PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER FUZZY DENGAN KOEFISIEN *CRISP* DAN VARIABEL FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
AGUS MAULANA
NIM. 09610050

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER FUZZY DENGAN KOEFISIEN *CRISP* DAN VARIABEL FUZZY

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
AGUS MAULANA
NIM. 09610050

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2013

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER FUZZY DENGAN KOEFISIEN *CRISP* DAN VARIABEL FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
AGUS MAULANA
NIM. 09610050

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 10 Juni 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER FUZZY DENGAN KOEFISIEN *CRISP* DAN VARIABEL FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
AGUS MAULANA
NIM. 09610050

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Juni 2013

Penguji Utama	:	Abdussakir, M.Pd NIP.19751006 200312 1 001	____________
Ketua Penguji	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	____________
Sekretaris Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	____________
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M. A NIP. 19730705 200003 1 002	____________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Agus Maulana
NIM	: 09610050
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 5 Juni 2013
Yang membuat pernyataan,

Agus Maulana
NIM. 09610050

MOTTO

"خَيْرُكُمْ مَنْ تَعَلَّمَ الْقُرْأَنَ وَعَلَّمَهُ"

"Sebaik-baik orang di antara kamu adalah orang yang belajar Al-Qur'an dan mengajarkannya"

PERSEMBAHAN

Dengan segala kerendahan hati dan rasa syukur kepada Allah SWT, skripsiini penulis persembahkankepada:

Ayah, ibu, dan keluarga tercinta yang selalu mendo'akan dan memberikan kasih sayang yang tidak ternilai harganya kepada penulis. Semoga dengan hadirnya skripsiini, dapat memberikan sedikit kebahagian untuk ayah, ibu, dan keluarga tercinta.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّٰهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik.Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW pembimbing umat manusia, *rahmatan lil 'alamin* yang kelak diharapkan syafaatnya *fii yaumil qiyamah* Amin.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, arahan, dan bimbingan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga,do'a, dan restu. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selakuKetua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Ach. Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

6. Seluruh dosen dan staff administrasi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Keluarga tercinta, Buasan, Suprapti, Supeno, Sukama, dan Fitri Halimatus Sakdiyah yang selalu memberikan motivasi dan semangat baik moril maupun spirituil dan senantiasa mendampingi dan mendidik penulis untuk menjadi manusia yang lebih baik.
8. Deasy Sandhya Elya Ikawati, Lailatul Urusyiyah, Sefiana Noor Cholidah, Misbakhul Choeroni, Achmad Wahyudi,Akhmad Syarifuddin Fauqanori, dan Abdur Rahman Wahid terima kasih atas segala bentuk bantuan yang telah diberikan baik berupa waktu, tenaga, maupun pikiran.
9. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2009 yang telah menemani belajar selama kuliah dan memberikan kenangan dalam hidup penulis.
10. Semua pihak yang tidak mugkin penulis sebut satu-persatu, atas keikhlasan bantuan morildan spirituilnya.

Akhirnya, semoga skripsi ini bermanfaat bagi diri penulis dan pembaca, *Amin ya robbal 'alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Mei 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Maulana, Agus. 2013. **Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fuzzy dengan Koefisien *Crisp* danVariabel Fuzzy**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I)Evawati Alisah, M.Pd
(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Kata Kunci: Sistem Persamaan Linier Fuzzy, α-*cut*, Matriks *Nonnegative.*

Dalam aljabar linier, sistem persamaan linier merupakan salah satutopik yang sering digunakan dalam pembelajaran. Secara umum suatu sistem persamaan linier dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks $Ax = y$.Seiring dengan berkembangnya Logika Boolean yang diperluas menjadi logika fuzzy maka konsep sistem persamaan linier juga diperluas menjadi sistem persamaan linier fuzzy.Skripsi ini membahas tentang penyelesaian sistem persamaan linier fuzzy yang memiliki bentuk umum $A\tilde{X} = \tilde{Y}$.

Berdasarkan hasil pembahasan maka penyelesaian sistem persamaan linier fuzzy dengan koefisien *crisp* danvariabel fuzzyadalah sebagai berikut:

1. Membentuk sistem persamaan linier fuzzy dalam bentuk α-*cut.*
2. Menjabarkan operasi perkalian dan penjumlahan α-*cut* pada sistem persamaan fuzzy dengan menggunakan aturan operasi aritmetika fuzzy.
3. Membentuk sistem persamaan linier fuzzy dalam bentuk α-*cut* menjadi dua sistem persamaan linier dengan cara:
   a. Menjumlahkan fungsi yang monoton turundengan fungsi yang monoton naik.
   b. Mengurangi fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik.
4. Menyelesaikan sistem persamaan linier pada poin (3a) dan (3b) dengan menggunakan metode substitusi, eliminasi, dan operasibariselementer.
5. Mensubstitusikan solusi pada poin (4) ke dalam:

$$\underline{x}_i = \frac{x_i - w_i}{2}, \overline{x}_i = \frac{x_i + w_i}{2}$$

Selanjutnya skripsi ini juga membahas solusi lemah dan solusi kuat dari sistem persamaan linier fuzzy.

ABSTRACT

Maulana, Agus. **Solution of FuzzyLinear System with Crisp Coefficient and Fuzzy Variable**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology.State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisor:(I)Evawati Alisah, M.Pd
(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Keywords **:**System of Fuzzy Linear Equation, α-*c*ut, Nonnegative matrix.

Inlinearalgebra, systemof linearequationsis onetopicthat is oftenusedin learning. In general,a system oflinearequationscan bewrittenin the form ofmatrix multiplication*Ax*=*y*.Along with the development of Boolean logicextended to be fuzzy logic so the concept system of liner equations is also extended to be system of fuzzy linear equations. This thesis discuss about solution system of fuzzy linear equations which general form $A\tilde{X} = \tilde{Y}$.

Based on the results ofthe discussion so solving sysstem of fuzzy linear equation withcrisp coefficient and fuzzy variableas follow:

1. Shaping a system of fuzzy linear equation in α-*cut* form.
2. Spell out operation multiplication andaddition α-*cut* on system of fuzzy linear equation with using fuzzy arithmetic operation rules
3. Shaping a system of fuzzy linear equation inα-*cut* form to be two systems of linear equation with the way:
   a. adding monotonic increasing function with monotonic decreasing function.
   b. subtracting monotonic increasing function with monotonic decreasing function.
4. Solving a systemsof linearequationsatpoints(3a) and(3b) byusing substitution method, elimination method, and elementary row operations.
5. Substitutingthe solution on point (4) into the

$$\underline{x}_i = \frac{x_i - w_i}{2}, \overline{x}_i = \frac{x_i + w_i}{2}$$

Further this thesisalsodiscusses theweaksolutionsandstrongsolutionsof thesystem offuzzylinearequations

ملخص

مولانا, اكوس. ٢٠١٣. **إتمام نظم المعادلات الخطية من ضبابي معمعامل هش ومتغير غامض**. أطروحة.سعبة الرياضيات. العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية الحكوميةمولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرف: (١) افوتي السة, الماجستير
(٢) أحمد نصيح الدين, الماجستير

كلمات البحث: نظم المعادلات الخطية من ضبابي, α-*cut*, مصفوفة غير سالب.

فيالجبر الخطي, نظامالمعادلات الخطية هو موضوع واحدالتي غالبا ما تستخدمفي التدريس. بشكل عام، نظام المعادلات الخطية يمكن كتابة في شكل الضرب مصفوفة $Ax = y$. جنبا إلى جنب مع تطوير منطق منطقية موسعة لمفهوم نظم المنطق الضبابي من المعادلات الخطية هي أيضا كبيرة للنظام ضبابي من المعادلات الخطية. يناقش هذا أطروحة التسوية والحل من للنظام ضبابي من المعادلات الخطية التي لديها شكل عام $A\tilde{X} = \tilde{Y}$.
واستنادا إلى نتائج المناقشة الانتهاء من نظام المعادلات الخطية من ضبابي معمعامل هش ومتغير غامضهو كما يلي:

1. إنشاء نظم المعادلات الخطية من ضبابي في α-*cut*.
2. وصف عمليات الضرب والجمع من α-*cut* في نظم المعادلات الخطية من ضبابي مع قواعد العمليات الحسابية غامض.
3. إنشاء نظم المعادلات الخطية من ضبابي في α-*cut* إلى نظامين من المعادلات الخطية العادية
   a. تلخيصوظيفةأنالهبوطمفردة النغمةإلى وظائفرتيبةالتصاعدي
   b. الحد من وظائفالتيالنزوليمفردة النغمةمع وظائفرتيبةالتصاعدي
4. حل أنظمة المعادلات الخطية العادية عند نقطة (3a) و (3b) باستخدام طريقة الاستبدال.
5. استبدال الحل عند نقطة (4) في:

$$\underline{x}_i = \frac{x_i - w_i}{2}, \overline{x}_i = \frac{x_i + w_i}{2}$$

وعلاوة على ذلكتناقش هذه الورقةأيضاالحلضعيفة وحل قوي من نظم المعادلات الخطية من ضبابي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Islam memerintahkan kepada umatnya untuk senantiasa menuntut ilmu pengetahuan. Al-Qur'an adalah kitab suci bagi umat Islam yang berfungsi sebagai pedoman, rujukan utama dari semua permasalahan dan menjadi sumber utama dari ilmu pengetahuan, baik ilmu sosial, ekonomi, sains, agama, dan lain sebagainya.

Ayat-ayat Al-Qur'an yang menerangkan tentang ilmu pengetahuan masih bersifat global, sehingga memerlukan kesungguhan manusia untuk mengkaji dan menelitinya lebih dalam. Sebagai seorang muslim, sudah seharusnya mempelajari ilmu yang ada di bumi ini dengan semaksimal mungkin guna mengembangkan ilmu pengetahuan. Hal ini dilandasi oleh QS. At-Taubah ayat 122:

وَمَا كَانَ ٱلْمُؤْمِنُونَ لِيَنفِرُوا۟ كَآفَّةً ۚ فَلَوْلَا نَفَرَ مِن كُلِّ فِرْقَةٍ مِّنْهُمْ طَآئِفَةٌ لِّيَتَفَقَّهُوا۟ فِى ٱلدِّينِ
وَلِيُنذِرُوا۟ قَوْمَهُمْ إِذَا رَجَعُوٓا۟ إِلَيْهِمْ لَعَلَّهُمْ يَحْذَرُونَ ﴿١٢٢﴾

Artinya: Tidak sepatutnya bagi mukminin itu pergi semuanya (ke medan perang). Mengapa tidak pergi dari tiap-tiap golongan di antara mereka beberapa orang untuk memperdalam pengetahuan mereka tentang agama dan untuk memberi peringatan kepada kaumnya apabila mereka telah kembali kepadanya, supaya mereka itu dapat menjaga dirinya.

Dalam surat At-Taubah ini Allah memerintahkan kepada umat Islam bahwa tidak perlu semua orang mukmin berangkat ke medan perang, tetapi harus ada pembagian tugas dalam masyarakat. Ada yang sebagian pergi ke medan perang dan sebagian lagi pergi untuk menuntut ilmu pengetahuan.

Matematika merupakan suatu ilmu yang berperan sebagai ilmu pengetahuan pembantu bagi ilmu pengetahuan yang lainnya. Matematika sebagai ilmu eksakta dapat digunakan untuk membantu memecahkan suatu masalah dengan rumus atau perhitungan dan dapat dijadikan sebagai alat untuk menyederhanakan penyajian, sehingga mudah untuk dipahami, dianalisis, dan dipecahkan (Abdussakir, 2007:79-80).

Logika fuzzy dipandang sebagai suatu penyamarataan dari berbagai logika yang nilai kebenarannya banyak ragamnya. Logika fuzzy dikatakan sebagai "logika baru yang lama", karena ilmu tentang logika fuzzy modern dan metodenya baru ditemukan beberapa tahun yang lalu, tetapi sesungguhnya konsep tentang logika fuzzy itu sudah ada sejak lama (Kusumadewi & Purnomo, 2004:1).

Dalam ayat Al-Qur'an telah memberikan contoh tentang logika fuzzy yaitu terdapat dalam QS. Al-Hujurat ayat 13:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

Artinya: Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling takwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal.

Surat Al-Hujurat ayat 13 di atas menjelaskan bahwa orang yang paling mulia di sisi Allah ialah orang yang paling bertakwa. Kalau ada orang yang paling bertakwa disisi Allah pastinya ada orang yang hanya mempunyai gelar takwa, setengah takwa, dan tidak takwa. Hal ini analog dengan logika fuzzy yang telah dijelaskan pada paragraf sebelumnya.

Sistem persamaan linier adalah sejumlah tertentu persamaan linier dalam variabel$x_1, x_2, x_3 \dots x_n$. Urutan sejumlah bilangan$s_1, s_2, s \dots s_n$merupakan solusi dari sistem persamaan linier jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3 \dots x_n = s_n$ merupakan solusi dari setiap persamaan di dalam sistem persamaan linier (Anton dan Rorres, 2004:3).

Suatu sistem persamaan linier dapat tidak memiliki solusi, memiliki tepat satu solusi, atau memiliki banyak solusi. Selain itu, pada persamaan linier ada banyak metode yang digunakan untuk menyelesaikannya, di antaranya yaitu metode substitusi dan eliminasi.Pada tahun 1965 Zadeh melakukan terobosan baru yaitu memperluas konsep "himpunan" klasik menjadi himpunan fuzzy (Susilo, 2006:5).

Himpunan fuzzy merupakan sesuatu yang unik karena pada himpunan fuzzy menggunakan fungsi keanggotaan yang nilainya berada pada selang [0,1] sehingga nilai kebenarannya ada yang bernilai benar, setengah benar dan tidak benar. Sama halnya dengan himpunan klasik yang berkembang menjadi himpunan fuzzy, operasi pada bilangan klasik juga berkembang menjadi operasi fuzzy sehingga cara mengoperasikannya berbeda dengan operasi bilangan klasik. Selanjutnya sistem persamaan linier juga berkembang menjadi sistem persamaan linier fuzzy. Solusipada sistem persamaan linier menghasilkan solusi berupa bilangan tegas, berbeda dengansistem persamaan linier fuzzy yang solusinyadapat berupa bilangan tegas atau bilangan fuzzy, tergantung pada variabel yang digunakan. Pada tahun 2008 telah dilakukan penelitian tentang penyelesaian sistem persamaan linier fuzzy dengan bilangan fuzzy oleh Rostislav Horcik. Dari penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji skripsi dengan judul "**Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fuzzy dengan Koefisien *Crisp* dan Variabel Fuzzy".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dari penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linier fuzzy dengankoefisien *crisp* dan variabel fuzzy?
2. Bagaimana solusi sistem persamaan linier fuzzy dengan koefisien *crisp* dan variabel fuzzy?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk menjelaskan penyelesaian sistem persamaan linier fuzzy dengan koefisien *crisp* dan variabel fuzzy.
2. Untuk menjelaskan solusi sistem persamaan linier fuzzy dengankoefisien *crisp* dan variabel fuzzy.

1.4 Batasan Masalah

Dalampenelitian ini pembahasan masalah dikhususkan pada sistem persamaan linier fuzzy dengan semesta pada bilangan fuzzy kontinu.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapunmanfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi Peneliti

Sebagai pengalaman melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima.

2. Bagi Lembaga

Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan perkuliahan, khususnya materi tentang sistem persamaan linier fuzzy.

3. Bagi Pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai sistem persamaan linier fuzzy.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan, yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku atau jurnal. Dalam prosesnya penulis menggunakan beberapa literatur yang berkaitan dengan sistem persamaan linier fuzzy.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah:

1. Membentuk sistem pesamaan linier fuzzy dalam bentukα-*cut*.
2. Menjabarkan operasi perkalian dan penjumlahan α-*cut* pada sistem persamaan linier fuzzy dengan menggunakan aturan operasi aritmetika fuzzy.

3. Membentuk sistem persamaan linier fuzzy dalam bentukα-*cut*menjadi dua sistem persamaan linier dengan cara:
   a. Menjumlahkan fungsi yang monoton turun denganfungsi yang monoton naik.
   b. Mengurangi fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik.
4. Menyelesaikan sistem persamaan linier pada poin (3a) dan (3b) dengan menggunakan metode substitusi, eliminasi dan opersai baris elementer.
5. Mensubstitusikan solusi pada poin (4) ke dalam:

$$\underline{x}_i = \frac{x_i - w_i}{2}, \overline{x}_i = \frac{x_i + w_i}{2}$$

1.7 Sistematika Penulisan

Dalampenulisanskripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian,dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu memuat himpunan fuzzy, fungsi keanggotaan, bilangan fuzzy, operasi aritmetika, potongan α (α-*cut)*, matriks *nonnegative*,sistem persamaan linier, serta derajat dan kedudukan manusia dalam Al-Qur'an .

Bab III Pembahasan

Dalam bab ini berisi penjelasan tentang sistem persamaan linier fuzzy, penyelesaian sistem persamaan linier fuzzy, solusi lemah dan solusi kuat sistem persamaan linier fuzzy, serta logika fuzzy menurut pandangan Islam.

Bab IV Penutup

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Fuzzy

Dalam teori himpunan klasik yang dikembangkan oleh George Cantor (1845-1918), himpunan didefinisikan sebagai suatu koleksi obyek-obyek yang terdefinisi secara tegas, dalam arti dapat ditentukan secara tegas apakah suatu obyek adalah anggota himpunan atau tidak. Dengann demikian, suatu himpunan tegas A dalam semesta X dapat didefinisikan dengan menggunakan suatu fungsi $\chi_A: X \rightarrow \{0,1\}$, yang disebut fungsi karakteristik dari himpunan A, di mana untuk setiap $x \in X$

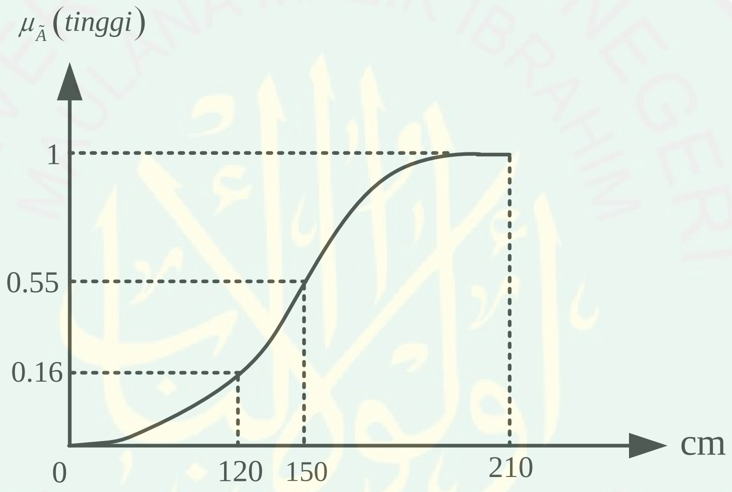
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } x \in A \\ 0 \text{ untuk } x \notin A. \end{cases}$$

Fungsi ini, pada himpunan fuzzy diperluas sehingga nilai yang dipasangkan pada unsur-unsur dalam semesta pembicaraan tidak hanya 0 dan 1 saja, tetapi keseluruhan nilai dalam interval $[0,1]$ yang menyatakan derajat keanggotaan suatu unsur pada himpunan yang dibicarakan. Fungsi ini disebut fungsi keanggotaan dan himpunan yang didefinisikan dengan fungsi keanggotaan ini disebut himpunan fuzzy. Fungsi keanggotaan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada himpunan semesta X, dinotasikan dengan $\mu_{\tilde{A}}$, yaitu:

$$\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1].$$

Gambaran himpunan fuzzy dapat terlihat pada himpunan orang tinggi. Pada himpunan orang tinggi tidak dapat ditentukan secara tegas apakah seseorang adalah tinggi atau tidak. Kalau misalnya didefinisikan bahwa "orang tinggi" adalah orang yang tingginya lebih besar atau sama dengan 1.75 meter, maka orang yang tingginya 1.74 meter menurut definisi "orang tinggi" termasuk orang yang tidak tinggi (Susilo, 2006:49).

Himpunan orang tinggi dalam himpunan Fuzzy dapat dinyatakan dengan fungsi keanggotaan μ_{tinggi} dengan grafik seperti disajikan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1 Grafik Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy "Tinggi"

Himpunan Fuzzy (Himpunan Kabur) memiliki beberapa komponen antara lain Pendukung (*Support*), Tinggi (*Height*), dan Teras (*Core*).

Definisi 2.1

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X. *Support* dari $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol (Klir & Yuan, 1995:21).

Dari definisi *support*, maka dapat dibangun definisi bahwa *support* $\tilde{A}$ dikatakan terbatas, apabila himpunan tegas yang memuat semua anggota $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol banyaknya terbatas atau berhingga, sedangkan *support* $\tilde{A}$ dikatakan tak terbatas, apabila himpunan tegas yang memuat semua anggota $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol banyaknya tak terbatas.

Contoh 2.1

Dalam semesta $X = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dengan derajat keanggotaan masing-masing

$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = 0/-5 + 0.1/-4 + 0.3/-3 + 0.5/-2 + 0.7/-1 + 1/0 + 0.7/1 + 0.5/2 + 0.3/3 + 0.1/4 + 0/5.$

Maka *support* dari $\tilde{A}$ adalah $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

Definisi 2.2

Tinggi (*Height*) dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang dilambangkan dengan $Tinggi(\tilde{A})$ didefinisikan sebagai

$$Tinggi(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}$$

(Susilo, 2006:53).

Contoh 2.2

Dari contoh 2.1 maka tinggi dari himpunan bilangan fuzzy $\tilde{A}$ adalah :

$$\begin{aligned} Tinggi(\tilde{A}) &= \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\} \\ &= \sup\{0,\ 0.1,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.7,\ 1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Definisi 2.3

Teras (*Core*) dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang dilambangkan dengan $Teras(\tilde{A})$, adalah himpunan semua unsur dari semestanya yang mempunyai derajat keanggotaan sama dengan satu yaitu

$$Teras\left(\tilde{A}\right)=\left\{x\in X|\mu_{\tilde{A}}(x)=1\right\}$$

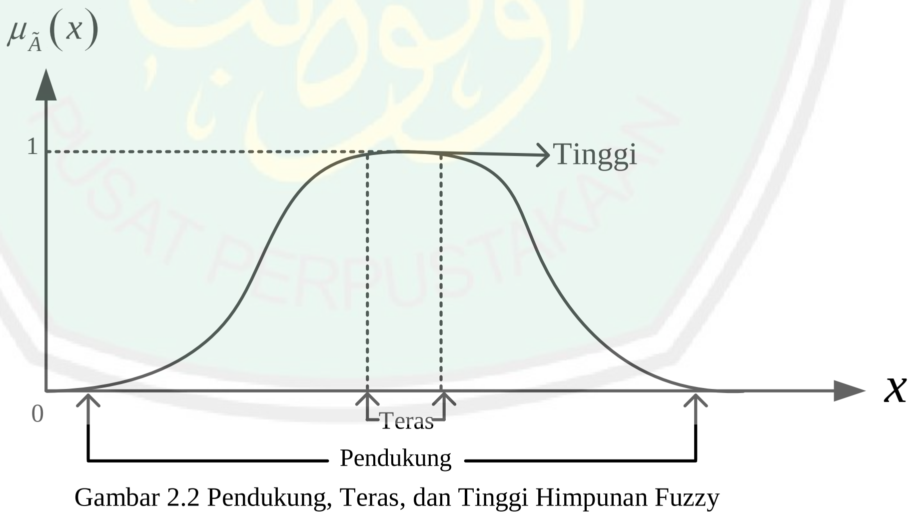
(Susilo, 2006:53).

Contoh 2.3

Dari contoh 2.1 maka teras dari himpunan bilangan fuzzy $\tilde{A}$ adalah:

$$\begin{aligned}Teras\left(\tilde{A}\right)&=\left\{x\in X|\mu_{\tilde{A}}(x)=1\right\}\\&=\left\{0\right\}\end{aligned}$$

Komponen himpunan fuzzy dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Pendukung, Teras, dan Tinggi Himpunan Fuzzy

Selanjutnya himpunan fuzzy dapat dikategorikan dalam beberapa bentuk yaitu normal, subnormal, konvek, dan tak konvek.

Definisi 2.4

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut normal jika terdapat $x \in \tilde{A}$ sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut subnormal jika $\mu_{\tilde{A}}(x) < 1$, untuk setiap $x \in \tilde{A}$ (Sivanandam, dkk., 2007:75).

Contoh 2.4

Dalam semesta $X = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dengan derajat keanggotaan masing-masing

$$\tilde{A} = \sum_{x\in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = 0/-5+0.1/-4+0.3/-3+0.5/-2+0.7/-1+1/0+0.7/1+0.5/2+0.3/3+0.1/4+0/5.$$

Merupakan himpunan fuzzy normal karena ada $0 \in \tilde{A}$ yang mempunyai derajat sama dengan 1. Sedangkan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dengan derajat keanggotaan masing-masing

$$\tilde{A} = \sum_{x\in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = 0/-5+0.1/-4+0.3/-3+0.5/-2+0.7/-1+0.9/0+0.7/1+0.5/2+0.3/3+0.1/4+0/5.$$

Merupakan himpunan fuzzy subnormal karena tidak ada $x \in \tilde{A}$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

Definisi 2.5

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut konvek jika fungsi keanggotaannya monoton naik, atau menoton turun, atau monoton naik dan monoton turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik.

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut tak konvek jika fungsi keanggotaannya tidak monoton naik, atau tidak menoton turun, atau tidak monoton naik dan turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik (Sivanandam, dkk., 2007:75).

Contoh 2.5

Dalam semesta $X = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dengan derajat keanggotaan masing-masing

$$\tilde{A} = \sum_{x\in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = 0/-5 + 0.1/-4 + 0.3/-3 + 0.5/-2 + 0.7/-1 + 1/0 + 0.7/1 + 0.5/2 + 0.3/3 + 0.1/4 + 0/5.$$

Merupakan himpunan fuzzy konvek karena mempunyai fungsi keanggotaan yang monoton naik dan monoton turun. Sedangkan $X = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ dengan derajat keanggotaan masing-masing

$$\tilde{A} = \sum_{x\in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = 0/-5 + 0.1/-4 + 0.3/-3 + 0.7/-2 + 0.5/-1 + 1/0 + 0.5/1 + 0.7/2 + 0.3/3 + 0.1/4 + 0/5.$$

Merupakan himpunan fuzzy tak konvek karena fungsi keanggotaannya tidak monoton naik dan monoton turun.

2.2 Fungsi Keanggotaan

Setiap himpunan fuzzy dapat dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan. Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan fuzzy dengan fungsi keanggotaan. Untuk semesta diskrit biasanya dipakai cara daftar, yaitu daftar anggota-anggota semesta sama derajat keanggotaannya, misalnya diberikan contoh dalam semesta $X = \{\text{Rudi, Eni, Linda, Anton, Ika}\}$ yang terdiri dari para mahasiswa dengan indeks prestasi berturut-turut 3.2, 2.4, 3.6, 1.6, dan 2.8, himpunan fuzzy $\tilde{A}$=“Himpunan mahasiswa pandai” dapat dinyatakan dengan cara daftar yaitu $\tilde{A}$=0.8/Rudi+ 0.6/Eni+0.9/Linda+0.4/Anton+0.7/Ika (Susilo, 2006:55).

Susilo (2006:57-62) menyatakan bahwa kebanyakan himpunan fuzzy berada dalam semesta bilangan riil dengan fungsi keanggotaan yang dinyatakan dalam bentuk formula matematis antara lain sebagai berikut:

2.2.1 Fungsi Keanggotaan Segitiga

Suatu fungsi keanggotaan himpunan fuzzy disebut fungsi keanggotaan segitiga jika mempunyai tiga parameter, yaitu $a, b, c \in R$ dengan $a \le b \le c$ dan dinyatakan dengan $Segitiga(x, a, b, c)$ dengan aturan:

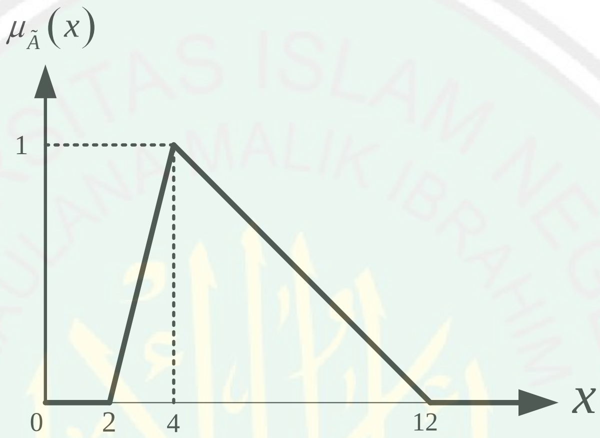
$$Segitiga(x; a, b, c) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{untuk } a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & \text{untuk } b \le x \le c \\ 0 & \text{untuk lainnya.} \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan segitiga dapat juga dinyatakan dengan formula sebagai berikut:

$$Segitiga\ (x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right).$$

Gambar 2.3 memperlihatkan suatu contoh fungsi keanggotaan Segitiga (x;2,4,12).

$$Segitiga(x;2,4,12)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{2} & \text{untuk } 2\le x\le 4\\ \dfrac{12-x}{8} & \text{untuk } 4\le x\le 12\\ 0 & \text{untuk lainnya}\end{cases}$$



Gambar 2.3 Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga (x;2,4,12)

2.2.2 Fungsi Keanggotaan Trapesium

Suatu fungsi keanggotaan himpunan fuzzy disebut fungsi keanggotaan trapesium jika mempunyai empat parameter, yaitu $a,b,c,d\in R$ dengan $a\le b\le c\le d$ dan dinyatakan dengan $Trapesium\ (x,a,b,c,d)$ dengan aturan:

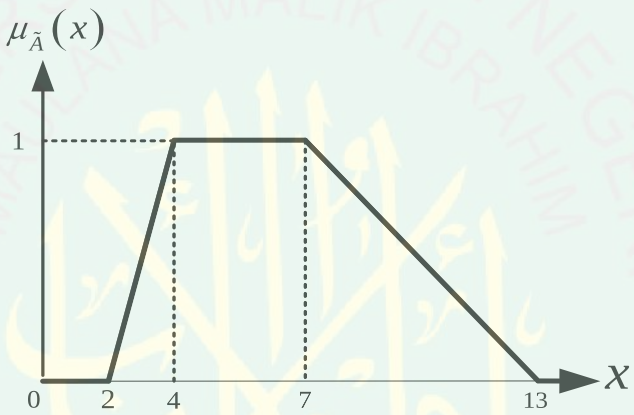
$$Trapesium(x;a,b,c,d)\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a} & \text{untuk } a\le x\le b\\ 1 & \text{untuk } b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c} & \text{untuk } c\le x\le d\\ 0 & \text{untuk lainnya.}\end{cases}$$

Fungsi keanggotaan trapesium dapat juga dinyatakan dengan formula sebagai berikut:

$$Segitiga\ \ (x;a,b,c)=\max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},1,\frac{d-x}{d-c}\right),0\right).$$

Gambar 2.4 memperlihatkan suatu contoh fungsi keanggotaan Trapesium (x;2,4,7,13).

$$Trapesium(x;2,4,7,13)\begin{cases}\dfrac{x-2}{2} & \text{untuk } 2 \le x \le 4\\ 1 & \text{untuk } 4 \le x \le 7\\ \dfrac{13-x}{6} & \text{untuk } 7 \le x \le 13\\ 0 & \text{untuk lainnya}\end{cases}$$



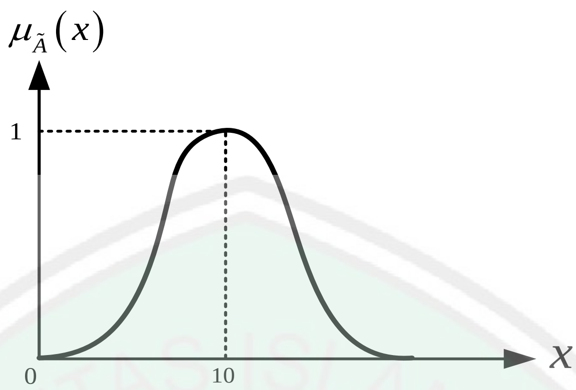
Gambar 2.4 Grafik Fungsi Keanggotaan Trapesium (x;2,4,7,13)

2.2.3 Fungsi Keanggotaan Gauss

Suatu fungsi keanggotaan himpunan fuzzy dengan dua parameter $a,b \in R$ disebut fungsi keanggotaan Gauss, dinyatakan dengan $Gauss(x,a,b)$, jika memenuhi:

$$Gauss(x;a,b) = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$$

di mana $x = a$ adalah pusat dan b menentukan lebar dari fungsi keanggotaan *Gauss* tersebut. Gambar 2.5 memperlihatkan suatu contoh fungsi keanggotaan *Gauss* (*x*;10,10).



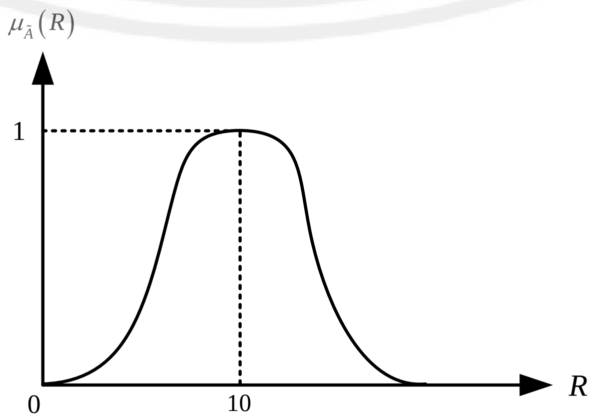
Gambar 2.5 Grafik Fungsi Keanggotaan Gauss (x;10,10)

2.2.4 Fungsi Keanggotaan Cauchy

Suatu fungsi keanggotaan himpunan fuzzy dengan tiga parameter $a, b, c \in R$ disebut fungsi keanggotaan Cauchy atau fungsi keanggotaan Genta, dinyatakan dengan $Cauchy(x, a, b, c)$, jika memenuhi:

$$Cauchy(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}$$

di mana $x = c$ adalah pusat, a menentukan lebar dan b menentukan kemiringan (*slope*) di titik silang dari fungsi keanggotaan Cauchy tersebut. Gambar 2.6 memperlihatkan suatu contoh fungsi keanggotaan *Cauchy* (*x*;5,1,10).



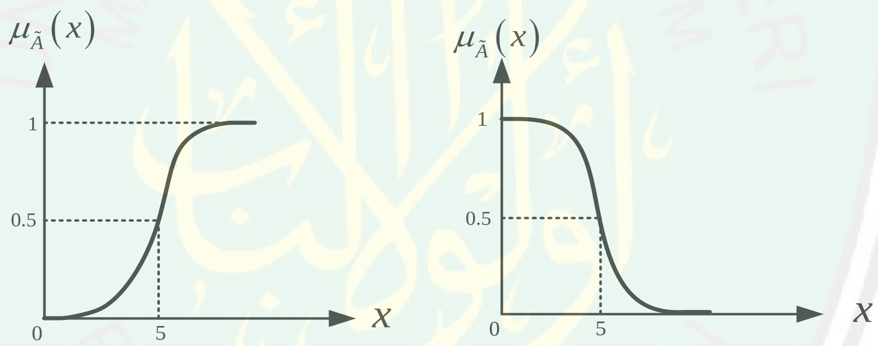
Gambar 2.6 Grafik dari Fungsi Keanggotaan *Cauchy* (*x*;5,1,10)

2.2.5 Fungsi Keanggotaan Sigmoid

Suatu fungsi keanggotaan himpunan fuzzy disebut dengan dua buah parameter a dan $c \in R$ disebut fungsi keanggotaan sigmoid atau dinyatakan dengan $Sigmoid(x, a, c)$, jika memenuhi:

$$Sigmoid(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

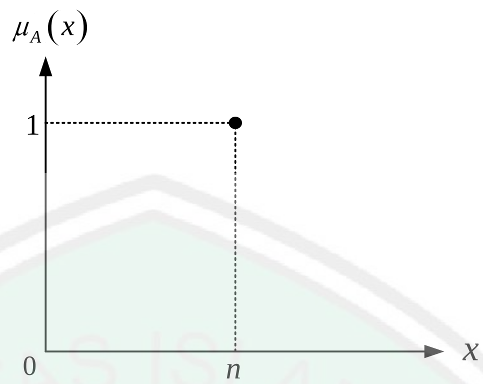
di mana a menentukan kemiringan fungsi keanggotaan sigmoid tersebut di titik silang $x = c$. Gambar 2.7 memperlihatkan contoh grafik fungsi keanggotaan sigmoid yang terbuka kanan (yaitu untuk $a>0$) dan terbuka kiri (yaitu untuk $a<0$).



Gambar 2.7 Grafik Fungsi Keanggotaan Sigmoid (x;2,5) Terbuka Kanan (gambar kiri) dan Sigmoid (x;-2,5) Terbuka Kiri (gambar kanan)

2.3 Bilangan Fuzzy

Bilangan fuzzy merupakan konsep perluasan dari bilangan tegas. Misal $n \in R$, jika direpresentasikan dalam himpunan fuzzy, maka n mempunyai derajat keanggotaan 1.



Gambar 2.8. Bilangan Tegas Digambarkan dalam Himpunan Fuzzy

Definisi 2.6

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada R. $\tilde{A}$ disebut bilangan fuzzy jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. $\tilde{A}$ merupakan himpunan fuzzy normal
2. A_α merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in [0, 1]$, dan
3. *Support* dari $\tilde{A}$ atau A_{0+}, merupakan himpunan terbatas

   (Klir dan Yuan, 1995:97).

Syarat bahwa A_α merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in [0, 1]$ sama dengan syarat bahwa $\tilde{A}$ merupakan himpunan konvek. Bilangan fuzzy sebagai himpunan fuzzy normal dan konvek, dan setiap α-*cut* merupakan interval tertutup. Jadi, bilangan fuzzy adalah himpunan konvek, normal, dan merupakan interval tertutup (Chen dan Pham, 2001:42).

Bilangan Fuzzy dapat pula dinyatakan dalam bentuk fungsi parameter yang dapat dinyatakan sebagai $\tilde{v} = \left(\underline{v}(\alpha), \overline{v}(\alpha)\right)$, $0 \le \alpha \le 1$, di mana fungsi $\underline{v}(\alpha)$ dan $\overline{v}(\alpha)$ memenuhi pernyataan berikut:

i) $\underline{v}(\alpha)$ adalah fungsi terbatas di kiri, kontinu dan monoton naik pada [0,1]

ii) $\underline{v}(\alpha)$ adalah fungsi terbatas di kanan, kontinu dan monoton turun pada [0,1]

iii) $\underline{v}(\alpha) \leq \overline{v}(\alpha),\ 0 \leq \alpha \leq 1$ (Behera & Chakraverty, 2012:650).

2.4 Operasi Aritmetika

Aritmetika Fuzzy adalah konsep yang didasarkan pada dua sifat bilangan fuzzy.

(1) Setiap bilangan fuzzy dapat direpresentasikan dalam bentuk *α-cut*.

(2) *α-cut dari* bilangan fuzzy adalah interval tertutup pada bilangan riil untuk setiap $\alpha = [0,1]$.

Maka berdasarkan dua sifat tersebut dapat didefinisikan operasi aritmetika pada bilangan fuzzy dengan menggunakan operasi aritmetika pada *α-cut* dari bilangan fuzzy adalah interval tertutup pada bilangan riil. Oleh karena itu, operasi aritmetika pada interval perlu dipahami terlebih dahulu.

Misalkan $*$ adalah operasi aritmetika pada interval tertutup yang meliputi operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian, maka

$$[a,b]*[d,e] = \{f * g a \leq f \leq b, d \leq g \leq e\}$$

merupakan aturan umum pada semua operasi aritmetika interval tertutup, kecuali untuk $[a,b]/[d,e]$ tidak didefinisikan ketika $0 \in [d,e]$. Hasil operasi aritmetika pada interval tertutup juga merupakan interval tertutup.

Definisi 2.7

Empat operasi aritmetika pada interval tertutup didefinisikan sebagai berikut:

$$[a,b]+[d,e]=[a+d,b+e]$$
$$[a,b]-[d,e]=[a-e,b-d]$$
$$[a,b].[d,e]=\left[\min\{ad,ae,bd,be\},\max\{ad,ae,bd,be\}\right]$$

dengan syarat $0 \notin [d,e]$, maka berlaku

$$[a,b]/[d,e]=[a,b]\left[\frac{1}{e},\frac{1}{d}\right]=\left[\min\left(\frac{a}{d},\frac{a}{e},\frac{b}{d},\frac{b}{e}\right),\max\left(\frac{a}{d},\frac{a}{e},\frac{b}{d},\frac{b}{e}\right)\right]$$

Berikut ini adalah beberapa contoh operasi aritmetika pada interval tertutup yang didefinisikan oleh definisi (2.7):

$$[2,5]+[1,3]=[3,8]$$
$$[2,5]-[1,3]=[-1,4]$$
$$[-1,1].[-2,-0.5]=[-2,2]$$
$$[-1,1]/[-2,-0.5]=[-2,2]$$

(Klir & Yuan, 1995:102-103).

Karena bilangan fuzzy dapat direpresentasikan sebagai *α-cut* yang berbentuk interval tertutup, maka operasi pada bilangan fuzzy didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah bilangan fuzzy dan $*$ adalah sebarang dari empat operasi aritmetika interval tertutup, didefinisikan operasi $\tilde{A} * \tilde{B}$ dengan menggunakan definisi *α-cut*, $(A * B)_\alpha$ sebagai persamaan berikut:

$$(A * B)_\alpha = A_\alpha * B_\alpha$$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ (Ketika operasi * = / maka haruslah $0 \notin B_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$). Karena $(A * B)_\alpha$ adalah interval tertutup untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ dan $\tilde{A}, \tilde{B}$ adalah bilangan fuzzy, maka $\tilde{A} * \tilde{B}$ juga bilangan fuzzy. (Klir dan Yuan, 1995:105).

Definisi 2.8

Untuk suatu bilangan fuzzy $\tilde{x} = \left(\underline{x}(\alpha), \overline{x}(\alpha)\right)$ dan $\tilde{y} = \left(\underline{y}(\alpha), \overline{y}(\alpha)\right)$ dalam bentuk fungsi parameter dan k adalah skalar, maka

i. $\tilde{x} = \tilde{y}$ jika dan hanya jika $\underline{x}(\alpha) = \underline{y}(\alpha), \overline{x}(\alpha) = \overline{y}(\alpha)$

ii. $\tilde{x} + \tilde{y} = \left(\underline{x}(\alpha) + \underline{y}(\alpha), \overline{x}(\alpha) + \overline{y}(\alpha)\right)$

iii. $k\tilde{x} = \left(k\underline{x}(\alpha), k\overline{x}(\alpha)\right)$ jika k positif, $k\tilde{x} = \left(k\overline{x}(\alpha), k\underline{x}(\alpha)\right)$ jika k negatif

(Abbasbandy & Alavi, 2005:35).

2.5 Potongan α (α-*cut*)

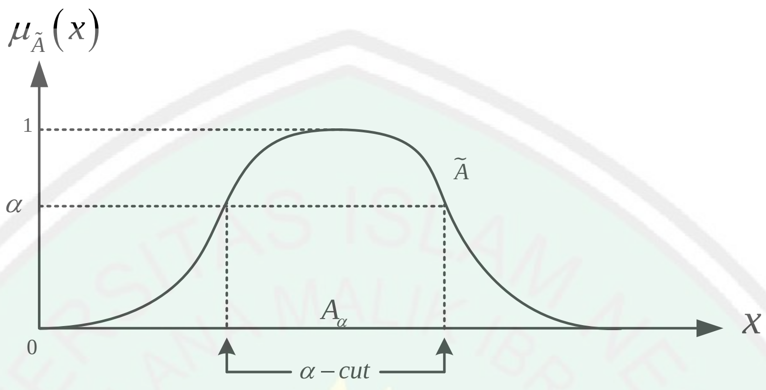
Definisi 2.9

α-*cut* adalah himpunan bagian tegas dalam himpunan semesta dengan α adalah suatu bilangan dalam selang tertutup [0,1]. α-*cut* dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yang dilambangkan dengan A_α adalah himpunan tegas yang memuat semua elemen dari semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\tilde{A}$ yang lebih besar atau sama dengan α yaitu $A_\alpha = \left\{x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\right\}$ (Susilo, 2006:73).

Selain itu juga terdapat *strong* α-*cut* , yakni himpunan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan lebih dari derajat keanggotaan yang ditentukan atau dengan kata lain $A'_\alpha = \left\{x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\right\}$ (Dubbois dan Prade, 1980:19).

Guanrong Chen dan Trung Tat Pham (2001:38) juga menyebut α-*cut* dengan istilah *weak* α-*cut* dan himpunan-*level* α. Huaguang Zhang dan Derong

Liu (2006:6) menotasikan α-cut dari $\tilde{A}$ dengan A_α. Berikut ini adalah ilustrasi α-cut pada grafik fungsi keanggotaan suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$.



Gambar 2.9 Ilustrasi α-cut pada Grafik Fungsi Suatu Himpunan Fuzzy

Contoh 2.6

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ memiliki fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \le x \le A \\ 3-x, & A \le x \le 3 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

α-cut dari $\tilde{A}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu dengan menyatakan $\alpha = x - 1$ didapatkan $x = \alpha + 1$, dan $\alpha = 3 - x$ didapatkan $x = 3 - \alpha$, sehingga diperoleh $A_\alpha = (\alpha + 1, 3 - \alpha)$ (Sari, 2012:25-26).

2.6 Matriks *Nonnegative*

Matriks $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ (tidak harus matriks bujur sangkar) dikatakan matriks *nonnegative* jika entri-entrinya adalah *nonnegative*, dan ditulis $A \geq 0$. Secara umum, didefinisikan relasi $x < y$ yang artinya $y - x \geq 0$ (Serre, 2010:149).

2.7 Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier adalah sejumlah tertentu persamaan linier dalam variabel $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$. Urutan sejumlah bilangan $s_1, s_2, s \dots s_n$ merupakan solusi dari sistem persamaan linier jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3 \dots x_n = s_n$ merupakan solusi dari setiap persamaan di dalam sistem persamaan linier. Contoh dari bentuk sistem adalah sebagai berikut:

$$4x_1 - x_2 + 3x_1 = -1$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_1 = -4$$

memiliki solusi $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ karena nilai-nilai tersebut memenuhi kedua persamaan. Tetapi $x_1 = 1, x_2 = 8\ , x_3 = 1$ bukan merupakan solusi karena nilai-nilai tersebut hanya memenuhi persamaan pertama dari dua persamaan dalam sistem.

Tidak semua sistem persamaan linier mempunyai solusi. Sebagai contoh jika persamaan kedua dikalikan dengan $\frac{1}{2}$ dari sistem

$$x + y = 4$$
$$2x + 2y = 6$$

maka terbukti bahwa tidak terdapat solusi, karena menghasilkan sistem yang ekuivalen

$$x + y = 4$$
$$x + y = 3$$

yang merupakan dua persamaan yang saling bertolak belakang.

Suatu sistem persamaan yang tidak memiliki solusi disebut tidak konsisten *(inconsistent)*, sedangkan jika terdapat paling tidak satu solusi dalam sistem dinamakan konsisten *(consistent)* (Anton & Rorres 2004:3).

Suatu sebarang dari *m* persamaan linier dengan *n* faktor yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=b_1\\
&\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=b_2\\
&\vdots\\
&\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=b_m
\end{aligned}$$

di mana $x_1, x_2, \ldots x_n$ adalah faktor yang tidak diketahui, a dan b dengan subskrip merupakan konstanta. Sebagai contoh, suatu sistem umum yang terdiri dari tiga persamaan linier dengan empat faktor yang tidak diketahui, dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\alpha_{14}x_4=b_1\\
&\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3+\alpha_{24}x_4=b_2\\
&\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3+\alpha_{34}x_4=b3
\end{aligned}$$

2.8 Derajat dan Kedudukan Manusia dalam Al-Qur'an

Derajat dan kedudukan adalah kata yang tidak asing lagi didengar dalam kehidupan, yang sering menjadi incaran setiap manusia di dunia, di mana orang yang memiliki derajat dan kedudukan yang lebih tinggi dianggap sebagai orang yang lebih baik, terpandang, dan dihormati. Sering kali derajat dan kedudukan ini ditunjukkan dengan kekayaan, pangkat, jabatan, atau bahkan kedudukan sosial dalam masyarakat. Inilah gambaran derajat dan kedudukan dalam dunia yang lebih sering dipandang oleh manusia. Tentang derajat manusia ini Allah menjelaskan dalam surat Al-Hujurat ayat 13:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَـٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَـٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Artinya: Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling taqwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal.

Penggalan pertama surat Al-Hujurat ayat 13 di atas adalah pengantar untuk menegaskan bahwa semua manusia derajat kemanusiannya sama di sisi Allah, tidak ada perbedaan antara satu suku dengan suku yang lain. Tidak ada juga perbedaan pada nilai kemanusian antara laki-laki dan perempuan karena semua diciptakaan dari seorang laki-laki dan perempuan. Pengantar tersebut mengantar pada kesimpulan yang disebut pada penggalan terakhir ayat yakni "*Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal* " (Shihab, 2002:260).

Menurut Katsir (2007:496) maksud surat Al-Hujurat ayat 13 di atas adalah bahwasannya Allah SWT berfirman seraya memberitahukan kepada umat manusia bahwa Allah telah menciptakan mereka dari satu jiwa, dan darinya Allah menciptakan pasangannya, yaitu Adam dan Hawa dan selanjutnya Allah menjadikan mereka berbangsa-bangsa. Pada potongan ayat ان آكرمكم عند الله آتقكم ان الله عليمم خبير maksudnya, yang membedakan derajat kalian di sisi Allah hanyalah ketakwaan, bukan keturunan.

Menurut tinjauan bahasa, takwa berarti menjaga. Sedangkan menurut tinjauan syar'i para ulama memiliki beragam ungkapan di dalam mendefinisikannya. Meskipun beragam, semua definisi itu mengarah kepada satu pengertian, yakni penjagaan diri seorang hamba terhadap kemurkaan Allah SWT dan siksa-Nya dengan melaksanakan semua yang diperintahkan dan meninggalkan segala yang dilarang (Farid, 2008:17).

Bertakwa kepada Allah adalah prestasi yang harus dicapai oleh setiap mukmin dalam ibadahnya. Untuk mencapai prestasi muttaqin ini, setiap mukmin harus melalui tahapan-tahapan, dimulai dari mukmin yang muslim, mukmin yang shalih, shalih yang muhsin, dan akhirnya muhsin yang muttaqin (Kafie, 2003:12-13).

Menurut Al-Jazairi (2009:918) surat Al-Hujurat ayat 13 ini adalah seruan Allah yang merupakan akhir seruan-Nya dalam surat ini kepada hamba-hamba-Nya, dan seruan ini sifatnya lebih umum dari pada seruan dengan mengguanakan simbol iman, Allah berfirman, *"Wahai manusia, sesungguhnya kami telah menciptakan kalian dari laki-laki dan perempuan"* dari Adam dan Hawa berdasarkan asal kejadian mereka sebagaimana setiap manusia itu diciptakan dari dua orang tua, yang satu laki-laki dan yang lain perempuan.

"*Dan kami menjadikan kalian berbangsa-bangsa dan bersuku-suku*" dan bermarga-marga, berbagai macam ras, yang kesemuanya itu karena sebuah hikmah yaitu untuk saling mengenal dan tidak menjadikan kalian separti hewan yang tidak mengenal hewan yang lain. Akan tetapi, Allah telah menjadikan kalian berbangsa-bangsa, bersuku-suku, dan berkeluarga-keluarga untuk sebuah hikmah, yaitu saling mengenal yang akan menghasilkan sikap saling membantu.

"*Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal*" adalah kalimat sebagai alasan dimana Allah Ta'ala menjelaskan bahwa Allah Maha Mengetahui dengan manusia, Maha Mengetahui dengan lahir dan batin mereka dan apa yang menyempurnakan dan membahagiakan mereka lagi Maha Mengenal segala sesuatu dalam kehidupan mereka.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Sistem Persamaan Linier Fuzzy

Skripsi ini membahas tentang penyelesaian dan solusi sistem persamaan linier fuzzy yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + a_{13}\tilde{x}_3 + \ldots + a_{1n}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + a_{23}\tilde{x}_3 + \ldots + a_{2n}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_2 \\ a_{31}\tilde{x}_1 + a_{32}\tilde{x}_2 + a_{33}\tilde{x}_3 + \ldots + a_{3n}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + a_{n3}\tilde{x}_3 + \ldots + a_{nn}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

di mana koefisien $A = (a_{ij}), i \geq 1, j \leq n$ adalah matriks ukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan riil dan variabel $\tilde{x}_j, 1 \leq j \leq n$ dan konstanta $\tilde{y}_i, 1 \leq i \leq n$ adalah bilangan fuzzy dengan $\tilde{x}_j = \left(\underline{x}_j(\alpha), \overline{x}_j(\alpha)\right)$ dan $\tilde{y}_i = \left(\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right)$. $\underline{x}_j(\alpha), \underline{y}_i(\alpha)$ adalah fungsi yang monoton naik, terbatas, dan kontinu kiri pada [0,1] dan $\overline{x}_i(\alpha), \overline{y}_j(\alpha)$ adalah fungsi yang monoton turun, terbatas, dan kontinu kanan pada [0,1] di mana $\underline{x}_j(\alpha) \leq \overline{x}_i(\alpha)$ dan $\underline{y}_i(\alpha) \leq \overline{y}_j(\alpha)$ untuk setiap α dalam [0,1].

Suatu sistem persamaan linier fuzzy dikatakan mempunyai solusi jika ada matriks kolom $X = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ di mana $\tilde{x}_i = \left(\underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\right), 1 \leq i \leq n, 0 \leq \alpha \leq 1$ yang memenuhi:

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j} = \underline{y_i}$$
$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j} = \overline{y_i} \tag{3.2}$$

3.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fuzzy

Sistem persamaan linier fuzzy (3.1), jika ditulis dalam bentuk matriks, maka diperoleh bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Untuk setiap sistem persamaan linier fuzzy $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, misalkan matriks B merupakan entri-entri positif dari matriks A dan matriks C merupakan entri-entri negatif dari matriks A, maka $A = B + C$. Pada matriks (3.3) nilai dari a_{ij} dapat berupa bilangan *nonnegative* atau bilangan negatif. maka bentuk matriks (3.3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{untuk } a_{ij\geq 0}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{untuk } a_{ij<0}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

bentuk matriks (3.4) jika ditulis dalam bentuk persamaan maka diperoleh:

$$\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\tilde{x}_j + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{y}_i \tag{3.5}$$

Karena $\tilde{x}_j = \left(\underline{x}_j(\alpha), \overline{x}_j(\alpha)\right)$ dan $\tilde{y}_i = \left(\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right)$ maka persamaan (3.5) menjadi:

$$\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\left(\underline{x}_j(\alpha), \overline{x}_j(\alpha)\right) + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\left(\underline{x}_j(\alpha), \overline{x}_j(\alpha)\right) = \left(\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right)$$

$$\left(\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\underline{x}_j(\alpha), \sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\overline{x}_j(\alpha)\right) + \left(\sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\overline{x}_j(\alpha), \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\underline{x}_j(\alpha)\right) = \left(\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right)$$

$$\left(\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\underline{x}_j(\alpha) + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\overline{x}_j(\alpha), \sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\overline{x}_j(\alpha) + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\underline{x}_j(\alpha)\right) = \left(\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right)$$

Berdasarkan kesamaan bilangan fuzzy, maka sistem persamaan linier fuzzy (3.1) dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\underline{x}_j(\alpha) + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\overline{x}_j(\alpha) = \underline{y}_i(\alpha) \\ &\sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\underline{x}_j(\alpha) + \sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\overline{x}_j(\alpha) = \overline{y}_i(\alpha) \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Karena B adalah matriks yang memuat entri-entri positif dari matrik A dan C adalah matriks yang memuat entri-entri negatif dari matrik A, maka sistem persamaan linier (3.6) dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &B\underline{x}_j(\alpha) + C\left(-\overline{x}_j\right)(\alpha) = \underline{y}_i(\alpha) \\ &C\left(-\underline{x}_j\right)(\alpha) + B\overline{x}_j(\alpha) = \overline{y}_i(\alpha) \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Jika sistem persamaan linier (3.7) dijumlahkan dan dikurangi maka diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$B\left(\overline{x}_j(\alpha) + \underline{x}_j(\alpha)\right) - C\left(\overline{x}_j(\alpha) + \underline{x}_j(\alpha)\right) = \overline{y}_i(\alpha) + \underline{y}_i(\alpha)$$

$$B\left(\overline{x}_j(\alpha) - \underline{x}_j(\alpha)\right) + C\left(\overline{x}_j(\alpha) - \underline{x}_j(\alpha)\right) = \overline{y}_i(\alpha) - \underline{y}_i(\alpha)$$

Sistem persamaan linier di atas dapat ditulis sebagi berikut:

$$(B-C)\left(\overline{x}_j(\alpha)+\underline{x}_j(\alpha)\right)=\overline{y}_i(\alpha)+\underline{y}_i(\alpha)$$

$$(B+C)\left(\overline{x}_j(\alpha)-\underline{x}_j(\alpha)\right)=\overline{y}_i(\alpha)-\underline{y}_i(\alpha)$$

Misalkan $\alpha = B - c$ dan $\beta = B + C$ maka sistem persamaan linier di atas menjadi:

$$\alpha\left(\overline{x}_j(\alpha)+\underline{x}_j(\alpha)\right)=\overline{y}_i(\alpha)+\underline{y}_i(\alpha)$$

$$\beta\left(\overline{x}_j(\alpha)-\underline{x}_j(\alpha)\right)=\overline{y}_i(\alpha)-\underline{y}_i(\alpha)$$

Dengan memisalkan $\overline{x}_j(\alpha) + \underline{x}_j(\alpha) = x_j$ dan $\overline{x}_j(\alpha) - \underline{x}_j(\alpha) = w_j$ maka sistem persamaan linier di atas menjadi:

$$\alpha x_j = \overline{y}_i(\alpha)+\underline{y}_i(\alpha) \quad (3.8)$$

$$\beta w_j = \overline{y}_i(\alpha)-\underline{y}_i(\alpha) \quad (3.9)$$

Misalkan x_j dan w_j merupakan solusi dari sistem persamaan linier (3.8) dan (3.9) maka $x_j = \overline{x}_j(\alpha) + \underline{x}_j(\alpha)$ dan $w_j = \overline{x}_j(\alpha) - \underline{x}_j(\alpha)$.

Dengan menjumlahkan dan mengurangi setengah dari solusi sistem persamaan linier (3.8) dan (3.9) , maka di peroleh:

$$\frac{x_j+w_j}{2}=\frac{\left(\overline{x}_j(\alpha)+\underline{x}_j(\alpha)\right)+\left(\overline{x}_j(\alpha)-\underline{x}_j(\alpha)\right)}{2}$$

$$=\frac{2\overline{x}_j(\alpha)}{2}$$

$$\frac{x_j+w_j}{2}=\overline{x}_j(\alpha)$$

Dan

$$\frac{x_j - w_j}{2} = \frac{\left(\overline{x}_j(\alpha) + \underline{x}_j(\alpha)\right) - \left(\overline{x}_j(\alpha) - \underline{x}_j(\alpha)\right)}{2}$$

$$= \frac{2\underline{x}_j(\alpha)}{2}$$

$$\frac{x_j - w_j}{2} = \underline{x}_j(\alpha)$$

Dari uraian di atas, maka prosedur untuk menyelesaikan sistem persamaan linier fuzzy adalah sebagai berikut:

1. Membentuk sistem pesamaan linier fuzzy dalam bentuk α-*cut*.
2. Menjabarkan operasi perkalian dan penjumlahan α-*cut* pada sistem persamaan linier fuzzy dengan menggunakan aturan operasi aritmetika fuzzy.
3. Membentuk sistem persamaan linier fuzzy dalam bentuk α-*cut* menjadi dua sistem persamaan linier dengan cara:
   a. Menjumlahkan fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik.
   b. Mengurangi fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik.
4. Menyelesaikan sistem persamaan linier pada poin (3a) dan (3b) dengan menggunakan metode substitusi, eliminasi dan operasi baris elementer.
5. Mensubstitusikan solusi pada poin (4) ke dalam:

$$\underline{x}_i = \frac{x_i - w_i}{2}, \overline{x}_i = \frac{x_i + w_i}{2}$$

Teorema 3.1:

Sistem persamaan linier fuzzy (3.2) dikatakan mempunyai solusi tunggal jika $(B+C)^{-1}$ dan $(B-C)^{-1}$ ada dan $(B+C)^{-1}$ adalah matriks *nonnegative*.

Bukti:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}$$

Misalkan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}$$

Maka

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} BD+CE & BE+CD \\ BE+CD & BD+CE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks di atas penulis peroleh:

$$BD+CE=1$$

$$BE+CD=0$$

Dengan menjumlahkan dan mengurangi persamaan di atas, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$B(D+E)+C(D+E)=1$$

$$(B+C)(D+E)=1$$

$$(D+E)=(B+C)^{-1} \qquad (3.10)$$

Dan

$$B(D-E)-C(D-E)=1$$

$$(B-C)(D-E)=1$$

$$(D-E)=(B-C)^{-1} \qquad (3.11)$$

Dari uraian di atas maka terbukti bahwa $(B+c)^{-1}$ dan $(B-C)^{-1}$ ada.

Selanjutnya jika (3.10) dan (3.11) dijumlahkan dan dikurangi, maka diperoleh:

$$D = \frac{1}{2}\left((B+C)^{-1} + (B-C)^{-1}\right)$$

$$E = \frac{1}{2}\left((B+C)^{-1} - (B-C)^{-1}\right)$$

Sistem persamaan linier fuzzy (3.1) dapat direpresentasikan

$$\sum_{j=1}^{n} A\tilde{x}_j = \tilde{y}_i$$

$$\tilde{x}_j = \sum_{j=1}^{n} A^{-1}\tilde{y}_i \tag{3.12}$$

Misal $A^{-1} = t_{ij}$ maka

$\tilde{x}_j = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\tilde{y}_i$, di mana $i \geq 1, j \leq n$. Karena nilai dari t_{ij} dapat berupa bilangan negatif dan bukan bilangan negatif, maka persamaan (3.12) menjadi:

$$\tilde{x}_j = \sum_{t_{ij}\geq 0} t_{ij}\tilde{y}_i - \sum_{t_{ij}<0} t_{ij}\tilde{y}_i$$

Karena $x_j = \left(\underline{x}_j(\alpha), \overline{x}_j(\alpha)\right)$ dan $\tilde{y}_i = \left(\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right)$ maka

$$\begin{aligned}
\left(\underline{x}_j(\alpha), \overline{x}_j(\alpha)\right) &= \sum_{t_{ij}\geq 0} t_{ij}\left(\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right) - \sum_{t_{ij}<0} t_{ij}\left(\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right) \\
&= \left(\sum_{t_{ij}\geq 0} t_{ij}\underline{y}_i(\alpha), \sum_{t_{ij}\geq 0} t_{ij}\overline{y}_i(\alpha)\right) + \left(\sum_{t_{ij}<0} (-t_{ij})\overline{y}_i(\alpha), \sum_{t_{ij}<0} (-t_{ij})\underline{y}_i(\alpha)\right) \\
&= \left(\sum_{t_{ij}\geq 0} t_{ij}\underline{y}_i(\alpha) - \sum_{t_{ij}<0} t_{ij}\overline{y}_i(\alpha), \sum_{t_{ij}\geq 0} t_{ij}\overline{y}_i(\alpha) - \sum_{t_{ij}<0} t_{ij}\underline{y}_i(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

Dari hasil di atas diperoleh

$$\underline{x}_j(\alpha) = \sum_{t\geq 0} t_{ij}\underline{y}_i(\alpha) - \sum_{t<0} t_{ij}\overline{y}_i(\alpha) \tag{3.13}$$

Dan

$$\overline{x}_j(\alpha)=\sum_{t\geq 0} t_{ij}\overline{y}_i(\alpha)-\sum_{t<0} t_{ij}\underline{y}_i(\alpha) \qquad (3.14)$$

Jika persamaan (3.11) dan (3.12) dikurangi, maka diperoleh:

$$\overline{x}_j(\alpha)-\underline{x}_j(\alpha)=\left(\sum_{t\geq 0} t_{ij}\overline{y}_i(\alpha)-\sum_{t<0} t_{ij}\underline{y}_i(\alpha)\right)-\left(\sum_{t\geq 0} t_{ij}\underline{y}_i(\alpha)-\sum_{t<0}^{n} t_{ij}\overline{y}_i(\alpha)\right)$$

$$=\sum_{t\geq 0} t_{ij}\left(\overline{y}_i(\alpha)-\underline{y}_i(\alpha)\right)+\sum_{t<0} t_{ij}\left(\overline{y}_i(\alpha)-\underline{y}_i(\alpha)\right)$$

Karena X dan Y merupakan bilangan fuzzy, maka $\overline{x}_j(r)-\underline{x}_j(r)\geq 0$ dan $\overline{y}_i(r)-\underline{y}_i(r)\geq 0$ maka $S^{-1}=t_{ij}\geq 0$. Karena S^{-1} adalah matriks *nonnegative* maka $D\geq 0$ dan $E\geq 0$, oleh karena itu maka

$$\frac{1}{2}\left((B+C)^{-1}+(B-C)^{-1}\right)\geq 0$$

$$\frac{1}{2}\left((B+C)^{-1}-(B-C)^{-1}\right)\geq 0$$

Jika D dan E dijumlahkan, maka diperoleh:

$$\frac{1}{2}\left((B+C)^{-1}+\cancel{(B-C)^{-1}}\right)+\frac{1}{2}\left((B+C)^{-1}-\cancel{(B-C)^{-1}}\right)\geq 0$$

$$(B+C)^{-1}\geq 0$$

Contoh 1 :

$$3\tilde{x}_1+\tilde{x}_2=\widetilde{16}$$

$$2\tilde{x}_1+5\tilde{x}_2=\widetilde{41}$$

Dengan fungsi keanggotaan untuk $\widetilde{16}$ dan $\widetilde{41}$ adalah sebagai berikut:

$$\mu_{\widetilde{16}}(x) = Segitiga(x; 9, 16, 23) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{7} & \text{untuk } 9 \le x \le 16 \\ \dfrac{23-x}{7} & \text{untuk } 16 \le x \le 23 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Dan

$$\mu_{\widetilde{41}}(x) = Segitiga(x; 32, 41, 50) = \begin{cases} \dfrac{x-32}{9} & \text{untuk } 32 \le x \le 41 \\ \dfrac{50-x}{9} & \text{untuk } 41 \le x \le 50 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Selanjutnya penulis membentuk setiap parameter ke dalam bentuk α-*cut* dengan cara sabagai berikut:

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ maka $\alpha = \underline{16}(\alpha) = \overline{16}(\alpha)$ yaitu $\alpha = \frac{\underline{16}(\alpha)-9}{7} = \frac{23-\overline{16}(\alpha)}{7}$, sehingga $\underline{16}(\alpha) = 7\alpha + 9$ dan $\overline{16}(\alpha) = 23 - 7\alpha$. Sehingga diperoleh $16_\alpha = (7\alpha + 9, 23 - 7\alpha)$ begitu juga dengan α-*cut* dari $\widetilde{41}$ yaitu $41_\alpha = (9\alpha + 32, 50 - 9\alpha)$.

Selanjutnya penulis membentuk sistem persamaan linier fuzzy ke dalam bentuk α-*cut*.

$$3\left(\underline{x}_1(\alpha), \overline{x}_1(\alpha)\right) + \left(\underline{x}_2(\alpha), \overline{x}_2(\alpha)\right) = (7\alpha + 9, 23 - 7\alpha)$$

$$2\left(\underline{x}_1(\alpha), \overline{x}_1(\alpha)\right) + 5\left(\underline{x}_2(\alpha), \overline{x}_2(\alpha)\right) = (9\alpha + 32, 50 - 9\alpha)$$

Dengan menggunakan operasi aritmetika fuzzy, maka diperoleh

$$\left(3\underline{x}_1(\alpha),3\overline{x}_1(\alpha)\right)+\left(\underline{x}_2(\alpha),\overline{x}_2(\alpha)\right)=(7\alpha+9,23-7\alpha)$$
$$\left(2\underline{x}_1(\alpha),2\overline{x}_1(\alpha)\right)+\left(5\underline{x}_2(\alpha),5\overline{x}_2(\alpha)\right)=(9\alpha+32,50-9\alpha)$$
$$\left(3\underline{x}_1(\alpha)+\underline{x}_2(\alpha),3\overline{x}_1(\alpha)+\overline{x}_2(\alpha)\right)=(7\alpha+9,23-7\alpha)$$
$$\left(2\underline{x}_1(\alpha)+5\underline{x}_2(\alpha),2\overline{x}_1(\alpha)+5\overline{x}_2(\alpha)\right)=(9\alpha+32,50-9\alpha)$$

Selanjutnya penulis mengurangi fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik, sehingga diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$3\left(\overline{x}_1(\alpha)-\underline{x}_1(\alpha)\right)+\left(\overline{x}_2(\alpha)-\underline{x}_2(\alpha)\right)=(14-14\alpha)$$
$$2\left(\overline{x}_1(\alpha)-\underline{x}_1(\alpha)\right)+5\left(\overline{x}_2(\alpha)-\underline{x}_2(\alpha)\right)=(18-18\alpha)$$

dengan memisalkan $w_1=\left(\overline{x}_1(\alpha)-\underline{x}_1(\alpha)\right)$ dan $w_2=\left(\overline{x}_2(\alpha)-\underline{x}_2(\alpha)\right)$ maka sistem persamaan linier di atas menjadi

$$3w_1+w_2=14-14\alpha$$
$$2w_1+5w_2=18-18\alpha$$

Dengan menggunakan metode substitusi dan eliminasi maka diperoleh solusi dari sistem persamaan linier di atas adalah $w_1=4-4\alpha$ dan $w_2=4-4\alpha$. Sistem persamaan yang lain dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik, sehingga diperoleh sistem persamaan linier sebagi berikut:

$$3\left(\overline{x}_1(\alpha)+\underline{x}_1(\alpha)\right)+\left(\overline{x}_2(\alpha)+\underline{x}_2(\alpha)\right)=32$$
$$2\left(\overline{x}_1(\alpha)+\underline{x}_1(\alpha)\right)+5\left(\overline{x}_2(\alpha)+\underline{x}_2(\alpha)\right)=82$$

Dengan memisalkan $x_1=\left(\overline{x}_1(\alpha)+\underline{x}_1(\alpha)\right)$ dan $x_2=\left(\overline{x}_2(\alpha)+\underline{x}_2(\alpha)\right)$ maka sistem persamaan linier di atas menjadi:

$3x_1 + x_2 = 32$

$2x_1 + 5x_2 = 82$

Dengan menggunakan metode substitusi dan eliminasi maka diperoleh solusi dari sistem persamaan linier di atas adalah $x_1 = 6$ dan $x_2 = 14$. Selanjutnya penulis mensubstitusikan nilai w_1, w_2, x_1 dan x_2 ke

$$\underline{x}_i = \frac{x_i - w_i}{2}, \overline{x}_i = \frac{x_i + w_i}{2}$$

Maka diperoleh solusi dari sistem persamaan linier fuzzy di atas, yaitu:

$$\underline{x}_1 = 1 + 2\alpha,\ \overline{x}_1 = 5 - 2\alpha$$

$$\underline{x}_2 = 6 + \alpha,\ \overline{x}_2 = 8 - \alpha$$

Karena suatu sistem persamaan linier fuzzy dikatakan mempunyai solusi harus memenuhi (3.2), maka penulis mensubstistusikan solusi dari sistem persamaan linier fuzzy di atas ke (3.2)

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij} x_j} = \underline{y_i}$$

$$\underline{a_{11} x_1} + \underline{a_{12} x_2} = 3(1 + 2\alpha) + (6 + \alpha) = (9 + 7\alpha)$$

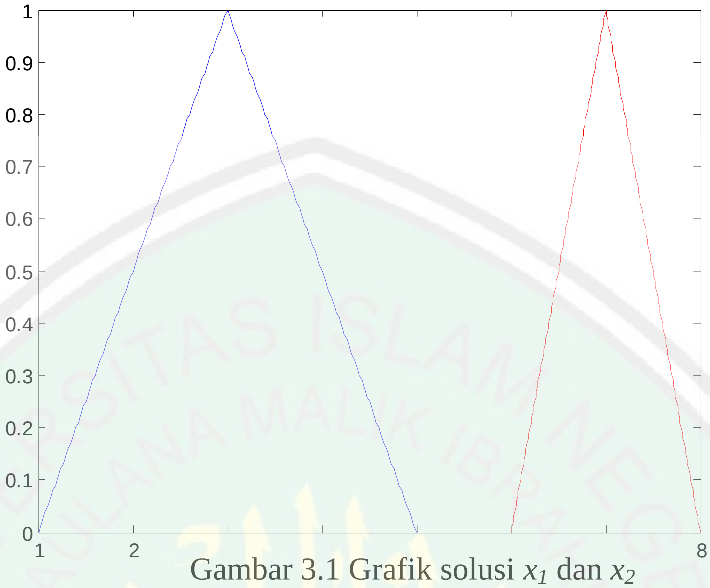
$$\underline{a_{21} x_1} + \underline{a_{22} x_2} = 2(1 + 2\alpha) + 5(6 + \alpha) = (32 + 9\alpha)$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij} x_j} = \overline{y_i}$$

$$\overline{a_{11} x_1} + \overline{a_{12} x_2} = 3(5 - 2\alpha) + (8 - \alpha) = (23 - 7\alpha)$$

$$\overline{a_{21} x_1} + \overline{a_{22} x_2} = 2(5 - 2\alpha) + 5(8 - \alpha) = (50 - 9\alpha)$$

Karena ketika solusi disubstitusikan memenuhi (3.2) maka sistem persamaan linier fuzzy tersebut mempunyai solusi.



Gambar 3.1 Grafik solusi x_1 dan x_2

Contoh 2

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{6}$$

$$6\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \tilde{8}$$

Dengan fungsi keanggotaan untuk $\tilde{6}$ dan $\tilde{8}$ adalah sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{6}}(x) = Segitiga(x;3,6,9) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{3} & \text{untuk } 3 \le x \le 6 \\ \dfrac{9-x}{3} & \text{untuk } 6 \le x \le 9 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Dan

$$\mu_{\tilde{11}}(x) = Segitiga(x;9,11,13) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{2} & \text{untuk } 9 \le x \le 11 \\ \dfrac{13-x}{2} & \text{untuk } 11 \le x \le 13 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Selanjutnya penulis membentuk setiap parameter ke dalam bentuk α-*cut* dengan cara sabagai berikut:

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ maka $\alpha = \underline{6}(\alpha) = \overline{6}(\alpha)$ yaitu $\alpha = \frac{6(\alpha)-3}{3} = \frac{9-\overline{6}(\alpha)}{3}$, sehingga $\underline{6}(\alpha) = 3\alpha + 3$ dan $\overline{6}(\alpha) = 9 - 3\alpha$. Sehingga diperoleh $6_\alpha = (3\alpha+3, 9-3\alpha)$ begitu juga dengan α-*cut* dari $\widetilde{13}$ yaitu $13_\alpha = (2\alpha+9, 13-2\alpha)$.

Selanjutnya penulis membentuk sistem persamaan linier fuzzy ke dalam bentuk α-*cut*.

$$2\left(\underline{x}_1(\alpha), \overline{x}_1(\alpha)\right) + \left(\underline{x}_2(\alpha), \overline{x}_2(\alpha)\right) = (3\alpha+3, 9-3\alpha)$$
$$6\left(\underline{x}_1(\alpha), \overline{x}_1(\alpha)\right) + 3\left(\underline{x}_2(\alpha), \overline{x}_2(\alpha)\right) = (2\alpha+9, 13-2\alpha)$$

Dengan menggunakan operasi aritmetika fuzzy, maka diperoleh

$$\left(2\underline{x}_1(\alpha), 2\overline{x}_1(\alpha)\right) + \left(\underline{x}_2(\alpha), \overline{x}_2(\alpha)\right) = (3\alpha+3, 9-3\alpha)$$
$$\left(6\underline{x}_1(\alpha), 6\overline{x}_1(\alpha)\right) + \left(3\underline{x}_2(\alpha), 3\overline{x}_2(\alpha)\right) = (2\alpha+9, 13-2\alpha)$$
$$\left(2\underline{x}_1(\alpha) + \underline{x}_2(\alpha), 2\overline{x}_1(\alpha) + \overline{x}_2(\alpha)\right) = (3\alpha+3, 9-3\alpha)$$
$$\left(6\underline{x}_1(\alpha) + 3\underline{x}_2(\alpha), 6\overline{x}_1(\alpha) + 3\overline{x}_2(\alpha)\right) = (2\alpha+9, 13-2\alpha)$$

Selanjutnya penulis mengurangi fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik, sehingga diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$2\left(\overline{x}_1(\alpha) - \underline{x}_1(\alpha)\right) + \left(\overline{x}_2(\alpha) - \underline{x}_2(\alpha)\right) = (6-6\alpha)$$
$$6\left(\overline{x}_1(\alpha) - \underline{x}_1(\alpha)\right) + 3\left(\overline{x}_2(\alpha) - \underline{x}_2(\alpha)\right) = (4-4\alpha)$$

dengan memisalkan $w_1 = \left(\overline{x}_1(\alpha) - \underline{x}_1(\alpha)\right)$ dan $w_2 = \left(\overline{x}_2(\alpha) - \underline{x}_2(\alpha)\right)$ maka sistem persamaan linier di atas menjadi

$$2w_1 + w_2 = 6 - 6\alpha$$
$$6w_1 + 3w_2 = 4 - 4\alpha$$

Dengan menggunakan metode substitusi dan eliminasi ternyata sistem persamaan linier di atas tidak memiliki solusi, karena sistem persamaan linier di atas tidak memiliki solusi maka sistem persamaan linier fuzzynya juga tidak memiliki solusi.

3.3 Solusi Lemah dan Solusi Kuat Sistem Persamaan Linier Fuzzy

Pembahasan pada subbab ini dibatasi pada bilangan fuzzy segitiga, di mana $\left(\underline{x}(r), \overline{x}(r)\right), \left(\underline{y}(r), \overline{y}(r)\right)$ adalah fungsi linier dan $\underline{x}(1) = \overline{x}(1)$, $\underline{y}(1) = \overline{y}(1)$. Karena B adalah matriks yang memuat entri-entri positif dari matriks A dan C adalah matriks yang memuat entri-entri negatif dari matriks A sehingga $(B + C) \geq 0$. Invers $(B + C)$ memiliki kemungkinan bernilai negatif sehingga w_i berkemungkinan untuk bernilai negatif juga untuk setiap i, sehingga $\overline{x}_i - \underline{x}_i < 0$ yang mengakibatkan x_i bukan bilangan fuzzy. selanjutnya vektor bilangan fuzzy didefinisikan sebagai berikut:

$$U = \left((\underline{u}_1, \overline{u}_1), (\underline{u}_2, \overline{u}_2), \cdots, (\underline{u}_n, \overline{u}_n)\right)^T$$

Dimana

$$\underline{u}_i(r) = \min\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1)\right)$$
$$\overline{u}_i(r) = \max\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1)\right)$$

U dikatakan mempunyai solusi kuat jika $\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right), 1 \leq i \leq n$ adalah bilangan fuzzy, maka $\underline{u}_i(r) = \underline{x}_i(r), \overline{u}_i(r) = \overline{x}_i(r)$ $1 \leq i \leq n$. Sebaliknya U

dikatakan mempunyai solusi lemah jika ada $\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$ yang bukan bilangan fuzzy dimana $\underline{u}_i(r) \neq \underline{x}_i(r), \overline{u}_i(r) \neq \overline{x}_i(r)$ $1 \leq i \leq n$.

Contoh:

$$2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \tilde{8}$$

$$\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \widetilde{11}$$

Dengan fungsi keanggotaan untuk $\tilde{8}$ dan $\widetilde{11}$ adalah sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{8}}(x) = Segitiga(x;7,8,9) = \begin{cases} x-7 & \text{untuk } 7 \leq x \leq 8 \\ 9-x & \text{untuk } 8 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Dan

$$\mu_{\widetilde{11}}(x) = Segitiga(x;7,11,15) = \begin{cases} \dfrac{x-7}{4} & \text{untuk } 7 \leq x \leq 11 \\ \dfrac{15-x}{4} & \text{untuk } 11 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Selanjutnya penulis membentuk setiap parameter ke dalam bentuk α-*cut* dengan cara sabagai berikut:

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ maka $\alpha = \underline{8}(\alpha) = \overline{8}(\alpha)$ yaitu $\alpha = \underline{8}(\alpha) - 7 = 9 - \overline{8}(\alpha)$, sehingga $\underline{8}(\alpha) = \alpha + 7$ dan $\overline{8}(\alpha) = 9 - \alpha$. Sehingga diperoleh $8_\alpha = (\alpha + 7, 9 - \alpha)$ begitu juga dengan α-*cut* dari $\widetilde{11}$ yaitu $11_\alpha = (4\alpha + 7, 15 - 4\alpha)$.

Selanjutnya penulis membentuk sistem persamaan linier fuzzy ke dalam bentuk α-*cut*.

$$2\left(\underline{x}_1(\alpha),\overline{x}_1(\alpha)\right)-\left(\underline{x}_2(\alpha),\overline{x}_2(\alpha)\right)=(\alpha+7,9-\alpha)$$
$$\left(\underline{x}_1(\alpha),\overline{x}_1(\alpha)\right)+3\left(\underline{x}_2(\alpha),\overline{x}_2(\alpha)\right)=(4\alpha+7,15-4\alpha)$$

Dengan menggunakan operasi fuzzy, maka diperoleh

$$\left(2\underline{x}_1(\alpha),2\overline{x}_1(\alpha)\right)-\left(\underline{x}_2(\alpha),\overline{x}_2(\alpha)\right)=(\alpha+7,9-\alpha)$$
$$\left(\underline{x}_1(\alpha),\overline{x}_1(\alpha)\right)+\left(3\underline{x}_2(\alpha),3\overline{x}_2(\alpha)\right)=(4\alpha+7,15-4\alpha)$$
$$\left(2\underline{x}_1(\alpha)-\overline{x}_2(\alpha),2\overline{x}_1(\alpha)-\underline{x}_2(\alpha)\right)=(\alpha+7,9-\alpha)$$
$$\left(\underline{x}_1(\alpha)+3\underline{x}_2(\alpha),\overline{x}_1(\alpha)+3\overline{x}_2(\alpha)\right)=(4\alpha+7,15-4\alpha)$$

Selanjutnya penulis mengurangi fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik, sehingga diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$2\left(\overline{x}_1(\alpha)-\underline{x}_1(\alpha)\right)+\left(\overline{x}_2(\alpha)-\underline{x}_2(\alpha)\right)=(2-2\alpha)$$
$$\left(\overline{x}_1(\alpha)-\underline{x}_1(\alpha)\right)+3\left(\overline{x}_2(\alpha)-\underline{x}_2(\alpha)\right)=(8-8\alpha)$$

dengan memisalkan $w_1=\left(\overline{x}_1(\alpha)-\underline{x}_1(\alpha)\right)$ dan $w_2=\left(\overline{x}_2(\alpha)-\underline{x}_2(\alpha)\right)$ maka sistem persamaan linier di atas menjadi

$$2w_1+w_2=2-2\alpha$$
$$w_1+3w_2=8-8\alpha$$

Dengan menggunakan metode substitusi dan eliminasi maka diperoleh solusi dari sistem persamaan linier di atas adalah $w_1=\dfrac{2-2\alpha}{5}$ dan $w_2=\dfrac{14-14\alpha}{5}$. Sistem persamaan yang lain dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan fungsi yang monoton turun dengan fungsi yang monoton naik, sehingga diperoleh sistem persamaan linier sebagi berikut:

$$2\left(\overline{x}_1(\alpha)+\underline{x}_1(\alpha)\right)-\left(\overline{x}_2(\alpha)+\underline{x}_2(\alpha)\right)=16$$
$$\left(\overline{x}_1(\alpha)+\underline{x}_1(\alpha)\right)+3\left(\overline{x}_2(\alpha)+\underline{x}_2(\alpha)\right)=22$$

Dengan memisalkan $x_1 = \left(\overline{x}_1(\alpha)+\underline{x}_1(\alpha)\right)$ dan $x_2 = \left(\overline{x}_2(\alpha)+\underline{x}_2(\alpha)\right)$ maka sistem persamaan linier di atas menjadi:

$$2x_1 - x_2 = 16$$
$$x_1 + 3x_2 = 22$$

Dengan menggunakan metode substitusi dan eliminasi maka solusi dari sistem persamaan linier di atas adalah $x_1 = 10$ dan $x_2 = 4$. Selanjutnya penulis mensubstitusikan nilai w_1, w_2, x_1 dan x_2 ke

$$\underline{x}_i = \frac{x_i - w_i}{2}, \overline{x}_i = \frac{x_i + w_i}{2}$$

Maka diperoleh solusi dari sistem persamaan linier fuzzy di atas, yaitu:

$$\underline{x}_1 = \frac{52-2\alpha}{10}, \ \overline{x}_1 = \frac{48+2\alpha}{10}$$
$$\underline{x}_2 = \frac{6+14\alpha}{10}, \ \overline{x}_2 = \frac{34-14\alpha}{10}$$

Karena suatu sistem persamaan linier fuzzy dikatakan mempunyai solusi harus memenuhi (3.2), maka penulis mensubstistusikan solusi dari sistem persamaan linier fuzzy di atas ke (3.2)

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j} = \underline{y_i}$$
$$\underline{a_{11}x_1} + \underline{a_{12}x_2} = 2\left(\frac{52-2\alpha}{10}\right)+\left(-\left(\frac{34-14\alpha}{10}\right)\right)=(7+\alpha)$$
$$\underline{a_{21}x_1} + \underline{a_{22}x_2} = \left(\frac{52-2\alpha}{10}\right)+3\left(\frac{6+14\alpha}{10}\right)=(4\alpha+7)$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}x_j} = \overline{y_i}$$

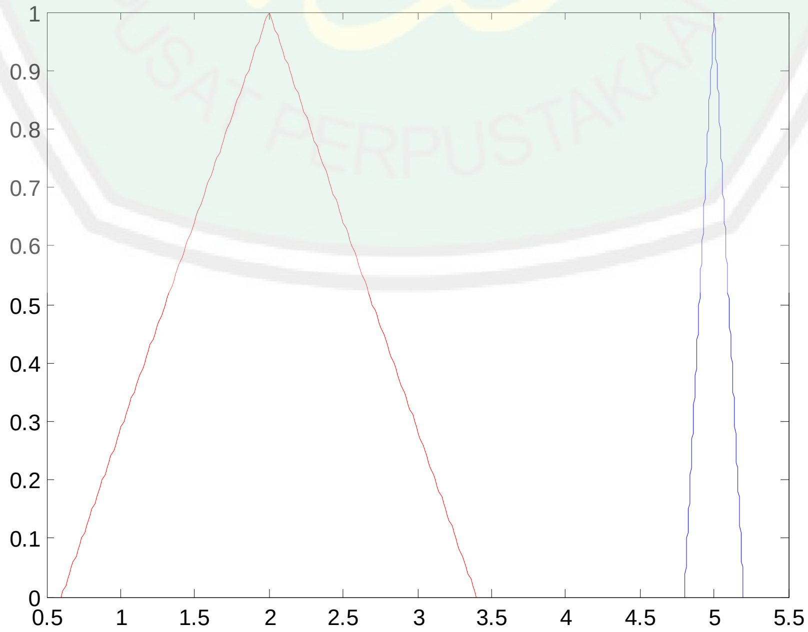
$$\overline{a_{11}x_1} + \overline{a_{12}x_2} = 2\left(\frac{48+2\alpha}{10}\right) + \left(-\left(\frac{6+14\alpha}{10}\right)\right) = (9-\alpha)$$

$$\overline{a_{21}x_1} + \overline{a_{22}x_2} = \left(\frac{48+2\alpha}{10}\right) + 3\left(\left(\frac{34-14\alpha}{10}\right)\right) = (50-9\alpha)$$

Karena ketika solusi disubstitusikan memenuhi (3.2) maka sistem persamaan linier fuzzy tersebut mempunyai solusi. Tetapi pada solusi di atas diperoleh $\overline{x}_1(r) - \underline{x}_{1(r)} < 0$ sehingga x_1 bukan bilangan fuzzy. Karena $\overline{x}_1(r) - \underline{x}_1(r) < 0$ maka solusi dari sistem persamaan linier fuzzy di atas merupakan solusi yang lemah dan solusinya menjadi:

$$\tilde{x}_1 = \left(\frac{48+2\alpha}{10}, \frac{52-2\alpha}{10}\right)$$

$$\tilde{x}_2 = \left(\frac{6+14\alpha}{10}, \frac{34-14\alpha}{10}\right)$$



Gambar 3.2 Grafik solusi x_1 dan x_2

3.4 Logika Fuzzy Menurut Pandangan Islam

Logika fuzzy adalah peningkatan dari logika Boolean yang mengenalkan konsep kebenaran sebagian. Di mana logika klasik mempunyai dua kemungkinan nilai kebenaran yaitu seperti "hitam atau putih" dan "ya atau tidak". Sedangkan logika fuzzy mempunyai nilai kebenaran yang lebih bervariasi yaitu seperti "hitam, putih, dan abu-abu".

Hal ini analog dengan surat Al-Hujurat ayat 13 yang artinya "*Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling takwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal*". Dalam surat Al-Hujurat ayat 13 ini mengatakan bahwa derajat seorang hamba di sisi Tuhannya tidak dilihat dari seberapa banyak harta yang dimiliki, seberapa tinggi jabatan yang dia duduki melainkan berdasarkan ketakwaannya ke pada Allah SWT. Seseorang dikatakan mempunyai derajat yang paling mulia di sisi Tuhannya jika dia mempunyai kadar ketaqwaan yang tinggi. Jika ada orang yang paling takwa di sisi Tuhannya maka ada pula orang yang mempunyai gelar tidak takwa, takwa dan paling takwa. Keadaan seperti ini analog dengan logika fuzzy.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penyelesaian sistem persamaan linier fuzzy dengan koefisien *crisp* dan variable fuzzy adalah sebagai berikut:
   a. Membentuk sistem pesamaan linier fuzzy dalam bentuk α-*cut*.
   b. Menjabarkan operasi perkalian dan penjumlahan α-*cut* pada sistem persamaan linier fuzzy dengan menggunakan aturan operasi aritmetika fuzzy.
   c. Membentuk sistem persamaan linier fuzzy dalam bentuk α-*cut* menjadi dua sistem persamaan linier dengan cara:
      i. Menjumlahkan fungsi yang menoton turun dengan fungsi yang menoton naik.
      ii. Mengurangi fungsi yang menoton turun dengan fungsi yang menoton naik.
   d. Menyelesaikan sistem persamaan linier pada poin c(i) dan c(ii) dengan menggunakan metode substitusi, eliminasi, dan operasi baris elementer.
   e. Mensubstitusikan solusi pada poin (d) ke dalam:

$$\underline{x}_i = \frac{x_i - w_i}{2}, \overline{x}_i = \frac{x_i + w_i}{2}$$

2. Sistem persamaan linier fuzzy dikatakan mempunyai solusi kuat jika $\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right), 1 \leq i \leq n$ adalah bilangan fuzzy, maka $\underline{u}_i(r) = \underline{x}_i(r), \overline{u}_i(r) = \overline{x}_i(r)$ $1 \leq i \leq n$. Sebaliknya dikatakan mempunyai solusi lemah jika ada $\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$ yang bukan bilangan fuzzy di mana $\underline{u}_i(r) \neq \underline{x}_i(r), \overline{u}_i(r) \neq \overline{x}_i(r)$ $1 \leq i \leq n$.

4.2. Saran

Sebagai penelitian lebih lanjut, peneliti menyarankan untuk meneliti:

1. Mencari solusi dengan menggunakan program.
2. Menyelesaikan dengan menggunakan metode iterative.

DAFTAR PUSTAKA

Abbasbandy, S. dan Alavi, M.. 2005. A method for solving fuzzy linear system. *Iranian Journal of Fuzzy Systems* Vol. 2 No. 2 Hal. 37-43.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Jazairi, A.B.J.. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar jilid 6*. Jakarta Timur: Darus Sunnah Press.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Behera, D. dan Chakraverty, S.. 2012. Solution of Fuzzy System of Linear Equations with Polynomial Parametric Form. *International Journal of Applications and Applied Mathematics* Vol. 7 Hal. 648-657.

Chen, G. dan Pham, T.T.. 2000. *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*. London: CRC Press.

Dubbois, D. dan Prade, H.. 1980. *Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications*. New York: Academic Press.

Farid, A.. 2008. *Quantum Takwa*. Solo: Pustaka Arafah.

Ghoffar, A.I.. 2006. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.

Kafie, J.. 2003. *Taswuf Kontemporer*. Jakarta Selatan: Penerbit Republika.

Klir, G.J. dan Yuan, B.. 1995. *Fuzzy Set and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. New Jersey: Prentice Hall International, INC.

Kusumadewi, S. dan Purnomo, H.. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Serre, D.. 2010. *Matrices Theory and Applications*. New York: Springer.

Shihab M.Q.. 2002 . Tafsir *Al-Misbah: Pesan, Kesan Dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Sivanandam, Sumathi dan Deepa. 2006. *Introduction to Fuzzy Logic Using Matlab*. Tamil Nadu: Springer.

Susilo, F.. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Zhang, H. dan Liu, D.. 2006. *Interval Type-2 Fuzzy Hidden Markov Models*. Hungary: Proc. of IEEE FUZZ Conference, Budapest.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Agus Maulana
NIM : 09610050
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fuzzy dengan Koefisien *Crisp* dan Variabel Fuzzy
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	11 Desember 2012	Konsultasi Bab I	1.	
2	12 Desember 2012	Konsultasi Bab I		2.
3	21 Desember 2012	Konsultasi Kajian Agama	3.	
4	16 Januari 2012	Konsultasi Bab II		4.
5	17 Januari 2012	Konsultasi Bab II	5.	
6	07 Februari 2013	Konsultasi Bab I,II		6.
7	21 Februari 2013	Konsultasi Bab III	7.	
8	22 Februari 2013	Konsultasi Bab III		8.
9	06 Maret 2013	Konsultasi Bab III, IV	9.	
10	07 Maret 2013	Konsultasi Bab III, IV		10.
11	06 April 2013	Konsultasi Kajian Agama	11.	
12	12 April 2013	Konsultasi Kajian Agama		12.
13	28 Mei 2013	ACC Bab I,II,III dan IV	13.	

Malang, 10 Juni 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001