SPEKTRUM DETOUR GRAF *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
MUFLIHATUN NAFISAH
NIM. 10610040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SPEKTRUM DETOUR GRAF *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri
Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MUFLIHATUN NAFISAH
NIM. 10610040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SPEKTRUM DETOUR GRAF *NON COMMUTING*
DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
MUFLIHATUN NAFISAH
NIM. 10610040

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:

Tanggal: 16 Januari 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdussakir, M.Pd	**Ach. Nashichuddin, M.A**
NIP. 19751006 200312 1 001	**NIP. 19730705 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SPEKTRUM DETOUR GRAF *NON COMMUTING*
DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
MUFLIHATUN NAFISAH
NIM. 10610040

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2014

Penguji Utama	:	**Drs. H. Turmudi, M.Si**	
		NIP. 19571005 198203 1 006	_____
Ketua Penguji	:	**Hairur Rahman, M.Si**	
		NIP. 19800429 200604 1 003	_____
Sekretaris Penguji	:	**Abdussakir, M.Pd**	
		NIP. 19751006 200312 1 001	_____
Anggota Penguji	:	**Ach. Nashichuddin, M.A**	
		NIP. 19730705 200003 1 002	_____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muflihatun Nafisah
NIM : 10610040
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa tugas akhir/skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan tugas akhir/skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Januari 2014
Yang membuat pernyataan,

Muflihatun Nafisah
NIM. 10610040

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا

Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Karya kecil ini penulis persembahkan untuk orang-orang yang turut menghiasi hidup penulis.

Kedua Orang Tua Penulis.
Aba Alm. Ach. Huzaimi dan Umik Hamidatul Muniroh.
Yang telah mencurahkan kasing sayangnya tanpa mengenal batas waktu. Membimbing, mendo'akan, memotivasi, serta menginspirasi penulis untuk menjadi manusia yang lebih baik.

Suami Penulis.
Ibnu Malik.
Lentera hati yang senantiasa menemani penulis saat suka maupun duka. Imam yang senantiasa membimbing penulis.

Kakak-kakak Penulis.
Fatimatuz Zahro & M. Dahlan Jailani.
Terima kasih atas segala kasih sayang, motivasi, dan dukungan yang telah diberikan.

Seluruh Keluarga Besar Penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Alah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, hidayah, serta inayah-Nya kepada penulis sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam di mana ilmu pengetahuan sudah berkembang pesat seperti sekarang ini.

Suatu kebahagiaan dan kebanggaan tersendiri bagi penulis karena telah dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "*Spektrum Detour Graf Non Commuting dari Grup Dihedral*" dengan baik. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si., selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing yang senantiasa dengan sabar memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.
4. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah mamberikan sumbangsih dalam penulisan skripsi ini.
5. Seluruh dosen UIN Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya para dosen matematika yang telah memberikan banyak pengalaman dan ilmu serta senantiasa membimbing dan memberikan motivasi kepada penulis agar dapat menyelesaikan studi dengan baik.
6. Ayah alm. Ach. Huzaimi dan ibu Hamidatul Muniroh tercinta yang telah mencurahkan kasih sayangnya, senantiasa mendo'akan, membimbing, serta

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

memotivasi penulis untuk dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik.

7. Suami tercinta Ibnu Malik yang senantiasa mendo'akan, memotivasi penulis agar dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini tepat waktu, dan setia mendampingi penulis setiap saat.
8. Rivatul Ridho Elvierayani yang banyak membantu dalam berikusi dengan penulis, dan seluruh anggota keluarga cemara yang senantiasa saling memotivasi untuk segera menyelesaikan penulisan skripsi.
9. Seluruh teman-teman mahasiswa matematika angkatan 2010 dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah memberikan bantuan baik moril, materiil, maupun spiritual bagi penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan baik dan tepat pada waktunya.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang bersifat membangun dari pembaca sangat diharapkan, guna kesempurnaan penulisan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, Januari 2014

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTTO
HAMALAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI x
DAFTAR TABEL xii
DAFTAR GAMBAR xiii
ABSTRAK xiv
ABSTRACT xv
تجريد البحث xvi

BAB I PEBDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 5
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Batasan Masalah 5
1.4 Tujuan Penelitian 5
1.5 Manfaat Penelitian 5
1.6 Metode Penelitian 6
1.7 Sistematika Penulisan 7

BAB II KAJIAN PUSTAKA 8
2.1 Graf 8
2.1.1 Lintasan pada Graf 9
2.1.2 Graf Terhubung 11
2.2 Matriks 11
2.2.1 Determinan Matriks 11
2.2.2 Eliminasi *Gauss* 13
2.2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 18
2.3 Spektrum dari Suatu Graf 22
2.3.1 Representasi Graf dalam Matriks Detour 26
2.4 Grup 27
2.4.1 Grup Dihedral (D_{2n}) 28
2.4.2 Center Grup 29
2.5 Graf *Non Commuting* 30
2.6 Keteraturan Alam Semesta 31

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III PEMBAHASAN 38
3.1 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral 38
3.1.1 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_6 39
3.1.2 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_8 45
3.1.3 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{10} ... 50
3.1.4 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{12} ... 56
3.1.5 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{14} ... 62
3.1.6 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{16} ... 69
3.2 Pola Spektrum Detour Graf *Non Commuting* D_{2n} 76
3.3 Pola Spektrum Detour dalan Kajian Islam 85

BAB IV PENUTUP 88
4.1 Kesimpulan 88
4.2 Saran 88

DAFTAR PUSTAKA 89
LAMPIRAN

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. Tabel *Cayley* D_6 39
Tabel 3.2. Tabel *Cayley* D_8 46
Tabel 3.3. Tabel *Cayley* D_{10} 50
Tabel 3.4. Tabel *Cayley* D_{12} 56
Tabel 3.5. Tabel *Cayley* D_{14} 62
Tabel 3.6. Tabel *Cayley* D_{16} 69
Tabel 3.7. Pola Spektrum Graf *Non Commuting* 76

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Contoh Graf G 8
Gambar 2.2. Jalan pada Graf 9
Gambar 2.3. Lintasan pada Graf 10
Gambar 2.4. Graf G Terhubung, Graf H Tidak Terhubung 11
Gambar 2.5. Contoh Graf *Non Commuting* dari Grup D_6 31
Gambar 3.1. Graf *Non Commuting* dari Grup D_6 40
Gambar 3.2. Graf *Non Commuting* dari Grup D_8 47
Gambar 3.3. Graf *Non Commuting* dari Grup D_{10} 52
Gambar 3.4. Graf *Non Commuting* dari Grup D_{12} 58
Gambar 3.5. Graf *Non Commuting* dari Grup D_{14} 64
Gambar 3.6. Graf *Non Commuting* dari Grup D_{16} 71

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Nafisah, Muflihatun. 2014. **Spektrum Detour Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral**. Tugas akhir/skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: spektrum detour, graf *non commuting*, grup dihedral.

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Salah satu pembahasan dalam matematika yang sering digunakan adalah tentang graf. Salah satu pokok bahasan yang menarik dari graf adalah tentang spektrum. Beberapa penelitian tentang spektrum telah banyak dilakukan. Namun, belum ada yang meneliti tentang spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral. Sehingga pada penulisan skripsi ini akan diteliti mengenai spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}.

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah kajian pustaka. Dengan menggunakan rujukan beberapa buku dan jurnal. Sedangkan analisis yang dilakukan adalah dengan melihat pola berdasarkan beberapa contoh. Dari pola tersebut, kemudian dicari rumus umumnya yang selanjutnya dinyatakan sebagai lemma dan teorema. Hal tersebut merupakan tujuan dari penelitian ini.

Berdasarkan penelitian ini, diperoleh suatu lemma dan teorema. Lemma yang dihasilkan adalah lintasan terpanjang dari graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli ganjil, dengan $n \geq 3$ adalah:

$$\text{Lintasan terpanjang } P_{2n} = 2n - 2$$

dan lintasan terpanjang dari graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli genap, dengan $n \geq 3$ adalah:

$$\text{Lintasan terpanjang } P_{2n} = 2n - 3$$

Sedangkan spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli ganjil, dengan $n \geq 3$ adalah

$$spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-2)^2 & -(2n-2) \\ 1 & (2n-2) \end{bmatrix}$$

dan spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli genap, dengan $n \geq 3$ adalah

$$spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3)^2 & -(2n-3) \\ 1 & (2n-3) \end{bmatrix}$$

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok masalah yaitu menentukan spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral. Sehingga untuk selanjutnya, dapat dilakukan penelitian sejenis untuk menentukan spektrum detour graf *non commuting* dari grup yang lainnya.

ABSTRACT

Nafisah, Muflihatun. 2014. **Detour Spectrum of Non Commuting Graph for Dihedral Group**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: detour spectrum, non commuting graph, dihedral group.

Mathematics is a basic science which was needed by all humans in everyday life either directly or indirectly. One of the discussion in mathematics often used is about graph. One of the interesting topics from graph is about spectrum. Some of research about spectrum was has done. But no body has researched about detour spectrum of non commuting graph from dihedral group. So, this thesis will discuss about detour spectrum of non commuting graph from dihedral group D_{2n}.

The method that used in this thesis is a literature review method. With used references from some books, and journals. While the analysis by looking at the patterns based on a few examples. From this pattern, then finded the general formula that furthemore called lemma and theorem. It is the purpose of the research.

The results of the research are lemma and theorem. The lemma from this research are the longest path of non commuting graph from dihedral group D_{2n} for n is odd natural number, with $n \geq 3$ is

$$\text{Longest path } P_{2n} = 2n - 2$$

and the longest path of non commuting graph from dihedral group D_{2n} for n is even natural number, with $n \geq 3$ is

$$\text{Longest path } P_{2n} = 2n - 3$$

Then, the detour spectrum of non commuting graph from dihedral group D_{2n} for n is odd natural number, with $n \geq 3$ is

$$spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-2)^2 & -(2n-2) \\ 1 & (2n-2) \end{bmatrix}$$

and the detour spectrum of non commuting graph from dihedral group D_{2n} for n is even natural numbers, with $n \geq 3$ is

$$spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3)^2 & -(2n-3) \\ 1 & (2n-3) \end{bmatrix}$$

In this thesis, discuss about one topic that is determine the detour spectrum of non commuting graph from dihedral group. So furthermore, can do a same research to determine the detour spectrum of non commuting graph from the other group.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

تجريد البحث

نفيسة، مفلحة. 2014. **سفكتروم دتور كراف *Non Commuting* من Grup Dihedral**. بحث جامعي.
شعبة الرياضات كلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة الاسلامية الاحكومية مولانا مالك ابرهيم مالانج.
المشرف: (1) عبدالشاكر، الماجستير. (2) احمد نصح الدين، الماجستير.

الكلمة الرئيسية: سفكتروم دتور، كراف grup dihedral, *non commuting*

الرياضات من العلوم الأساسية التي تحتاج اليها الناس في ايامهم اليومية، اما مباشرة او لا. ومن الموضوع في الرياضيات هو كراف. فيه موضوع مهم يهتم به الطلبة، هو سفكتروم. وقد فعلت بعض البحث على سفكتروم. ولكن لا احد قد بحث سفكتروم دتور كراف *non commuting* من grup dihedral. سيبحث في هذا البحث الجامعي سفكتروم دتور كراف *non commuting* من grup dihedral D_{2n}.

اما منهج البحث الذي يستخدمه البحث فهو البحث النظرى. باستخدام المرجع من بعض الكتب و المجلات. وتحليله بالنظر الى الوجوه التي ظهرت من الامثال. من هذا الوجوه، ثم يبحث عن الرموز مثبوطا بالمأخوذ و بالنظرية. هذا هو الخلاصة من البحث.

وقد حصل الباحث على استنباط البحث المأخوذ و النظرية. وقد حصل المأخوذ هو اطوال مسار من كراف *non commuting* من grup dihedral D_{2n} لعدد وتر، ب $n \geq 3$ هو

$$P_{2n} \text{ اطوال مسار } = 2n - 2$$

و اطوال مسار من كراف *non commuting* من grup dihedral D_{2n} لعدد شفعي ، ب $n \geq 3$ هو

$$P_{2n} \text{ اطوال مسار } = 2n - 3$$

بان سفكتروم دتور كراف *non commuting* من grup dihedral D_{2n} لعدد وتر، ب $n \geq 3$ هو

$$spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-2)^2 & -(2n-2) \\ 1 & (2n-2) \end{bmatrix}$$

و سفكتروم دتور كراف *non commuting* من grup dihedral D_{2n} لعدد شفعي، ب $n \geq 3$ هو

$$spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3)^2 & -(2n-3) \\ 1 & (2n-3) \end{bmatrix}$$

في هذا الباحث، يبحث موضوع واحد فقد هو سفكتروم دتور كراف *non commuting* من grup dihedral. و ذلك لتعزيز ويمكن ان يتم البحث المماثل لبحث سفكتروم دتور كراف *non commuting* من grup اخر.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya bisa dilihat dalam al-Qur'an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah (Rahman, 2007:1). Seperti yang telah Allah firmankan dalam al-Qur'an surat al-Hijr ayat 21 yang berbunyi:

وَإِن مِّن شَيْءٍ إِلَّا عِندَنَا خَزَآئِنُهُۥ وَمَا نُنَزِّلُهُۥٓ إِلَّا بِقَدَرٍ مَّعْلُومٍ ﴿٢١﴾

Artinya: "Dan tidak ada sesuatupun melainkan pada sisi Kami-lah khazanahnya[1]*, dan Kami tidak menurunkannya melainkan dengan ukuran yang tertentu" (Q.S. al-Hijr: 21).*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa tidak ada satupun yang ada di alam semesta ini yang tidak bersumber dari Allah. Termasuk di dalamnya adalah ilmu pengetahuan (matematika). Sehingga dapat dikatakan bahwa matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, karena semuanya bersumber dari Allah.

[1] Maksudnya segala sesuatu itu sumbernya dari Allah s.w.t.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79). Dalam al-Qur'an surat al-Qamar ayat 49 Allah berfirman:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: " Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. al-Qamar: 49).

Ayat di atas menjelaskan bahwa alam semesta beserta isinya diciptakan Allah dengan ukuran atau perhitungan. Sementara manusia hanya dapat menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam alam semesta dengan konsep matematika. Seperti halnya menurut Aziz dan Abdusysyakir (2006:v), bahwa untuk mendeskripsikan realitas alam semesta, matematika merumuskan gagasan-gagasan atau konsep-konsepnya ke dalam bahasa lambang dan angka.

Dalam ayat lain Allah juga berfirman:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ

كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya[2]" (Q.S. al-Furqan:2).

[2] Maksudnya: segala sesuatu yang dijadikan Tuhan diberi-Nya perlengkapan-perlengkapan dan persiapan-persiapan, sesuai dengan naluri, sifat-sifat dan fungsinya masing-masing dalam hidup.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ayat di atas menjelaskan bahwasannya Allah telah menciptakan segala yang ada di alam semesta ini dalam keadaan yang serapi-rapinya sesuai dengan perhitungan-Nya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 2007:80).

Sampai sekarang telah banyak berkembang model-model matematika yang digunakan sebagai alat bantu untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan. Salah satu pembahasan dalam matematika yang banyak diaplikasikan dalam kehidupan adalah tentang graf. Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Abdussakir, dkk., 2009:4).

Sementara itu, dengan menggunakan teori graf dapat diketahui lintasan terpanjang dari suatu titik ke titik yang lainnya. Misalkan G adalah graf terhubung, dan lintasan terjauh dari suatu titik ke titik yang lain pada G dituliskan dalam bentuk matriks, maka matriks tersebut merupakan matriks detour dari G. Jika matriks tersebut dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier, maka akan menghasilkan konsep spektrum.

Beberapa penelitian tentang spektrum yang sudah pernah dilakukan. Shuhua Yin (2008) meneliti spektrum Adjacency dan spektrum Laplace pada graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l dengan menambahkan pohon isomorfik

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berakar untuk masing-masing titik di K_l. Abdussakir, dkk. (2009) meneliti spektrum adjacency pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$, dan graf lintasan (P_n). Ayyaswamy dan Balachandran (2010) meneliti spektrum Detour pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n,n)$, graf Korona G dan K_1, graf perkalian kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan *double cover* dari graf beraturan. Abdussakir, dkk. (2012) meneliti spektrum Adjacency, Laplace, Singless Laplace, dan Detour graf multipartisi komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

Perkembangan teori graf juga membahas tentang graf yang dibangun dari grup. Seperti halnya yang dilakukan oleh Vahidi dan Talebi (2010) yang meneliti mengenai graf *commuting* dari grup, perkembangan selanjutnya yaitu misalkan G grup tidak komutatif dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* Γ_G adalah draf yang memiliki himpunan titik $G\backslash Z(G)$ dan dua titik $x, y \in G\backslash Z(G)$ akan terhubung langsung di Γ_G jika $xy \neq yx \in G$ (Abdollahi, dkk., 2006 dan Abdollahi, dkk., 2010).

Berdasarkan uraian di atas, sampai saat ini belum ada yang mengkaji spektrum detour graf *non commuting* suatu grup. Sehingga pada penulisan skripsi ini, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas, maka dapat diambil suatu rumusan masalah yaitu bagaimana rumusan umum spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penulisan ini agar pembahasan tepat pada masalah yang akan diselesaikan, maka penulis membatasi penulisan skripsi ini pada graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui rumusan umum spektrum detour dari graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}.

1.5 Manfaat Penelitian

a. Bagi Penulis

Sebagai sarana untuk mengembangkan dan mengaplikasikan disiplin keilmuan yang selama ini diminati.

b. Bagi Lembaga Pendidikan

Sebagai wacana dan pengetahuan tentang pengembangan penelitian atas teori graf khususnya spektrum detour.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c. Bagi Masyarakat

Sebagai informasi yang dapat menambah wawasan dan memperkaya pengetahuan dalam bidang matematika khususnya tentang teori graf.

1.6 Metode Penelitian

Pada penulisan skripsi ini, metode yang penulis gunakan adalah kajian pustaka. Penulis menggunakan rujukan beberapa jurnal maupun buku-buku. Sedangkan untuk mendapatkan spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Menentukan elemen-elemen dari grup dihedral D_{2n}.
b. Membentuk tabel *cayley* hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{2n}.
c. Menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif dari tabel *cayley*.
d. Menggambar unsur-unsur yang tidak komutatif dalam bentuk graf *non commuting*.
e. Menentukan matriks detour dari graf *non commuting*.
f. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour yang telah ditentukan.
g. Mencari basis ruang vektor eigen.
h. Menunjukkan spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}.
i. Merumuskan pola spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} sehingga didapatkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.
j. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dimaksudkan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari penulisan skripsi ini, di antaranya:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan skripsi ini.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menjelaskan tentang dasar teori yang mendasari penulisan skripsi ini. Dasar teori yang diuraikan pada bagian ini mengenai graf, matriks, matriks detour, spektrum graf, grup dihedral D_{2n}, graf *non commuting*, dan kajian mengenai keteraturan alam semesta.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini merupakan inti dari skripsi, karena pada bagian ini diuraikan tentang langkah-langkah untuk memperoleh spektrum detour dari graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} serta untuk mendapatkan rumusan umumnya. Selain itu dikaji pula mengenai rumusan umum yang diperoleh menurut kajian Islam.

Bab IV Penutup

Pada bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari bagian pembahasan hasil penulisan skripsi serta saran yang berkaitan dengan penulisan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

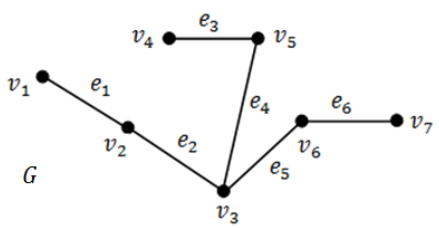
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Suatu graf G adalah suatu himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai *vertex* (titik) dan himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda pada G yang disebut *edge* (sisi). Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:1).

Selain itu Abdussakir, dkk. (2009:4) juga mengatakan bahwa graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf $-(p, q)$.

Contoh 1



Gambar 2. 1. Contoh Graf G

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

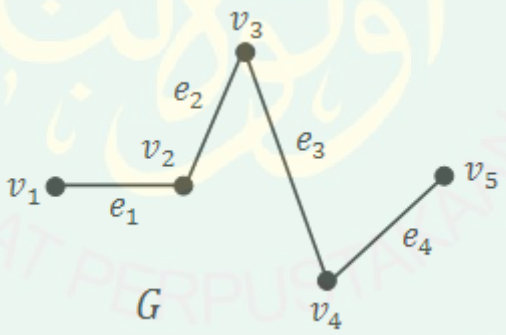
2.1.1 Lintasan pada Graf

Misalkan u dan v (tidak harus berbeda) adalah titik dari graf G. Jalan (*walk*) $u - v$ dari G adalah berhingga, berurutan selang-seling

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k = v$$

dari titik dan sisi, yang dimulai dengan titik u dan diakhiri dengan titik v, sehingga $e_i = u_{i-1}$ untuk $i = 1,2, \dots, k$. Bilangan k disebut panjang dari jalan (Chartrand dan Lesniak, 1996:16). Jalan $u - v$ terbuka atau tertutup tergantung dari $u = v$ atau $u \neq v$. Suatu jejak $u - v$ adalah jalan $u - v$ yang tidak mengulang sisi, sedangkan lintasan $u - v$ adalah jalan $u - v$ yang tidak mengulang titik (Chartrand dan Lesniak, 1996:17).

Contoh 2



Gambar 2. 2. Jalan pada Graf

Jalan pada graf G dari gambar 2.2. di atas adalah $W: v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$.

Teorema 2.1

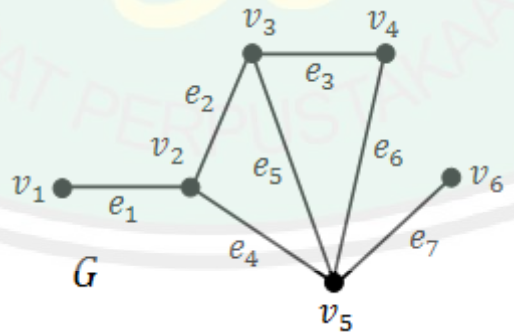
Setiap jalan $u - v$ pada suatu graf memuat lintasan $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:17).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti

Misalkan W adalah jalan $u-v$ dari graf G. Jika W tertutup, akibatnya jalan W adalah jalan *trivial* (jalan yang tidak punya sisi). Misalkan $W: u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$, jalan $u-v$ terbuka dari graf G. Suatu titik yang mungkin menerima label lebih jika tidak ada titik dari G terdapat di W lebih dari satu kali, maka W adalah lintasan $u-v$. Sebaliknya, jika ada titik dari G terdapat di W dua kali atau lebih. Misalkan i dan j bilangan positif berbeda, dengan $i < j$ tersebut, sehingga $u_i = u_j$. Jika pernyataan $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}$ dihapus dari W, maka W_1 merupakan jalan $u-v$ baru yang panjangnya kurang dari W. Jika tidak ada pengulangan titik di W_1, maka W_1 adalah lintasan $u-v$. Prosedur di atas dilanjutkan sampai akhirnya diperoleh jalan $u-v$ yang merupakan lintasan $u-v$ ■.

Contoh 3



Gambar 2. 3. Lintasan pada Graf

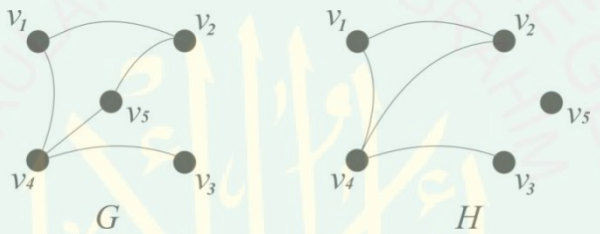
Dari gambar 2.3. di atas, $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_6, v_5, e_7, v_6$ disebut lintasan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.1.2 Graf Terhubung

Budiyasa (2007:8) mengatakan bahwa, dengan menggunakan konsep lintasan, maka dapat didefinisikan keterhubungan suatu graf. Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat suatu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Contoh 4



Gambar 2.4. Graf ***G*** Tehubung, Graf ***H*** Tidak Terhubung

2.2 Matriks

Definisi:

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut (Anton, 2000:45).

2.2.1 Determinan Matriks

Teorema 2.2

Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka $\det(A)$ adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ (Anton, 2000:118).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk lebih sederhana, dapat dilihat pada matriks segitiga bawah 4×4 berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Bukti: (kasus segitiga bawah $\mathbf{4 \times 4}$)

Satu-satunya hasil kali dasar dari A yang bisa taknol adalah $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. Untuk melihat bahwa adalah demikian halnya, tinjau suatu hasil kali dasar umum $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}$. Karena $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, maka A harus mempunyai $j_1 = 1$ supaya A mempunyai suatu hasil kali dasar taknol. Jika $j_1 = 1$, maka A harus mempunyai $j_2 \neq 1$, karena tidak ada dua faktor yang berasal dari kolom yang sama. Lebih jauh lagi, karena $a_{23} = a_{24} = 0$, maka A harus mempunyai $j_2 = 2$ agar A mempunyai suatu hasil kali taknol. Dengan meneruskan cara ini, diperoleh $j_3 = 3$ dan $j_4 = 4$. Karena $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ dikalikan dengan $+1$ dalam membentuk hasil kali dasar, diperoleh

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \quad \blacksquare.$$

Contoh 5

Tentukan determinan dari $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Penyelesaian:

$$\det\begin{bmatrix}2 & 7 & -3 & 8 & 3\\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

2.2.2 Eliminasi *Gauss*

Menurut Anton (1997:10), prosedur langkah demi langkah yang dapat digunakan untuk mereduksi sebarang matriks menjadi bentuk eselon baris terreduksi adalah sebagai berikut:

Untuk melukiskan prosedur tersebut, maka akan dilakukan dengan mereduksi matriks berikut pada bentuk eselon baris terreduksi.

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12\\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28\\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

Langkah 1.	Letakkan kolom paling kiri (garis vertikal) yang seluruhnya tidak terdiri dari nol.

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12\\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28\\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

↑ Kolom taknol paling kiri

Langkah 2.	Pertukarkanlah baris atas dengan baris lain jika perlu, untuk membawa entri taknol ke atas kolom yang didapatkan dalam **Langkah 1.**

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12\\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

Baris pertama dan baris kedua dalam matriks terdahulu dipertukarkan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Langkah 3.	Jika entri sekarang ada di atas kolom yang didapatkan dalam **Langkah 1.** adalah a, kalikanlah baris pertama tersebut dengan $\frac{1}{a}$ untuk memperoleh 1 utama.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$	Baris pertama matriks terdahulu dikalikan dengan $\frac{1}{2}$.
Langkah 4.	Tambahkanlah kelipatan yang sesuai dari baris atas pada baris-baris yang di bawah sehingga semua entri di bawah 1 utama menjadi nol.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$	-2 kali baris pertama dari matriks terdahulu akan ditambahkan pada baris ketiga.
Langkah 5.	Sekarang tutuplah baris atas dalam matriks tersebut dan mulailah sekali lagi dengan **Langkah 1.** yang diterapkan pada submatriks yang masih sisa. Teruskanlah dengan cara ini sampai entri matriks tersebut berada dalam bentuk eselon baris.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$ ↑ Kolom taknol paling kiri dalam submatriks	
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$	Baris pertama dalam submatriks dikalikan dengan $-\frac{1}{2}$ untuk mendapatkan 1 utama.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$	-5 kali baris pertama submatriks ditambahkan ke baris kedua dari submatriks untuk mendapatkan nol di bawah 1 utama.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$	Baris atas dalam submatriks ditutupi dan kembali sekali lagi ke **Langkah 1.**
Kolom taknol paling kiri dalam subatriks yang baru	
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris pertama (dan hanya baris pertama) dalam submatriks yang baru dikalikan dengan 2 untuk mendapatkan 1 utama.
Entri matriks tersebut sekarang berada dalam bentuk eselon baris. Untuk mencari bentuk eselon baris terreduksi maka diperlukan langkah tambahan berikut.	
Langkah 6.	Dengan memulai dari baris taknol terakhir dan bekerja ke arah atas, tambahkanlah kelipatan yang sesuai dari setiap baris pada baris-baris di atas untuk mendapatkan nol di atas 1 utama.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\frac{7}{2}$ kali baris ketiga dari matriks terdahulu ditambahkan pada baris kedua.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	-6 kali baris ketiga ditambahkan ke baris pertama.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	5 kali baris kedua ditambahkan ke baris pertama.

Matriks terakhir berada dalam bentuk eselon baris terreduksi.

Prosedur di atas untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris terreduksi yang dinamakan eliminasi *Gauss-Jordan*. Jika hanya menggunakan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

lima langkah pertama, prosedur untuk menghasilkan bentuk eselon baris tersebut dinamakan eliminasi *Gauss* (Anton, 1997:12).

Contoh 6

Pecahkanlah dengan menggunakan eliminasi *Gauss-Jordan.*

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$$

$$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$$

Matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan baris keempat maka akan memberikan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan baris kedua dengan -1 dan kemudian menambahkan -5 kali baris kedua kepada baris ketiga dan -4 kali baris kedua kepada baris keempat maka akan memberikan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan mempertukarkan baris ketiga dan baris keempat dan kemudian mengalikan baris ketiga dari matriks yang dihasilkan dengan $\frac{1}{6}$ maka akan memberikan bentuk eselon baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menambahkan -3 kali baris ketiga pada baris kedua dan kemudian menambahkan 2 kali baris kedua dari matriks yang dihasilkan pada baris pertama, maka akan menghasilkan bentuk eselon baris terreduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Dengan memecahkannya untuk peubah-peubah utama, maka didapatkan

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$

$$x_3 = 2x_4$$

$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Jika ditetapkan nilai-nilai sebarang $r, s,$ dan t berurutan untuk $x_2, x_4,$ dan $x_5,$ maka himpunan pemecahan tersebut diberikan oleh rumus-rumus

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ \ x_2 = r,\ x_3 = 2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t,\ x_6 = \frac{1}{3}$$

2.2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1

Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$, maka vektor taknol x pada R^n disebut suatu vektor eigen dari A jika Ax adalah suatu penggandaan skalar dari x yaitu,

$$Ax = \lambda x$$

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ (Anton, 2000:99-100).

Contoh 7

Vektor $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ adalah suatu vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}$ yang berpadanan dengan nilai eigen $\lambda = 3$, karena

$$Ax = \begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = 3x$$

Anton (2000:100-101) juga menjelaskan bahwa untuk mencari nilai eigen dari suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dituliskan ulang $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

atau ekuivalen dengan,

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

dengan I merupakan matriks identitas berordo $n \times n$. Persamaan tersebut merupakan sistem persamaan linier homogen dan akan mempunyai penyelesaian taknol jika dan hanya jika matriks $(A - \lambda I)$ *singular* (tidak mempunyai invers), akibatnya

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Menurut Anton dan Rorres (2004:385), persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$ disebut persamaan karakteristik (*characteristic equation*) matriks A, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A. Apabia diperluas lagi $\det(A - \lambda I)$ adalah suatu polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik (*characteristic polynomial*) matriks A. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1, jelasnya polinomial karakteristik $p(x)$ dari suatu matriks $n \times n$ memiliki bentuk

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Berdasarkan teorema dasar aljabar bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0.$$

Anton dan Rorres (2004:385) juga menjelaskan bahwa, setelah mengetahui bagaimana cara menentukan nilai eigen, maka akan ditentukan vektor-vektor eigen matriks A yang terkait dengan suatu nilai eigen λ adalah vektor-vektor taknol x yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Dengan kata lain, vektor-vektor eigen yang terkait dengan λ adalah vektor-vektor taknol dalam ruang solusi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$(A - \lambda I)x = 0$. Sehingga ruang solusi ini disebut sebagai ruang eigen (*eigen space*) dari matriks A yang terkait dengan λ.

Contoh 8

Tentukan basis-basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik matriks A adalah $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, atau dalam bentuk terfaktorkan, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, dan dengan demikian terdapat dua ruang eigen dari A. Menurut definisinya,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah suatu vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika x adalah suatu solusi *nontrivial* dari$(A - \lambda I)x = 0$, yaitu

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga matriks yang diperbesar untuk sistem di atas adalah

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi *Gauss-Jordan* maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut akan membentuk sistem sebagai berikut

$$x_1 = -s$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = s$$

Sehingga, vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bebas linier, vektor-vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$.

Jika $\lambda = 1$, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga matriks yang diperbesar untuk sistem di atas adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi *Gauss-Jordan* maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut akan membentuk sistem sebagai berikut

$$x_1 = -2s$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = s$$

Sehingga, vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bebas linier, vektor-vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

2.3 Spektrum dari Suatu Graf

Matriks keterhubungan banyak digunakan untuk membahas karakteristik graf karena matriks keterhubungan merupakan matriks persegi. Bekerja dengan matriks persegi memberikan banyak kemudahan dibanding dengan matriks tidak

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

persegi. Berikut ini merupakan suatu perluasan pembahasan matriks keterhubungan suatu graf dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier (Abdussakir, dkk., 2009:81).

Misalkan G graf berorder p dan A adalah matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor taknol x disebut vektor eigen *(eigen vector)* dari A jika Ax adalah suatu kelipatan skalar dari x yakni, $Ax = \lambda x$, untuk sebarang scalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A, persamaan $Ax = \lambda x$ ditulis kembali dalam bentuk

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

dengan I adalah matriks identitas berordo $(1 \times p)$. Persamaan ini akan mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Persamaan $det(A - \lambda I) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variable λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks A. Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai–nilai eigen dari matriks A (Abdussakir, dkk., 2009:82).

Abdussakir, dkk. (2009:82-82) menjelaskan bahwa, misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari A, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum*

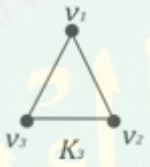
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

graf G, dan dinotasikan dengan $spec(G)$. Jadi, spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Contoh 9

Perhatikan graf komplit K_3 beserta matriks keterhubungannya berikut ini.



$$A: \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pertama akan ditentukan nilai eigen dari A menggunakan persamaan $det(A - \lambda I) = 0$. Diperoleh

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda^3 - 2)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Untuk $\lambda_1 = 2$, maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks yang diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$x_1 - x_3 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

Diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_1 = 2$.

Untuk $\lambda_2 = -1$, maka

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Akan diperoleh suatu persamaan tunggal, yaitu

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_2 = -1$.

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ serta $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$. Dengan demikian, maka spectrum graf K_3 adalah

$$spec(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Spektrum yang dicontohkan di atas disebut spectrum adjacency karena diperoleh dari matriks adjacency suatu graf.

2.3.1 Representasi Graf dalam Matriks Detour

Misal G merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Biasanya spektrum graf dibentuk oleh nilai eigen dari matriks terhubung langsung. Biasanya dinotasikan nilai eigen dari graf G dengan λ_i, $i = 1,2, \dots, n$ dan spektrum ditulis dengan $spec(G)$. Matriks detour dari graf G didefinisikan dengan $DD = DD(G)$ merupakan matriks yang unsur (i,j) adalah panjang lintasan terpanjang antara titik i dan j. Nilai eigen dari $DD(G)$ disebut DD-nilai eigen dari G dan membentuk DD-spektrum dari G, dinotasikan dengan $spec_{DD}(G)$. Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen μ_i, $i = 1,2, \dots, n$ adalah real dan dapat diberi label $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$. Jika $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq \cdots \geq \mu_{i_g}$ adalah nilai eigen dari matriks detour, maka DD-spektrum dapat ditulis sebagai

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \cdots & \mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_g \end{bmatrix}$$

di mana m_j menunjukkan banyaknya nilai eigen μ_{ij} dan tentunya $m_1 + m_2 + \cdots + m_g = n$ (Ayyaswany dan Balachandran, 2010:958).

2.4 Grup

Raisinghania dan Aggarwal (1980:31) menyatakan bahwa, grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G himpunan tidak kosong dan $*$ operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut

a. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (sifat assosiatif).
b. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut dentitas di G).
c. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31).

Contoh 10

$(Z, +)$ dengan Z merupakan himpunan bilangan bulat, adalah suatu grup karena berlaku:

1. Untuk setiap $a, b \in Z$, maka $a + b \in Z$. Sehingga operasi + adalah operasi biner pada Z, atau dengan kata lain operasi + (penjumlahan) tertutup di Z.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Untuk setiap $a, b, c \in Z$, maka $a + (b + c) = (a + b) + c$, atau dengan kata lain operasi + (penjumlahan) bersifat assosiatif.
3. Terdapat elemen identitas yaitu $0 \in Z$. Sehingga untuk setiap $a \in Z$, maka $a + 0 = 0 + a = a$.
4. Untuk setiap $a \in Z$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in Z$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Karena himpunan Z dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi sifat-sifat grup, maka $(Z, +)$ adalah grup.

2.4.1 Grup Dihedral (D_{2n})

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$ (Dummit dan Foote, 2004:23). Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n. Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, sehingga st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka st akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 2004:24).

Karena grup dihedral D_{2n} akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu (Dummit dan Foote, 2004:25):

a. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$

b. $|s| = 2$

c. $s \neq r^i$ untuk semua i

d. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ yaitu setiap elemen dapat ditulis**kan** secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau $k = 1$ dan $0 \leq i \leq n-1$.

e. $sr = r^{-1}s$

f. $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$.

Contoh 11

Sebagai contoh D_6 adalah grup dihendral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.4.2 Center Grup

Dummit dan Foote (2004:50) menjelaskan, misalkan G adalah grup, center G didefinisikan $Z(G) = \{g \in G | gx = xg, \ \forall x \in G\}$. Dengan kata lain, center dari G merupakan himpunan elemen-elemen yang komutatif dengan semua elemen dari G.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 12

Diberikan $(M_6, +)$ adalah grup, dengan $M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. Carilah $Z(M_6)$!

Jawab: Operasi penjumlahan bersifat komutatif di M_6.

Karena untuk sebarang $g \in M_6$ berlaku $g + a = a + g, \forall a \in M_6$, sehingga $Z(M_6) = M_6$.

Contoh 13

Diberikan grup dihedral D_6 dengan $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Tentukan $Z(D_6)$!

Jawab: $1 \in D_6$ dan $1 \circ x = x \circ 1, \forall x \in D_6$, sehingga $1 \in Z(D_6)$.

$r \in D_6$ dan $r \circ x \neq x \circ r, \forall x \in D_6$, sehingga $r \notin Z(D_6)$.

$r^2 \in D_6$ dan $r^2 \circ x \neq x \circ r^2, \forall x \in D_6$, sehingga $r^2 \notin Z(D_6)$.

$s \in D_6$ dan $s \circ x \neq x \circ s, \forall x \in D_6$, sehingga $s \notin Z(D_6)$.

$sr \in D_6$ dan $sr \circ x \neq x \circ sr, \forall x \in D_6$, sehingga $sr \notin Z(D_6)$.

$sr^2 \in D_6$ dan $sr^2 \circ x \neq x \circ sr^2, \forall x \in D_6$, sehingga $sr^2 \notin Z(D_6)$.

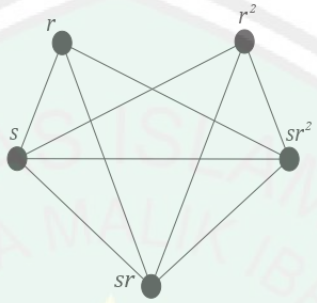
Jadi $Z(D_6) = \{1\}$.

2.5 Graf *Non Commuting*

Misalkan G grup tidak komutatif dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* Γ_G adalah graf yang memiliki himpunan titik $G \backslash Z(G)$ dan dua titik $x, y \in G \backslash Z(G)$ akan terhubung langsung di Γ_G jika $xy \neq yx \in G$ (Abdollahi, dkk., 2006). Atau graf *non commuting* dari G didefinisikan sebagai graf yang himpunan titiknya adalah bukan anggota center dari G dan dua titik saling terhubung jika dan hanya jika tidak komutatif (Abdollahi, dkk., 2010).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misalkan pada D_6 diperoleh $Z(D_6) = \{1\}$, sehingga graf *non commuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 2.5. Contoh Graf *Non Commuting* dari Grup $\boldsymbol{D_6}$

2.6 Keteraturan Alam Semesta

Matematika tidak lain adalah ilmu yang menjadi alat bantu dalam kehidupan manusia. Matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kebesaran dan kekuasaan Allah. Matematika tidak lain adalah *makhluq*, dan Allah adalah *khaliq*nya (Abdusysyakir, 2007:88). Matematika pada dasarnya adalah pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu* ***al-hisab***. Dalam urusan hitung-menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti (Abdusysyakir, 2007:83). Seperti yang telah dijelaskan dalam Al-Qur'an bahwa Allah sangat cepat dalam membuat perhitungan dan sangat teliti. Dalam surat an-Nur ayat 39 disebutkan:

وَٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَعۡمَٰلُهُمۡ كَسَرَابِۭ بِقِيعَةٖ يَحۡسَبُهُ ٱلظَّمۡـَٔانُ مَآءً حَتَّىٰٓ إِذَا جَآءَهُۥ لَمۡ يَجِدۡهُ شَيۡـٔٗا

وَوَجَدَ ٱللَّهَ عِندَهُۥ فَوَفَّىٰهُ حِسَابَهُۥۗ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٣٩

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Artinya: "Dan orang-orang kafir amal-amal mereka adalah laksana fatamorgana di tanah yang datar, yang disangka air oleh orang-orang yang dahaga, tetapi bila didatanginya air itu Dia tidak mendapatinya sesuatu apapun. dan didapatinya (ketetapan) Allah disisinya, lalu Allah memberikan kepadanya perhitungan amal-amal dengan cukup dan Allah adalah sangat cepat perhitungan-Nya" (Q.S. an-Nur: 39).

Dalam surat Maryam ayat 84 dan 94 juga disebutkan:

فَلَا تَعْجَلْ عَلَيْهِمْ ۖ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمْ عَدًّا ﴿٨٤﴾

Artinya: "Maka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka, karena Sesungguhnya Kami hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti" (Q.S. Maryam: 84).

لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Q.S. Maryamr: 94).

Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya bisa dilihat dalam al-Qur'an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah (Rahman, 2007:1).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79). Dalam al-Qur'an surat al-Qamar ayat 49 Allah berfirman:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: " Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. al-Qamar: 49).

Menurut Shihab (2002:482) dalam tafsir Al-Misbahnya dijelaskan bahwa kata (قدر) *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan maknanya oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti kadar tertentu yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspek saja. Ayat di atas menjelaskan salah satu ketentuan Allah menyangkut takdir dan pengaturan-Nya terhadap makhluk.

Sedangkan Al-Maragi (1989:177) dalam tafsirnya juga menjelaskan bahwa sesungguhnya segala yang terjadi di dalam kehidupan ini adalah dengan ketentuan Allah, dan pembentukannya menurut ketentuan hikmah-Nya yang maha bijaksana, dan aturan-Nya yang menyeluruh sesuai dengan sunnah-sunnah yang diletakkan pada makhluk-Nya. Ayat di atas semakna dengan firman Allah surat al-Furqan ayat 2:

...وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "... Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. al-Furqan: 2).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Surat al-Qamar ayat 49 di atas merupakan suatu pemberitahuan dari Allah tentang aturan alam semesta yang telah Dia ciptakan, bahwa segala kejadian yang terjadi di alam ini telah diketahui oleh ilmu Allah dan telah ditentukan. Allah telah menentukan dzat, sifat, perbuatan, dan tempat kembalinya ke neraka atau ke surga, manusia maupun jin. Tidak ada sesuatu pun yang terjadi di alam ini tanpa adanya takdir yang telah diketahui oleh ilmu Allah yang maha sempurna sebelum terjadinya sesuatu itu (Al-Jazairi, 2009:200).

Dengan ketentuan-ketentuan Allah tersebut, Sayyid Quthub (dalam Shihab, 2002:482) memberikan contoh dalam tafsirnya menyangkut pengaturan Allah dan keseimbangan yang dilakukan-Nya antar makhluk. Binatang-binatang pemakan burung-burung kecil misalnya, jumlahnya hanya sedikit karena hanya beberapa biji telur yang dihasilkannya. Diapun tidak dapat hidup kecuali di tempat-tempat tertentu yang terbatas, namun usianya panjang. Seandainya dengan usia yang panjang itu, ia menghasilkan banyak anak-anak, maka pastilah burung-burung kecil akan habis diterkamnya sehingga punah, atau pastilah berkurang jumlahnya sehingga dapat mengurangi fungsi burung-burung kecil itu di alam ini. Demikian salah satu contoh pengaturan Allah dalam memelihara keseimbangan faktor kelanjutan eksistensi dan kepunahan.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaanya. Ahli matematika atau fisika tidak dapat membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 2007:80).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari ketiga tafsir di atas, dijelaskan bahwa kata (قدر) *qadar* merupakan ketentuan atau suatu sistem yang sudah ditetapkan oleh Allah. Di mana dengan ketentuan atau suatu sistem tersebut, Allah menghendaki adanya keteraturan dan keseimbangan. Begitu juga dalam matematika, ketentuan tersebut dapat diartikan sebagai rumusan atau suatu persamaan. Di mana dengan rumusan atau persamaan tersebut akan didapatkan adanya suatu keteraturan.

Salim (2011), menyebutkan bahwasannya, salah satu contoh tentang keteraturan dan keseimbangan ciptaan Allah secara tegas telah disebutkan dalam al-Qur'an yaitu surat yasin ayat 40 yaitu:

لَا ٱلشَّمۡسُ يَنۢبَغِي لَهَآ أَن تُدۡرِكَ ٱلۡقَمَرَ وَلَا ٱلَّيۡلُ سَابِقُ ٱلنَّهَارِۚ وَكُلّٞ فِي فَلَكٖ يَسۡبَحُونَ ٤٠

Artinya: "Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang. dan masing-masing beredar pada garis edarnya" (Q.S. Yasin: 40).

Dan dalam surat al-Anbiya ayat 33 juga disebutkan:

وَهُوَ ٱلَّذِي خَلَقَ ٱلَّيۡلَ وَٱلنَّهَارَ وَٱلشَّمۡسَ وَٱلۡقَمَرَۖ كُلّٞ فِي فَلَكٖ يَسۡبَحُونَ ٣٣

Artinya: "Dan Dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. Masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya" (Q.S. al-Anbiya: 33).

Ayat-ayat di atas menjelaskan bahwa benda-benda angkasa beredar menurut garis edarnya masing-masing. Salah satu sebab utama mengapa terjadi keseimbangan di alam semesta ini adalah beredarnya benda-benda angkasa sesuai dengan orbit (garis edar) atau lintasan tertentu. Pengetahuan semacam ini bisa jadi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

diketahui akhir-akhir ini, sementara gambaran ide orbit (garis edar) ini telah ada di dalam al-Qur'an ratusan abad yang lalu (Mulyono dan Abtokhi, 2006:33).

Dalam matematika, fenomena-fenomena yang terdapat dalam alam semesta tersebut disimbolkan ke dalam konsep-konsep matematika. Sementara untuk mendeskripsikannya, konsep-konsep tersebut dirumuskan ke dalam bahasa lambang dan angka. Sehingga keteraturan dalam matematika akan dapat ditemukan dalam bentuk suatu rumusan yang selanjutnya dapat diakatakan sebagai teorema. Di mana teorema yang telah dihasilkan harus dibuktikan kebenarannya.

Pembuktian dari apa yang telah teliti sebenarnya merupakan ajaran yang telah diterangkan dalam al-Qur'an. El-Fandy (2004:9) menjelaskan bahwa tidaklah bijaksana orang yang hanya menggunakan khayalan sebagai dasar dari keyakinan agama ataupun teori-teori ilmiahnya. Suatu kesimpulan yang tidak ditunjang oleh pengalaman atau bukti tidak ada manfaatnya. Dengan berbuat seperti itu, mereka ibarat orang yang menyimpulkan ciri-ciri dari sesuatu atau gejala alam semesta tanpa mempelajari objek yang diamati, atau ibarat orang yang mewarisi keyakinannya tanpa mengujinya untuk mengetahui mana yang benar dan mana yang salah. Dalam menggambarkan orang-orang yang seperti itu, al-Qur'an menyebutkan:

وَإِذَا قِيلَ لَهُمْ تَعَالَوْا۟ إِلَىٰ مَآ أَنزَلَ ٱللَّهُ وَإِلَى ٱلرَّسُولِ قَالُوا۟ حَسْبُنَا مَا وَجَدْنَا عَلَيْهِ ءَابَآءَنَآ ۚ أَوَلَوْ كَانَ ءَابَآؤُهُمْ لَا يَعْلَمُونَ شَيْـًٔا وَلَا يَهْتَدُونَ ﴿١٠٤﴾

Artinya: "Apabila dikatakan kepada mereka: "Marilah mengikuti apa yang diturunkan Allah dan mengikuti Rasul". mereka menjawab: "Cukuplah untuk kami apa yang kami dapati bapak-bapak kami mengerjakannya". dan apakah mereka itu akan mengikuti nenek moyang mereka walaupun nenek moyang mereka itu tidak mengetahui apa-apa dan tidak (pula) mendapat petunjuk?" (Q.S. al-Maidah: 104).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang spektrum detour graf *non commuting* yang terbentuk dari grup dihedral D_{2n} berdasarkan tabel *cayley*.

3.1 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral

Adapun langkah-langkah yang penulis gunakan untuk mendapatkan spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral sebagai berikut:

a. Menentukan elemen-elemen dari grup dihedral D_{2n}.
b. Membentuk tabel *cayley* hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{2n}.
c. Menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif dari tabel *cayley*.
d. Menggambar unsur-unsur yang tidak komutatif dalam bentuk graf *non commuting*.
e. Menentukan matriks detour dari graf *non commuting*.
f. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour yang telah ditentukan.
g. Mencari basis ruang vektor eigen.
h. Menunjukkan spektrum detour dari graf *non commuting* grup dihedral D_{2n}.
i. Merumuskan pola spektrum detour dari graf *non commuting* grup dihedral D_{2n} sehingga didapatkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.
j. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.1.1 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_6 $(D_{2\cdot 3})$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_6 adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_6 dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.1. Tabel *Cayley* D_6

∘	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	S	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_6 yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_6. Sedangkan warna kuning menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6 sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^2 \circ s \neq s \circ r^2 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$

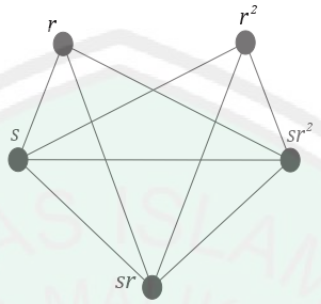
$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2 \qquad s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$

$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$

Dengan menghilangkan center dari grup D_6 yaitu $Z(D_6) = \{1\}$, sehingga graf *non commuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_6} =$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3. 1. Graf *Non Commuting* dari Grup $\boldsymbol{D_6}$

Dari graf *non commuting* grup D_6 di atas menghasilkan matriks detour sebagai berikut:

$$DD(\Gamma_{D_6}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks detournya, kemudian akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut. Agar λ menjadi suatu nilai eigen, maka harus ada penyelesaian taknol dari persamaan $\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)x = 0$. Akan tetapi, persamaan tersebut mempunyai penyelesaian taknol jika dan hanya jika $det\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right) = 0$. Sehingga nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$det\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right) = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left|\begin{bmatrix}0&4&4&4&4\\4&0&4&4&4\\4&4&0&4&4\\4&4&4&0&4\\4&4&4&4&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda&4&4&4&4\\4&-\lambda&4&4&4\\4&4&-\lambda&4&4\\4&4&4&-\lambda&4\\4&4&4&4&-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode eliminasi *Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}4&-\lambda&4&4&4\\0&4+\lambda&-\lambda-4&0&0\\0&0&4+\lambda&-\lambda-4&0\\0&0&0&4+\lambda&-\lambda-4\\0&0&0&0&16+3\lambda-\frac{1}{4}\lambda^2\end{bmatrix}$$

Karena $det\left(DD\left(\Gamma_{D_6}\right)-\lambda I\right)$ merupakan hasil kali perkalian diagonal dari matriks segitiga atasnya, maka diperoleh:

$$det\left(DD\left(\Gamma_{D_6}\right)-\lambda I\right) = (4)(4+\lambda)^3(16+3\lambda-\tfrac{1}{4}\lambda^2)$$

$$0 = (4)(4+\lambda)^3(16+3\lambda-\frac{1}{4}\lambda^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 16$$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigennya. Menurut definisinya,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

adalah suatu vektor eigen dari matriks detour yang terkait dengan λ jika dan hanya jika x adalah suatu solusi *nontrivial* dari $\left(DD\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right) = 0$, yaitu

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -\lambda & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & -\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = -4$, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{bmatrix} -(-4) & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -(-4) & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -(-4) & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & -(-4) & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & -(-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks yang diperbesar untuk sistem di atas adalah

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi *Gauss-Jordan* maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Matriks tersebut akan membentuk sistem sebagai berikut

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -s - t - u - v$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = t$$

$$x_4 = u$$

$$x_5 = v$$

Sehingga, vektor eigen dari $DD(\Gamma_{D_6})$ yang bersesuaian dengan $\lambda = -4$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s-t-u-v \\ s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \\ u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

$$x = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{dan } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bebas linier, vektor-vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -4$.

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -4$ adalah 4. Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda = 16$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika $\lambda = 16$, maka akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} -16 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -16 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -16 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & -16 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks yang diperbesar untuk sistem di atas adalah

$$\begin{bmatrix} -16 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & -16 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & -16 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & -16 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & -16 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi *Gauss-Jordan* maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut akan membentuk sistem sebagai berikut

$$x_1 = -x_5 = -v$$

$$x_2 = -x_5 = -v$$

$$x_3 = -x_5 = -v$$

$$x_4 = -x_5 = -v$$

$$x_5 = v$$

Sehingga, vektor eigen dari $DD(\Gamma_{D_6})$ yang bersesuaian dengan $\lambda = -4$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -v \\ -v \\ -v \\ -v \\ v \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bebas linier, vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 16$. Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 16$ adalah 1. Sehingga spektrum detour untuk graf *non commuting* grup $D_6 = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya untuk mencari banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya, akan dicari dengan menggunakan *software* Maple 12. Hal ini dimaksudkan untuk mempermudah perhitungan.

3.1.2 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_8 ($D_{2\cdot 4}$)

Elemen-elemen dari grup dihedral D_8 adalah $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_8 dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3. 2. Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_8}$

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_8 yaitu $\{1, r^2\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^2 komutatif dengan semua elemen di D_8. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_8. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_8 sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^3 \circ s \neq s \circ r^3 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$

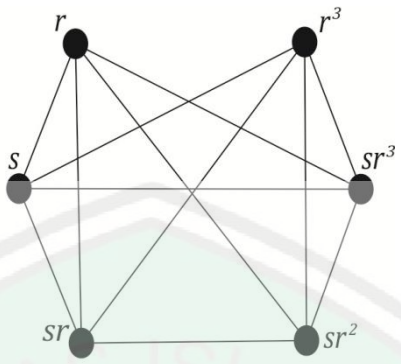
$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3 \qquad s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$$

$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$

$$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r \qquad r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3 \qquad sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$$

Dengan menghilangkan center dari grup D_8 yaitu $Z(D_8) = \{1, r^2\}$, sehingga graf *non commuting* dari grup D_8 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_8} = \{r, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3. 2. Graf *Non Commuting* dari Grup $\boldsymbol{D_8}$

Dari graf *non commuting* grup D_8 di atas menghasilkan matriks detour sebagai berikut:

$$DD(\Gamma_{D_8}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^3 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks detournya, kemudian akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut. Agar λ menjadi suatu nilai eigen, maka harus ada penyelesaian taknol dari persamaan $(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I)x = 0$. Akan tetapi, persamaan tersebut mempunyai penyelesaian taknol jika dan hanya jika $det(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I) = 0$. Sehingga nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$det(DD(\Gamma_{D_8}) - \lambda I)$=0

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & -\lambda & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -\lambda & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & -\lambda & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & -\lambda & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode eliminasi *Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & -\lambda & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5+\lambda & -\lambda-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5+\lambda & -\lambda-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5+\lambda & -\lambda-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5+\lambda & -\lambda-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25+4\lambda-\frac{1}{5}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(DD\left(\Gamma_{D_8}\right)-\lambda I\right)$ merupakan hasil kali perkalian diagonal dari matriks segitiga atasnya, maka diperoleh:

$$det\left(DD\left(\Gamma_{D_8}\right)-\lambda I\right) = (5)(5+\lambda)^4(25+4\lambda-\tfrac{1}{5}\lambda^2)$$

$$0 = (5)(5+\lambda)^4(25+4\lambda-\frac{1}{5}\lambda^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 25$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigennya. Maka dengan mensubstituskan nilai $\lambda = -5$ ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_8}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -(-5) & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & -(-5) & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -(-5) & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & -(-5) & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & -(-5) & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -5$ adalah 5. Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda = 25$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_8}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -25 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & -25 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -25 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & -25 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & -25 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -25 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, yaitu mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 25$ adalah 1. Sehingga spektrum detour untuk graf *non commuting* grup $D_8 = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

3.1.3 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{10} $(D_{2\cdot 5})$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{10} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{10} dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

abel 3.3. Tabel *Cayley* D_{10}

∘	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

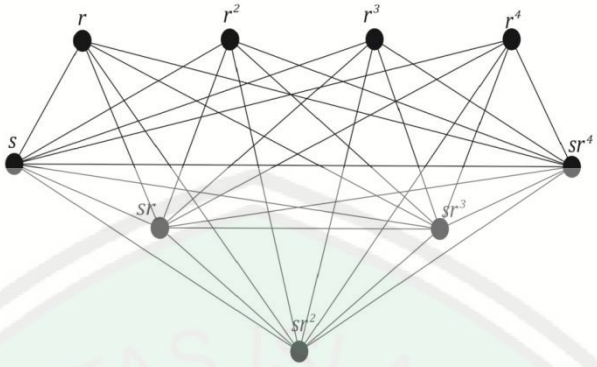
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{10} yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_{10}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{10}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{10} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$	$s \circ sr \neq sr \circ s$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$	$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$
$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$	$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$	$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$
$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$	$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$	$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$	$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$
$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$	$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$	$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$
$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$	$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$	$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$	$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$	$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$	$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{10} yaitu $Z(D_{10}) = \{1\}$, sehingga graf *non commuting* dari grup D_{10} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{10}} = \{r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.3. Graf *Non Commuting* pada Grup $\boldsymbol{D_{10}}$

Dari graf *non commuting* grup D_{10} di atas menghasilkan matriks detour sebagai berikut:

$$DD(\Gamma_{D_{10}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & r^3 & r^4 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks detournya, kemudian akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut. Agar λ menjadi suatu nilai eigen, maka harus ada penyelesaian taknol dari persamaan $\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)x = 0$. Akan tetapi, persamaan tersebut mempunyai penyelesaian taknol jika dan hanya jika $det\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right) = 0$. Sehingga nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$det\left(DD\left(\Gamma_{D_{10}}\right) - \lambda I\right)=0$

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & -\lambda & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & -\lambda & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & -\lambda & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & -\lambda & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -\lambda & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -\lambda & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -\lambda & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode eliminasi *Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 8 & -\lambda & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 8+\lambda & -\lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8+\lambda & -\lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8+\lambda & -\lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8+\lambda & -\lambda-8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8+\lambda & -\lambda-8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8+\lambda & -\lambda-8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8+\lambda & -\lambda-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64+7\lambda-\frac{1}{8}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(DD\left(\Gamma_{D_{10}}\right) - \lambda I\right)$ merupakan hasil kali perkalian diagonal dari matriks segitiga atasnya, maka diperoleh:

$$det\left(DD\left(\Gamma_{D_{10}}\right) - \lambda I\right) = (8)(8+\lambda)^7(64+7\lambda-\tfrac{1}{8}\lambda^2)$$

$$0 = (8)(8+\lambda)^7(64+7\lambda-\frac{1}{8}\lambda^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -8,\ \lambda_2 = 64$$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigennya. Maka dengan mensubstituskan nilai $\lambda = -8$ ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{10}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -(-8) & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & -(-8) & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & -(-8) & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & -(-8) & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & -(-8) & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -(-8) & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -(-8) & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -(-8) & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -8$ adalah 8. Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda = 64$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{10}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -64 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & -64 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & -64 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & -64 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & -64 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -64 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -64 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -64 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -64 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, yaitu mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 64$ adalah 1. Sehingga spektrum detour untuk graf *non commuting* grup $D_{10} = \begin{bmatrix} 64 & -8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$.

3.1.4 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{12} $(D_{2\cdot 6})$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{12} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{12} dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.4. Tabel *Cayley* D_{12}

∘	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{12} yaitu $\{1, r^3\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^3 komutatif dengan semua elemen di D_{12}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak

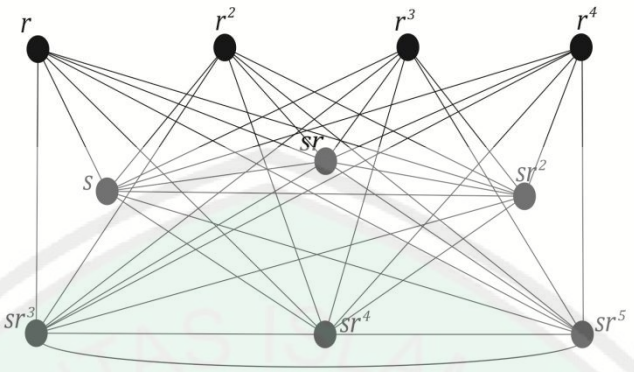
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

komutatif pada grup dihedral D_{12}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{12} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$	$s \circ sr \neq sr \circ s$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$	$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$
$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$	$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$	$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$
$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$	$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$	$r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4$	$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$
$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$	$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$	$sr \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr$
$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$	$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$	$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$
$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$	$sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$
$r^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^5$	$sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{12} yaitu $Z(D_{12}) = \{1, r^3\}$, sehingga graf *non commuting* dari grup D_{12} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{12}} = r, r^2, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.4. Graf *Non Commuting* dari Grup $\boldsymbol{D_{12}}$

Dari graf *non commuting* grup D_{12} di atas menghasilkan matriks detour sebagai berikut:

$$DD(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ r^4 \\ r^5 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & r^4 & r^5 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks detournya, kemudian akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut. Agar λ menjadi suatu nilai eigen, maka harus ada penyelesaian taknol dari persamaan $\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)x = 0$. Akan tetapi, persamaan tersebut mempunyai penyelesaian taknol jika dan hanya jika $det\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right) = 0$. Sehingga nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$det\left(DD\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$=0

$$\left\|\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\| = 0$$

$$\left\|\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right\| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & -\lambda & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & -\lambda & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & -\lambda & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -\lambda & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -\lambda & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -\lambda & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -\lambda & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -\lambda & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode eliminasi *Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 9 & -\lambda & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 9+\lambda & -\lambda-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9+\lambda & -\lambda-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9+\lambda & -\lambda-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9+\lambda & -\lambda-9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9+\lambda & -\lambda-9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9+\lambda & -\lambda-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9+\lambda & -\lambda-9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9+\lambda & -\lambda-9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81+8\lambda-\frac{1}{9}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(DD\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$ merupakan hasil kali perkalian diagonal dari matriks segitiga atasnya, maka diperoleh:

$$det\left(DD\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right) = (9)(9+\lambda)^8(81+8\lambda-\tfrac{1}{9}\lambda^2)$$

$$0 = (9)(9+\lambda)^8(81+8\lambda-\frac{1}{9}\lambda^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -9,\ \lambda_2 = 81$$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigennya. Maka dengan mensubstituskan nilai $\lambda = -9$ ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -(-9) & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & -(-9) & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & -(-9) & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & -(-9) & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -(-9) & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -(-9) & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -(-9) & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -(-9) & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -(-9) & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -9$ adalah 9. Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda = 81$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, yaitu mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 81$ adalah 1. Sehingga spektrum detour untuk graf *non commuting* grup $D_{12} = \begin{bmatrix} 81 & -9 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$.

3.1.5 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{14} $(D_{2\cdot 7})$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{14} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{14} dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.5. Tabel *Cayley* D_{14}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{14} yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_{14}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{14}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{14} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$	$s \circ sr \neq sr \circ s$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$	$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$
$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$	$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$	$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$
$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$	$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$	$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$
$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$	$r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4$	$s \circ sr^6 \neq sr^6 \circ s$
$r \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r$	$r^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^4$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$	$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$	$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$
$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$	$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$	$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$
$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$	$sr \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr$
$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$	$sr \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr$
$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^2$
$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$	$r^6 \circ s \neq s \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^2$
$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$	$r^6 \circ sr \neq sr \circ r^6$	$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$
$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$	$r^6 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^6$	$sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

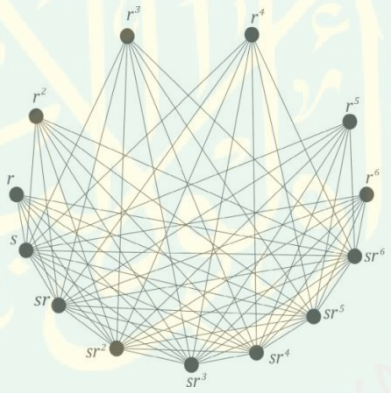
$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$ $r^6 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^6$ $sr^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^3$

$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$ $r^6 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^6$ $sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$

$r^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^3$ $r^6 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^6$ $sr^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^4$

$r^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$ $r^6 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^6$ $sr^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^5$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{14} yaitu $Z(D_{14}) = \{1\}$, sehingga graf *non commuting* dari grup D_{14} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{14}} = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.5. Graf *Non Commuting* dari Grup $\boldsymbol{D_{14}}$

Dari graf *non commuting* grup D_{14} di atas menghasilkan matriks detour sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$DD(\Gamma_{D_{14}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks detournya, kemudian akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut. Agar λ menjadi suatu nilai eigen, maka harus ada penyelesaian taknol dari persamaan $\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)x = 0$. Akan tetapi, persamaan tersebut mempunyai penyelesaian taknol jika dan hanya jika $det\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right) = 0$. Sehingga nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$det\left(DD(\Gamma_{D_{14}}) - \lambda I\right)=0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode eliminasi *Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 12 & -\lambda & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12+\lambda & -\lambda-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 144+11\lambda-\frac{1}{12}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(DD\left(\Gamma_{D_{14}}\right)-\lambda I\right)$ merupakan hasil kali perkalian diagonal dari matriks segitiga atasnya, maka diperoleh:

$$det\left(DD\left(\Gamma_{D_{14}}\right)-\lambda I\right)=(12)(12+\lambda)^{11}(144+11\lambda-\frac{1}{12}\lambda^2)$$

$$0=(12)(12+\lambda)^{11}(144+11\lambda-\frac{1}{12}\lambda^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1=-12,\ \lambda_2=144$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigennya. Maka dengan mensubstituskan nilai $\lambda = -12$ ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{14}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -(-12) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -12$ adalah 12. Selanjutnya akan dicari basis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dari ruang vektor eigen $\lambda = 144$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{14}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -144 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & -144 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & -144 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & -144 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & -144 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -144 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -144 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -144 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -144 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -144 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -144 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -144 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & -144 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, yaitu mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 144$ adalah 1. Sehingga spektrum detour untuk graf *non commuting* grup $D_{14} = \begin{bmatrix} 144 & -12 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.1.6 Spektrum Detour Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{16} $(D_{2\cdot 8})$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{16} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{16} dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.6. Tabel *Cayley* D_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{16} yaitu $\{1, r^4\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^4 komutatif dengan semua elemen di D_{16}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

komutatif pada grup dihedral D_{16}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{16} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$	$s \circ sr \neq sr \circ s$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$	$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$
$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$	$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$	$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$
$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$	$r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$	$s \circ sr^6 \neq sr^6 \circ s$
$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$	$r^5 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^5$	$s \circ sr^7 \neq sr^7 \circ s$
$r \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r$	$r^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^5$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r$	$r^5 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^5$	$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$
$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$	$r^6 \circ s \neq s \circ r^6$	$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$
$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$	$r^6 \circ sr \neq sr \circ r^6$	$sr \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr$
$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^6$	$sr \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr$
$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^6$	$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$
$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$	$r^7 \circ s \neq s \circ r^7$	$sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$
$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$	$r^7 \circ sr \neq sr \circ r^7$	$sr^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^3$
$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$	$r^7 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^7$	$sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$
$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$	$r^7 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^7$	$sr^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^4$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

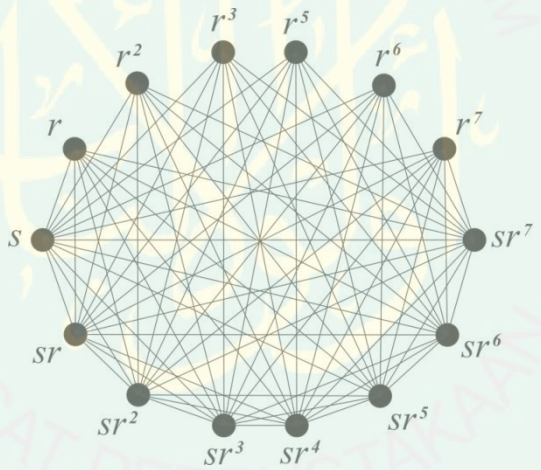
$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$ $r^7 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^7$ $sr^4 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^4$

$r^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^3$ $r^7 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^7$ $sr^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^5$

$r^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$ $r^7 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^7$ $sr^5 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^5$

$r^3 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^2$ $r^7 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^7$ $sr^6 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^6$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{16} yaitu $Z(D_{16}) = \{1, r^4\}$, sehingga graf *non commuting* dari grup D_{16} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{16}} = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.6. Graf *Non Commuting* dari Grup $\boldsymbol{D_{16}}$

Dari graf *non commuting* grup D_{16} di atas menghasilkan matriks detour sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$DD(\Gamma_{D_{16}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & r^3 & r^5 & r^6 & r^7 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks detournya, kemudian akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut. Agar λ menjadi suatu nilai eigen, maka harus ada penyelesaian taknol dari persamaan $\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)x = 0$. Akan tetapi, persamaan tersebut mempunyai penyelesaian taknol jika dan hanya jika $det\left(DD(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right) = 0$. Sehingga nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$det\left(DD(\Gamma_{D_{16}}) - \lambda I\right)=0$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode eliminasi *Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 13 & -\lambda & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13+\lambda & -\lambda-13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 169+12\lambda-\frac{1}{13}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(DD\left(\Gamma_{D_{16}}\right)-\lambda I\right)$ merupakan hasil kali perkalian diagonal dari matriks segitiga atasnya, maka diperoleh:

$$det\left(DD\left(\Gamma_{D_{16}}\right)-\lambda I\right)=(13)(13+\lambda)^{12}(169+12\lambda-\frac{1}{13}\lambda^2)$$

$$0=(13)(13+\lambda)^{12}(169+12\lambda-\frac{1}{13}\lambda^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1=-13,\ \lambda_2=169$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigennya. Maka dengan mensubstituskan nilai $\lambda = -13$ ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{16}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -(-13) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -13$ adalah 13. Selanjutnya akan dicari basis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dari ruang vektor eigen $\lambda = 169$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{16}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
-169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169 & 13 \\
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & -169
\end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, yaitu mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan* yang dilakukan dengan bantuan *software* Maple 12, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 169$ adalah 1. Sehingga spektrum detour untuk graf *non commuting* grup $D_{14} = \begin{bmatrix} 169 & -13 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2 Pola Spektrum Detour Graf *Non Commuting* D_{2n}

Tabel 3.7. Pola Spektrum Graf *Non Commuting*

No.	Graf *Non Commuting*	Spektrum Graf *Non Commuting*
1.	Graf *non commuting* grup D_6	$Spec_{DD}(\Gamma_{D_6}) = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
2.	Graf *non commuting* grup D_8	$Spec_{DD}(\Gamma_{D_8}) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
3.	Graf *non commuting* grup D_{10}	$Spec_{DD}(\Gamma_{D_{10}}) = \begin{bmatrix} 64 & -8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$
4.	Graf *non commuting* grup D_{12}	$Spec_{DD}(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{bmatrix} 81 & -9 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$
5.	Graf *non commuting* grup D_{14}	$Spec_{DD}(\Gamma_{D_{14}}) = \begin{bmatrix} 144 & -12 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$
6	Graf *non commuting* grup D_{16}	$Spec_{DD}(\Gamma_{D_{16}}) = \begin{bmatrix} 169 & -13 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$

Lemma 1:

Lintasan terpanjang antara sebarang dua titik berbeda pada graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan n bilangan asli, $n \geq 3$ adalah $2n-2$ (n ganjil) dan $2n-3$ (n genap).

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\}$. Diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1\}$ untuk n ganjil, karena untuk setiap 1 jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ dengan semua elemen di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif . Dengan demikian untuk n ganjil himpunan titik dari graf *non commuting*

$$\Gamma_{D_{2n}} = \{r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\}.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk semua $1 \leq i,j \leq n-1$ dengan $i \neq j$ maka titik-titik ini tidak terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Selain itu, karena n ganjil, maka $s \circ r^i \neq r^i \circ s$, $i = 1,2,\dots,n-1$, yang berarti bahwa s dan r^i saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Demikian juga karena n ganjil, maka $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, $j = 0,1,2,\dots,n-1$ dan $i = 0,1,2,\dots,n-1$, dengan $i \neq j$ yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$.

Sehingga jumlah titik pembentuk graf *non commuting* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n ganjil adalah $2n-1$. Karena suatu lintasan hanya boleh melalui suatu titik dan sisi sebanyak satu kali, maka dengan berangkat dari titik awal, maka titik yang mungkin untuk dilewati adalah $(2n-1)-1 = 2n-2$. Dan hal tersebut merupakan panjang lintasan terpanjang dari P_{2n} dengan n bilangan asli ganjil.

Sementara itu, untuk n genap diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$, karena untuk setiap 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ dengan semua elemen di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif. Dengan demikian himpunan titik dari graf *non commuting*

$$\Gamma_{D_{2n}} = \left\{r, r^2, \cdots, r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\right\}.$$

Karena $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk semua $1 \leq i,j \leq n-1$, dengan $i \neq j$ maka titik-titik ini tidak terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Selain itu karena n genap, maka $s \circ r^i \neq r^i \circ s$, $i = 1,2,\dots,n-1$ dan $i \neq \frac{n}{2}$, yang berarti bahwa s dan r^i saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Demikian juga karena n genap, maka $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, $j = 0,1,2,\dots,n-1$ dan $i = 0,1,2,\dots,n-1$, dengan $i \neq j$ dan jumlah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dari i dan j bukan merupakan kelipatan dari $\frac{n}{2}$, yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$.

Sehingga jumlah titik pembentuk graf *non commuting* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n genap adalah $2n-2$. Karena suatu lintasan hanya boleh melalui suatu titik dan sisi sebanyak satu kali, maka dengan berangkat dari titik awal, maka titik yang mungkin untuk dilewati adalah $(2n-2)-1=2n-3$. Dan hal tersebut merupakan panjang lintasan terpanjang dari P_{2n} dengan n genap.

Teorema 1:

Spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan n bilangan asli, $n \geq 3$ adalah:

$$Spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} (2n-2)^2 & -(2n-2) \\ 1 & (2n-2) \end{bmatrix}, & n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} (2n-3)^2 & -(2n-3) \\ 1 & (2n-3) \end{bmatrix}, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\}$. Diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1\}$ untuk n ganjil, karena untuk setiap 1 jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ dengan semua elemen di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif. Dengan demikian himpunan titik dari graf *non commuting* $\Gamma_{D_{2n}} = \{r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\}$. Karena $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk semua $1 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$ maka titik-titik ini tidak terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Selain itu karena n ganjil, maka $s \circ r^i \neq r^i \circ s$, $i = 1,2, \ldots, n-1$, yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berarti bahwa s dan r^i saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Demikian juga karena n ganjil, maka $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, $j = 0,1,2,\dots,n-1$ dan $i = 0,1,2,\dots,n-1$, dengan $i \neq j$ yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Dan dengan menggunakan lemma 1 di atas, maka matriks detour $DD(\Gamma_{D_{2n}})$ dari graf *non commuting* grup D_{2n}, dengan n ganjil sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & 0 & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & 0 & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & 0 & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & 0 & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & 0 & \cdots & (2n-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks detournya, kemudian akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara sebagai berikut:

$$(DD(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & -\lambda & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & -\lambda & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & -\lambda & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & -\lambda & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & -\lambda & \cdots & (2n-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode eliminasi *Gauss*, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2n-2) & -\lambda & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ 0 & (2n-2)+\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (2n-2)+\lambda & -\lambda-(2n-2) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (2n-2)+\lambda & -\lambda-(2n-2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (2n-2)+\lambda & -\lambda-(2n-2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (2n-2)+\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2n-2)^2+(2n-3)\lambda-\dfrac{\lambda^2}{(2n-2)} \end{bmatrix} \end{array}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $det\left(DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)$ merupakan hasil kali perkalian diagonal dari matriks segitiga atasnya, maka diperoleh:

$$det\left(DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right) = (2n-2)\left((2n-2)+\lambda\right)^{(2n-3)}\left((2n-2)^2 + (2n-3)\lambda - \frac{\lambda^2}{(2n-2)}\right)$$

$$0 = (2n-2)\left((2n-2)+\lambda\right)^{(2n-3)}\left((2n-2)^2 + (2n-3)\lambda - \frac{\lambda^2}{(2n-2)}\right)$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -(2n-2),\ \lambda_2 = (2n-2)^2$$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigennya. Maka dengan mensubstituskan nilai $\lambda = -(2n-2)$, ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan*, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -(2n-2)$, adalah $(2n-2)$. Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda = (2n-2)^2$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -(2n-2)^2 & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & -(2n-2)^2 & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & -(2n-2)^2 & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & -(2n-2)^2 & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & -(2n-2)^2 & (2n-2) & \cdots & (2n-2) \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & -(2n-2)^2 & \cdots & (2n-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-2) & (2n-2) & \cdots & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & (2n-2) & \cdots & -(2n-2)^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan cara yang sama, yaitu mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan*, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (2n-2)^2$ adalah 1. Sehingga spektrum detour untuk graf *non commuting* grup D_{2n}, dengan n bilangan asli ganjil dengan $n \geq 3$ adalah

$$Spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-2)^2 & -(2n-2) \\ 1 & (2n-2) \end{bmatrix}.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sementara itu, untuk n genap diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$, karena untuk setiap 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ dengan semua elemen di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif. Dengan demikian himpunan titik dari graf *non commuting* $\Gamma_{D_{2n}} = \left\{r, r^2, \cdots, r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\right\}$. Karena $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk semua $1 \leq i, j \leq n-1$, dengan $i \neq j$ maka titik-titik ini tidak terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Selain itu, karena n genap, maka $s \circ r^i \neq r^i \circ s$, $i = 1,2, \ldots, n-1$ dan $i \neq \frac{n}{2}$, yang berarti bahwa s dan r^i saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Demikian juga karena n genap, maka $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, $j = 0,1,2, \ldots, n-1$ dan $i = 0,1,2, \ldots, n-1$, dengan $i \neq j$ dan jumlah dari i dan j bukan merupakan kelipatan dari $\frac{n}{2}$, yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Maka matriks detour $DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ dari graf *non commuting* grup D_{2n}, dengan n genap sebagai berikut:

	r	$\cdots$	$r^{\frac{n}{2}-1}$	$r^{\frac{n}{2}+1}$	$\cdots$	r^{n-1}	s	sr	$\cdots$	sr^{n-1}
r	0	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$r^{\frac{n}{2}-1}$	$(2n-3)$	$\cdots$	0	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$
$r^{\frac{n}{2}+1}$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	0	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
r^{n-1}	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	0	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$
s	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	0	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$
sr	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	0	$\cdots$	$(2n-3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
sr^{n-1}	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$(2n-3)$	$\cdots$	0

Setelah mendapatkan matriks detournya, kemudian akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$(DD(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I) = \begin{array}{c} \\ r \\ \vdots \\ r^{\frac{n}{2}-1} \\ r^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & \cdots & r^{\frac{n}{2}-1} & r^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & r^{n-1} & s & sr & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & -\lambda & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & -\lambda & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & -\lambda & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & -\lambda & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & -\lambda & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode eliminasi *Gauss*, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \vdots \\ r^{\frac{n}{2}-1} \\ r^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & \cdots & r^{\frac{n}{2}-1} & r^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & r^{n-1} & s & sr & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2n-3) & \cdots & -\lambda & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & (2n-3)+\lambda & -\lambda-(2n-3) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (2n-3)+\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & (2n-3)+\lambda & -\lambda-(2n-3) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & (2n-3)+\lambda & -\lambda-(2n-3) & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (2n-3)+\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2n-3)^2+(2n-4)\lambda-\frac{\lambda^2}{(2n-3)} \end{bmatrix} \end{array}$$

Karena $det\left(DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)$ merupakan hasil kali perkalian diagonal dari matriks segitiga atasnya, maka diperoleh:

$$det\left(DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right) = (2n-3)\left((2n-3)+\lambda\right)^{(2n-4)}\left((2n-3)^2+(2n-4)\lambda-\frac{\lambda^2}{(2n-3)}\right)$$

$$0 = (2n-3)\left((2n-3)+\lambda\right)^{(2n-4)}\left((2n-3)^2+(2n-4)\lambda-\frac{\lambda^2}{(2n-3)}\right)$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -(2n-3)\ \lambda_2 = (2n-3)^2$$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigennya. Maka dengan mensubstituskan nilai $\lambda = -(2n-3)$, ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \vdots \\ r^{\frac{n}{2}-1} \\ r^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & \cdots & r^{\frac{n}{2}-1} & r^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & r^{n-1} & s & sr & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan*, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \vdots \\ r^{\frac{n}{2}-1} \\ r^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & \cdots & r^{\frac{n}{2}-1} & r^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & r^{n-1} & s & sr & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -(2n-3)$, adalah $(2n-3)$. Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen $\lambda = (2n-3)^2$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan $\left(DD\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \vdots \\ r^{\frac{n}{2}-1} \\ r^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & \cdots & r^{\frac{n}{2}-1} & r^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & r^{n-1} & s & sr & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -(2n-3)^2 & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & -(2n-3)^2 & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & -(2n-3)^2 & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & -(2n-3)^2 & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & -(2n-3)^2 & (2n-3) & \cdots & (2n-3) \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & -(2n-3)^2 & \cdots & (2n-3) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & (2n-3) & (2n-3) & (2n-3) & \cdots & -(2n-3)^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan cara yang sama, yaitu mengeliminasi matriks dengan metode eliminasi *Gauss-Jordan*, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \vdots \\ r^{\frac{n}{2}-1} \\ r^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & \cdots & r^{\frac{n}{2}-1} & r^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & r^{n-1} & s & sr & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa banyak basis dari ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (2n-3)^2$ adalah 1. Sehingga spektrum detour untuk graf *non commuting* grup D_{2n}, dengan n bilangan asli genap dengan $n \geq 3$ adalah

$$Spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3)^2 & -(2n-3) \\ 1 & (2n-3) \end{bmatrix}.$$

3.3 Pola Spektrum Detour dalam Kajian Islam

Pada surat al-Qamar ayat 49, surat al-Furqan ayat 2, dan surat al-Hijr ayat 21, telah disebutkan bahwasannya Allah menciptakan segala sesuatu dengan ukuran-ukuran tertentu. Begitu juga dengan penelitian ini, pada penelitian ini mencari spektrum detour dari graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$. Untuk $n = 3$, didapatkan spektrum detournya $spec_{DD}(\Gamma_{D_6}) = \begin{bmatrix} -4 & 16 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, kemuadian untuk $n = 4$, didapatkan spektrum detournya $spec_{DD}(\Gamma_{D_8}) = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Begitu seterusnya sehingga untuk $n = 8$, didapatkan spektrum

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

detournya $spec_{DD}(\Gamma_{D_{16}}) = \begin{bmatrix} -13 & 169 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap n memiliki spektrum yang berbeda dan pasti atau dapat dikatakan memiliki ukuran tertentu untuk setiap n. Dan dari ukuran-ukuran tertentu tersebut dapat dilihat bahwa terdapat perubahan yang teratur antara spektrum detour untuk $n = 3$, $n = 4$, dan seterusnya. Sehingga dari keteraturan tersebut, dapat disimpulkan adanya rumusan yang lebih umum untuk setiap n. Hal tersebut dalam matematika disebut dengan teorema. Di mana setiap teorema yang diperoleh harus disertai dengan bukti. Pembuktian dari suatu kesimpulan yang didapatkan sebenarnya sudah diajarkan dalam al-Qur'an sejak ratusan abad yang lalu, yaitu sejak al-Qur'an diturunkan. Pembuktian tersebut dimaksudkan agar dapat diketahui kebenaran atau kesalahan dari pengetahuan atau kesimpulan yang telah diperoleh. Orang-orang yang tidak mau melakukan pembuktian terhadap apa yang telah mereka peroleh digambarkan dalam al-Qur'an yaitu pada surat al-Maidah ayat 104.

Dari sini dapat disimpulkan bahwa betapa maha hebatnya Allah yang telah menciptakan alam semesta beserta apa yang ada di dalamnya dengan ukuran-ukuran yang sangat tepat dan teliti. Sehingga terciptalah suatu keteraturan dan keseimbangan dalam alam semesta seperti yang dapat dirasakan saat ini, yang berdampak pada keindahan yang tidak dapat dikalahkan oleh karya seni apapun. Begitu juga dalam ilmu matematika, keteraturan juga dapat memunculkan keindahan tersendiri.

Matematika jika dilihat dengan benar, bukan saja mengandung kebenaran namun juga keindahan yang utama. Suatu keindahan yang dingin dan sederhana,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

seperti keindahan seni pahat, tanpa memancing reaksi dari hakekat menusia yang lemah. Tanpa jeratan yang memukau seperti lukisan atau musik. Namun demikian murni dan mampu memperlihatkan kesempurnaaan yang tinggi, seperti juga karya-karya seni yang agung (Aziz dan Abdusysyakir, 2006:108).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang sudah didapatkan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan bentuk umum dari spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli ganjil, dengan $n \geq 3$ adalah

$$spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-2)^2 & -(2n-2) \\ 1 & (2n-2) \end{bmatrix}$$

dan spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli genap, dengan $n \geq 3$ adalah

$$spec_{DD}(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3)^2 & -(2n-3) \\ 1 & (2n-3) \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok masalah yaitu menentukan spektrum detour graf *non commuting* dari grup dihedral. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah spektrum detour graf *non commuting* dari grup yang lainnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Azizah, N.N., & Nofandika, F.F.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H.R.. 2006. Non-commuting Graph of a Group. *Journal of Algebra*, Vol 298 Hal: 468-492.

Abdollahi, A., Azad, A., Hassanabadi, A.M., & Zarrin, M.. 2010. On the Clique Numbers of Non-commuting Graphs of Certain Groups. *Algebra Colloquium*, Vol 17 Hal: 611-620.

Abdussakir, Fahruddin, I., & Rahmawati, N.D.. 2009. *Menentukan Spectrum Suatu Graf Berbantuan Matlab*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Sari, F.N.K., & Shandya, D.. 2012. *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Al-Jazairi, S.A.B.J.. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar (jilid 7)*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Maragi, A.M.. 1989. *Tafsir Al-Maragi*. Semarang: CV. Toha Putra.

Anton, H.. 1997. *Aljabar Linier Elementer, Edisi Kelima*. Penj. Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga.

Anton, H.. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear, Jilid 1*. Penj. Hari Suminto. Batam: Interaksara.

Anton, H.. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear, Jilid 2*. Penj. Hari Suminto. Batam: Interaksara.

Anton, H., & Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi*. Penj. Refina Indriasari dan Irzam Harmein. Jakarta: Erlangga.

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S.. 2010. On Detour Spectra of Some Graph. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. Vol 43 Hal: 958-960.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Aziz, A., & Abdusysyakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Budiyasa, I.K.. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1996. *Graphs & Digraphs Third Edition*. New York: Chapman & Hall/CRC.

Dummit, D.S. & Foote, R.M.. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.

El-Fandy, M.J.. 2004. Al-Qur'an tentang Alam Semesta. Penj. Abdul Bar Salim. ___: Amzah.

Mulyono, A., & Abtokhi, A.. 2006. *Fisika dan al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Rahman, H.. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Raisinghania, M.D., & Aggarwal, R.S.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Salim, M.. 2011. *Prinsip Keteraturan Alam Menurut al-Qur'an*. http://muhammadmabrudy.blogspot.com/2011/04/prinsip-keteraturan-alam-menurut-al.htm (diunduh pada tanggal 28 Nopember 2013).

Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Vahidi, J. & Talebi, A.A.. 2010. The Commuting Graphs on Groups D_{2n} and Q_n. *Journal of Mathematics and Computer Science*. Vol 1, No 2, Hal:123-127.

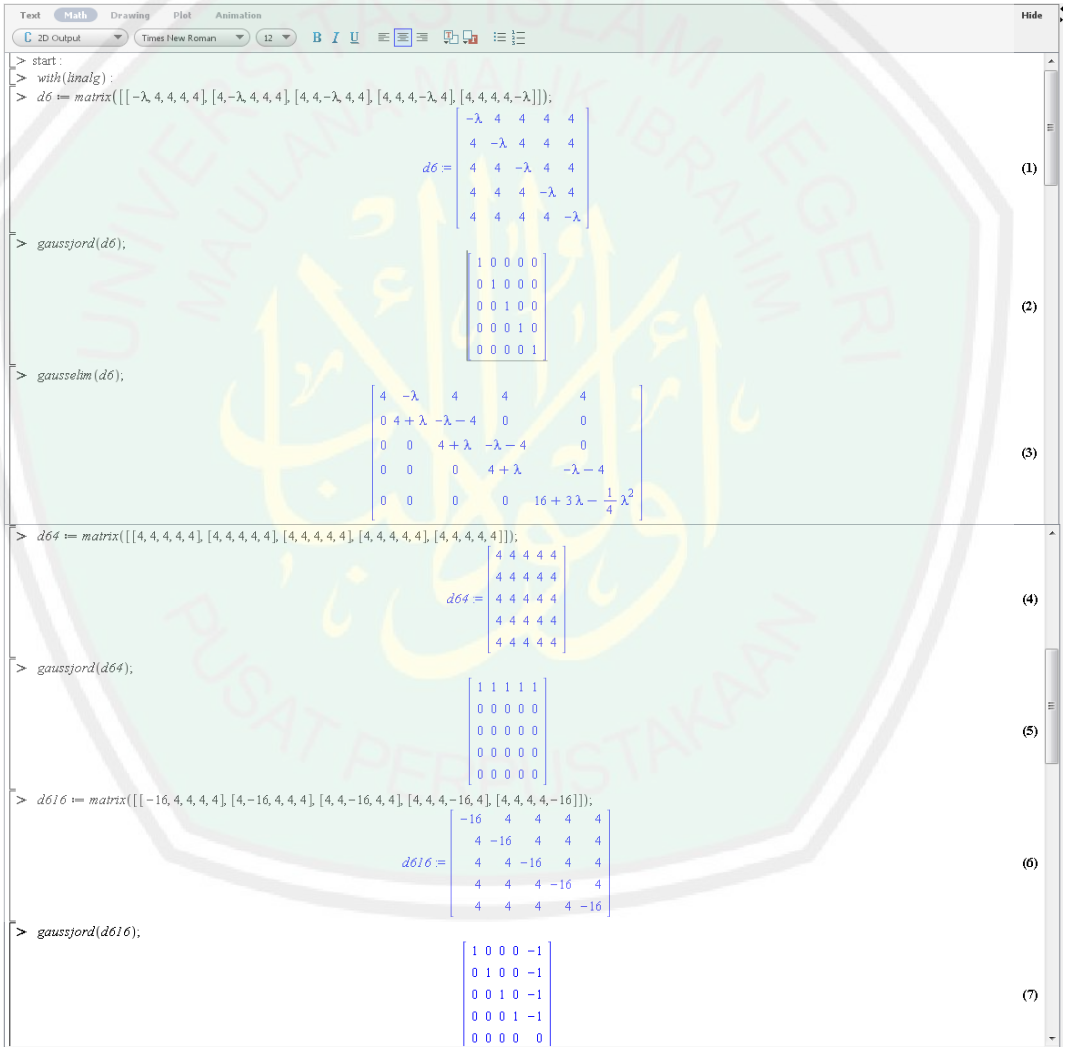
Yin, S.. 2008. Investigation on Spectrum of the Adjacency Matrix and Laplacian Matrix of Graph G_l. *WSEAS Transaction on Systems*. Vol 7, No 4, Hal: 362-372.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

LAMPIRAN

Lampiran 1

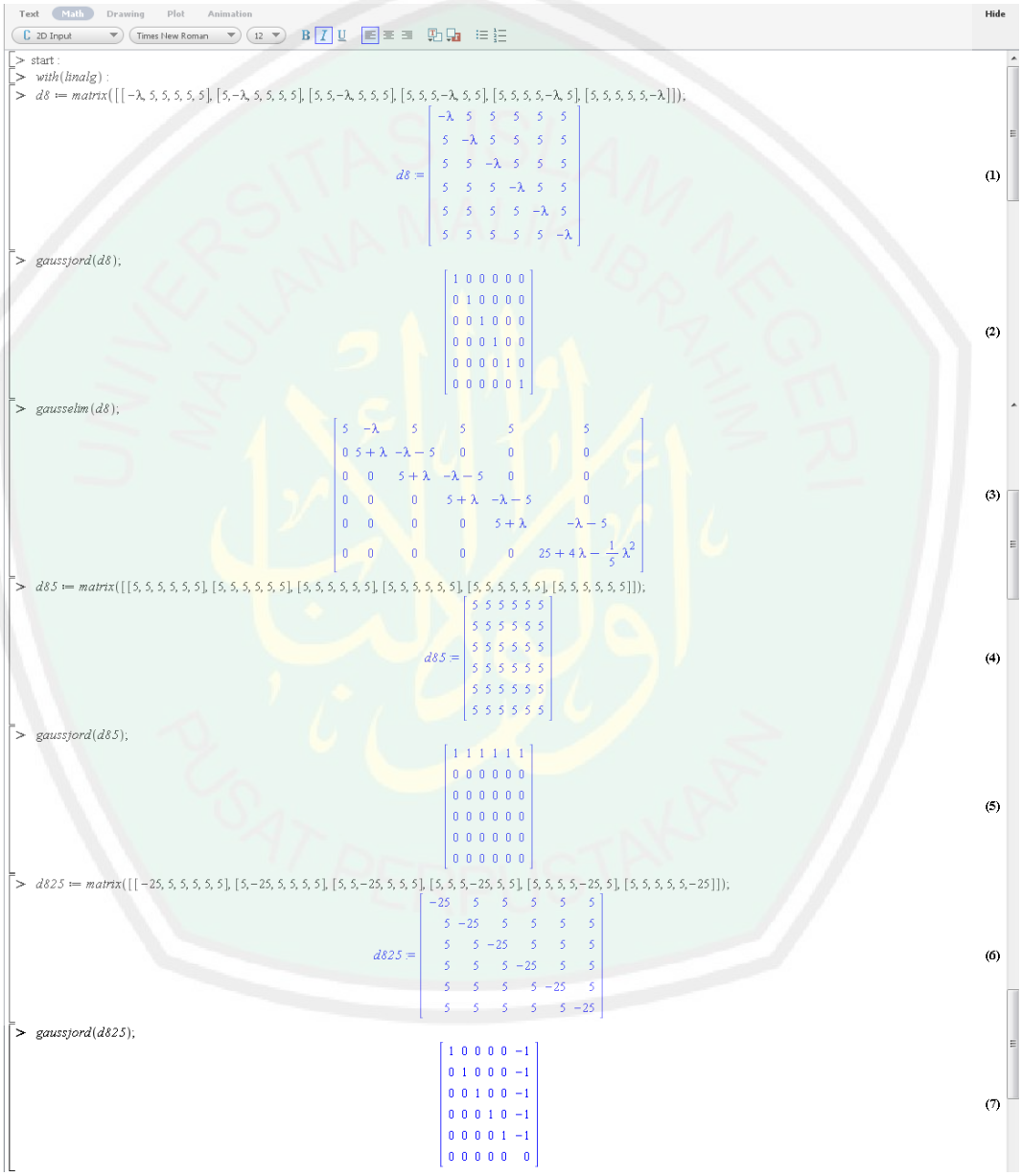
Program Maple 12 untuk eliminasi *Gauss* dan eliminasi *Gauss-Jordan* dari grup D_6.



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 2

Program Maple 12 untuk eliminasi *Gauss* dan eliminasi *Gauss-Jordan* dari grup D_8.



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 3

Program Maple 12 untuk eliminasi *Gauss* dan eliminasi *Gauss-Jordan* dari grup D_{10}.



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

> *gaussjord*(*d108*);

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> *d1064* := *matrix*([[−64, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [8,−64, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 8,−64, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 8,−64, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 8,−64, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8,−64, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8,−64, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8,−64, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8,−64]]);

$$d1064 := \begin{bmatrix} -64&8&8&8&8&8&8&8&8\\ 8&-64&8&8&8&8&8&8&8\\ 8&8&-64&8&8&8&8&8&8\\ 8&8&8&-64&8&8&8&8&8\\ 8&8&8&8&-64&8&8&8&8\\ 8&8&8&8&8&-64&8&8&8\\ 8&8&8&8&8&8&-64&8&8\\ 8&8&8&8&8&8&8&-64&8\\ 8&8&8&8&8&8&8&8&-64 \end{bmatrix} \quad (6)$$

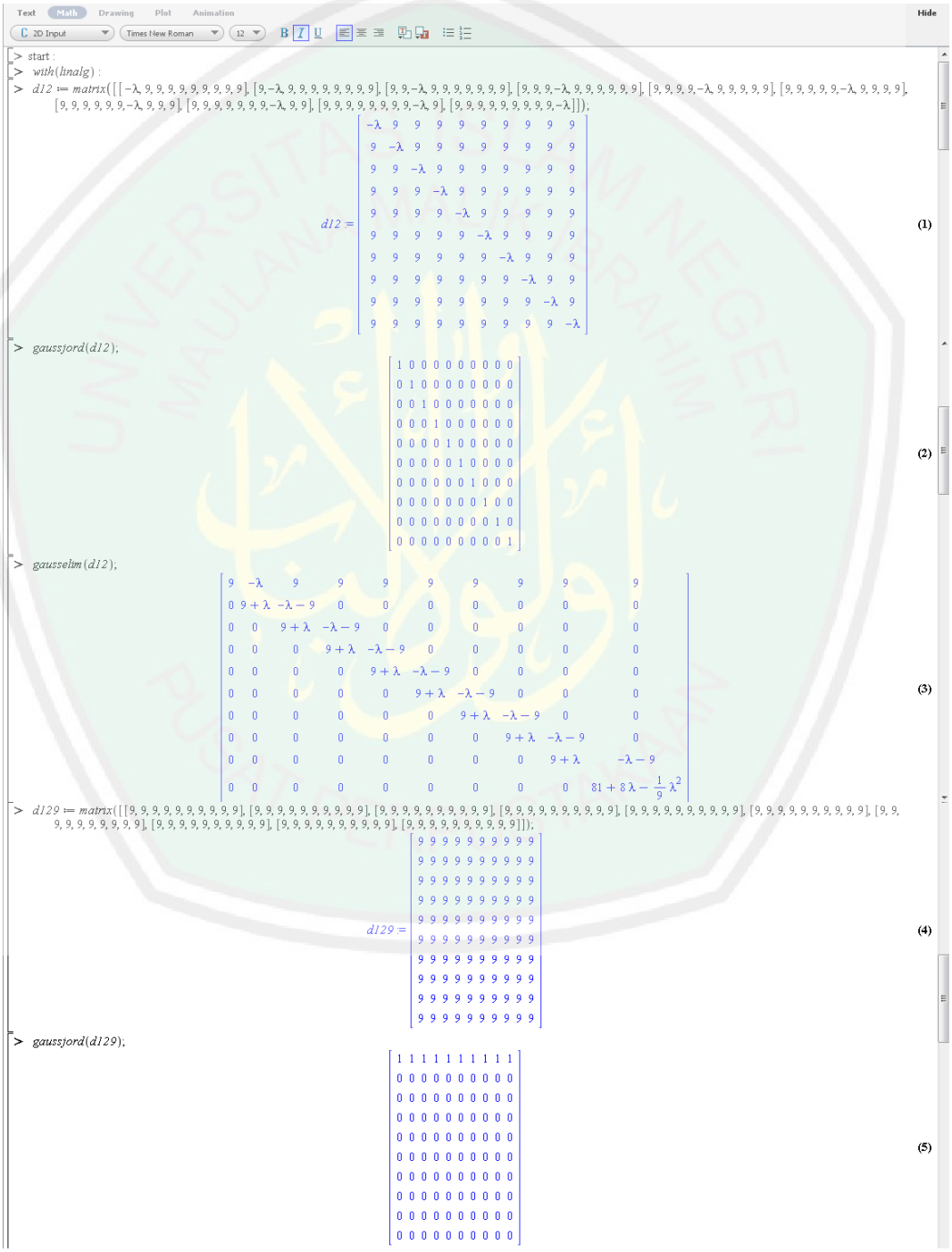
> *gaussjord*(*d1064*);

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 4

Program Maple 12 untuk eliminasi *Gauss* dan eliminasi *Gauss-Jordan* dari grup D_{12}.



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
> d1281 := matrix([[-81, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9], [9,-81, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9], [9, 9,-81, 9, 9, 9, 9, 9, 9], [9, 9, 9,-81, 9, 9, 9, 9, 9], [9, 9, 9, 9,-81, 9, 9, 9, 9], [9, 9, 9, 9, 9,-81, 9, 9, 9], [9, 9, 9, 9, 9, 9,-81, 9, 9], [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9,-81, 9], [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9,-81]]);
```

$$d1281 = \begin{bmatrix} -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -81 \end{bmatrix} \quad (6)$$

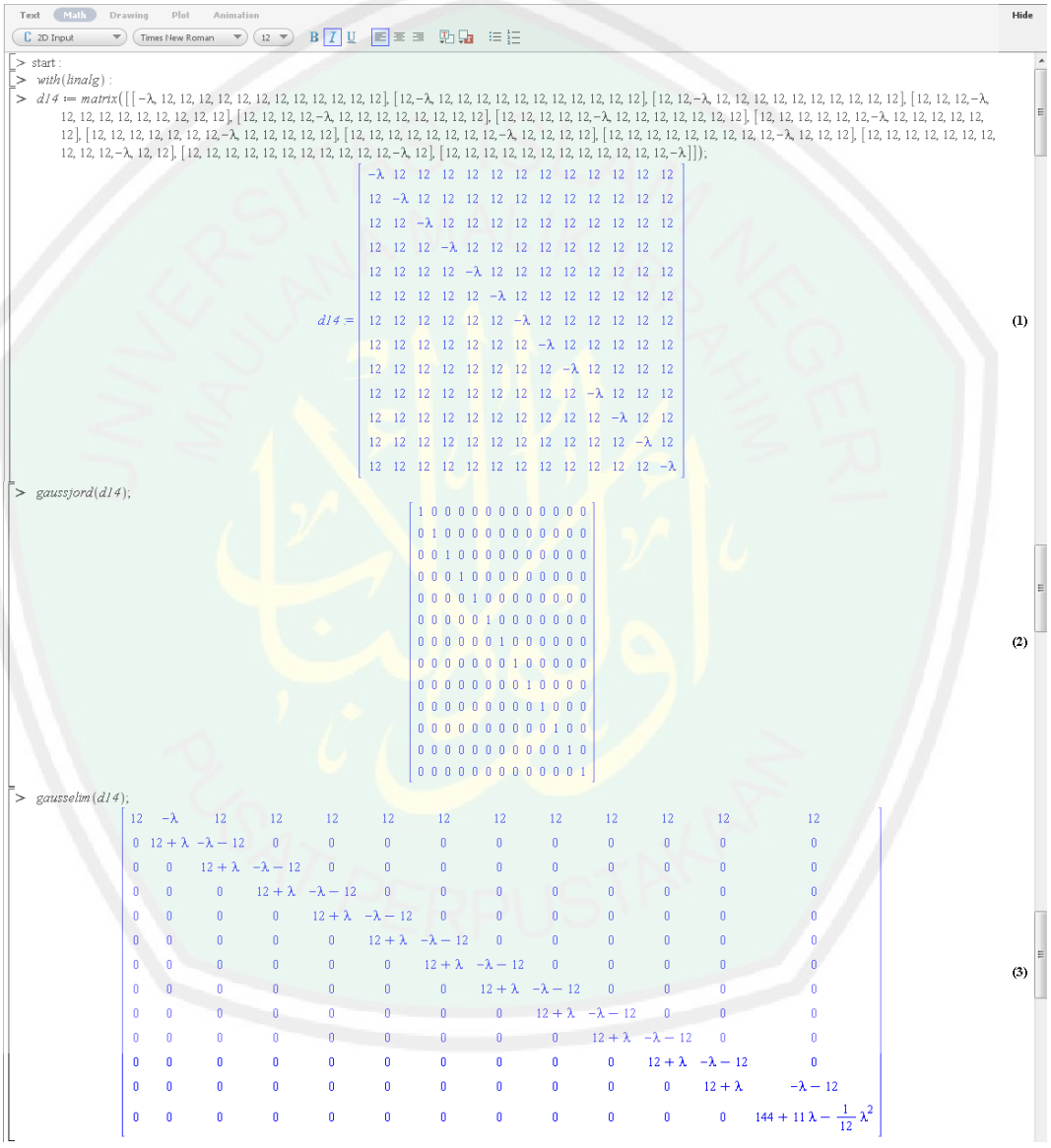
```
> gaussjord(d1281);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 5

Program Maple 12 untuk eliminasi *Gauss* dan eliminasi *Gauss-Jordan* dari grup D_{14}.



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

> *d1412* ≔ *matrix*([[12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]]);

d1412 :=

12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

(4)

> *gaussjord*(*d1412*);

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(5)

> *d14144* ≔ *matrix*([[−144, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, −144, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, −144, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, −144, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, −144, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, −144, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, −144, 12, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, −144, 12, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, −144, 12, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, −144, 12, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, −144, 12, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, −144, 12], [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, −144]]);

d14144 :=

−144	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	−144	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	−144	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	−144	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	−144	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	−144	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	−144	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	−144	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	−144	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	−144	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	−144	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	−144	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	−144

(6)

> *gaussjord*(*d14144*);

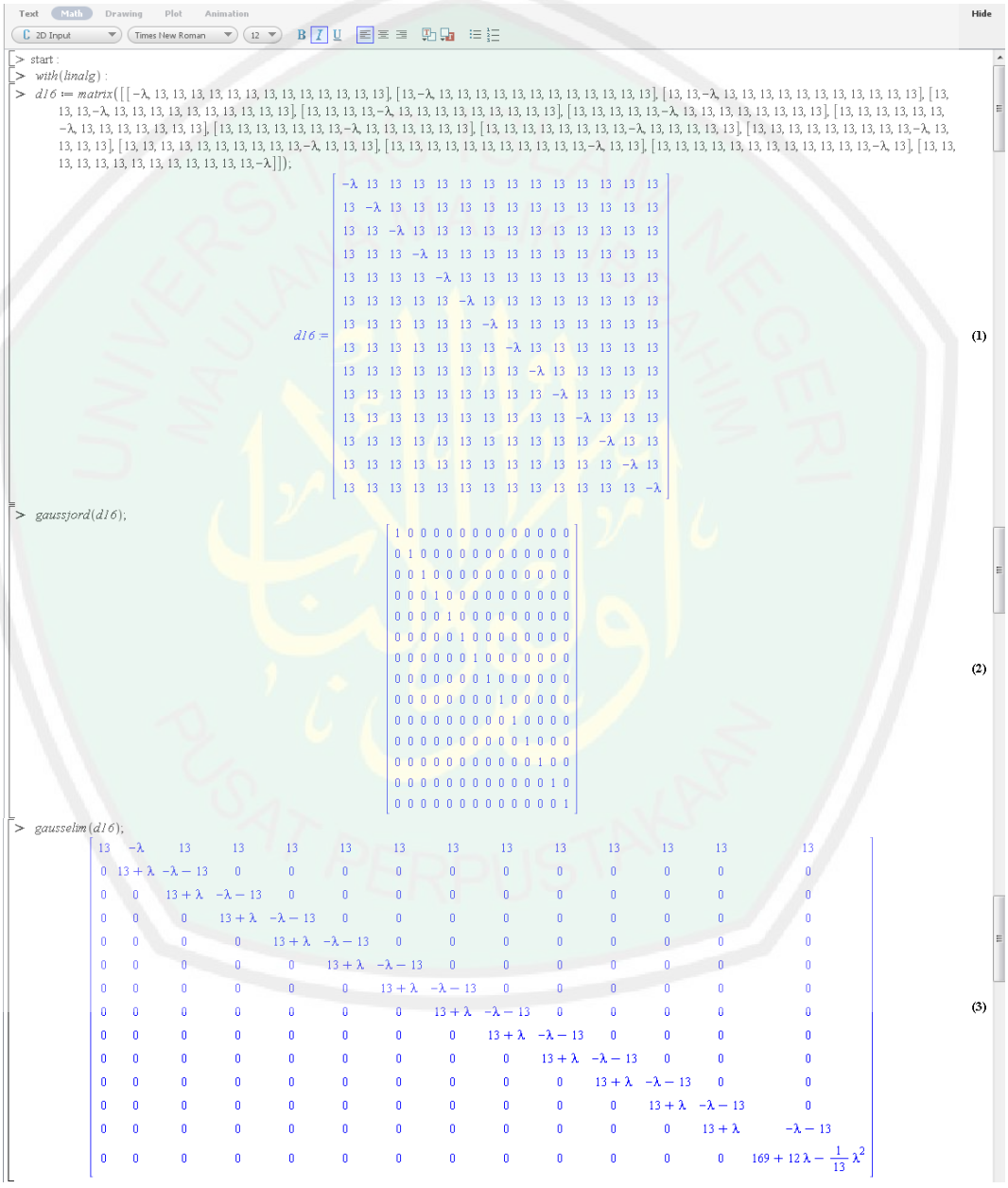
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(7)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 6

Program Maple 12 untuk eliminasi *Gauss* dan eliminasi *Gauss-Jordan* dari grup D_{16}.



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

> *d1613* ≔ *matrix*([[13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13]]);

d1613 :=

13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13

(4)

> *gaussjord*(*d1613*);

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(5)

> *d16169* ≔ *matrix*([[−169, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, −169, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, −169, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, −169, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, −169, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, −169, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, −169, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, −169, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, −169, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, −169, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, −169, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, −169, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, −169, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, −169]]);

d16169 :=

−169	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	−169	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	−169	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	−169	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	−169	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	−169	13	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	−169	13	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	−169	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	−169	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	−169	13	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	−169	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	−169	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	−169	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	−169

(6)

> *gaussjord*(*d16169*);

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(7)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muflihatun Nafisah
NIM : 10610040
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Spektrum Detour Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd.
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	27 Nopember 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	27 Nopember 2013	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	5 Desember 2013	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	3.
4.	11 Desember 2013	Revisi Kajian Keagamaan	4.
5.	12 Desember 2013	Revisi Bab III	5.
6.	8 Januari 2014	ACC Bab I dan Bab II	6.
7.	8 Januari 2014	ACC Kajian Keagamaan	7.
8.	9 Januari 2014	ACC Bab III	8.
9.	10 Januari 2014	Konsultasi Bab IV	9.
10.	13 Januari 2014	ACC Bab IV	10.
11.	15 Januari 2014	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	11.
12.	15 Januari 2014	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 16 Januari 2014
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG