

**METODE *SPLITTING* PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS
PARABOLIK DUA DIMENSI**

SKRIPSI

Oleh:
DHITA KRIDA KUMALA
NIM. 09610053



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**METODE *SPLITTING* PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS
PARABOLIK DUA DIMENSI**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

**DHITA KRIDA KUMALA
NIM. 09610053**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**METODE *SPLITTING* PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS
PARABOLIK DUA DIMENSI**

SKRIPSI

Oleh:
DHITA KRIDA KUMALA
NIM. 09610053

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 20 Maret 2013

Pembimbing I,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**METODE *SPLITTING* PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS
PARABOLIK DUA DIMENSI**

SKRIPSI

Oleh:
DHITA KRIDA KUMALA
NIM. 09610053

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 28 Maret 2013

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Ketua Penguji : Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dhita Krida Kumala

NIM : 09610053

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Maret 2013

Yang membuat pernyataan,

Dhita Krida Kumala
NIM. 09610053

MOTTO

مَنْ جَدَّ وَجَدَّ

"Barang Siapa yang Bersungguh-sungguh Maka Dapatlah Ia"



PERSEMBAHAN

Skripsi ini akan dipersembahkan kepada:

Ayahanda Supar dan Ibunda Sayuti yang selalu memberikan dukungan dan dorongan serta senantiasa memberikan teladan yang baik

Seluruh keluarga dan kerabat yang selalu memberikan motivasi.

Moh. Hasan yang selalu menemani penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.



KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puja dan puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan rahmat, taufiq, hidayah serta inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah banyak membimbing, mengarahkan dan menyumbangkan pemikiran sehingga terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd dan Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman yang berharga.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika terutama seluruh dosen terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Bapak Supar dan Ibu Sayuti tercinta yang senantiasa memberikan doa dan dukungan berupa moril maupun materiil kepada penulis.
7. Muhammad Hasan, yang sudah membantu dan memberi dorongan sehingga terselesaikannya skripsi ini.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2009 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dengan iringan do'a semoga Allah membalas semua kebaikan mereka. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca dan khususnya bagi penulis. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Malang, Maret 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Metode Penelitian	4
1.6 Sistematika Penulisan	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Panas Dua Dimensi	7
2.2 Orde Persamaan Panas Dua Dimensi	8
2.3 Klasifikasi Persamaan Panas Dua Dimensi	9
2.4 Metode Numerik untuk Solusi Persamaan Diferensial Parsial.....	10
2.4.1 Metode Beda Hingga.....	10

2.4.2 Operator Metode <i>Splitting</i>	19
2.5 Analisis Kestabilan Menggunakan Diskrit <i>Fourier</i>	23
2.6 Konduksi Panas	24
2.7 Metode <i>Splitting</i> dalam Perspektif Islam.....	27
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Skema Metode <i>Splitting</i> pada Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi.....	30
3.2 Analisis Kestabilan Metode <i>Splitting</i> Persamaan Panas Dua Dimensi.....	36
3.3 Metode <i>Splitting</i> pada Penyelesaian Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi.....	44
3.4 Solusi Analitik Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi	51
3.5 Interpretasi Hasil Numerik Penyelesaian Persamaan Panas Dua Dimensi.....	58
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan.....	59
4.2 Saran	60
DAFTAR PUSTAKA	61
LAMPIRAN.....	63

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Pias-pias Beda Hingga	11
Gambar 2.2 Proyeksi Pias-pias ke Bidang $x-t$	11
Gambar 2.3 Garis Singgung Sejajar Bidang $x-c$	12
Gambar 2.4 Skema Eksplisit pada Persamaan Perambatan Panas	13
Gambar 2.5 Skema Implisit pada Persamaan Perambatan Panas	14
Gambar 2.6 Skema <i>Crank-Nicholson</i> pada Persamaan Perambatan Panas	18
Gambar 3.1 Solusi Numerik Persamaan Panas Dua Dimensi dengan $dx = 0.5$, $dy = 0.5$, $dt = 0.5$, dan $n = 1600$ (belum stabil)	51
Gambar 3.2 Solusi Numerik Persamaan Panas Dua Dimensi dengan $dx = 0.5$, $dy = 0.5$, $dt = 0.5$, dan $n = 2400$ (sudah stabil)	51

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Konduktifitas Termal dari Beberapa Bahan.....	26
Tabel 2.2 Difusitas Termal dari Beberapa Bahan	26



ABSTRAK

Kumala, Dhita Krida. 2013. **Metode *Splitting* pada Penyelesaian Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci : Metode *Splitting*, Skema *Crank Nicholson*, Persamaan Panas Dua Dimensi

Metode *splitting* merupakan metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan parabolik yang multi dimensi. Persamaan panas dua dimensi merupakan persamaan diferensial parsial bertipe parabolik yang menggambarkan perambatan panas pada dua dimensi, yaitu dimensi x dan y . Bentuk umum persamaan panas dua dimensi adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dagger \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \text{ dengan } \dagger \text{ adalah konstanta difusitas termal.}$$

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan solusi numerik dengan metode *splitting* dan analisis kestabilan persamaan panas dengan metode *splitting*. Penelitian ini dikerjakan dengan tetapan difusitas termal $\dagger = 0.12$, $\Delta x = 0.5$, $\Delta y = 0.5$, dan $\Delta t = 0.5$. Hasil persamaan panas yang diselesaikan dengan metode *splitting* untuk $t = 2400$ didapatkan *error* yang tidak terlalu besar, sehingga dapat disimpulkan hasil metode *splitting* untuk persamaan panas dua dimensi mendekati solusi eksaknya. Pada skema *Crank Nicholson* untuk persamaan panas dua dimensi diperoleh kestabilan bilangan *Courant* (σ dan $\tilde{\sigma}$) harus memenuhi $\sigma, \tilde{\sigma} > 0$. Ini berarti bahwa metode *splitting* dengan skema *Crank Nicholson* stabil tanpa syarat. Stabilitas menyiratkan bahwa solusi dari persamaan diferensial tersebut tidak terlalu sensitif terhadap gangguan.

Saran untuk penelitian selanjutnya untuk dilakukan penelitian lebih lanjut permasalahan metode *splitting* untuk kasus yang non linier.

ABSTRACT

Kumala, Dhita Krida. , 2013. **Operator Splitting Method for Parabolic Resolution Two Dimensional Heat Equation**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si. M.Pd.

(II) Abdul Aziz, M.Si.

Splitting method is a numerical method to solve multi-dimensional parabolic problems. Two-dimensional heat equation is a type of parabolic partial differential equations describing the propagation of heat in a two-dimensional are x and y dimension. General forms of two-dimensional heat equation is $\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ where σ is thermal difusitas.

This study aimed to obtain a numerical solution to the splitting method and stability analysis of the heat equation with a splitting method. This research was done with constant thermal difusitas $\dagger = 0.12$, $\Delta x = 0.5$, $\Delta y = 0.5$, and $\Delta t = 0.5$ then the results of the heat equation is solved with splitting method to obtain an error that is not too large, it can be concluded that the results of splitting methods for two-dimensional heat equation approach the exact solution. In the Crank Nicholson scheme for two-dimensional heat equation is obtained stability Courant number (ω dan \tilde{S}) should meet $\omega, \tilde{S} > 0$. This means that the method of splitting the Crank Nicholson scheme unconditionally stable. Stability implies that the solution of the differential equation is not very sensitive to disturbance.

Suggestions for further research to be done further research issues splitting methods for non linear case.

Keywords : Splitting Method, Crank Nicholson scheme, Two Dimensional Heat Equation

- نيتا كريذا . 2013. طريقة تقسيم في قرار ثنائي الأبعاد مكافئ معادلة الحرارة . الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج الدولة . (I) ، جستير، (II) عبد العزيز، ما جستير.

: طريقة لتقسيم، المساعد نيكلسون مخطط، ثنائي الأبعاد المعادلة الحرارة

طريقة تقسيم هي طريقة عديدة لحل المشاكل مكافئ متعددة الأبعاد.

هو نوع من مكافئ المعادلات التفاضلية الجزئية الت وهذا x

$$\dagger \frac{\partial u}{\partial t} = \dagger \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

. y . الأشكال الشائعة من معادلة الحرارة ثنائي الأبعاد هو

الحرارية هي الثوابت.

تهدف هذه الدراسة للحصول على الحل العددي لطريقة تقسيم وتحليل استقرار المعادلة الحرارة مع طريقة تقسيم. أجري هذا البحث مع الحرارية ثابتة $\Delta y = 0.5$, $\Delta x = 0.5$, $\dagger = 0.12$ معادلة الحرارة يتم حلها مع طريقة تقسيم $t = 2400$ للحصول على خطأ ليست كبيرة جداً، يمكن الاستنتاج أن نتائج أساليب تقسيم لمعادلة الحرارة ثنائي الأبعاد الاقتراب من الحل الدقيق. في مخطط نيكلسون المساعد لمعادلة الحرارة ثنائي الأبعاد يجب أن يتم الحد („ dan \check{S}) الوفاء به $\check{S} > 0$. وهذا يعني أن طريقة تقسيم مخطط نيكلسون المساعد مستقرة دون قيد أو شرط. الاستقرار يعني أن حل المعادلة التفاضلية ليست حساسة جداً للاضطراب.

اقتراحات لمزيد من البحوث يجب القيام به القضايا إجراء مزيد من البحوث أساليب تقسيم لحالة غير الخطية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau ilmu *al-hisab* (Abdussakir, 2007:83). Banyak ayat-ayat Al-Qur'an yang berisi tentang perhitungan atau matematika. Dalam Q.S. Al-An'am:160, dinyatakan:

مَنْ جَاءَ بِالْحَسَنَةِ فَلَهُ عَشْرُ أَمْثَالِهَا ۖ وَمَنْ جَاءَ بِالسَّيِّئَةِ فَلَا تُجْزَىٰ إِلَّا مِثْلَهَا وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ



Artinya: “Barang siapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan barang siapa yang membawa perbuatan jahat, maka dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedangkan mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan)” (Qs. Al-An'am/6:160).

Pada ayat tersebut, Allah SWT menggunakan rumus matematika untuk menentukan balasan perbuatan kebaikan dan kejahatan. Amal kebaikan mendapat pahala 10 kali amal kebaikan tersebut, dan amal kejahatan mendapat balasan 1 kali amal kejahatan tersebut (Abdussakir, 2007:81-82).

Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dengan menggunakan bahasa matematik, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan (Dumairy, 2003:ix).

Masalah matematika khususnya persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik. Solusi analitik merupakan solusi kontinu sehingga solusi dari nilai variabel bebas dapat ditemukan, sangat akurat, dan tepat. Sedangkan solusi numerik solusi dapat diperoleh pada *point-point grid* terpisah, aproksimasi, kesalahan kuantitatif harus dikendalikan dengan baik untuk ketelitian (Lam, 1994:20). Menurut Susila (1993:2) solusi analitik adalah penyelesaian yang memenuhi persamaan semula secara eksak sedangkan numerik adalah penyelesaian yang berupa hampiran.

Menurut pandangan Islam setiap masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat diambil sebagai jalan keluar atau solusi pemecahan dari suatu masalah. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan satu cara maka pasti ada cara lain untuk menyelesaikannya. Sebagaimana dalam Firman-Nya pada Al-Qur'an Surat Alam Nasyroh ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya :“*Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5). Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)*”. (QS. Alam Nasyroh/94: 5-6)

Dalam suatu riwayat dikemukakan bahwa ketika turun ayat ini (QS.94:5-6) Rasulullah SAW bersabda: “*Bergembiralah kalian karena akan datang kemudahan bagi kalian. Kesusahan tidak akan mengalahkan dua kemudahan.*” (Diriwayatkan oleh Ibnu Jarir yang bersumber dari Al-Hasan).

Dari penjabaran ayat tersebut dapat diketahui bahwa ada kemudahan yang telah dikaruniakan Allah pada hamba-Nya sebagai beberapa solusi alternatif. Hal

ini berhubungan dengan masalah matematika khususnya persamaan diferensial parsial yang lebih mudah diselesaikan numerik dari pada analitik.

Metode penyelesaian numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas adalah metode beda hingga, metode ADI (*Alternating Direction Implicit*) dan metode *splitting*. Metode *splitting* dapat digunakan untuk mencari solusi numerik dari permasalahan yang kompleks, serta membantu untuk menyederhanakan masalah sehingga membantu untuk mencari solusi yang akurat dan efisien.

Persamaan diferensial parsial merupakan kajian matematika yang sangat fundamental yang dapat menerjemahkan fenomena alam ke dalam bentuk yang sistematis. Fakta dari suatu objek yang akan diamati akan menjadi logis dan jelas dengan menampilkan model dari fakta ini, yang pada umumnya berbentuk persamaan diferensial parsial atau bahkan sistem persamaan diferensial parsial. Persamaan panas merupakan salah satu bentuk dari persamaan diferensial parsial yang bertipe parabolik dan dalam penyelesaian persamaan tersebut memerlukan kondisi awal dan batas.

Berdasarkan uraian di atas maka penulis terdorong untuk mengkaji penyelesaian *splitting* dengan melakukan penelitian dalam bentuk skripsi dengan judul “*Metode Splitting pada Penyelesaian Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, penulis dapat mengemukakan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana metode *splitting* pada menyelesaikan persamaan panas parabolik dua dimensi?
2. Bagaimana analisis kestabilan metode *splitting* pada persamaan panas parabolik dua dimensi?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui metode *splitting* pada penyelesaian persamaan panas parabolik dua dimensi.
2. Untuk mengetahui analisis kestabilan metode *splitting* pada persamaan panas parabolik dua dimensi.

1.4 Batasan Masalah

Berdasarkan luasnya permasalahan yang terkait dengan persamaan diferensial parsial, maka dalam penulisan penelitian dibatasi pada:

1. Persamaan panas tipe parabolik dua dimensi
2. Menggunakan skema *Crank-Nicolson*
3. Analisis kestabilan menggunakan diskrit *Fourier*

1.5 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini metode yang dapat digunakan adalah studi literatur yaitu dengan menelaah dan mempelajari buku, jurnal dan referensi lain yang mendukung penelitian.

Secara rinci langkah-langkah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis skema metode *splitting* pada persamaan panas
2. Analisis kestabilan metode *splitting*

3. Analisis persamaan panas
4. Simulasi program dan hasil
5. Analisis dan pembahasan

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan tentang gambaran umum dan teori yang mendasari pembahasan, di antaranya persamaan panas dua dimensi, orde dan tipe persamaan panas, metode numerik persamaan diferensial parsial, analisis kestabilan menggunakan diskrit *Fourier* untuk persamaan panas, konduksi panas dan metode *splitting* dalam perspektif Islam.

Bab III Pembahasan

Dalam bab ini penulis mengkaji tentang pembahasan bagaimana skema metode *splitting* pada persamaan panas parabolik dua dimensi, analisis kestabilan persamaan panas dua dimensi, solusi numerik persamaan panas dua dimensi dengan metode *splitting*, solusi analitik persamaan panas parabolik dua dimensi, dan interpretasi hasil penyelesaian numerik persamaan panas dua dimensi.

Bab IV Penutup

Pada bab ini disajikan kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian yang telah dibahas dengan dilengkapi saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Panas Dua Dimensi

Persamaan panas dua dimensi dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dagger \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

dengan \dagger adalah tetapan difusitas (Flaherty, 1989).

Persamaan panas dua dimensi mengandung tiga variabel bebas yaitu variabel t yang menyatakan waktu dan variabel x, y yang menyatakan ruang dan satu variabel terikat yaitu u yang terikat pada tiga variabel bebas yaitu (x, y, t) .

Persamaan panas dua dimensi merupakan persamaan diferensial parsial karena dua variabel bebas dari persamaan tersebut (x, y) mengandung dua turunan parsial. Menurut Soeharjo (1996) Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah suatu persamaan yang mengandung dua atau lebih derivatif parsial suatu fungsi dari dua atau lebih variabel bebas

Notasi lain untuk persamaan panas dua dimensi adalah

$$u_t = \dagger (u_{xx} + u_{yy}) \quad (2.2)$$

Persamaan panas dua dimensi (2.1) merupakan persamaan diferensial parsial linier, karena variabel bebas dan turunannya tidak merupakan perkalian atau perpangkatan.

Menurut Triatmojo (2002:201), persamaan diferensial parsial dikatakan linier apabila variabel bebas dan turunannya tidak merupakan hasil perkalian. Bentuk umum Persamaan Diferensial Parsial (PDP) linier tingkat dua variabel bebas adalah:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (2.3)$$

dengan A, B, C, D, E, F , dan G merupakan fungsi dalam x dan y . Sedangkan suatu PDP dikatakan non linier jika variabel tak bebas u dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara tidak linier (dipangkatkan atau dikalikan).

2.2 Orde Persamaan Panas Dua Dimensi

Orde suatu persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial (Stewart, 2003:5). Menurut Zauderer (2006:63), Persamaan Diferensial Parsial (PDP) dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier dan non linier berorde satu adalah:

$$a(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + b(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c(x,t)u(x,t) + d(x,t) \quad (2.4)$$

dimana a, b, c dan d adalah fungsi dan di setiap titik (x, t) merupakan vektor $[a(x,t), b(x,t)]$ yang terdefinisi dan tidak nol.

Demikian halnya dengan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde n jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau n (Zauderer, 2006:137).

2.3 Klasifikasi Persamaan Panas Dua Dimensi

Persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas diklasifikasikan menjadi tiga bentuk, yaitu persamaan diferensial eliptik, parabolik dan hiperbolik. Bentuk umum persamaan diferensial parsial orde dua adalah:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu + G = 0 \quad (2.5)$$

dimana A, B, C, D, E, F dan G merupakan fungsi dari variabel x, t dan u .

Bentuk (2.5) berdasarkan harga diskriminan $B^2 - 4AC$ dapat dikelompokkan menjadi:

- Tipe Parabolik, $B^2 - 4AC = 0$
- Tipe Eliptik, $B^2 - 4AC < 0$
- Tipe Hiperbolik, $B^2 - 4AC > 0$. (Sasongko, 2010).

Apabila pada persamaan panas dua dimensi (2.1) ruas kanan dipindah ke ruas kiri maka menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.6)$$

dengan $A = -\nabla$, $B = 0$ dan $C = 0$, maka diperoleh harga diskriminan yaitu:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \times (-\nabla) \times 0 = 0 \quad (2.7)$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan panas dua dimensi merupakan persamaan diferensial parabolik, karena menurut (2.7) harga diskriminan pada persamaan panas dua dimensi adalah $B^2 - 4AC = 0$.

2.4 Metode Numerik untuk Solusi Persamaan Diferensial Parsial

2.4.1 Metode Beda Hingga

Wignyosukarto (1986:53) menyatakan pengertian penyelesaian dengan metode beda hingga dapat dijelaskan dengan meninjau suatu luasan yang merupakan hasil dari persamaan diferensial parsial yang mempunyai satu variabel tak bebas c dan dua variabel bebas x dan t . Setiap persamaan diferensial yang berlaku pada luasan tersebut menyatakan keadaan suatu titik atau pias yang cukup kecil di luasan tersebut.

Pada gambar (2.1) ditunjukkan suatu luasan yang dipotong-potong menjadi pias kecil yang berhingga, yang apabila diproyeksikan ke bidang $x-t$ akan menjadi seperti pada gambar (2.2). Untuk mendapatkan turunan di titik $P(i,l)$ dibuat potongan sejajar $c-x$. Harga $\frac{\partial c}{\partial t}$ di titik P menyatakan sudut tangensial dari garis singgung T-T pada gambar (2.3). Sudut tersebut dapat didekati dengan beberapa cara yaitu:

- Sudut dari garis singgung juring AP di titik P disebut pendekatan diferensial mundur

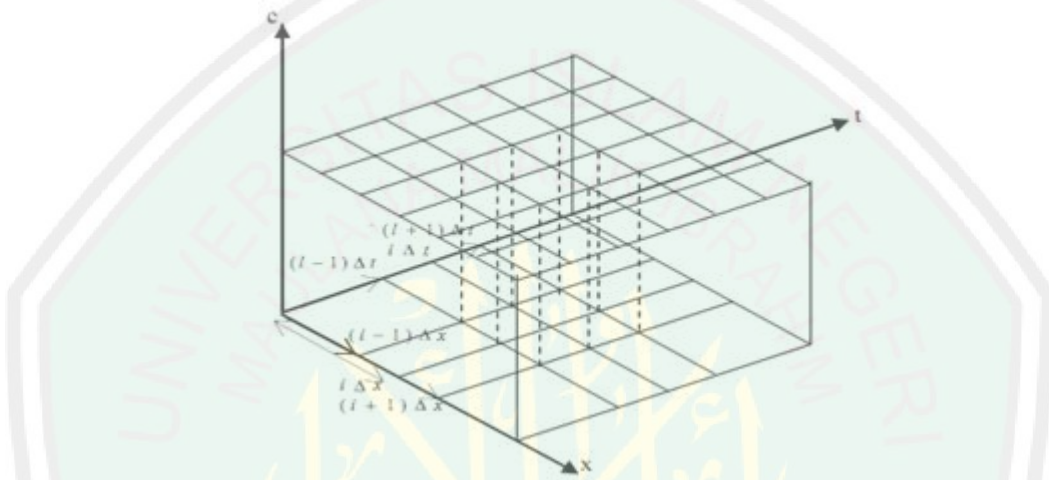
$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_i^l - c_{i-1}^l}{\Delta x} \quad (2.8)$$

- Sudut dari garis singgung juring BP di titik P disebut pendekatan diferensial maju

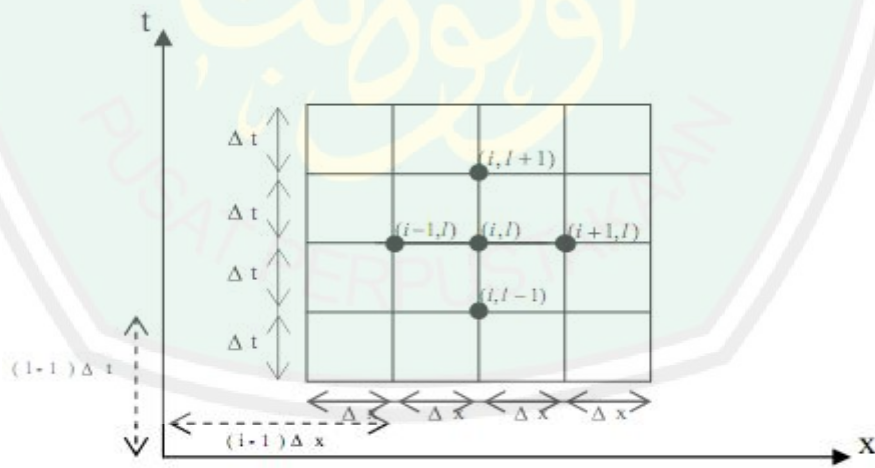
$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_{i+1}^l - c_i^l}{\Delta x} \quad (2.9)$$

- c. Sudut dari garis singgung juring AP di titik P disebut pendekatan diferensial tengah

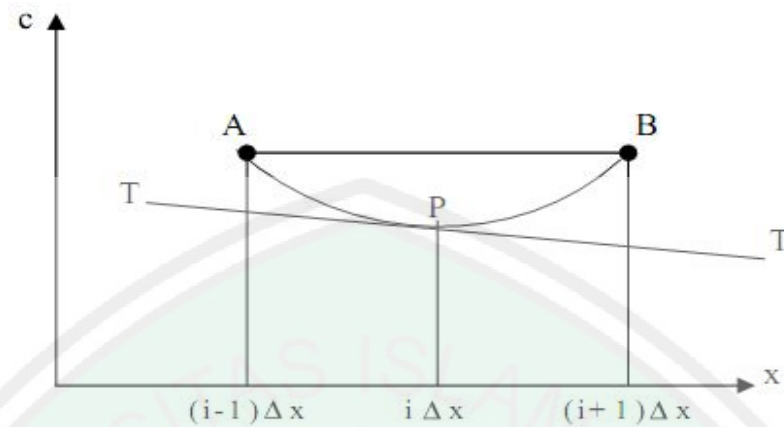
$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_{i+l}^l - c_{i-l}^l}{\Delta x} \tag{2.10}$$



Gambar 2.1. Pias-pias Benda Hingga



Gambar 2.2. Proyeksi Pias-pias ke Bidang $x - t$



Gambar 2.3. Garis Singgung Sejajar Bidang $x - c$

Yang (2005:406) menyatakan untuk mempelajari skema beda hingga, misal diberikan persamaan parabola yaitu persamaan perambatan panas satu dimensi, sebagai berikut:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad (2.11)$$

dengan syarat awal adalah:

$$T(x,0) = a_0(x), \quad 0 < x < L$$

dengan syarat batas sebagai berikut:

$$T(0,t) = b_0(t), \quad t < 0$$

$$T(L,t) = b_L(t), \quad t < 0$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas dengan skema beda hingga akan dihitung nilai pendekatan T (*temperature*) pada jaringan titik (x_i, t_i) dengan domain komputasi didiskritkan menggunakan *grid* yang *uniform* baik pada arah x maupun arah t sebagai berikut:

$$t_i = i\Delta t, \quad t \geq 0$$

$$x_i = i\Delta x, \quad 0 \leq i \leq n$$

dimana n adalah banyaknya pias.

i. Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $l+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu l yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema diferensial maju untuk turunan pertama terhadap t , serta diferensial terpusat untuk turunan kedua terhadap x , fungsi $T(x,t)$ didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x,t) = T_i^l \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (2.13)$$

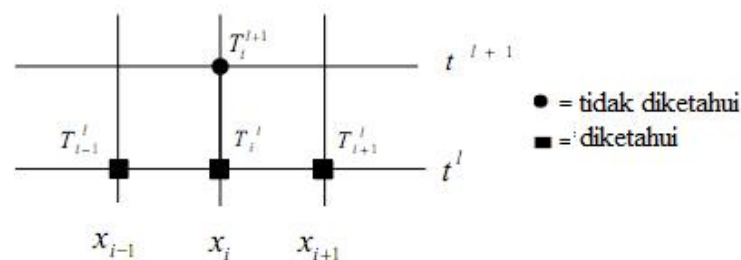
$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \quad (2.14)$$

dengan menggunakan skema di atas, dengan anggapan bahwa K konstan, maka persamaan (2.11) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = K \left(\frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \right) \quad (2.15)$$

atau

$$T_i^{l+1} = T_i^l + K \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l)$$

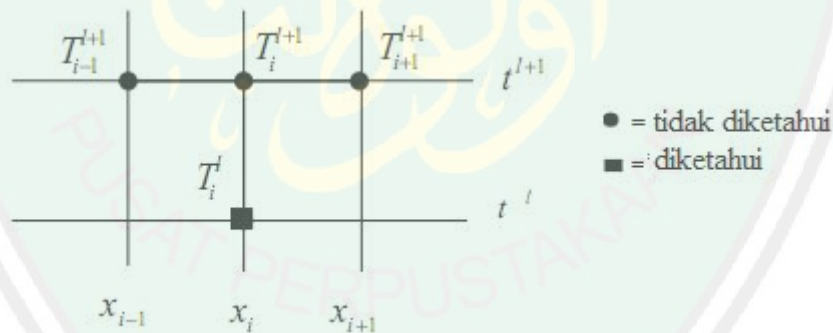


Gambar 2.4. Skema Eksplisit pada Persamaan Perambatan Panas

Dari gambar (2.4), jarak antara titik hitungan (panjang *pias*) adalah $\Delta x = L/n$, dengan n adalah jumlah *pias*, sedang interval waktu hitungan adalah Δt . Nilai T_i^{l+1} dapat diperoleh secara eksplisit dari nilai sebelumnya, yaitu T_{i-1}^l , T_i^l , T_{i+1}^l . Dengan nilai l yang sudah diketahui, memungkinkan untuk menghitung T_i^{l+1} ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

ii. Skema Implisit

Pada skema eksplisit, ruas kanan ditulis pada waktu l yang sudah diketahui nilainya, akan tetapi pada skema implisit ruas kanan ditulis pada waktu $l+1$ yang tidak diketahui nilainya. Gambar (2.5) merupakan jaringan titik hitung pada skema implisit, dimana turunannya didekati sebuah waktu pada saat $l+1$.



Gambar 2.5. Skema Implisit pada Persamaan Perambatan Panas

Dari gambar (2.5), fungsi $T(x, t)$ dan turunannya didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x, t) = T_i^l$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \quad (2.17)$$

sehingga persamaan (2.11) dapat ditulis dalam bentuk beda hingga menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} &= K \left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \right) \\ \frac{1}{\Delta t} T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i-1}^{l+1} + \frac{2K}{\Delta x^2} T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i+1}^{l+1} &= \frac{1}{\Delta t} T_i^l \\ -\frac{K}{\Delta x^2} T_{i-1}^{l+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2K}{\Delta x^2} \right) T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i+1}^{l+1} &= \frac{1}{\Delta t} T_i^l \end{aligned} \quad (2.18)$$

atau

$$-AT_{i-1}^{l+1} + BT_i^{l+1} - CT_{i+1}^{l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_i^l \quad (2.19)$$

dimana

$$A = \frac{K}{\Delta x^2}, \quad B = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2K}{\Delta x^2}, \quad \text{dan} \quad C = \frac{K}{\Delta x^2}$$

Nilai T_i^{l+1} tidak diketahui besarnya, sedangkan nilai T_i^l diketahui besarnya. Diasumsikan bahwa untuk $i=1,2,3,\dots,n-1$, maka dari persamaan (2.19) akan terbentuk sistem persamaan seperti berikut:

- a. Untuk $i=1$ maka didapatkan

$$-AT_0^{l+1} + BT_1^{l+1} - CT_2^{l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_1^l$$

- b. Untuk $i=2$ maka didapatkan

$$-AT_1^{l+1} + BT_2^{l+1} - CT_3^{l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_2^l$$

- c. Untuk $i=3$ maka didapatkan

$$-AT_2^{l+1} + BT_3^{l+1} - CT_4^{l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_3^l$$

d. Untuk $i = n$ maka didapatkan

$$-AT_{n-2}^{l+1} + BT_{n-1}^{l+1} - CT_n^{l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_{n-1}^l$$

dengan diketahui nilai awal dan nilai batasnya, dalam bentuk matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} B & -C & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -A & B & -C & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & B & -C & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{l+1} \\ T_2^{l+1} \\ T_3^{l+1} \\ \vdots \\ T_{n-1}^{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_0 + \frac{1}{\Delta t} T_1^l \\ \frac{1}{\Delta t} T_2^l \\ \frac{1}{\Delta t} T_3^l \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta t} T_{n-1}^l + Cb_L \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

atau

$$R \bar{T}_i^{l+1} = S$$

dengan menggunakan operasi matriks, solusinya adalah:

$$\bar{T}_i^{l+1} = R^{-1} S \quad (2.21)$$

dari sini diperoleh nilai \bar{T}_i^{l+1} untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ (Yang, 2005:407).

iii. Skema Crank-Nicholson

Skema *Crank-Nicholson* merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan skema implisit. Pada skema eksplisit, pendekatan solusi $c(x_i, t_{l+1})$ dihitung menggunakan jaringan titik (x_i, t_l) . Sedangkan pada skema implisit pendekatan solusi $c(x_i, t_l)$ dihitung menggunakan jaringan titik (x_i, t_{l+1}) , pada skema *Crank-Nicholson* pendekatan solusi $c(x_i, t_{l+1})$ akan dihitung menggunakan jaringan titik

(x_i, t_l) dan jaringan titik (x_i, t_{l+1}) yang artinya, diferensial terhadap waktu ditulis pada $l + \frac{1}{2}$. Sehingga skema diferensial persamaan (2.11) terhadap waktu adalah:

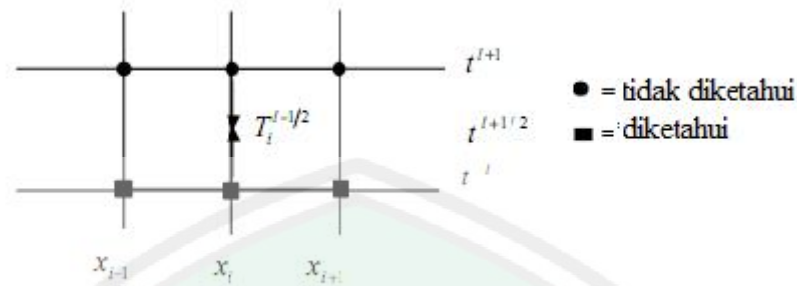
$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (2.22)$$

Skema *Crank-Nicholson* menulis ruas kanan dari persamaan (2.11) pada waktu $l + \frac{1}{2}$, yang artinya merupakan nilai rata-rata dari skema eksplisit dan implisit.

Berdasarkan pada skema eksplisit pada persamaan perambatan panas di atas, skema diferensial kedua terhadap x yang digunakan adalah persamaan (2.14), sedangkan untuk skema implisit yang digunakan adalah persamaan (2.17). Sehingga skema *Crank-Nicholson* untuk diferensial kedua terhadap x adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Untuk lebih mudahnya, disajikan gambar (2.6) yang merupakan skema jaringan titik hitungan pada skema *Crank-Nicholson*, dan penjelasan yang menyertainya.



Gambar 2.6. Skema *Crank-Nicholson* pada Persamaan Perambatan Panas

Berdasarkan penjelasan di atas, diperoleh skema *Crank-Nicholson* untuk persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} &= K \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} K \left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Untuk lebih memudahkan perhitungan, nilai T_{i-1}^{l+1} , T_i^{l+1} , T_{i+1}^{l+1} dijadikan dalam satu sisi dengan menguraikan persamaan (2.24), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{-K}{2\Delta x^2} T_{i+1}^{l+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{K}{\Delta x^2} \right) T_i^{l+1} - \frac{K}{2\Delta x^2} T_{i-1}^{l+1} = \\ \frac{K}{2\Delta x^2} T_{i+1}^l + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{K}{\Delta x^2} \right) T_i^l + \frac{K}{2\Delta x^2} T_{i-1}^l \end{aligned} \quad (2.25)$$

atau

$$LT_{i+1}^{l+1} + MT_i^{l+1} - LT_{i-1}^{l+1} = NT_{i+1}^l + OT_i^l + NT_{i-1}^l$$

dimana: $L = \frac{-K}{2\Delta x^2}$

$$M = \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{K}{\Delta x^2} \right)$$

$$N = \frac{K}{2\Delta x^2}$$

$$O = \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{K}{\Delta x^2} \right)$$

Seperti pada skema implisit, diasumsikan bahwa untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$, dan dengan diketahui nilai awal dan nilai batasnya, maka persamaan (2.25) akan membentuk bentuk sistem persamaan dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} M & L & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ L & M & L & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & M & L & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{l+1} \\ T_2^{l+1} \\ T_3^{l+1} \\ \vdots \\ T_{n-1}^{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ N & O & N & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & O & N & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^l \\ T_2^l \\ T_3^l \\ \vdots \\ T_{n-1}^l \end{bmatrix}$$

2.4.2 Operator Metode *Splitting*

Akan ditinjau persamaan diferensial biasa berikut:

$$\frac{dy}{dt} = (a + b)y$$

yang mempunyai solusi

$$y(t) = e^{t(a+b)} y(0) = e^{ta} e^{tb} y(0)$$

Apabila diperhatikan, solusi umum tersebut dapat diperoleh dengan

menyelesaikan persamaan $\frac{dy}{dt} = by$ ke waktu t dengan diketahui $y(0)$ sebagai

data awal dan penyelesaian $\frac{dy}{dt} = ay$ tindakan ke kondisi awal $e^{tb} y(0)$. Akan

tetapi, ide tersebut “gagal” untuk sistem persamaan diferensial biasa yang dinyatakan dengan sistem vektor sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = (A + B)y$$

kecuali kalau A dan B komutatif terhadap perkalian. Maka solusi sistem vektor boleh dituliskan sebagai

$$y(t) = e^{t(A+B)}y(0)$$

dimana

$$e^{tC} = I + tC + \frac{t^2}{2!}C^2 + \dots$$

Walaupun demikian

$$y(t) = e^{t(A+B)}y(0) \neq e^{tA}e^{tB}y(0)$$

kecuali $AB = BA$. Walaupun demikian, akan dilanjutkan dan memperhitungkan persamaan diferensial parsial linier

$$u_t = \mathcal{L}u = (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)u \quad (2.26)$$

dimana \mathcal{L} adalah operator diferensial spasial yang dipecah menjadi jumlah dari \mathcal{L}_1 dan \mathcal{L}_2 . Pada metode pemisahan operator, \mathcal{L}_1 berhubungan dengan turunan x dan \mathcal{L}_2 berhubungan dengan turunan y atau sebaliknya.

Solusi dari persamaan diferensial parsial linier dapat dinyatakan sebagai eksponen berikut:

$$u(x, y, t) = e^{t\mathcal{L}}u(x, y, 0)$$

dengan \mathcal{L} tidak bergantung pada t . Bentuk eksponen dari operator \mathcal{L} tersebut didapatkan dari ekspansi deret *Taylor* untuk u pangkat t yaitu:

$$u(x, y, t) = u(x, y, 0) + tu_t(x, y, 0) + \frac{t^2}{2!} u_{tt}(x, y, 0) + \dots = e^{t\frac{\partial}{\partial t}} u(x, y, 0)$$

atau menggunakan persamaan diferensial parsial

$$u(x, y, t) = u(x, y, 0) + t\mathcal{L}u(x, y, 0) + \frac{t^2}{2!} \mathcal{L}^2 u(x, y, 0) + \dots = e^{t\mathcal{L}} u(x, y, 0)$$

Akan tetapi perlu diingat bahwa:

$$u(x, y, t) = e^{t(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)} u(x, y, 0) \neq e^{t\mathcal{L}_1} e^{t\mathcal{L}_2} u(x, y, 0)$$

kecuali jika operator \mathcal{L}_1 dan \mathcal{L}_2 komutatif. Berikut pembuktiannya menggunakan

ekspansi deret *Taylor*,

$$\begin{aligned} e^{t(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)} u(x, y, 0) &= \left[I + t(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + \frac{t^2}{2} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)^2 + \dots \right] u(x, y, 0) \\ &= \left[I + t(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + \frac{t^2}{2} (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2^2) + \dots \right] u(x, y, 0) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sedangkan

$$e^{t\mathcal{L}_1} e^{t\mathcal{L}_2} u(x, y, 0) = \left(I + t\mathcal{L}_1 + \frac{t^2}{2} \mathcal{L}_1^2 + \dots \right) \left(I + t\mathcal{L}_2 + \frac{t^2}{2} \mathcal{L}_2^2 + \dots \right) u(x, y, 0)$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$e^{t\mathcal{L}_1} e^{t\mathcal{L}_2} u(x, y, 0) = \left[I + t(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + \frac{t^2}{2} (\mathcal{L}_1^2 + 2\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_2^2) + \dots \right] u(x, y, 0)$$

Dengan demikian

$$[e^{t(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)} - e^{t\mathcal{L}_1} e^{t\mathcal{L}_2}] u(x, y, 0) = \left[\frac{t^2}{2} (\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) + O(t^3) \right] u(x, y, 0)$$

Dapat diketahui bahwa selisih dari $e^{t(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2)}$ dan $e^{t\mathcal{L}_1}e^{t\mathcal{L}_2}$ yaitu $O(t^2)$, kecuali kalau $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2u = \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1u$. Faktorisasi hampir bekerja ketika t adalah kecil.

Dari sini dapat menggantikan t dengan meningkatkan Δt sehingga:

$$\begin{aligned} u(x, y, \Delta t) &= e^{\Delta t \mathcal{L}} u(x, y, 0) = e^{\Delta t (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)} u(x, y, 0) \\ &= [e^{\Delta t \mathcal{L}_1} e^{\Delta t \mathcal{L}_2} + \frac{\Delta t^2}{2} (\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) + O(\Delta t^3)] u(x, y, 0) \end{aligned}$$

Langkah-langkah mendapatkan metode numerik menggunakan pemisahan operator yaitu:

1. Diskritisasi operator spasial \mathcal{L}_1 dan \mathcal{L}_2 .
2. Abaikan suku-suku *error* lokal.
3. Gunakan hasil metode dari langkah waktu ke waktu.

Dengan demikian didapatkan bahwa:

$$U^{n+1} \approx e^{\Delta t L_{1,\Delta}} e^{\Delta t L_{2,\Delta}} U^n \quad (2.28)$$

Beberapa keuntungan metode pemisahan operator untuk mendapatkan solusi numerik yaitu:

1. Apabila operator $L_{1,\Delta}$ dan $L_{2,\Delta}$ memenuhi kondisi *von neumann*, yaitu:

$$e^{\Delta t L_{k,\Delta}} \leq 1 + c_k \Delta t, \quad k = 1, 2$$

maka, kombinasi skema kedua operator tersebut stabil, ketika menggunakan

(2.42). Kesimpulan ini berdasarkan ketidaksamaan berikut:

$$U^{n+1} \approx e^{\Delta t L_{1,\Delta}} e^{\Delta t L_{2,\Delta}} \leq (1 + c \Delta t) U^n$$

Begitu juga, jika masing-masing skema tunggal operatornya stabil, maka skema gabungan operator-operatornya juga stabil.

2. Dengan pemisahan operator, lokal *error*-nya yaitu $O(\Delta t^2)$, kecuali kalau operator \mathcal{L}_1 dan \mathcal{L}_2 komutatif. Apabila operator \mathcal{L}_1 dan \mathcal{L}_2 komutatif, maka lokal *error*-nya, yaitu $O(\Delta t^3)$ (Flaherty, 1989).

2.5 Analisis Kestabilan Menggunakan Diskrit *Fourier*

Skema beda hingga disebut konvergen jika solusi beda hingga mendekati solusi analitik dan disebut stabil apabila solusi beda hingga tidak terlalu sensitif dengan adanya perubahan kecil (Flaherty, 1989). Bertujuan agar skema beda hingga eksplisit stabil maka nilai mutlak kondisi Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) yang dilambangkan dengan λ harus memenuhi

$$|\lambda| \leq 1. \quad (2.29)$$

Sebagai contoh berikut merupakan skema beda hingga eksplisit untuk persamaan difusi

$$v_j^{n+1} = A \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n) + v_j^n \quad (2.30)$$

maka bilangan *Courant* untuk persamaan tersebut didefinisikan sebagai

$$|\lambda| = \left| \frac{A\Delta t}{\Delta x^2} \right| \quad (2.31)$$

Analisis deret *Fourier* untuk mendapatkan bilangan *Courant* dilakukan dengan mentransformasi bentuk beda hingga dengan menggunakan deret *Fourier* diskrit. Misalkan solusi beda hingga periodik di j dengan periode J , solusi tersebut dapat dituliskan dalam deret *Fourier* kompleks diskrit sebagai berikut:

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k, \quad j = 0, 1, \dots, J-1 \quad (2.32)$$

dimana

$$w_j = e^{\frac{2\pi i j}{J}} \quad (2.33)$$

Pada bentuk ini U_j^n merupakan aproksimasi dari solusi analitik yang periodik di x dengan periode $2f$ dengan $\Delta x = 2f / J$. Deret *Fourier* diskrit tersebut memenuhi relasi ortogonal

$$\sum_{j=0}^{J-1} w_j^k w_j^{-l} = \begin{cases} J, & \text{jika } k \equiv l \pmod{J} \\ 0, & \text{untuk } k \text{ dan } l \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2.34)$$

Jika diberikan solusi U_j^n dapat ditentukan koefisien *Fourier* A_k^n dengan menginverskan deret *Fourier* diskrit menggunakan relasi ortogonal sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} &= \sum_{j=0}^{J-1} w_j^{-l} \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \\ \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} &= \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n \sum_{j=0}^{J-1} w_j^k w_j^{-l} = J A_l^n \end{aligned} \quad (2.35)$$

dengan

$$A_l^n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} \quad (2.36)$$

Bentuk invers inilah yang disebut transformasi diskrit *Fourier* (Flaherty, 1989).

2.6 Konduksi Panas

Panas adalah energi termal yang berpindah dari suatu sistem pada suatu temperatur ke sistem lain yang mengalami kontak dengannya tetapi berada temperatur yang lebih rendah. Sedangkan energi panas diartikan sebagai energi kinetik acak dari partikel-partikel yang menyusun suatu sistem (Bueche, 2006:133). Panas mengalir dari suatu benda yang suhunya lebih tinggi ke benda lain yang suhunya lebih rendah apabila keduanya di singgungkan satu sama lain.

Panas dapat mengalir pada suatu sistem dari suatu bagian yang suhunya lebih tinggi ke bagian lain yang suhunya lebih rendah. Aliran panas merupakan transfer atau pindahan energi kinetik getaran dari satu atom ke atom lain di sebelahnya melalui tumbukan. Pada perpindahan panas, semakin besar variasi suhu terhadap jarak atau semakin besar gradien suhunya, maka arus panas itu semakin kuat begitupula sebaliknya (Soedono, 1999:69).

Panas dapat berpindah atau mengalir melalui 3 cara yaitu Radiasi, konveksi dan konduksi. Konduksi panas adalah perpindahan panas melalui zat perantara. Namun, zat tersebut tidak ikut berpindah ataupun bergerak. Contoh sederhana dalam kehidupan sehari-hari misalnya, ketika membuat kopi atau minuman panas, lalu mencelupkan sendok untuk mengaduk gulanya. Biarkan beberapa menit, maka sendok tersebut akan ikut panas. Panas dari air mengalir ke seluruh bagian sendok. Contoh lain misalnya saat membakar besi logam dan sejenisnya. Walau hanya salah satu ujung dari besi logam tersebut yang dipanaskan, namun panasnya akan menyebar ke seluruh bagian logam sampai ke ujung logam yang tidak ikut dipanasi. Hal ini menunjukkan panas berpindah dengan perantara besi logam tersebut. Setiap benda mempunyai konduktivitas termal (kemampuan mengalirkan panas) tertentu yang akan mempengaruhi panas yang dihantarkan dari sisi yang panas ke sisi yang lebih dingin. Semakin tinggi nilai konduktivitas termal suatu benda, semakin cepat ia mengalirkan panas yang diterima dari satu sisi ke sisi yang lain (Zemansky, 1982:391-393).

Tabel 2.1. Konduktifitas Termal dari Beberapa Bahan

	Bahan	Konduktifitas termal
Logam	Aluminium	0.49
	Kuningan	0.26
	Tembaga	0.92
	Timah hitam	0.083
	Raksa	0.020
	Perak	0.97
	Baja	0.12
Zat Padat	Bata merah	0.0015
	Beton	0.002
	Kaca	0.002
	Es	0.004
	Kayu	0.0003 – 0.0001
Udara	Argon	0.000057
	Helium	0.000039
	Oksigen	0.000056

Pada persamaan konduksi panas (2.1), parameter a merupakan tetapan difusitas termal yang hanya didefinisikan sebagai $a = \frac{k}{\rho s}$ dimana k adalah konduktifitas termal, ρ adalah berat jenis bahan dan s adalah panas jenis bahan (Boyce dan William, 2001:574).

Tabel 2.2 Difusitas Termal dari Beberapa Bahan

Bahan	Difusitas termal (a)
Perak	1.71
Tembaga	1.14
Aluminium	0.86
Besi	0.12
Granit	0.011
Bata merah	0.0038
Air	0.00144

2.7 Metode *Splitting* dalam Perspektif Islam

Metode *splitting* adalah metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan parabolik multi dimensi, yaitu dengan cara memisahkan operator satu dengan yang lainnya.

Telah disebutkan dalam Al-Qur'an tentang penciptaan alam semesta. Sebagaimana firman-Nya dalam surat Al-Anbiya' (21;30)

أَوَلَمْ يَرِ الَّذِينَ كَفَرُوا أَنَّ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَاهُمَا ۖ وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ ۚ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya: “Dan Apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya. dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka Mengapakah mereka tiada juga beriman?”

Dalam ayat tersebut langit dan bumi adalah subyek dari kata sifat "*fatq*". Keduanya lalu terpisah ("*fataqa*") satu sama lain. Menurut Allam (2005) Alam yang ada di bumi ini akan terus berkembang. Jika dilihat pada awal penciptaannya, maka alam ini merupakan suatu kesatuan materi yang besar atau bola api dengan kerapatan tak terhingga, sehingga terjadi ledakan besar yang menyebabkan materi yang dikandung dalam bola api itu terpisah. Ledakan yang besar itu kemudian berubah menjadi asap yaitu fase “asap”. Dari asap inilah diciptakan bumi, langit, bintang-bintang, planet, dan benda-benda angkasa lainnya.

Langit dan bumi merupakan dua hal yang terpisah tetapi antara keduanya mempunyai hubungan antara satu dengan yang lain. Matahari adalah sebuah

bintang. Pada pagi hari matahari mengirimkan sinarnya yang membawa panas dan cahaya sehingga menyebabkan kehidupan di bumi. Pada siang hari memancarkan sinar dan sebagian yang lain memantul ke permukaan bulan, sehingga pada malam hari bulan itu bersinar terang menghapus kegelapan.

Begitu juga metode *splitting* yang dapat diartikan sebagai metode pemisahan. Pemisahan di sini bertujuan untuk mempermudah dalam proses mencari solusi. Tetapi dalam teori pemisahan ini operator satu dengan yang lain masih mempunyai hubungan. Hal ini dapat digambarkan dengan pemisahan langit dan bumi. Walaupun langit dan bumi terpisah tetapi antara keduanya saling berhubungan.

Allah menciptakan hujan yang turun dari langit sehingga menjadi sumber air di bumi dan dengan air itu maka akan tumbuhlah berbagai jenis tanaman.

أَلَمْ تَرَ أَنَّ اللَّهَ أَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَسَلَكَهُ يَنْبِيعَ فِي الْأَرْضِ ثُمَّ يُخْرِجُ بِهِ زَرْعًا مُخْتَلِفًا
 أَلْوَانُهُ ثُمَّ يَهِيَجُ فَتَرَهُ مُصْفَرًّا ثُمَّ يَجْعَلُهُ حُطَمًا إِنَّ فِي ذَلِكَ لَذِكْرًا لِأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿٢١﴾

Artinya : “Apakah kamu tidak memperhatikan, bahwa Sesungguhnya Allah menurunkan air dari langit, Maka diaturnya menjadi sumber-sumber air di bumi kemudian ditumbuhkan-Nya dengan air itu tanaman-tanaman yang bermacam-macam warnanya, lalu menjadi kering lalu kamu melihatnya kekuning-kuningan, kemudian dijadikan-Nya hancur berderai-derai. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat pelajaran bagi orang-orang yang mempunyai akal (QS. Az-Zumar: 21).

Menurut Allam (2005), ketika air hujan jatuh membasahi gunung, batu-batunya hancur sedikit demi sedikit dengan ukuran dan timbangan. Kemudian air tersebut membawa bagian-bagian yang hancur agak lembut seperti tanah. Air

yang mengandung endapan pasir ini menyirami tanah pertanian. Sehingga menumpuk endapan pada tanah sebagai makanan tanaman yang mudah dicerna.



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Skema Metode *Splitting* pada Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi.

Berikut merupakan persamaan panas dua dimensi

$$u_t = \dagger (u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in \Omega, t \geq 0, \quad (3.1)$$

dengan Ω merupakan domain berupa persegi panjang

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < L, 0 < y < H\}$$

untuk mendapat skema dari persamaan (3.1), terlebih dahulu akan diselesaikan operator diferensial spasial yang berhubungan dengan turunan y yaitu:

$$u_t = \mathcal{L}_2 u \quad (3.2)$$

untuk tiap langkah waktu demi waktu, kemudian mengulangi langkah tersebut untuk menyelesaikan operator diferensial spasial yang berhubungan dengan turunan x yaitu sebagai berikut:

$$u_t = \mathcal{L}_1 u \quad (3.3)$$

Operator spasial \mathcal{L}_2 dan \mathcal{L}_1 akan di ubah ke bentuk terdiskritisasi dengan pendekatan *Crank-Nicolson*. Apabila persamaan diferensial parsial tersebut akan didiskritisasi dengan metode *Crank-Nicolson*, untuk persamaan (3.2) maka akan didapatkan:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = L_{2,\Delta} \left(\frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2} \right) \quad (3.4)$$

Penyederhanaan persamaan (3.4) sehingga

$$u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n = \frac{\Delta t}{2} L_{2,\Delta} (u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n) \quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) dapat disederhanakan menjadi

$$u_{j,k}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} L_{2,\Delta} u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{2} L_{2,\Delta} u_{j,k}^n \quad (3.6)$$

Sehingga diperoleh bentuk sederhana dari (3.6) yaitu

$$(1 - \frac{\Delta t}{2} L_{2,\Delta}) u_{j,k}^{n+1} = (1 + \frac{\Delta t}{2} L_{2,\Delta}) u_{j,k}^n \quad (3.7)$$

Misalkan $u_{j,k}^{n+1} = v_{j,k}$, maka didapatkan

$$(1 - \frac{\Delta t}{2} L_{2,\Delta}) v_{j,k} = (1 + \frac{\Delta t}{2} L_{2,\Delta}) u_{j,k}^n \quad (3.8)$$

Apabila menggunakan pendekatan Beda Pusat untuk (3.8), maka didapatkan

$$v_{j,k} - \frac{\Delta t}{2\Delta y^2} (v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1}) = u_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta y^2} (u_{j,k-1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k+1}^n) \quad (3.9)$$

Misalkan $\frac{\Delta t}{2\Delta y^2} = \mu$, maka

$$v_{j,k} - \mu (v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1}) = u_{j,k}^n + \mu (u_{j,k-1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k+1}^n) \quad (3.10)$$

Penyederhanaan persamaan (3.10) maka

$$v_{j,k} - \mu v_{j,k-1} + 2\mu v_{j,k} - \mu v_{j,k+1} = u_{j,k}^n + \mu u_{j,k+1}^n - 2\mu u_{j,k}^n + \mu u_{j,k-1}^n \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) dapat disederhanakan menjadi

$$-\mu v_{j,k-1} + (1 + 2\mu) v_{j,k} - \mu v_{j,k+1} = \mu u_{j,k-1}^n + (1 - 2\mu) u_{j,k}^n + \mu u_{j,k+1}^n \quad (3.12)$$

Untuk mendapatkan sistem persamaan dalam bentuk matriks dari persamaan (3.12) di atas, substitusi sebarang nilai k .

$$\begin{aligned}
k = 1 &\rightarrow -{}_n v_{j,0} + (1+2{}_n)v_{j,1} - {}_n v_{j,2} = {}_n u_{j,0}^n + (1-2{}_n)u_{j,1}^n + {}_n u_{j,2}^n \\
k = 2 &\rightarrow -{}_n v_{j,1} + (1+2{}_n)v_{j,2} - {}_n v_{j,3} = {}_n u_{j,1}^n + (1-2{}_n)u_{j,2}^n + {}_n u_{j,3}^n \\
k = 3 &\rightarrow -{}_n v_{j,2} + (1+2{}_n)v_{j,3} - {}_n v_{j,4} = {}_n u_{j,2}^n + (1-2{}_n)u_{j,3}^n + {}_n u_{j,4}^n \\
k = 4 &\rightarrow -{}_n v_{j,3} + (1+2{}_n)v_{j,4} - {}_n v_{j,5} = {}_n u_{j,3}^n + (1-2{}_n)u_{j,4}^n + {}_n u_{j,5}^n \\
&\vdots \\
k = m-2 &\rightarrow -{}_n v_{j,m-3} + (1+2{}_n)v_{j,m-2} - {}_n v_{j,m-1} = {}_n u_{j,m-3}^n + (1-2{}_n)u_{j,m-2}^n + {}_n u_{j,m-1}^n \\
k = m-1 &\rightarrow -{}_n v_{j,m-2} + (1+2{}_n)v_{j,m-1} - {}_n v_{j,m} = {}_n u_{j,m-2}^n + (1-2{}_n)u_{j,m-1}^n + {}_n u_{j,m}^n \\
k = m &\rightarrow -{}_n v_{j,m-1} + (1+2{}_n)v_{j,m} - {}_n v_{j,m+1} = {}_n u_{j,m-1}^n + (1-2{}_n)u_{j,m}^n + {}_n u_{j,m+1}^n
\end{aligned}$$

Berdasarkan substitusi sebarang nilai k pada persamaan (3.12), maka diperoleh sistem persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
-{}_n & (1+2{}_n) & -{}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -{}_n & (1+2{}_n) & -{}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -{}_n & (1+2{}_n) & -{}_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -{}_n & (1+2{}_n) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (1+2{}_n) & -{}_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -{}_n & (1+2{}_n) & -{}_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -{}_n & (1+2{}_n) & -{}_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_{j,0} \\
v_{j,1} \\
v_{j,2} \\
v_{j,3} \\
\vdots \\
v_{j,m-1} \\
v_{j,m} \\
v_{j,m+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
{}_n & (1-2{}_n) & {}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & {}_n & (1-2{}_n) & {}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & {}_n & (1-2{}_n) & {}_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}_n & (1-2{}_n) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-2{}_n) & {}_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & {}_n & (1-2{}_n) & {}_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & {}_n & (1-2{}_n) & {}_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{j,0}^n \\
u_{j,1}^n \\
u_{j,2}^n \\
u_{j,3}^n \\
\vdots \\
u_{j,m-1}^n \\
u_{j,m}^n \\
u_{j,m+1}^n
\end{bmatrix}$$

Setelah menyelesaikan operator diferensial spasial yang berhubungan dengan turunan y , selanjutnya akan diselesaikan operator diferensial spasial yang berhubungan dengan turunan x yaitu:

$$u_t = \mathcal{L}_1 u \quad (3.13)$$

Diskritisasi persamaan (3.13) maka menjadi

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = L_{1,\Delta} \left(\frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2} \right) \quad (3.14)$$

Akan disederhanakan persamaan (3.14) menjadi

$$u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n = \frac{\Delta t}{2} L_{1,\Delta} (u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n) \quad (3.15)$$

Persamaan (3.15) dapat disederhanakan menjadi

$$u_{j,k}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} L_{1,\Delta} u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{2} L_{1,\Delta} u_{j,k}^n \quad (3.16)$$

Penyederhanaan persamaan (3.16) sehingga diperoleh

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} L_{1,\Delta} \right) u_{j,k}^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_{1,\Delta} \right) u_{j,k}^n \quad (3.17)$$

Misalkan $u_{j,k}^n = v_{j,k}$, maka didapatkan

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} L_{1,\Delta} \right) u_{j,k}^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_{1,\Delta} \right) v_{j,k} \quad (3.18)$$

Apabila menggunakan pendekatan Beda Pusat didapatkan

$$u_{j,k}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{j-1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^{n+1}) = v_{j,k} + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k}) \quad (3.19)$$

Misalkan $\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} = \check{S}$, maka

$$u_{j,k}^{n+1} - \check{S} (u_{j-1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^{n+1}) = v_{j,k} + \check{S} (v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k}) \quad (3.20)$$

Persamaan (3.20) dapat disederhanakan menjadi

$$u_{j,k}^{n+1} - \check{S} u_{j-1,k}^{n+1} + 2\check{S} u_{j,k}^{n+1} - \check{S} u_{j+1,k}^{n+1} = v_{j,k} + \check{S} v_{j-1,k} - 2\check{S} v_{j,k} + \check{S} v_{j+1,k} \quad (3.21)$$

sehingga diperoleh bentuk sederhana dari (3.21) yaitu

$$-\check{S} u_{j-1,k}^{n+1} + (1 + 2\check{S}) u_{j,k}^{n+1} - \check{S} u_{j+1,k}^{n+1} = \check{S} v_{j-1,k} + (1 - 2\check{S}) v_{j,k} + \check{S} v_{j+1,k} \quad (3.22)$$

Untuk mendapatkan sistem persamaan dari persamaan (3.22) di atas, substitusi sebarang nilai j

$$\begin{aligned}
 j = 1 &\rightarrow -\check{S}u_{0,k}^{n+1} + (1+2\check{S})u_{1,k}^{n+1} - \check{S}u_{2,k}^{n+1} = \check{S}v_{0,k} + (1-2\check{S})v_{1,k} + \check{S}v_{2,k} \\
 j = 2 &\rightarrow -\check{S}u_{1,k}^{n+1} + (1+2\check{S})u_{2,k}^{n+1} - \check{S}u_{3,k}^{n+1} = \check{S}v_{1,k} + (1-2\check{S})v_{2,k} + \check{S}v_{3,k} \\
 j = 3 &\rightarrow -\check{S}u_{2,k}^{n+1} + (1+2\check{S})u_{3,k}^{n+1} - \check{S}u_{4,k}^{n+1} = \check{S}v_{2,k} + (1-2\check{S})v_{3,k} + \check{S}v_{4,k} \\
 j = 4 &\rightarrow -\check{S}u_{3,k}^{n+1} + (1+2\check{S})u_{4,k}^{n+1} - \check{S}u_{5,k}^{n+1} = \check{S}v_{3,k} + (1-2\check{S})v_{4,k} + \check{S}v_{5,k} \\
 &\vdots \\
 j = m-2 &\rightarrow -\check{S}u_{m-3,k}^{n+1} + (1+2\check{S})u_{m-2,k}^{n+1} - \check{S}u_{m-1,k}^{n+1} = \check{S}v_{m-3,k} + (1-2\check{S})v_{m-2,k} + \check{S}v_{m-1,k} \\
 j = m-1 &\rightarrow -\check{S}u_{m-2,k}^{n+1} + (1+2\check{S})u_{m-1,k}^{n+1} - \check{S}u_{m,k}^{n+1} = \check{S}v_{m-2,k} + (1-2\check{S})v_{m-1,k} + \check{S}v_{m,k} \\
 j = m &\rightarrow -\check{S}u_{m-1,k}^{n+1} + (1+2\check{S})u_{m,k}^{n+1} - \check{S}u_{m+1,k}^{n+1} = \check{S}v_{m-1,k} + (1-2\check{S})v_{m,k} + \check{S}v_{m+1,k}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan substitusi sebarang nilai j dari persamaan (3.22), maka didapatkan sistem persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}
 -\check{S} & (1+2\check{S}) & -\check{S} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\check{S} & (1+2\check{S}) & -\check{S} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\check{S} & (1+2\check{S}) & -\check{S} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\check{S} & (1+2\check{S}) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1+2\check{S}) & -\check{S} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\check{S} & (1+2\check{S}) & -\check{S} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\check{S} & (1+2\check{S}) & -\check{S}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{0,k}^{n+1} \\
 u_{1,k}^{n+1} \\
 u_{2,k}^{n+1} \\
 u_{3,k}^{n+1} \\
 \vdots \\
 u_{m-1,k}^{n+1} \\
 u_{m,k}^{n+1} \\
 u_{m+1,k}^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \check{S} & (1-2\check{S}) & \check{S} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \check{S} & (1-2\check{S}) & \check{S} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \check{S} & (1-2\check{S}) & \check{S} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \check{S} & (1-2\check{S}) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-2\check{S}) & \check{S} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \check{S} & (1-2\check{S}) & \check{S} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \check{S} & (1-2\check{S}) & \check{S}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_{0,k} \\
 v_{1,k} \\
 v_{2,k} \\
 v_{3,k} \\
 \vdots \\
 v_{m-1,k} \\
 v_{m,k} \\
 v_{m+1,k}
 \end{bmatrix}$$

Akan diterapkan persamaan (3.8) dan (3.18) ke dalam koefisien variabel persamaan panas dua dimensi

$$u_t = (\dagger u_x)_x + (\dagger u_y)_y \quad (3.23)$$

dimana \dagger adalah tetapan difusitas termal, misalkan dipilih

$$\mathcal{L}_1 u = (\dagger u_x)_x \text{ dan } \mathcal{L}_2 u = (\dagger u_y)_y \quad (3.24)$$

Akan didiskritisasi operator (3.24) menggunakan diferensial beda pusat yaitu

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\dagger \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_j^n \approx \frac{\partial(\dagger_j^n u U_j^n)}{\Delta x^2} = \frac{\dagger_{j+\frac{1}{2}}^n U_{j+1}^n - \left(\dagger_{j+\frac{1}{2}}^n + \dagger_{j-\frac{1}{2}}^n \right) U_j^n + \dagger_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.25)$$

Untuk persamaan

$$\mathcal{L}_1 u = (\dagger u_x)_x \quad (3.26)$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned} L_{1,\Delta} u &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\dagger \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{j,k}^n \approx \frac{\partial_x(\dagger_{j,k}^n u_x U_{j,k}^n)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\dagger_{j+\frac{1}{2},k}^n U_{j+1,k}^n - \dagger_{j+\frac{1}{2},k}^n U_{j,k}^n - \dagger_{j-\frac{1}{2},k}^n U_{j,k}^n + \dagger_{j-\frac{1}{2},k}^n U_{j-1,k}^n}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\dagger_{j+\frac{1}{2},k}^n (U_{j+1,k}^n - U_{j,k}^n) - \dagger_{j-\frac{1}{2},k}^n (U_{j,k}^n - U_{j-1,k}^n)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\hat{u}_x^2 U_{j,k}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$L_{1,\Delta} u = \frac{\hat{u}_x^2 U_{j,k}^n}{\Delta x^2} \equiv \frac{\partial_x(\dagger_{j,k}^n u_x U_{j,k}^n)}{\Delta x^2} \quad (3.28)$$

Selanjutnya akan didiskritisasikan persamaan

$$\mathcal{L}_2 u = (\dagger u_y)_y \quad (3.29)$$

maka akan didapatkan

$$\begin{aligned}
 L_{2,\Delta}u &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\dagger \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{j,k}^n \approx \frac{\partial_y (\dagger_{j,k}^n u_y U_{j,k}^n)}{\Delta y^2} \\
 &= \frac{\dagger_{j,k+\frac{1}{2}}^n U_{j,k+1}^n - \dagger_{j,k+\frac{1}{2}}^n U_{j,k}^n - \dagger_{j,k-\frac{1}{2}}^n U_{j,k}^n + \dagger_{j,k-\frac{1}{2}}^n U_{j,k-1}^n}{\Delta y^2} \\
 &= \frac{\dagger_{j,k+\frac{1}{2}}^n (U_{j,k+1}^n - U_{j,k}^n) - \dagger_{j,k-\frac{1}{2}}^n (U_{j,k}^n - U_{j,k-1}^n)}{\Delta y^2} \\
 &= \frac{\hat{u}_y^2 U_{j,k}^n}{\Delta y^2} \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Akan digunakan persamaan (3.27) dan (3.30) pada persamaan (3.7) dan (3.17), maka didapatkan untuk diskritisasi persamaan panas pada dimensi y dengan metode *splitting* adalah

$$\left(1 - \frac{r_y^0}{2} \hat{u}_y^2 \right) \hat{U}_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{r_y^0}{2} \hat{u}_y^2 \right) U_{j,k}^n \tag{3.31}$$

dan hasil diskritisasi persamaan panas pada dimensi x dengan metode *splitting* didapatkan

$$\left(1 - \frac{r_x^0}{2} \hat{u}_x^2 \right) U_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{r_x^0}{2} \hat{u}_x^2 \right) \hat{U}_{j,k}^{n+1} \tag{3.32}$$

dimana

$$r_x^0 = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \text{dan} \quad r_y^0 = \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \tag{3.33}$$

3.2 Analisis Kestabilan Metode *Splitting* Persamaan Panas Dua Dimensi

Skema metode *splitting* untuk Persamaan Panas Dua Dimensi pada (3.1) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

a. Untuk turunan terhadap x

$$u_{j,k}^{n+1} - \check{S} (u_{j-1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^{n+1}) = v_{j,k} + \check{S} (v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k}) \quad (3.34)$$

b. Untuk turunan terhadap y

$$v_{j,k} - \check{u} (v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1}) = u_{j,k}^n + \check{u} (u_{j,k-1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k+1}^n) \quad (3.35)$$

dimana $\check{S} = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}$ dan $\check{u} = \frac{\Delta t}{2\Delta y^2}$.

Substitusi deret *Fourier* diskrit (2.32) pada persamaan (3.34) dan persamaan (3.35) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{J-1} \left[-\check{S} A_k^{n+1} w_{j-1}^k + (1 + 2\check{S}) A_k^{n+1} w_j^k - \check{S} A_k^{n+1} w_{j+1}^k \right] \\ = \sum_{k=0}^{J-1} \left[\check{S} A_k^n w_{j-1}^k + (1 - 2\check{S}) A_k^n w_j^k + \check{S} A_k^n w_{j+1}^k \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

dan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{J-1} \left[-\check{u} A_k^{n+1} w_{j-1}^k + (1 + 2\check{u}) A_k^{n+1} w_j^k - \check{u} A_k^{n+1} w_{j+1}^k \right] \\ = \sum_{k=0}^{J-1} \left[\check{u} A_k^n w_{j-1}^k + (1 - 2\check{u}) A_k^n w_j^k + \check{u} A_k^n w_{j+1}^k \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sesuai dengan persamaan (2.33), maka w_{j-1} dapat diubah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{j-1} &= e^{\frac{2fi(j-1)}{J}} \\ &= e^{\frac{2fij}{J}} e^{-\frac{2fij}{J}} \\ &= w_j e^{-\frac{2fi}{J}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sesuai dengan persamaan (2.33), maka w_{j+1} dapat diubah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_{j+1} &= e^{\frac{2fi(j+1)}{J}} \\
 &= e^{\frac{2fij}{J}} e^{\frac{2fij}{J}} \\
 &= w_j e^{\frac{2fi}{J}}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Substitusi persamaan (3.38) dan persamaan (3.39) pada persamaan (3.36) dan (3.37). Untuk persamaan (3.36) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{J-1} \left[-\check{S} A_k^{n+1} w_j^k e^{\frac{-2fi}{J}} + (1+2\check{S}) A_k^{n+1} w_j^k - \check{S} A_k^{n+1} w_j^k e^{\frac{2fi}{J}} \right] \\
 = \sum_{k=0}^{J-1} \left[\check{S} A_k^n w_j^k e^{\frac{-2fi}{J}} + (1-2\check{S}) A_k^n w_j^k + \check{S} A_k^n w_j^k e^{\frac{2fi}{J}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Berdasarkan persamaan (3.40) maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
 \left[-\check{S} e^{\frac{-2fi}{J}} + (1+2\check{S}) - \check{S} e^{\frac{2fi}{J}} \right] A_k^{n+1} \\
 = \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right) \left[\check{S} e^{\frac{-2fi}{J}} + (1-2\check{S}) + \check{S} e^{\frac{2fi}{J}} \right] A_k^n
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Berdasarkan persamaan (3.41) maka dapat diperoleh

$$A_k^{n+1} = \frac{\left(\check{S} e^{\frac{-2fi}{J}} + (1-2\check{S}) + \check{S} e^{\frac{2fi}{J}} \right)}{\left(-\check{S} e^{\frac{-2fi}{J}} + (1+2\check{S}) - \check{S} e^{\frac{2fi}{J}} \right)} A_k^n \tag{3.42}$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$A_k^{n+1} = M_k A_k^n \tag{3.43}$$

dimana

$$M_k = \frac{\left(\check{S} e^{\frac{-2fi}{J}} + (1-2\check{S}) + \check{S} e^{\frac{2fi}{J}} \right)}{\left(-\check{S} e^{\frac{-2fi}{J}} + (1+2\check{S}) - \check{S} e^{\frac{2fi}{J}} \right)} \tag{3.44}$$

M_k merupakan faktor amplifikasi yang membuat bentuk *Fourier* pada (3.44) semakin besar atau semakin kecil pada salah satu langkah ke- k . Salah satu iterasi untuk persamaan (3.43) adalah

$$A_k^{n+1} = (M_k)^n A_k^n \quad (3.45)$$

Selanjutnya akan ditentukan konstanta c sehingga

$$\|M_k^n\| \leq c, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0, \quad n\Delta t \leq T$$

atau

$$P(M_k) = |M_k| \leq 1 + c\Delta t, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0$$

Sehingga diperoleh

$$|M_k| \leq 1$$

Selanjutnya akan disederhanakan $|M_k|$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |M_k| &= \left| \frac{\left(\check{S} e^{\frac{-2fi}{J}} + (1 - 2\check{S}) + \check{S} e^{\frac{2fi}{J}} \right)}{\left(-\check{S} e^{\frac{-2fi}{J}} + (1 + 2\check{S}) - \check{S} e^{\frac{2fi}{J}} \right)} \right| \leq 1 \\ |M_k| &= \left| \frac{\left((1 - 2\check{S}) + \check{S} \left(e^{\frac{2fi}{J}} + e^{\frac{-2fi}{J}} \right) \right)}{\left((1 + 2\check{S}) - \check{S} \left(e^{\frac{2fi}{J}} + e^{\frac{-2fi}{J}} \right) \right)} \right| \leq 1 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Akan digunakan identitas *Euler* sebagai berikut:

$$e^{\frac{2fi}{J}} = \cos \frac{2f}{J} + i \sin \frac{2f}{J} \quad (3.47)$$

$$e^{\frac{-2fi}{J}} = \cos \frac{2f}{J} - i \sin \frac{2f}{J} \quad (3.48)$$

Substitusi (3.47) dan (3.48) pada persamaan (3.46) sehingga diperoleh

$$\left| \frac{\left((1-2\check{S}) + 2\check{S} \cos \frac{2f}{J} \right)}{\left((1+2\check{S}) - 2\check{S} \cos \frac{2f}{J} \right)} \right| \leq 1 \quad (3.49)$$

karena

$$\cos \frac{2f}{J} = 1 - 2 \sin^2 \frac{f}{J}$$

Maka persamaan (3.49) menjadi

$$\left| \frac{\left((1-2\check{S}) + 2\check{S} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{f}{J} \right) \right)}{\left((1+2\check{S}) - 2\check{S} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{f}{J} \right) \right)} \right| \leq 1$$

Diambil sinus maksimum yaitu:

$$\sin^2 \frac{f}{J} = 1$$

Maka diperoleh ketaksamaan

$$\begin{aligned} \frac{(1-4\check{S})}{(1+4\check{S})} &\leq 1 \\ -1 &\leq \frac{(1-4\check{S})}{(1+4\check{S})} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Persamaan (3.50) masing-masing dikalikan dengan $1+4\check{S}$ maka didapatkan

$$-1(1+4\check{S}) \leq (1-4\check{S}) \leq 1(1+4\check{S}) \quad (3.51)$$

Persamaan (3.51) dapat disederhanakan menjadi

$$-1-4\check{S} \leq (1-4\check{S}) \leq 1+4\check{S} \quad (3.52)$$

Apabila untuk masing-masing ruas pada (3.52) dikurangi dengan -1 , maka menjadi

$$-2-4\check{S} \leq -4\check{S} \leq 4\check{S} \quad (3.53)$$

Berdasarkan perhitungan di atas, dengan menambahkan $4\check{S}$ maka didapatkan

$$-2 \leq 0 \leq 8\check{S} \quad (3.54)$$

Apabila masing-masing ruas pada (3.54) dibagi dengan 8 maka menjadi

$$-\frac{1}{4} \leq 0 \leq \check{S} \quad (3.55)$$

Berdasarkan (3.55), maka dapat disimpulkan bahwa nilai untuk S adalah $\check{S} \geq 0$.

Karena $\check{S} = 0$ tidak mungkin digunakan pada iterasi, maka bilangan *Courant* untuk persamaan panas dua dimensi pada dimensi x harus memenuhi $\check{S} > 0$.

Selanjutnya untuk persamaan (3.37) diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{J-1} \left[-{}_n A_k^{n+1} w_{j-1}^k + (1+2{}_n) A_k^{n+1} w_j^k - {}_n A_k^{n+1} w_{j+1}^k \right] \\ = \sum_{k=0}^{J-1} \left[{}_n A_k^n w_{j-1}^k + (1-2{}_n) A_k^n w_j^k + {}_n A_k^n w_{j+1}^k \right] \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.37) maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \left[-{}_n e^{\frac{-2fi}{J}} + (1+2{}_n) - {}_n e^{\frac{2fi}{J}} \right] A_k^{n+1} \\ = \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right) \left[{}_n e^{\frac{-2fi}{J}} + (1-2{}_n) + {}_n e^{\frac{2fi}{J}} \right] A_k^n \end{aligned} \quad (3.56)$$

Berdasarkan persamaan (3.56) maka dapat diperoleh

$$A_k^{n+1} = \frac{\left({}_n e^{\frac{-2fi}{J}} + (1-2{}_n) + {}_n e^{\frac{2fi}{J}} \right)}{\left(-{}_n e^{\frac{-2fi}{J}} + (1+2{}_n) - {}_n e^{\frac{2fi}{J}} \right)} A_k^n \quad (3.57)$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$A_k^{n+1} = S_k A_k^n \quad (3.58)$$

dimana

$$S_k = \frac{\left(e^{-\frac{2fi}{J}} + (1 - 2\alpha) + e^{\frac{2fi}{J}} \right)}{\left(-e^{-\frac{2fi}{J}} + (1 + 2\alpha) - \lim_{u \rightarrow 0} e^{\frac{2fi}{J}} \right)} \quad (3.59)$$

S_k merupakan faktor amplifikasi yang membuat bentuk *Fourier* pada (3.59) semakin besar atau semakin kecil pada salah satu langkah ke- k . Salah satu iterasi untuk persamaan (3.58) adalah

$$A_k^{n+1} = (S_k)^n A_k^n \quad (3.60)$$

Selanjutnya akan ditentukan konstantan c sehingga,

$$\|S_k^n\| \leq c, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0, \quad n\Delta t \leq T$$

atau

$$P(S_k) = |S_k| \leq 1 + c\Delta t, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0$$

Sehingga diperoleh

$$|S_k| \leq 1$$

Selanjutnya akan disederhanakan $|S_k|$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |S_k| &= \left| \frac{\left(e^{-\frac{2fi}{J}} + (1 - 2\alpha) + e^{\frac{2fi}{J}} \right)}{\left(-e^{-\frac{2fi}{J}} + (1 + 2\alpha) - e^{\frac{2fi}{J}} \right)} \right| \leq 1 \\ |S_k| &= \left| \frac{\left((1 - 2\alpha) + e^{\frac{2fi}{J}} + e^{-\frac{2fi}{J}} \right)}{\left((1 + 2\alpha) - e^{\frac{2fi}{J}} - e^{-\frac{2fi}{J}} \right)} \right| \leq 1 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Substitusi identitas *Euler* (3.47) dan (3.48) pada persamaan (3.61), sehingga

diperoleh

$$\left| \frac{\left((1-2r_n) + 2r_n \cos \frac{2f}{J} \right)}{\left((1+2r_n) - 2r_n \cos \frac{2f}{J} \right)} \right| \leq 1 \quad (3.62)$$

karena

$$\cos \frac{2f}{J} = 1 - 2 \sin^2 \frac{f}{J}$$

maka persamaan (3.64) menjadi

$$\left| \frac{\left((1-2r_n) + 2r_n \left(1 - 2 \sin^2 \frac{f}{J} \right) \right)}{\left((1+2r_n) - 2r_n \left(1 - 2 \sin^2 \frac{f}{J} \right) \right)} \right| \leq 1$$

Diambil sinus maksimum yaitu:

$$\sin^2 \frac{f}{J} = 1$$

maka diperoleh ketaksamaan

$$\begin{aligned} \frac{(1-4r_n)}{(1+4r_n)} &\leq 1 \\ -1 &\leq \frac{(1-4r_n)}{(1+4r_n)} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Persamaan (3.65) masing-masing dikalikan dengan $1+4r_n$ maka didapatkan

$$-1(1+4r_n) \leq (1-4r_n) \leq 1(1+4r_n) \quad (3.64)$$

Persamaan (3.66) dapat disederhanakan menjadi

$$-1-4r_n \leq (1-4r_n) \leq 1+4r_n \quad (3.65)$$

Apabila untuk masing-masing ruas pada (3.67) dikurangi dengan -1 , maka menjadi

$$-2-4r_n \leq -4r_n \leq 4r_n \quad (3.66)$$

Berdasarkan perhitungan di atas, dengan menambahkan 4τ maka didapatkan

$$-2 \leq 0 \leq 8\tau \quad (3.67)$$

Apabila masing-masing ruas pada (3.69) dibagi dengan 8 maka menjadi

$$-\frac{1}{4} \leq 0 \leq \tau \quad (3.68)$$

Menurut (3.70) maka dapat disimpulkan bahwa nilai untuk τ adalah $\tau \geq 0$.

Karena $\tau = 0$ tidak mungkin digunakan pada iterasi, maka bilangan *Courant* untuk persamaan panas dua dimensi pada dimensi y harus memenuhi $\tau > 0$.

Berdasarkan perhitungan kestabilan untuk bilangan *Courant* di atas, maka dapat disimpulkan bahwa metode *splitting* dengan skema *Crank-Nicholson* stabil tanpa syarat.

3.3 Metode Splitting pada Penyelesaian Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi

Setelah mengetahui skema metode *splitting* untuk persamaan panas dua dimensi, maka asumsi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas dua dimensi adalah sebagai berikut:

1. Misalkan $u(x, y, t)$ terdefinisi pada selang $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$ dan $t \geq 0$.
2. Fungsi $u(x, y, t)$ berlaku kondisi batas yaitu:

$$u(-10, y, t) = 0 \quad \text{dan} \quad u(10, y, t) = 0$$

dan

$$u(x, -10, t) = 0 \quad \text{dan} \quad u(x, 10, t) = 0$$

3. Fungsi $u(x, y, t)$ berlaku kondisi awal yaitu $u(x, y, 0) = e^{x+y}$ (Mahalakshmi, 2012).

Dengan kondisi awal dan kondisi batas yang telah ditetapkan, dipilih nilai difusitas termal (\dagger) = 0.12, $\Delta x = 0.5$, $\Delta y = 0.5$, dan $\Delta t = 0.5$.

Setelah ditentukan nilai batas dan nilai awal, berdasarkan perhitungan sebelumnya pada diskritisasi (3.9) dan (3.19) dengan nilai awal dan nilai batas yang diberikan untuk skema (3.31) maka didapatkan

$$\begin{aligned} v_{j,k} - \dagger \left(\frac{\Delta t}{2\Delta y^2} \right) (v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1}) \\ = u_{j,k}^n + \dagger \left(\frac{\Delta t}{2\Delta y^2} \right) (u_{j,k-1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k+1}^n) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Substitusi difusitas termal (\dagger) = 0.12, $\Delta x = 0.5$, $\Delta y = 0.5$, dan $\Delta t = 0.5$ pada (3.69) maka

$$\begin{aligned} v_{j,k} - 0.12 \left(\frac{0.5}{2(0.5)^2} \right) (v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1}) \\ = u_{j,k}^n + 0.12 \left(\frac{0.5}{2(0.5)^2} \right) (u_{j,k-1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k+1}^n) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$v_{j,k} - 0.12(v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1}) = u_{j,k}^n + 0.12(u_{j,k-1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k+1}^n) \quad (3.71)$$

Persamaan (3.71) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} v_{j,k} - 0.12v_{j,k-1} + 0.24v_{j,k} - 0.12v_{j,k+1} \\ = u_{j,k}^n + 0.12u_{j,k-1}^n - 0.24u_{j,k}^n + 0.12u_{j,k+1}^n \end{aligned} \quad (3.72)$$

Persamaan (3.72) dapat disederhanakan menjadi

$$-0.12v_{j,k-1} + 1.24v_{j,k} - 0.12v_{j,k+1} = 0.12u_{j,k-1}^n + 0.76u_{j,k}^n + 0.12u_{j,k+1}^n \quad (3.73)$$

Dengan mensubstitusikan nilai k pada persamaan (3.73) maka didapatkan hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 k = 1 &\rightarrow -0.12v_{j,0} + 1.24v_{j,1} - 0.12v_{j,2} = 0.12u_{j,0}^n + 0.76u_{j,1}^n + 0.12u_{j,2}^n \\
 k = 2 &\rightarrow -0.12v_{j,1} + 1.24v_{j,2} - 0.12v_{j,3} = 0.12u_{j,1}^n + 0.76u_{j,2}^n + 0.12u_{j,3}^n \\
 k = 3 &\rightarrow -0.12v_{j,2} + 1.24v_{j,3} - 0.12v_{j,4} = 0.12u_{j,2}^n + 0.76u_{j,3}^n + 0.12u_{j,4}^n \\
 k = 4 &\rightarrow -0.12v_{j,3} + 1.24v_{j,4} - 0.12v_{j,5} = 0.12u_{j,3}^n + 0.76u_{j,4}^n + 0.12u_{j,5}^n \\
 &\vdots \\
 k = 38 &\rightarrow -0.12v_{j,37} + 1.24v_{j,38} - 0.12v_{j,39} = 0.12u_{j,37}^n + 0.76u_{j,38}^n + 0.12u_{j,39}^n \\
 k = 39 &\rightarrow -0.12v_{j,38} + 1.24v_{j,39} - 0.12v_{j,40} = 0.12u_{j,38}^n + 0.76u_{j,39}^n + 0.12u_{j,40}^n \\
 k = 40 &\rightarrow -0.12v_{j,39} + 1.24v_{j,40} - 0.12v_{j,41} = 0.12u_{j,39}^n + 0.76u_{j,40}^n + 0.12u_{j,41}^n
 \end{aligned}$$

Berdasarkan substitusi nilai k pada persamaan (3.73), maka didapatkan sistem persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
 -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_{j,0} \\
 v_{j,1} \\
 v_{j,2} \\
 v_{j,3} \\
 \vdots \\
 v_{j,39} \\
 v_{j,40} \\
 v_{j,41}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.76 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{j,0}^n \\
 u_{j,1}^n \\
 u_{j,2}^n \\
 u_{j,3}^n \\
 \vdots \\
 u_{j,39}^n \\
 u_{j,40}^n \\
 u_{j,41}^n
 \end{bmatrix}
 \quad (3.74)$$

Matriks (3.74) merupakan matriks untuk skema (3.31).

Berdasarkan matriks (3.74) maka untuk $n = 0$ didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{j,0} \\ v_{j,1} \\ v_{j,2} \\ v_{j,3} \\ \vdots \\ v_{j,39} \\ v_{j,40} \\ v_{j,41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.76 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{j,0}^0 \\ u_{j,1}^0 \\ u_{j,2}^0 \\ u_{j,3}^0 \\ \vdots \\ u_{j,39}^0 \\ u_{j,40}^0 \\ u_{j,41}^0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Berdasarkan matriks (3.75), maka dapat dicari nilai untuk $v_{j,k}$ yaitu

$$\begin{aligned}
 A\bar{v} &= B\bar{u} \\
 \bar{v} &= A^{-1}B\bar{u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_{j,0} \\ v_{j,1} \\ v_{j,2} \\ v_{j,3} \\ \vdots \\ v_{j,39} \\ v_{j,40} \\ v_{j,41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.76 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{j,0}^0 \\ u_{j,1}^0 \\ u_{j,2}^0 \\ u_{j,3}^0 \\ \vdots \\ u_{j,39}^0 \\ u_{j,40}^0 \\ u_{j,41}^0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Untuk perhitungan matriks (3.76) maka akan didapatkan nilai $v_{j,k}$. Dan hasil dari perhitungan matriks (3.76) merupakan data awal untuk menyelesaikan

skema (3.32), maka dari itu ulangi langkah dari waktu ke waktu untuk menyelesaikan skema (3.32).

Setelah menemukan hasil untuk skema (3.31), maka akan dicari untuk skema (3.32) yang merupakan hasil diskritisasi dari (3.19), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} - \dagger \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \right) (u_{j-1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^{n+1}) \\ = v_{j,k} + \dagger \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \right) (v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Substitusi difusitas termal (\dagger) = 0.12, $\Delta x = 0.5$, $\Delta y = 0.5$, dan $\Delta t = 0.5$ pada (3.77) sehingga menjadi

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} - 0.12 \left(\frac{0.5}{2(0.5)^2} \right) (u_{j-1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^{n+1}) \\ = v_{j,k} + 0.12 \left(\frac{0.5}{2(0.5)^2} \right) (v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k}) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Sehingga diperoleh hasil perhitungan dari (3.78) adalah

$$u_{j,k}^{n+1} - 0.12 (u_{j-1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^{n+1}) = v_{j,k} + 0.12 (v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k}) \quad (3.79)$$

Diskritisasi (3.79) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} - 0.12u_{j-1,k}^{n+1} + 0.24u_{j,k}^{n+1} - 0.12u_{j+1,k}^{n+1} \\ = v_{j,k} + 0.12v_{j-1,k} - 0.24v_{j,k} + 0.12v_{j+1,k} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Persamaan (3.80) dapat disederhanakan menjadi

$$-0.12u_{j-1,k}^{n+1} + 1.24u_{j,k}^{n+1} - 0.12u_{j+1,k}^{n+1} = 0.12v_{j-1,k} + 0.76v_{j,k} + 0.12v_{j+1,k} \quad (3.81)$$

Dengan mensubstitusikan nilai j pada persamaan (3.81), maka didapatkan hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
j=1 &\rightarrow -0.12u_{0,k}^{n+1} + 0.24u_{1,k}^{n+1} - 0.12u_{2,k}^{n+1} = 0.12v_{0,k} + 0.76v_{1,k} + 0.12v_{2,k} \\
j=2 &\rightarrow -0.12u_{1,k}^{n+1} + 0.24u_{2,k}^{n+1} - 0.12u_{3,k}^{n+1} = 0.12v_{1,k} + 0.76v_{2,k} + 0.12v_{3,k} \\
j=3 &\rightarrow -0.12u_{2,k}^{n+1} + 0.24u_{3,k}^{n+1} - 0.12u_{4,k}^{n+1} = 0.12v_{2,k} + 0.76v_{3,k} + 0.12v_{4,k} \\
j=4 &\rightarrow -0.12u_{3,k}^{n+1} + 0.24u_{4,k}^{n+1} - 0.12u_{5,k}^{n+1} = 0.12v_{3,k} + 0.76v_{4,k} + 0.12v_{5,k} \\
&\vdots \\
j=38 &\rightarrow -0.12u_{37,k}^{n+1} + 0.24u_{38,k}^{n+1} - 0.12u_{39,k}^{n+1} = 0.12v_{37,k} + 0.76v_{38,k} + 0.12v_{39,k} \\
j=39 &\rightarrow -0.12u_{38,k}^{n+1} + 0.24u_{39,k}^{n+1} - 0.12u_{40,k}^{n+1} = 0.12v_{38,k} + 0.76v_{39,k} + 0.12v_{40,k} \\
j=40 &\rightarrow -0.12u_{39,k}^{n+1} + 0.24u_{40,k}^{n+1} - 0.12u_{41,k}^{n+1} = 0.12v_{39,k} + 0.76v_{40,k} + 0.12v_{41,k}
\end{aligned}$$

Berdasarkan substitusi nilai j pada (3.81), maka didapatkan sistem persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
-0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{0,k}^{n+1} \\
u_{1,k}^{n+1} \\
u_{2,k}^{n+1} \\
u_{3,k}^{n+1} \\
\vdots \\
u_{39,k}^{n+1} \\
u_{40,k}^{n+1} \\
u_{41,k}^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.76 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.12 & 0.76 & 0.12 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_{0,k} \\
v_{1,k} \\
v_{2,k} \\
v_{3,k} \\
\vdots \\
v_{39,k} \\
v_{40,k} \\
v_{41,k}
\end{bmatrix}
\quad (3.82)$$

Matriks (3.82) merupakan matriks untuk skema (3.32), dengan nilai $v_{j,k}$ yang sudah diketahui dari hasil perhitungan (3.76), maka dapat dicari untuk nilai

$$U_{j,k}^{n+1}$$

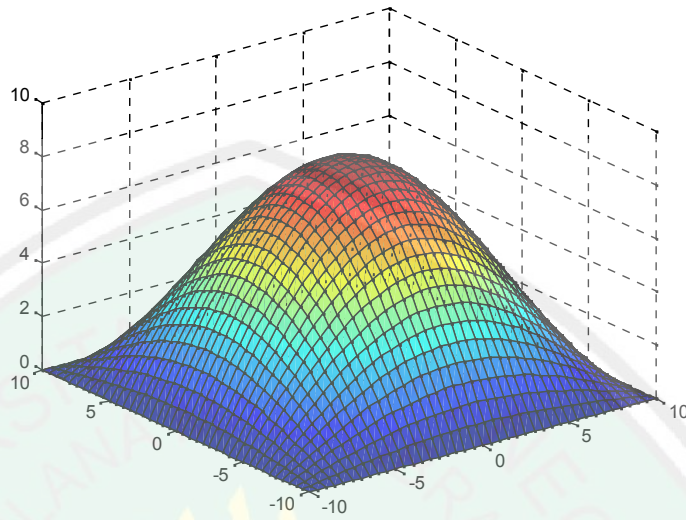
$$C\bar{u} = D\bar{v}$$

$$\bar{u} = C^{-1}D\bar{v}$$

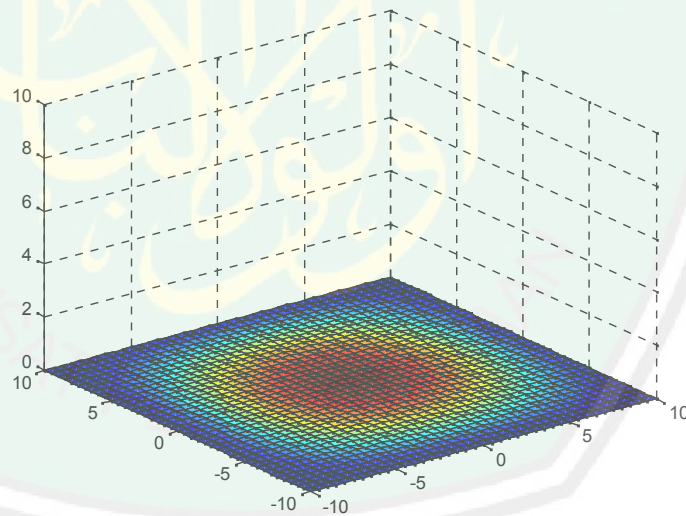
$$\begin{bmatrix} u_{0,k}^{n+1} \\ u_{1,k}^{n+1} \\ u_{2,k}^{n+1} \\ u_{3,k}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{39,k}^{n+1} \\ u_{40,k}^{n+1} \\ u_{41,k}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.12 & 1.24 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1.24 & -0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0.12 & 1.24 & -0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0.12 & 1.24 & -0.12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_{0,k} \\ v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ v_{3,k} \\ \vdots \\ v_{39,k} \\ v_{40,k} \\ v_{41,k} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Perhitungan matriks (3.83) maka didapatkan nilai $U_{j,k}^{n+1}$. Pada perhitungan (3.83) untuk perulangan n sampai dengan 2400, dapat dilihat dengan menjalankan program MATLAB pada lampiran 1. Ini sekaligus solusi numerik persamaan panas dua dimensi dengan metode *splitting*.

Setelah menemukan solusi numerik persamaan panas dua dimensi dengan metode *splitting*, maka hasil tersebut dapat digambarkan dalam tiga dimensi sebagai berikut



Gambar 3.2. Solusi Numerik Persamaan Panas Dua Dimensi dengan $dx = 0.5$, $dy = 0.5$, $dt = 0.5$, dan $n = 1600$ (belum stabil)



Gambar 3.2. Solusi Numerik Persamaan Panas Dua Dimensi dengan $dx = 0.5$, $dy = 0.5$, $dt = 0.5$, dan $n = 2400$ (sudah stabil)

3.4 Solusi Analitik Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi

Meninjau persamaan panas dua dimensi yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dagger \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H \quad (3.84)$$

Dengan kondisi batas dan kondisi awal yang diberikan adalah

$$u(0, y, t) = 0 \quad (3.85)$$

$$u(L, y, t) = 0 \quad (3.86)$$

$$u(x, 0, t) = 0 \quad (3.87)$$

$$u(x, H, t) = 0 \quad (3.88)$$

$$u(x, y, 0) = e^{x+y} \quad (3.89)$$

Misal $u(x, y, t) = T(t)W(x, y)$, maka persamaan (3.84) menjadi

$$\frac{\partial T(t)W(x, y)}{\partial t} = \dagger \left(\frac{\partial^2 T(t)W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t)W(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (3.90)$$

Persamaan (3.90) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{T'W(x, y)}{T} = \dagger \left(\frac{\partial^2 T(t)W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t)W(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (3.91)$$

Persamaan (3.91) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{T'}{T\dagger} = \left(\frac{\frac{\partial^2 T(t)W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t)W(x, y)}{\partial y^2}}{W(x, y)} \right) \quad (3.92)$$

Misal $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u$, maka persamaan (3.92) menjadi

$$\frac{T'}{\dagger T} = \frac{\nabla^2 u}{W(x, y)} = - \} \quad (3.93)$$

Berdasarkan persamaan (3.93) maka didapatkan

$$\frac{T'}{\dagger T} = - \} \text{ dan } \frac{\nabla^2 u}{W(x, y)} = - \} \quad (3.94)$$

Maka didapatkan solusi untuk t adalah

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T} &= -\lambda \\ T' &= -\lambda T \\ T' + \lambda T &= 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

Berdasarkan persamaan (3.95) maka didapatkan persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} m + \lambda &= 0 \\ m &= -\lambda \end{aligned} \quad (3.96)$$

Berdasarkan akar yang didapatkan, maka solusi untuk t adalah

$$T(t) = e^{-\lambda t} \quad (3.97)$$

Setelah didapatkan solusi untuk t , maka berdasarkan persamaan (3.94) didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 u}{w(x, y)} &= -\lambda \\ \nabla^2 u &= -\lambda w(x, y) \\ \nabla^2 u + \lambda w(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

Misal $w(x, y) = X(x)Y(y)$ maka persamaan (3.98) menjadi

$$\nabla^2 u + \lambda X(x)Y(y) = 0 \quad (3.99)$$

karena $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u$, maka persamaan (3.99) menjadi

$$X''Y(y) + Y''X(x) + \lambda X(x)Y(y) = 0 \quad (3.100)$$

Berdasarkan persamaan (3.100) maka didapatkan

$$\begin{aligned} X''Y(y) &= -\lambda X(x)Y(y) - Y''X(x) \\ X''Y(y) &= X(x)(-\lambda Y(y) - Y'') \end{aligned} \quad (3.101)$$

Persamaan (3.101) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{X''}{-X(x)} = \frac{Y''}{Y(y)} + \lambda = -\lambda \quad (3.102)$$

Berdasarkan (3.102) maka didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{X''}{-X(x)} &= -\lambda \\ X'' &= -\lambda X(x) \\ X'' + \lambda X(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{Y''}{Y(y)} + \lambda &= -\lambda \\ Y'' + \lambda Y(y) &= -\lambda Y(y) \\ Y'' + \lambda Y(y) - (-\lambda Y(y)) &= 0 \\ Y'' + (\lambda - (-\lambda))Y(y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Untuk penyelesaian (3.103) didapatkan persamaan karakteristiknya adalah

$$n^2 + \lambda = 0 \quad (3.105)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (3.105) maka akar yang didapatkan adalah

$$\begin{aligned} n^2 &= -\lambda \\ n &= \pm \sqrt{-\lambda} \end{aligned}$$

Karena akar-akar yang didapatkan adalah imajiner maka solusi untuk $X(x)$ adalah

$$X(x) = A_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + A_2 \sin \sqrt{-\lambda} x \quad (3.106)$$

Substitusi kondisi batas (3.85) dan (3.86) pada (3.106)

Untuk $x=0$

$$\begin{aligned} X(0) &= A_1 \cos \sqrt{\sim} 0 + A_2 \sin \sqrt{\sim} 0 \\ &= A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 \\ &= A_1 1 + 0 \\ &= A_1 = 0 \end{aligned}$$

Untuk $x=L$

$$\begin{aligned} X(L) &= A_1 \cos \sqrt{\sim} L + A_2 \sin \sqrt{\sim} L \\ &= 0 \cos \sqrt{\sim} L + A_2 \sin \sqrt{\sim} L \\ &= 0 + A_2 \sin \sqrt{\sim} L \\ &= A_2 \sin \sqrt{\sim} L \end{aligned}$$

Jika $\sqrt{\sim} L = nf$ maka didapatkan

$$\begin{aligned} \sqrt{\sim} L &= nf \\ \sqrt{\sim} &= \frac{nf}{L} \\ \sim &= \left(\frac{nf}{L} \right)^2 \end{aligned}$$

Maka solusi untuk $X(x)$ adalah

$$X(x) = A_n \sin \left(\frac{nf}{L} \right)^2 x, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.107)$$

Setelah diketahui hasil dari penyelesaian (1.103), maka akan diselesaikan persamaan (1.104) yaitu

$$Y'' + (\sim - \sim)Y(y) = 0$$

Persamaan karakteristik dari (1.104) adalah

$$m^2 + (\sim - \sim) = 0 \quad (3.108)$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik (3.108) adalah

$$m^2 = -(\lambda - \mu)$$

$$m = \pm\sqrt{-(\lambda - \mu)} \quad (3.109)$$

Karena akar-akar yang didapatkan imajiner, maka solusi untuk $Y(y)$ adalah

$$Y(y) = A_1 \cos \sqrt{(\lambda - \mu)}y + A_2 \sin \sqrt{(\lambda - \mu)}y \quad (3.110)$$

Substitusi kondisi batas (3.87) dan (3.88) pada persamaan (3.110)

Untuk $y = 0$

$$\begin{aligned} Y(0) &= A_1 \cos \sqrt{(\lambda - \mu)}0 + A_2 \sin \sqrt{(\lambda - \mu)}0 \\ &= A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 \\ &= A_1 + 0 \\ &= A_1 = 0 \end{aligned}$$

Untuk $y = H$

$$\begin{aligned} Y(H) &= A_1 \cos \sqrt{(\lambda - \mu)}H + A_2 \sin \sqrt{(\lambda - \mu)}H \\ &= 0 \cos \sqrt{(\lambda - \mu)}H + A_2 \sin \sqrt{(\lambda - \mu)}H \\ &= 0 + A_2 \sin \sqrt{(\lambda - \mu)}H \\ &= A_2 \sin \sqrt{(\lambda - \mu)}H \end{aligned}$$

Jika $\sqrt{(\lambda - \mu)}H = mf$, maka didapatkan

$$\begin{aligned} \sqrt{(\lambda - \mu)} &= \frac{mf}{H} \\ (\lambda - \mu) &= \left(\frac{mf}{H}\right)^2 \end{aligned}$$

Maka solusi untuk $Y(y)$ adalah

$$Y(y) = A_m \sin \left(\frac{mf}{H}\right)^2 y, \quad \forall m = 1, 2, 3... \quad (3.111)$$

Karena $\mu = \left(\frac{nf}{L}\right)^2$, maka didapatkan untuk nilai λ adalah

$$\left. \begin{aligned} \} - \sim &= \left(\frac{mf}{H}\right)^2 \\ \} - \left(\frac{nf}{L}\right)^2 &= \left(\frac{mf}{H}\right)^2 \\ \} &= \left(\frac{mf}{H}\right)^2 + \left(\frac{nf}{L}\right)^2 \end{aligned} \right\}$$

Berdasarkan solusi $X(x), Y(y)$ dan $T(t)$ yang didapatkan, maka solusi untuk $u(x, y, t)$ adalah

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\left(\frac{mf}{H}\right)^2 - \left(\frac{nf}{L}\right)^2 t} \sin \frac{nf}{L} x \sin \frac{mf}{H} y \quad (3.112)$$

Untuk menemukan koefisien A_{mn} , akan digunakan kondisi awal (3.89). untuk $t = 0$ maka didapatkan

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\left(\frac{mf}{H}\right)^2 - \left(\frac{nf}{L}\right)^2 \cdot 0} \sin \frac{nf}{L} x \sin \frac{mf}{H} y \\ e^{x+y} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{nf}{L} x \sin \frac{mf}{H} y \end{aligned} \quad (3.113)$$

Berdasarkan (3.113), maka didapatkan koefisien untuk A_{mn} adalah

$$A_{mn} = \frac{\int_0^L \int_0^H e^{x+y} \sin \frac{nf}{L} x \sin \frac{mf}{H} y dy dx}{\int_0^L \int_0^H \sin^2 \frac{nf}{L} x \sin^2 \frac{mf}{H} y dy dx} \quad (3.114)$$

Setelah didapatkan solusi analitik dari persamaan panas, maka *error* dari persamaan numerik dapat ditemukan dengan cara solusi numerik persamaan panas dua dimensi dikurangi dengan solusi analitik persamaan panas dua dimensi. Untuk mengetahui hasil galat selengkapya dapat dilakukan dengan menjalankan program MATLAB pada lampiran 2.

3.5 Interpretasi Hasil Numerik Penyelesaian Persamaan Panas Dua Dimensi

Kondisi batas yang digunakan untuk persamaan panas dua dimensi ini adalah $u(x_0, y, t) = u(L, y, t) = u(x, y_0, t) = u(x, H, t) = 0$. Hal ini merupakan batas yang akan diselesaikan dimana konsentrasi panas sebelum x_0, y_0 dan setelah L dan H diabaikan. Nilai batas 0 dapat dimaknai bahwa tidak ada panas yang mengalir pada titik x_0, y_0, L dan H pada semua waktu.

Kondisi awal pada persamaan panas dua dimensi yang diberikan adalah e^{x+y} . Kondisi tersebut dapat dimaknai bahwa panas yang mengalir pada titik x_i dan y_i pada waktu t_0 dipengaruhi oleh nilai awal yang diberikan yaitu e^{x+y} .

Berdasarkan analisis kestabilan diperoleh bilangan *Courant* yang didefinisikan

$$\check{S} = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \text{ dan } \check{u} = \frac{\Delta t}{2\Delta y^2}.$$

harus memenuhi $\check{S} > 0$ dan $\check{u} > 0$, ini berarti bahwa metode *splitting* skema *Crank Nicholson* persamaan panas dua dimensi stabil tanpa syarat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dan pembahasan di atas maka dapat disimpulkan

1. Metode *splitting* adalah metode numerik yang sering digunakan untuk permasalahan parabolik yang multi dimensi. Kasus metode *splitting* pada persamaan panas dua dimensi didapatkan
 - a. Skema metode *splitting* untuk persamaan panas dua dimensi untuk turunan terhadap y adalah

$$\left(1 - \frac{r_y^0}{2} \hat{u}_y^2\right) \hat{U}_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{r_y^0}{2} \hat{u}_y^2\right) U_{j,k}^n$$

dan untuk turunan terhadap x adalah

$$\left(1 - \frac{r_x^0}{2} \hat{u}_x^2\right) U_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{r_x^0}{2} \hat{u}_x^2\right) \hat{U}_{j,k}^{n+1}$$

dimana $r_x^0 = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, dan $r_y^0 = \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$

- b. Berdasarkan hasil numerik dan analitik yang diperoleh didapatkan nilai galat yang tidak terlalu besar yang berarti bahwa metode *splitting* dengan skema *Crank Nicholson* merupakan metode yang nilainya mendekati solusi eksaknya.

2. Berdasarkan perhitungan kestabilan untuk bilangan *Courant* pada persamaan panas dua dimensi, maka dapat disimpulkan bahwa metode *splitting* dengan skema *Crank-Nicholson* stabil tanpa syarat.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan di atas, maka masalah metode *splitting* masih dapat dilanjutkan untuk kasus yang non linier.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.
- Allam, A.K.. 2005. *Al-Qur'an dalam Keseimbangan Alam dan Kehidupan*. Jakarta: Gema Insani.
- Boyce, D.R.C., dan William, E.. 1999. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. New York: John Willey & Sons,inc.
- Duffy , D.J.. 2006. *Finite Difference Methods in Financial Engineering*. England
- Dumairy. 2003. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi. Edisi Kedua*. Yogyakarta: BPFE.
- Flaherty, J.E.. 1989. *Course Notes Pertial Differential Equations*. Renssealaer: Polytechnic Institute.
- Bueche, J.F.. 2006. *Fisika Universitas*. Jakarta: Erlangga
- Lam C.Y.. 1994. *Applied Numerical Methods for Partial Differential Equation*, Prentice-Hall. Inc, Singapore.
- Sasongko, S.B.. 2010. *Matematika Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V Andi Offset.
- Soedono, P.. 1999. *Fisika Dasar*. Yogyakarta: Andi
- Soeharjo. 1996. *Matematika VI*. Diklat ITS.
- Stewart, J.. 2003. *Kalkulus Jilid 2*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2003. Jakarta: Erlangga.
- Susila, I.N.. 1993. *Dasar-Dasar Metode Numerik*. Bandung: FMIPA ITB.
- Triatmoji, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta offset
- Wignyosukarto, B.. 1986. *Hidraulika Numerik*. Yogyakarta: PAU – UGM.
- Yang, W.Y.. 2005. *Applied Numerical Methode Using Matlab*. New York: Wiley Interscience.

Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Appkied Mathematics*. New Jersey: John Willey & Sons, Inc.

Zemansky, S.. 1982. *Fisika untuk Universitas*. Bandung: Bina Cipta.





**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341) 572533**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dhita Krida Kumala
NIM : 09610053
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Metode *Splitting* pada Penyelesaian Persamaan Panas Parabolik Dua Dimensi
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	6 November 2012	Konsultasi Bab I	1.	
2	9 November 2012	Konsultasi Kajian Agama Bab I, II		2.
3	16 November 2012	ACC Bab I, konsultasi Bab II	3.	
4	19 November 2012	ACC Bab II		4.
5	22 November 2012	Revisi Kajian Agama Bab I, II	5.	
6	13 Desember 2012	Konsultasi Bab III		6.
7	22 Desember 2012	ACC Bab I Kajian Agama	7.	
8	2 Januari 2013	Konsultasi Bab III		8.
9	7 Januari 2013	Revisi Kajian Agama Bab II	9.	
10	7 Januari 2013	Konsultasi Bab III		10.
11	10 Januari 2013	ACC Bab II Kajian Agama	11.	
12	10 Januari 2013	ACC Bab III, Konsultasi Bab IV		12.
13	11 Januari 2013	ACC Keseluruhan	13.	

Malang, 21 Maret 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Lampiran 1. Program Matlab Penyelesaian Numerik Persamaan Panas Dua Dimensi dengan $dx = 0.5$, $dy = 0.5$, $dt = 0.5$, dan $n = 2400$

```

clear all;
clc;
format long
dx=0.5; dy=0.5; dt=0.5;
x=-10:dx:10;
y=-10:dy:10;
t=0:dx:2400;
difusi=0.12;
nux=difusi*dt/(2*dx^2);
nuy=difusi*dt/(2*dy^2);
Nx=length(x);
Ny=length(y);
Nt=length(t);
up=zeros(Nx,Ny);
u=zeros(Nx,Ny,Nt);
A=zeros(Ny-2,Ny-2);
B=zeros(Ny-2,Ny-2);
C=zeros(Nx-2,Nx-2);
D=zeros(Nx-2,Nx-2);
for iy=1:Ny-2
    if (iy==1)
        A(iy,iy)=1+2*nuy;
        A(iy,iy+1)=-nuy;
        B(iy,iy)=1-2*nuy;
        B(iy,iy+1)=nuy;
    elseif (iy==Ny-2)
        A(iy,iy-1)=-nuy;
        A(iy,iy)=1+2*nuy;
        B(iy,iy-1)=nuy;
        B(iy,iy)=1-2*nuy;
    else
        A(iy,iy-1)=-nuy;
        A(iy,iy)=1+2*nuy;
        A(iy,iy+1)=-nuy;
        B(iy,iy-1)=nuy;
        B(iy,iy)=1-2*nuy;
        B(iy,iy+1)=nuy;
    end;
end;
for ix=1:Nx-2
    if (ix==1)
        C(ix,ix)=1+2*nux;
        C(ix,ix+1)=-nux;

```

```

    D(ix,ix)=1-2*nux;
    D(ix,ix+1)=nux;
elseif (ix==Nx-2)
    C(ix,ix-1)=-nux;
    C(ix,ix)=1+2*nux;
    D(ix,ix-1)=nux;
    D(ix,ix)=1-2*nux;
else
    C(ix,ix-1)=-nux;
    C(ix,ix)=1+2*nux;
    C(ix,ix+1)=-nux;
    D(ix,ix-1)=nux;
    D(ix,ix)=1-2*nux;
    D(ix,ix+1)=nux;
end;
end;
for ix=2:Nx-1
    for iy=2:Ny-1
        u(ix,iy,1)=exp(x(ix)+y(iy));
    end;
end;
figure(1);
surf(x,y,u(:, :, 1));
axis([-10 10 -10 10 0 10]);
drawnow;
for it=2:Nt
    for ix=2:Nx-1
        up(ix,2:Ny-1)=(inv(A)*B*u(ix,2:Ny-1,it-1))';
    end;
    for iy=2:Ny-1
        u(2:Nx-1,iy,it)=inv(C)*D*up(2:Nx-1,iy);
    end;
    figure(1);
    surf(x,y,u(:, :, it));
    axis([-10 10 -10 10 0 10]);
    drawnow;
end;
disp(u(:, :, it))

```

Lampiran 2. Program Matlab untuk Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan Panas Dua Dimensi

```
clear all;
clc;
format long
dx=0.5; dy=0.5; dt=0.5;
x=-10:dx:10;
y=-10:dy:10;
t=0:dx:2400;
difusi=0.12;
nux=difusi*dt/(2*dx^2);
nuy=difusi*dt/(2*dy^2);
Nx=length(x);
Ny=length(y);
Nt=length(t);
up=zeros(Nx,Ny);
u=zeros(Nx,Ny,Nt);
A=zeros(Ny-2,Ny-2);
B=zeros(Ny-2,Ny-2);
C=zeros(Nx-2,Nx-2);
D=zeros(Nx-2,Nx-2);
for iy=1:Ny-2
    if (iy==1)
        A(iy,iy)=1+2*nuy;
        A(iy,iy+1)=-nuy;
        B(iy,iy)=1-2*nuy;
        B(iy,iy+1)=nuy;
    elseif (iy==Ny-2)
        A(iy,iy-1)=-nuy;
        A(iy,iy)=1+2*nuy;
        B(iy,iy-1)=nuy;
        B(iy,iy)=1-2*nuy;
    else
        A(iy,iy-1)=-nuy;
        A(iy,iy)=1+2*nuy;
        A(iy,iy+1)=-nuy;
        B(iy,iy-1)=nuy;
        B(iy,iy)=1-2*nuy;
        B(iy,iy+1)=nuy;
    end;
end;
for ix=1:Nx-2
    if (ix==1)
        C(ix,ix)=1+2*nux;
        C(ix,ix+1)=-nux;
```

```

    D(ix,ix)=1-2*nux;
    D(ix,ix+1)=nux;
elseif (ix==Nx-2)
    C(ix,ix-1)=-nux;
    C(ix,ix)=1+2*nux;
    D(ix,ix-1)=nux;
    D(ix,ix)=1-2*nux;
else
    C(ix,ix-1)=-nux;
    C(ix,ix)=1+2*nux;
    C(ix,ix+1)=-nux;
    D(ix,ix-1)=nux;
    D(ix,ix)=1-2*nux;
    D(ix,ix+1)=nux;
end;
end;
for ix=2:Nx-1
    for iy=2:Ny-1
        u(ix,iy,1)=exp(x(ix)+y(iy));
    end;
end;
figure(1);
surf(x,y,u(:, :, 1));
axis([-10 10 -10 10 0 10]);
drawnow;
for it=2:Nt
    for ix=2:Nx-1
        up(ix,2:Ny-1)=(inv(A)*B*u(ix,2:Ny-1,it-1))';
    end;
    for iy=2:Ny-1
        u(2:Nx-1,iy,it)=inv(C)*D*up(2:Nx-1,iy);
    end;
    figure(1);
    surf(x,y,u(:, :, it));
    axis([-10 10 -10 10 0 10]);
    drawnow;
end;
% analitik
x=meshgrid(-10:dx:10);
y=meshgrid(-10:dy:10);
t=0:dx:20;
L=10-(-10);
H=10-(-10);
k=0.12;
n=100;
m=100;

```

```

Nt=length(t);
solXY=((sin(n*pi)/L)*x)*((sin(m*pi)/H)*y);
lamda=(((n*pi)/L)^2)+(((m*pi)/H)^2);
T=exp(-k*lamda*t);
Amn=4/sin(m*pi)/sin(n*pi)*(1-exp(H)+exp(H)*H-exp(L)+exp(L+H)-
exp(L+H)*H+exp(L)*L-exp(L+H)*L+exp(L+H)*L*H)/L/H;
for m=1:m
    v=sum(Amn*T*solXY);
end
for n=1:n
    w=sum(v);
end
% menghitung error
z=abs(u-w);
disp(z(:,it))

```

