju untuk turunan pertama terhadap waktu dan beda simetrik untuk turunan kedua terhadap ruang, sehingga diperoleh bentuk diskrit model reaksi-difusi (*Turing*) sebagai berikut:

$$\begin{cases} -\alpha u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\alpha) u_i^{n+1} - \alpha u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \Delta t (a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n) \\ -\beta v_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\beta) v_i^{n+1} - \beta v_{i+1}^{n+1} = v_i^n + \Delta t (b + u_i^n v_i^{n^2} - v_i^n - \rho v_i^n). \end{cases}$$

Selanjutnya dilakukan iterasi dengan parameter, kondisi batas dan kondisi awal pada daerah batas yang telah ditentukan pada hasil diskritisasi di atas. Untuk menghitung solusi numerik digunakan program yang tertera pada Lampiran. Berdasar hasil perhitungan diperoleh solusi numerik untuk model reaksi-difusi (*Turing*) berupa matriks ukuran 101x101. Berdasar solusi numerik, diketahui

bahwa besar kecilnya rasio domain pertumbuhan (ρ) pada proses difusi mempengaruhi penyelesaian numerik model reaksi-difusi (*Turing*).

4.2 Saran

Peneliti lain di harapkan dapat mengembangkan penelitian ini dalam kasus dua dimensi ataupun dengan menurunkan model reaksi-difusi (*Turing*) yang berupa persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa sehingga dapat dibandingkan hasilnya dengan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Atkins, P.W.. 1999. *Kimia Fisika Jilid II Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.
- Ayres, F.. 1992. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Aziz, A.. 2007. *Bumi Shalat Secara Matematis*. Malang: UIN-Maliki Press.
- Causon, D.M dan Mingham, C.G.. 2010. *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. Manchester Metropolitan University: Ventus Publishing ApS.
- Djojodihardjo, H.. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT. Gramedia Utama.
- Barras, I., Crampin E. J., dan Maini P. K.. 2006. Mode Transitions in a Model Reaction-Diffusion System Driven by Domain Growth and Noise. *Bulletin of Mathematical Biology* 68: 981-995.
- Keller, E.F. dan Segel L.. 1970. The Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Jurnal of Theory Biology* 26:399-415.
- Mutholiah, E.. 2008. Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial. *Skripsi Tidak diterbitkan*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Purcell, E. J. dan Varberg D.. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2*. Penj. Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.
- Sasongko, S. B.. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V Andi Offset.
- Shihab, M. Q.. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Pesan Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.
- Sholeh, M.. 2006. *Terapi Salat Tahajud Menyembuhkan Berbagai Penyakit*. Jakarta: PT Mizan Publika.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Zauderer, E.. 1998. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics, Second Edition*. New York: Wiley Interscience publication.
- Zuhudi. 2008. Menghitung Tengah Malam dan Sepertiga Malam yang Akhir. www.zuhud.wordpress.com/2008/03/25/ diakses pada 6 April 2013 pukul 11.20 WIB.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Junik Rahayu
Nim : 09610095
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan Metode Beda Hingga Implisit
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 September 2012	Bab I	1.
2.	13 Desember 2012	Revisi Judul Skripsi	2.
3.	14 Desember 2012	Kajian Agama Bab I, Bab II	3.
4.	2 Januari 2013	Revisi Bab II	4.
5.	11 Januari 2013	Bab III	5.
6.	15 Januari 2013	Bab III	6.
7.	9 Pebruari 2013	Revisi Kajian Agama Bab I	7.
8.	20 Pebruari 2013	Revisi Kajian Agama Bab II	8.
9.	8 Maret 2013	Kajian Agama Bab III	9.
10.	9 Maret 2013	Revisi Bab III	10.
11.	13 Maret 2013	ACC Kajian Agama	11.
12.	13 Maret 2013	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 16 Maret 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Lampiran 1 Program Matlab Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (Turing) dengan $\rho = 0.001$

```

clc;clear all; format long e;
d=0.06; %rasio koefisien difusi
rho=0.001; %nilai efek dilusi
a=0.9;%energi kinetik u(x,t)
b=0.1;%energi kinetik v(x,t)
L0=1;
% Interval
dx=0.01;
dt=0.00002;
x=[0:dx:1];
N=length(x)-1;
t=[0:dt:0.002];
M=length(t)-1;
% Kondisi awal
for r=1:N+1
    u(r,1)=0.9+rand*0.1;
    v(r,1)=1+rand*0.1;
end
%kondisi batas
for n=1:M+1
    u(1,n)=0.9;
    v(1,n)=1;
    u(M+1,n)=0.9;
    v(M+1,n)=1;
    L(n)=exp(rho*dt*n)*L0;
end
X=zeros(N-1,N-1);
Y=zeros(N-1,N-1);
m=zeros(N-1,1);
e=zeros(N-1,1);
for n = 2:M
    % Iterasi Implisit untuk u(x,t)
    A=dt/((L(n-1)^2)*(dx^2));%alfa
    B=(1+(2*A));
    C=(dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));
    % Iterasi Implisit untuk v(x,t)
    D=(d*dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));%beta
    E=(1+(2*D));
    F=(d*dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));
    % Penyusunan matriks koefisien X dan Y, X adalah matrik
    tridiagonal untuk u dan Y adalah matrik tridiagonal untuk v
    X(1,1)=B; X(1,2)=-C;
    Y(1,1)=E; Y(1,2)=-F;
    m(1) = u(2,n-1) + dt*(a-u(2,n-1)*(v(2,n-1))^2-rho*(u(2,n-1))) +
    A*u(1,n-1);
    e(1) = v(2,n-1) + dt*(b+v(2,n-1)*(v(2,n-1))^2-rho*(v(2,n-1))) +
    D*v(1,n-1);
    for r=2:N-2
        X(r,r-1)=-A; X(r,r)=B; X(r,r+1)=-C;
        Y(r,r-1)=-D; Y(r,r)=E; Y(r,r+1)=-F;
        m(r) = u(r+1,n-1) + dt*(a-u(r+1,n-1)*(v(r+1,n-1))^2-
        rho*(u(r+1,n-1)));
    end
end

```

```

    e(r) = v(r+1,n-1) + dt*(b+v(r+1,n-1)*(v(r+1,n-1))^2-
rho*(v(r+1,n-1)));
end
X(N-1,N-2)=-A; X(N-1,N-1)=B;
Y(N-1,N-2)=-D; Y(N-1,N-1)=E;

% Penyusunan matriks konstanta u
m(N-1) = u(N,n-1) + dt*(a-u(N,n-1)*(v(N,n-1))^2-rho*(u(N,n-1))) +
C*u(N+1,n-1);
e(N-1) = v(N,n-1) + dt*(b+v(N,n-1)*(v(N,n-1))^2-rho*(v(N,n-1))) +
F*v(N+1,n-1);

% Solusi X*u = m untuk u
u(2:N,n) = (inv(X)*m)';
% Solusi Y*v = e untuk v
v(2:N,n) = (inv(Y)*e)';
drawnow;

figure(1);
mesh(x,t,u)
shading interp
title('Solusi Numerik untuk u(x,t)')
xlabel('Jarak (x)')
ylabel('Waktu (t)')

figure(2);
mesh(x,t,v)
shading interp
title('Solusi Numerik untuk v(x,t)')
xlabel('Jarak (x)')
ylabel('Waktu (t)')
end

disp (u)
disp (v)

```


Lampiran 2 Program Matlab Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (Turing) dengan $\rho = 0.05$

```

clc;clear all; format long e;
d=0.06; %rasio koefisien difusi
rho=0.05; %nilai efek dilusi
a=0.9;%energi kinetik u(x,t)
b=0.1;%energi kinetik v(x,t)
L0=1;
% Interval
dx=0.01;
dt=0.00002;
x=[0:dx:1];
N=length(x)-1;
t=[0:dt:0.002];
M=length(t)-1;
% Kondisi awal
for r=1:N+1
    u(r,1)=0.9+rand*0.1;
    v(r,1)=1+rand*0.1;
end
%kondisi batas
for n=1:M+1
    u(1,n)=0.9;
    v(1,n)=1;
    u(M+1,n)=0.9;
    v(M+1,n)=1;
    L(n)=exp(rho*dt*n)*L0;
end
X=zeros(N-1,N-1);
Y=zeros(N-1,N-1);
m=zeros(N-1,1);
e=zeros(N-1,1);
for n = 2:M
    % Iterasi Implisit untuk u(x,t)
    A=dt/((L(n-1)^2)*(dx^2));%alfa
    B=(1+(2*A));
    C=(dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));
    % Iterasi Implisit untuk v(x,t)
    D=(d*dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));%beta
    E=(1+(2*D));
    F=(d*dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));
    % Penyusunan matriks koefisien X dan Y, X adalah matrik
    tridiagonal untuk u dan Y adalah matrik tridiagonal untuk v
    X(1,1)=B; X(1,2)=-C;
    Y(1,1)=E; Y(1,2)=-F;
    m(1) = u(2,n-1) + dt*(a-u(2,n-1)*(v(2,n-1))^2-rho*(u(2,n-1))) +
    A*u(1,n-1);
    e(1) = v(2,n-1) + dt*(b+v(2,n-1)*(v(2,n-1))^2-rho*(v(2,n-1))) +
    D*v(1,n-1);
    for r=2:N-2
        X(r,r-1)=-A; X(r,r)=B; X(r,r+1)=-C;
        Y(r,r-1)=-D; Y(r,r)=E; Y(r,r+1)=-F;
        m(r) = u(r+1,n-1) + dt*(a-u(r+1,n-1)*(v(r+1,n-1))^2-
        rho*(u(r+1,n-1)));
    end
end

```

```

    e(r) = v(r+1,n-1) + dt*(b+v(r+1,n-1)*(v(r+1,n-1))^2-
rho*(v(r+1,n-1)));
end
X(N-1,N-2)=-A; X(N-1,N-1)=B;
Y(N-1,N-2)=-D; Y(N-1,N-1)=E;

% Penyusunan matriks konstanta u
m(N-1) = u(N,n-1) + dt*(a-u(N,n-1)*(v(N,n-1))^2-rho*(u(N,n-1))) +
C*u(N+1,n-1);
e(N-1) = v(N,n-1) + dt*(b+v(N,n-1)*(v(N,n-1))^2-rho*(v(N,n-1))) +
F*v(N+1,n-1);

% Solusi X*u = m untuk u
u(2:N,n) = (inv(X)*m)';
% Solusi Y*v = e untuk v
v(2:N,n) = (inv(Y)*e)';
drawnow;

figure(1);
mesh(x,t,u)
shading interp
title('Solusi Numerik untuk u(x,t)')
xlabel('Jarak (x)')
ylabel('Waktu (t)')

figure(2);
mesh(x,t,v)
shading interp
title('Solusi Numerik untuk v(x,t)')
xlabel('Jarak (x)')
ylabel('Waktu (t)')
end

disp (u)
disp (v)

```

Lampiran 3 Program Matlab Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (Turing) dengan $\rho = 0.01$

```

clc;clear all; format long e;
d=0.06; %rasio koefisien difusi
rho=0.01; %nilai efek dilusi
a=0.9;%energi kinetik u(x,t)
b=0.1;%energi kinetik v(x,t)
L0=1;
% Interval
dx=0.01;
dt=0.00002;
x=[0:dx:1];
N=length(x)-1;
t=[0:dt:0.002];
M=length(t)-1;
% Kondisi awal
for r=1:N+1
    u(r,1)=0.9+rand*0.1;
    v(r,1)=1+rand*0.1;
end
%kondisi batas
for n=1:M+1
    u(1,n)=0.9;
    v(1,n)=1;
    u(M+1,n)=0.9;
    v(M+1,n)=1;
    L(n)=exp(rho*dt*n)*L0;
end
X=zeros(N-1,N-1);
Y=zeros(N-1,N-1);
m=zeros(N-1,1);
e=zeros(N-1,1);
for n = 2:M
    % Iterasi Implisit untuk u(x,t)
    A=dt/((L(n-1)^2)*(dx^2));%alfa
    B=(1+(2*A));
    C=(dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));
    % Iterasi Implisit untuk v(x,t)
    D=(d*dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));%beta
    E=(1+(2*D));
    F=(d*dt/((L(n-1)^2)*(dx^2)));
    % Penyusunan matriks koefisien X dan Y, X adalah matrik
    tridiagonal untuk u dan Y adalah matrik tridiagonal untuk v
    X(1,1)=B; X(1,2)=-C;
    Y(1,1)=E; Y(1,2)=-F;
    m(1) = u(2,n-1) + dt*(a-u(2,n-1)*(v(2,n-1))^2-rho*(u(2,n-1))) +
    A*u(1,n-1);
    e(1) = v(2,n-1) + dt*(b+v(2,n-1)*(v(2,n-1))^2-rho*(v(2,n-1))) +
    D*v(1,n-1);
    for r=2:N-2
        X(r,r-1)=-A; X(r,r)=B; X(r,r+1)=-C;
        Y(r,r-1)=-D; Y(r,r)=E; Y(r,r+1)=-F;
        m(r) = u(r+1,n-1) + dt*(a-u(r+1,n-1)*(v(r+1,n-1))^2-
        rho*(u(r+1,n-1)));
    end
end

```

```

    e(r) = v(r+1,n-1) + dt*(b+v(r+1,n-1)*(v(r+1,n-1))^2-
rho*(v(r+1,n-1)));
end
X(N-1,N-2)=-A; X(N-1,N-1)=B;
Y(N-1,N-2)=-D; Y(N-1,N-1)=E;

% Penyusunan matriks konstanta u
m(N-1) = u(N,n-1) + dt*(a-u(N,n-1)*(v(N,n-1))^2-rho*(u(N,n-1))) +
C*u(N+1,n-1);
e(N-1) = v(N,n-1) + dt*(b+v(N,n-1)*(v(N,n-1))^2-rho*(v(N,n-1))) +
F*v(N+1,n-1);

% Solusi X*u = m untuk u
u(2:N,n) = (inv(X)*m)';
% Solusi Y*v = e untuk v
v(2:N,n) = (inv(Y)*e)';
drawnow;

figure(1);
mesh(x,t,u)
shading interp
title('Solusi Numerik untuk u(x,t)')
xlabel('Jarak (x)')
ylabel('Waktu (t)')

figure(2);
mesh(x,t,v)
shading interp
title('Solusi Numerik untuk v(x,t)')
xlabel('Jarak (x)')
ylabel('Waktu (t)')
end

disp (u)
disp (v)

```