

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN *FORCED* KDV  
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**SYIFA'UL AMAMAH**  
**NIM. 10610037**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2014**

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN *FORCED* KDV  
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:  
SYIFA'UL AMAMAH  
NIM. 10610037**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2014**

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN *FORCED* KDV  
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT**

**SKRIPSI**

**Oleh:  
SYIFA'UL AMAMAH  
NIM. 10610037**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal 02 April 2014:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

**Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004**

**Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001**

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

**Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001**

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN *FORCED* KDV  
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT**

**SKRIPSI**

**Oleh:**  
**SYIFA'UL AMAMAH**  
**NIM. 10610037**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 10 April 2014

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004 \_\_\_\_\_

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001 \_\_\_\_\_

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004 \_\_\_\_\_

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001 \_\_\_\_\_

Mengesahkan,

Ketua Jurusan Matematika

**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
**NIP. 19751006 200312 1 001**

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : SYIFA'UL AMAMAH

NIM : 10610037

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced* KdV Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 1 April 2014  
Yang membuat pernyataan,

Syifa'ul Amamah  
NIM. 10610037

## MOTTO

يَأَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا أَصْبِرُوا وَصَابِرُوا وَرَابِطُوا وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ ﴿٢٠٠﴾

“Hai orang-orang yang beriman, bersabarlah kamu dan kuatkanlah kesabaranmu dan tetaplah bersiap siaga (di perbatasan negerimu) dan bertakwalah kepada Allah, supaya kamu beruntung” (QS. Al-Imran/3:200).

وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ تَجْعَلْ لَهُ مِنْ أَمْرِهِ يُسْرًا ﴿٤﴾

“Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya” (Qs. Ath-Thalaq/65:4)

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Penulis persembahkan karya ini untuk:*

*Ayah Senaji dan Ibunda Karni tercinta serta saudara penulis yang telah memberikan semangat, kasih sayang tak terhingga dan do'a yang tiada henti dalam setiap sujudnya.*

*Seseorang yang sangat berarti yang selalu memberikan do'a dan motivasi bagi penulis.*



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Puji syukur kepada Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat, hidayah dan kasih sayang-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini untuk memenuhi persyaratan guna memperoleh gelar sarjana di Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan penuh ketulusan dari lubuk hati yang paling dalam penulis sampaikan terima kasih kepada semua yang terlibat dan telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dalam penyelesaian skripsi ini.

5. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dosen Wali yang telah memberikan nasihat kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu, selaku orang tua yang selalu memberikan doa, kasih sayang serta motivasi yang sangat berarti bagi penulis.
8. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2010, khususnya Farida Maslucah, Khafidhoh Nurul Aini, Laila Fitriyah, Mohammad Syukron, Binti Tsamrotul Fitriyah, Fatma Mufidah, Nur Laily Arofah, “keluarga math\_A” dan “Asrama Hajjah Khodijah” terima kasih atas segala do’a, motivasi dan kebersamaannya selama ini.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

*Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, April 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

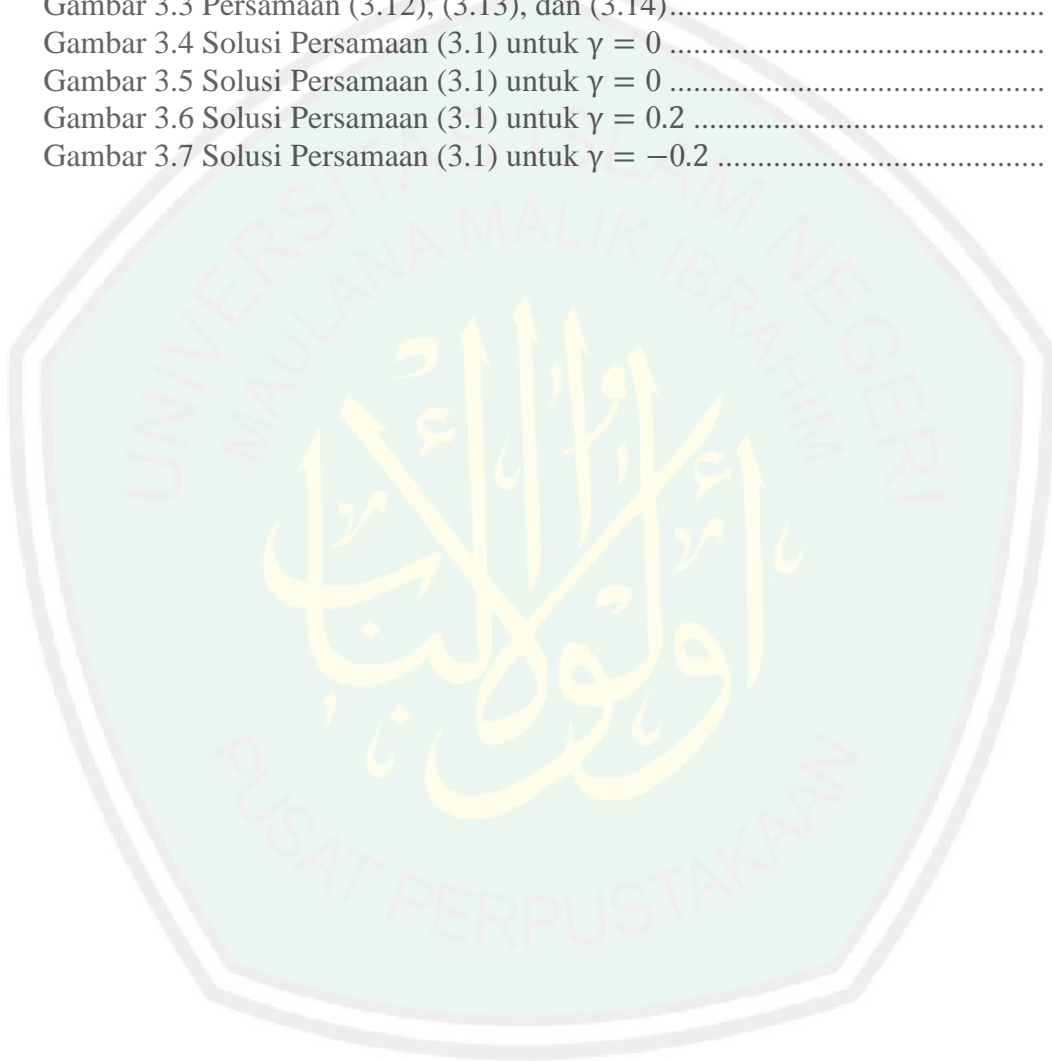
<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiv
<b>ملخص</b> .....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian .....	4
1.4 Manfaat Penelitian .....	4
1.5 Batasan Masalah .....	4
1.6 Metode Penelitian .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan <i>Forced</i> Korteweg de Vries ( <i>Forced</i> KdV) .....	7
2.2 Masalah Syarat Awal dan Kondisi Batas .....	8
2.3 <i>Well Posed</i> .....	10
2.4 Metode Numerik .....	10
2.4.1 Metode Beda Hingga .....	11
2.4.2 Skema Eksplisit .....	14
2.4.3 Stabilitas, Konsistensi dan Konvergensi .....	15
2.5 Penyelesaian Masalah dalam Islam .....	16
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
3.1 Syarat Awal dan Kondisi Batas .....	19
3.2 Diskritisasi .....	19
3.3 Analisis Konvergensi .....	21
3.3.1 Analisis Kestabilan .....	21
3.3.2 Analisis Konsistensi .....	26

3.4 Simulasi dan Interpretasi Hasil.....	32
3.5 Kajian Keagamaan.....	38
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	40
4.2 Saran .....	41
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>42</b>
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>	



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Akar Persamaan (3.10) untuk $\rho_1$ .....	24
Gambar 3.2 Akar Persamaan (3.10) untuk $\rho_2$ .....	24
Gambar 3.3 Persamaan (3.12), (3.13), dan (3.14).....	26
Gambar 3.4 Solusi Persamaan (3.1) untuk $\gamma = 0$ .....	33
Gambar 3.5 Solusi Persamaan (3.1) untuk $\gamma = 0$ .....	34
Gambar 3.6 Solusi Persamaan (3.1) untuk $\gamma = 0.2$ .....	36
Gambar 3.7 Solusi Persamaan (3.1) untuk $\gamma = -0.2$ .....	37



## ABSTRAK

Amamah, Syifa'ul. 2014. **Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced* KdV Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

**Kata Kunci:** Persamaan *forced* KdV, Metode Beda Hingga, Skema Eksplisit, Syarat Kestabilan, Syarat Konsistensi.

Persamaan *forced* KdV adalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang merupakan representasi dari gelombang permukaan yang dihasilkan oleh aliran yang melalui sebuah gundukan. Wiryanto dan Akbar (2008) menyatakan bahwa persamaan *forced* KdV sampai saat ini belum ditemukan solusi analitiknya. Sehingga untuk menentukan solusinya digunakan sebuah metode numerik dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Ada beberapa langkah dalam penyelesaian persamaan *forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema eksplisit antara lain yaitu melakukan diskritisasi pada persamaan *forced* KdV dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit untuk menghampiri solusi analitiknya, selanjutnya menentukan syarat kestabilan dan syarat konsistensi untuk menunjukkan bahwa metode yang digunakan tersebut memiliki solusi yang dapat mendekati solusi analitiknya. Setelah diperoleh syarat kestabilan dan konsistensi dari skema yang digunakan maka simulasi dari skema yang digunakan dapat dilakukan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan metode beda hingga skema eksplisit pada persamaan *forced* KdV stabil dengan syarat tertentu. Untuk peneliti selanjutnya dapat menyelesaikan persamaan *forced* KdV menggunakan metode *semi-implicit pseudo spectral*.

## ABSTRACT

Amamah, Syifa'ul. 2014. **Numerical Solution of *Forced* KdV Equation Using Explicit Finite Difference Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

**Keywords:** *Forced* KdV, Finite Difference Method, Explicit Schemes, Stability, Consistency.

*Forced* KdV equation is a nonlinear partial differential equation that represents the surface waves generated by flow over a bump. Wiryanto dan Akbar (2008) said that the analytical solution of *forced* KdV equation still unknown. Therefore to obtain the solution we used numerical procedure using explicit finite difference scheme. There are several steps in solving *forced* KdV, these are discretizing the *forced* KdV equation using explicit finite difference scheme in order to approximate analytical solution, then defining the stability and consistency terms to show that the method has a solution that approaches the analytical solution. After getting the stability and consistency terms the simulation of the scheme can be used. From a series of the simulation it shows that explicit finite difference scheme on a *forced* KdV equation is stable with certain conditions. For further research one can resolve the *forced* KdV equation using the semi-implicit pseudo-spectral method.

## ملخص

أمامة، الشفاء. ٢٠١٤. تصفية العددي ومعادلة القصري كدف (KdV) بالاستعمال طريقة الفروق المحدودة وخطة واضحة. البحث العلمي. شعبة الرياضيات كلية العلوم التكنولوجية، بجامعة مولانا مالك إبراهيم الحكيمة لإسلامية مالانج. تحت الإشراف: (١) محمد جمهوري الماجستير. (٢) الدكتور عبد الشاكر الماجستير.

الكلمة الأساسية: معادلة القصري كدف (KdV)، طريقة الفروق المحدودة، خطة واحدة، متطلبات الأستقرائي، حيث الأتساق.

معادلة القصري كدف (KdV) هي معادلة المفارقة غير الخطية وهي التمثيل من موجة السطحية التي تحصل بسيل على الكومة و حتى الآن ما توجد الحلّ التحليل عنه. إذا، لتعيين الحلّ فيها قد استعمل الطريقة العددية با استعمال الطريقة الفروق المحدودة بمخطط الواضح. هناك المحتويات في انهاء المعادلة القصري كدف (KdV) با استعمال الطريقة الفروق المحدودة لوجود الحلّ التحليل عنه ثم تعيين متطلبات الاستقرار وحيث الإتساق من المخطط المستعمل. اذاً بذلك الحاصل، يدل علي أن استعمال الطريق الفروق المحدودة بخططة واضحة في معادلة القصري كدف (KdV) مناسبة بشرط معين. لمزيد من البحوث يمكن حل المعادلة كدف (KdV) القصري باستخدام الزائفة الطيفية شبه الضمنية.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Persamaan *forced* Korteweg de Vries ( *forced* KdV) merupakan model hampiran untuk gelombang yang merambat pada permukaan perairan dangkal, yang dibangkitkan oleh gundukan yang berada pada dasar perairan. Wiryanto dan Akbar (2008) menyebutkan bahwa sampai saat ini belum ditemukan solusi analitiknya. Oleh karena itu, solusi persamaan *forced* KdV dapat dicari menggunakan metode numerik. Solusi persamaan *forced* KdV baru-baru ini telah diselesaikan oleh Grimshaw, dkk (2007) menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*), serta Wiryanto dan Akbar (2008) menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS (*Forward Time Central Space*).

Pada skema eksplisit, penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinier relatif mudah dilakukan, tetapi syarat kestabilannya seringkali tidak dapat ditentukan. Pada skema eksplisit nilai setiap besaran waktu yang sebelumnya selalu diketahui, sehingga nilai  $n+1$  dapat dihitung (Triatmodjo, 2002:206). Grimshaw, dkk (2007) menyebutkan bahwa skema eksplisit pada persamaan *forced* KdV dapat digunakan dengan syarat kestabilan tertentu, tetapi dalam artikel tersebut tidak disebutkan bagaimana syarat kestabilannya. Sehingga dalam penelitian ini penulis memfokuskan pada masalah penentuan syarat kestabilan dan syarat konsistensi dari persamaan *forced* KdV sebagaimana yang

dimodelkan oleh Farida Maslucuh dalam penelitian tugas akhirnya, yang modelnya hampir sama dengan persamaan *forced* KdV yang dibahas oleh Grimshaw, dkk (2007) dalam artikel tersebut.

Dalam penelitian ini diselesaikan persamaan *forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema eksplisit, dalam penyelesaian persamaan *forced* KdV tersebut dilakukan penentuan syarat awal dan kondisi batas dari persamaan *forced* KdV yang digunakan, selanjutnya melakukan diskritisasi pada persamaan *forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS, menentukan syarat kestabilan, menentukan syarat konsistensi, melakukan simulasi dari metode yang digunakan, dan interpretasi hasil.

Analisis kestabilan dari skema yang digunakan dapat dicari menggunakan stabilitas *von Neumann* dengan mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$  ke dalam persamaan beda yang digunakan, sedangkan untuk analisis konsistensi dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Zauderer (2006:793-795) menyebutkan bahwa syarat perlu dan cukup stabilitas *von Neumann* yaitu  $|\rho| \leq 1$  dan kriteria konsistensi akan terpenuhi jika  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ . Jika syarat kestabilan dan konsistensi terpenuhi maka solusi numerik tersebut akan mendekati solusi analitik.

Manusia diwajibkan untuk mengembangkan akalnya dengan berbagai metode untuk menciptakan sesuatu yang dianggap dapat menjadikan sesuatu hal tersebut lebih baik, lebih mudah dan lebih maksimal hasilnya. Seperti firman Allah SWT dalam Al-Qur'an yaitu

يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمْ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمْ الْعُسْرَ ﴿١٨٥﴾

Artinya: “Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu” (QS. Al-Baqarah/02: 185).

Ayat di atas menyebutkan bahwa Allah menghendaki kemudahan bagi umat manusia dan tidak menghendaki kesukaran. Jika Allah menghendaki kemudahan bagi umatnya, maka manusiapun menghendaki kemudahan bagi dirinya sendiri dan bagi orang lain. Dengan demikian, maka harapan penulis dapat mempermudah penulis serta pengguna untuk menyelesaikan permasalahan matematis serta dapat menemukan metode yang lebih mudah dan sederhana dalam menyelesaikan permasalahan tersebut, sebagaimana yang dijelaskan dalam sebuah hadits:

قال رسول الله صلى الله عليه وآله وصحبه وسلم (يَسِّرُوا وَلَا تُعَسِّرُوا وَبَشِّرُوا وَلَا تُنْفِرُوا)  
(رواه البخاري ومسلم)

Artinya: “Senangkanlah (Permudahkanlah) dan jangan susahkan dan berilah kabar gembira dan jangan berikan kabar buruk (buatkan orang lain dari padamu)”.

Oleh karena itu, tema yang diangkat dalam penelitian ini adalah “Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced* KdV Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini di antaranya:

1. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan *forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema eksplisit?
2. Bagaimana syarat kestabilan dan konsistensi dari skema yang digunakan?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, penelitian ini mempunyai tujuan di antaranya:

1. Menyelesaikan persamaan *forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema eksplisit
2. Menentukan syarat kestabilan dan konsistensi dari skema yang digunakan.

### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian persamaan *forced* KdV dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit, serta dapat menemukan metode yang lebih mudah dan sederhana dalam menyelesaikan persamaan tersebut.

### 1.5 Batasan Masalah

Dengan melihat permasalahan yang telah dipaparkan di atas, dalam penelitian ini terdapat batasan masalah di antaranya:

1. Persamaan *forced* KdV yang dicari penyelesaiannya adalah persamaan *forced* KdV yang telah diselesaikan oleh Grimshaw, dkk (2007), yaitu

$$u_t + \gamma u_x - \frac{3}{2} uu_x - \frac{1}{6} u_{xxx} = \frac{1}{2} F_x$$

Dengan syarat awal yang diberikan yaitu  $u(x, 0) = 0$  dan kondisi batas yang diberikan  $u(-\infty, t) = 0$  dan  $u(\infty, t) = 0$ .

2. Metode beda hingga skema eksplisit yang digunakan adalah skema eksplisit CTCS.

### 1.6 Metode Penelitian

Teknik kajian yang digunakan dalam pembahasan penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*). Penelitian kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kepustakaan berisi satu topik yang di dalamnya memuat beberapa gagasan yang berkaitan dan harus didukung oleh data yang diperoleh dari berbagai sumber kepustakaan. Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan penelitian ini di antaranya:

1. Menentukan syarat awal dan kondisi batas dari persamaan *forced* KdV yang digunakan.
2. Melakukan diskritisasi pada persamaan *forced* KdV dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*).
3. Menentukan syarat kestabilan.
4. Menentukan syarat konsistensi.
5. Melakukan simulasi dari metode yang digunakan.
6. Interpretasi hasil.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika yang digunakan dalam skripsi ini di antaranya:

### Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

### Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka meliputi: penjelasan-penjelasan tentang persamaan *forced* KdV, masalah syarat awal dan kondisi batas, *well posed*, metode numerik, metode beda hingga, skema eksplisit, kestabilan, konsistensi, konvergensi, dan penyelesaian masalah dalam Islam.

### Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang syarat awal dan kondisi batas, diskritisasi, konvergensi, analisis kestabilan, analisis konsistensi, simulasi dan interpretasi hasil, serta kajian keagamaan.

### Bab IV Penutup

Bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan *Forced Korteweg de Vries (forced KdV)*

Grimshaw, dkk (2007) menyebutkan bahwa persamaan *forced KdV* adalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang merupakan representasi dari gelombang permukaan yang dihasilkan oleh aliran yang melalui sebuah gundukan. Wiryanto dan Akbar (2008) menyebutkan bahwa sampai saat ini belum ditemukan solusi analitiknya. Secara umum persamaan *forced KdV* berbentuk

$$u_t + \gamma u_x - \mu uu_x - \lambda u_{xxx} = \frac{c}{2} F_x(x) \quad (2.4)$$

Persamaan *forced KdV* (2.4) memiliki dua variabel bebas yaitu  $x$  dan  $t$ , serta satu variabel terikat yaitu  $u$  yang merupakan ketinggian gelombang permukaan. Sedangkan  $\mu, \lambda$  merupakan suatu konstanta yang berkaitan dengan besaran fisis yang mempunyai hubungan berikut:

$$\mu = \frac{3c}{2h}, \lambda = \frac{ch^2}{6}, c = (gh)^{1/2}$$

dengan  $h$  menyatakan kedalaman,  $g$  sebagai gravitasi, dan  $c$  merupakan variabel kecepatan rambat.

Selanjutnya  $\gamma$  yang merupakan perbedaan kecepatan aliran, dimana jika  $\gamma < 0$  disebut aliran subkritis (*subcritical flow*), jika  $\gamma > 0$  disebut aliran superkritis (*supercritical flow*), sedangkan jika  $\gamma = 0$  maka disebut aliran kritis (*critical flow*). Sedangkan  $F(x)$  adalah fungsi untuk gundukan pada dasar saluran,

gaya luar yang diberikan sebagaimana yang terdapat dalam Grimshaw, dkk (2007) yaitu

$$F(x) = \frac{F_M}{2} (\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$$

Bentuk gaya luar yang digunakan di atas, berupa gundukan dengan puncak datar dengan lebar  $L$  dan tinggi gundukan sebesar  $F_M$ . Sedangkan  $\mu$  merupakan sudut kemiringan antara  $F_M$  dan  $s$  sebagai lebar kaki dari gundukan tersebut.

## 2.2 Masalah Syarat awal dan Kondisi batas

Spiegel (1983:2) menyebutkan bahwa selesaian persamaan diferensial parsial dikenal dengan istilah selesaian umum dan selesaian khusus. Selesaian umum adalah suatu selesaian yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaannya. Sedangkan selesaian khusus adalah selesaian yang biasa didapatkan dari selesaian umumnya. Berikut ini selesaian

$$u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + f(x) + g(y)$$

merupakan selesaian umum dari persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$$

Spiegel (1983:276) menyebutkan bahwa masalah kondisi batas melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua selesaian yang memenuhi syarat kondisi batas. Misal persamaan diferensial linier orde dua

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

dimana  $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$  merupakan koefisien dan fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi yang kontinu di dalam selang  $a \leq x \leq b$  dengan  $a_2(x) \neq 0$ .

Menentukan selesaian  $y(x)$  dari persamaan diferensial tersebut pada sebuah titik  $x = x_0$  di dalam selang  $a \leq x \leq b$  dan memenuhi syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1$$

Merupakan suatu masalah syarat awal. Variabel bebas  $x$  dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu awal  $x_0$ , sedangkan  $y_0$  dan  $y_1$  menyatakan syarat awal.

Jika variabel bebas  $x$  merupakan variabel yang menyatakan tempat (*space variabel*), maka mencari suatu selesaian  $y(x)$  dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat awal dari selang  $a \leq x \leq b$  yaitu

$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B$$

dengan A dan B adalah konstanta yang disebut kondisi batas. Bentuk dari kondisi batas pada titik akhir dapat berbeda-beda. Nagle dan saff (1996:612) menyebutkan bahwa ada beberapa bentuk khusus kondisi batas yang digunakan dalam aplikasi, di antaranya:

*Separated* :  $a_1y(a) + a_2y'(a) = c_1$

$$b_1y(b) + b_2y'(b) = c_1$$

*Dirichlet* :  $y(a) = c_1, y(b) = c_2$

*Neumann* :  $y'(a) = c_1, y'(b) = c_2$

*Periodic* :  $y(-T) = y(T), y'(-T) = y'(T)$

$$y(0) = y(2T), y'(0) = y'(2T)$$

dimana periodenya adalah  $2T$ , bentuk *Dirichlet* dan Neumann adalah kondisi batas yang khusus digunakan pada masalah kondisi batas.

### 2.3 Well Posed

Strauss (2007:25) menyebutkan bahwa suatu persamaan diferensial parsial dengan syarat awal dan syarat batas dikatakan *well posed* jika memenuhi syarat:

1. Eksistensi: paling tidak terdapat satu solusi.
2. Keunikan: hanya terdapat satu solusi.
3. Stabilitas: jika data berubah sedikit, maka solusi akan berubah sedikit.

Strauss (2007:25-26) menyebutkan bahwa para ilmuwan biasanya mencoba mengatur kondisi fisik dari suatu permasalahan yang dapat di modelkan dengan persamaan diferensial parsial supaya masalah tersebut menjadi *well posed*, sedangkan matematikawan mencoba untuk membuktikan apakah model beserta kondisi yang diberikan tersebut *well posed* atau tidak. Jika kondisi yang diberikan terlalu sedikit, maka kemungkinan akan terdapat lebih dari satu solusi (*nonuniqueness*) sedangkan jika kondisi yang diberikan terlalu banyak, maka kemungkinan tidak terdapat solusi (*nonexistence*).

### 2.4 Metode Numerik

Munir (2008:5) menyebutkan bahwa metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan

dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Suatu solusi dengan metode numerik selalu berbentuk angka. Metode numerik hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan. Solusi hampiran jelas tidak sama dengan solusi sejati (*exact solution*), sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*).

#### 2.4.1 Metode Beda Hingga

Strauss (2007:199) menyebutkan bahwa metode beda hingga merupakan sebuah metode yang sangat populer dalam penyelesaian masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Adapun operator metode beda hingga yaitu persamaan beda maju

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad (2.5)$$

persamaan beda mundur

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (2.6)$$

persamaan beda pusat

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.7)$$

Persamaan (2.5), (2.6), dan (2.7) dapat diperoleh dari ekspansi deret Taylor, misalkan diberikan fungsi  $u(x + \Delta x, t)$ ,  $u(x - \Delta x, t)$ ,  $u(x + 2\Delta x, t)$ ,  $u(x - 2\Delta x, t)$ ,

$u(x, t - \Delta t)$ , dan  $u(x, t + \Delta t)$  diaproksimasikan ke dalam deret Taylor di sekitar  $(x, t)$  sebagai berikut:

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + u_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx}(x, t) \Delta x^2 + \frac{1}{6} u_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.8)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - u_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{1}{6} u_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.9)$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt}(x, t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} u_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots \quad (2.10)$$

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - u_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt}(x, t) \Delta t^2 - \frac{1}{6} u_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots \quad (2.11)$$

$$u(x + 2\Delta x, t) = u(x, t) + 2u_x(x, t) \Delta x + 2u_{xx}(x, t) \Delta x^2 + \frac{4}{3} u_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.12)$$

$$u(x - 2\Delta x, t) = u(x, t) - 2u_x(x, t) \Delta x + 2u_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{4}{3} u_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.13)$$

Turunan hampiran pertama terhadap  $x$  untuk beda maju, beda mundur dan beda pusat dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.8), (2.9), (2.10), dan (2.11) yang dipotong sampai orde tertentu. Turunan hampiran pertama terhadap  $x$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangi persamaan (2.8) dengan persamaan (2.9), sehingga diperoleh

$$u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) = 2u_x(x, t)\Delta x - \frac{1}{6} u_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots$$

$$2\Delta x u_x(x, t) = u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^3$$

$$u_x(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^3 \quad (2.14)$$

sedangkan turunan hampiran pertama terhadap  $t$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.10) dengan persamaan (2.11), sehingga diperoleh

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) = 2u_t(x, t)\Delta t - \frac{1}{6} u_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots$$

$$2\Delta t u_t(x, t) = u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) + O(\Delta t)^3$$

$$u_t(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta t} + O(\Delta t)^3 \quad (2.15)$$

Jika digunakan indeks subskrip  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$ , dan superskrip  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $t$  maka persamaan (2.14) dan (2.15) dapat ditulis

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

(Strauss, 2007:199)

Adapun apkroksimasi turunan kedua terhadap  $x$  untuk beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.8) dengan persamaan (2.9), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) &= 2u(x, t) + 2 \frac{1}{2} u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \dots \\
u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) &= 2u(x, t) + u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + O(\Delta x)^4 \\
u_{xx}(x, t)\Delta x^2 &= u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^4 \\
u_{xx}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^4 \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama yaitu dengan menggunakan persamaan (2.12) dengan persamaan (2.13) dapat diperoleh turunan ketiga terhadap  $x$  yaitu

$$\begin{aligned}
&u_{xxx}(x, t) \\
&= \frac{u(x + 2\Delta x, t) - 2u(x + \Delta x, t) + 2u(x - \Delta x, t) - u(x - 2\Delta x, t)}{2\Delta x^3} \\
&+ O(\Delta x)^5 \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Jika digunakan indeks subskrip  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$ , dan superskrip  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $t$  maka persamaan (2.16) dan (2.17) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \approx \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \quad (\text{Strauss, 2007: 199}) \quad (2.19)$$

Strauss (2007:201) menyebutkan bahwa terdapat dua jenis galat (*error*) dalam sebuah komputasi yang menggunakan aproksimasi tersebut yaitu *truncation error* (*error* pemotongan) *error* yang terjadi karena pemotongan dari suatu deret tak hingga menjadi deret berhingga dan *roundoff error* (*Eerror* pembulatan) *error* yang terjadi akibat pembulatan suatu bilangan sampai pada beberapa digit tertentu.

### 2.4.2 Skema Eksplisit

Triatmodjo (2002:206) menyebutkan bahwa dalam skema eksplisit, nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik di sekitarnya pada waktu sebelumnya yang sudah diketahui nilainya atau nilai setiap besaran waktu yang lalu sudah diketahui, sehingga nilai  $n+1$  dapat dihitung. Dengan metode ini penurunan persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk beda hingga adalah mudah. Namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya ketidakstabilan hitungan dalam skema yang digunakan, dan kemungkinan juga stabil dengan syarat tertentu.

### 2.4.3 Stabilitas, Konsistensi dan Konvergensi

Zauderer (2006:793-795) menyebutkan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Ketidakstabilan skema beda hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai eksak.

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan skema adalah stabilitas *von Neumann* atau juga dikenal dengan stabilitas *Fourier*, dengan menerapkan stabilitas *von Neumann* terhadap skema beda hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$  kedalam persamaan tersebut, yang mana superskrip  $i$  menunjukkan posisi,  $n$  menunjukkan waktu,  $j$  merupakan

vektor dan untuk semua  $a$  dalam interval  $[0, 2\pi]$ . Syarat perlu dan cukup stabilitas *von Neumann* adalah:

$$|\rho| \leq 1$$

Zauderer (2006:742) menyebutkan bahwa aproksimasi solusi pasti konvergen ke solusi analitiknya, jika konsistensi dari persamaan beda dan kestabilan dari skema yang diberikan terpenuhi. Kriteria konsistensi dengan sendirinya akan terpenuhi jika  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ .

## 2.5 Penyelesaian Masalah dalam Islam

Berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari telah dihadapi oleh manusia dengan berbagai macam cara penyelesaian. Begitu juga dalam matematika, suatu persamaan dapat diselesaikan dengan berbagai cara. Munir (2008:5) menyebutkan bahwa secara umum suatu persamaan terdapat dua solusi yaitu solusi analitik atau disebut solusi sesungguhnya dan solusi numerik yang disebut sebagai solusi hampiran. Sehingga dapat diketahui bahwasannya setiap permasalahan selalu ada solusinya meskipun harus melalui proses yang sulit. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT dalam Al-Qur'an yaitu

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

Artinya: “*Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*” (QS. Al-Insyiroh/94: 5).

Ayat di atas menyebutkan sesudah kesulitan terdapat kemudahan. Ketika suatu persamaan sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik karena

melibatkan bentuk dan proses yang rumit, maka masih ada jalan lain untuk mendapatkan solusinya yakni secara numerik. Namun perhitungan dengan metode numerik secara manual memerlukan waktu yang lama dan berulang-ulang sehingga dibutuhkan ketelitian agar tidak terdapat kesalahan. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT dalam Al-Qur'an yaitu

لَقَدْ أَحْصَيْنَاهُمْ وَعَدَّاهُمْ عَدًّا

*Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (QS. Maryam/19: 94).*

Menurut Shihab (2002:256-257) dari ayat di atas dapat diketahui bahwa Allah yang dilukiskan sebagai *ahshaahum* atau dalam istilah hadits *Asma' al-Husna* adalah Al-mushi dipahami oleh banyak ulama sebagai Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak, seperti hembusan nafas, dan rincian perolehan rizki. Allah adalah Dia yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, dan lain sebagainya.

Suatu permasalahan memiliki banyak penyelesaian dan semua manusia dapat menyelesaikan suatu permasalahan, akan tetapi tidak semua manusia dapat menyelesaikan permasalahan yang sama, sekalipun Allah memberikan fasilitas yang sama kepada mereka. Karena pada hakikatnya, Allah menghendaki tugas atau tanggung jawab dari manusia sesuai dengan kemampuan mereka. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT dalam Al-Qur'an yaitu

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا

*Artinya: “Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya” (QS. Al-Baqarah /02: 286).*

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا مَّا آتَتْهَا سَيَجْعَلُ اللَّهُ بَعْدَ عُسْرٍ يُسْرًا

*Artinya: “Allah tidak memikulkan beban kepada seseorang melainkan sekedar apa yang Allah berikan kepadanya. Allah kelak akan memberikan kelapangan sesudah kesempitan” (QS. At-Thalaq /65: 7).*

Ayat di atas menyebutkan Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ujian yang dikenakan kepada setiap umat manusia dalam menyelesaikan suatu masalah yang diberikan bersesuaian dengan apa yang mampu ditanggungnya, tidak terkecuali dalam matematika. Tidak semua manusia dapat menyelesaikan persoalan matematika baik itu secara analitik maupun secara numerik, dan tidak semua manusia dapat menyelesaikan persoalan matematika dengan metode yang sama. Manusia diberi akal dan kemampuan berpikir sehingga mampu memilih penyelesaian yang sesuai dengan masalah yang diberikan.

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Syarat Awal dan Kondisi Batas

Menentukan syarat awal dan kondisi batas merupakan langkah pertama dalam penyelesaian numerik persamaan *forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS. Dalam penyelesaian numerik tersebut dapat diberikan kondisi batas  $u(-\infty, t) = 0$  dan  $u(\infty, t) = 0$ , dan jika dasar saluran rata maka  $F_x = 0$  sehingga persamaan (2.4) menjadi

$$u_t + \gamma u_x - \mu uu_x - \lambda u_{xxx} = 0$$

Pada saat  $F_x = 0$ , dapat diberikan syarat awal  $u(x, 0) = 0$  atau  $u(x, 0) = f(x)$ , untuk setiap  $f(x)$  sebarang fungsi. Begitu juga pada saat  $F_x \neq 0$  yang artinya pada dasar saluran tersebut terdapat gundukan, dapat diberikan syarat awal  $u(x, 0) = 0$  atau  $u(x, 0) = f(x)$ , dengan syarat awal  $u(x, 0) = 0$  akan menghasilkan solusi yang berbeda dengan syarat awal  $u(x, 0) = f(x)$ . Namun pada simulasi cukup diberikan syarat awal  $u(x, 0) = 0$ .

#### 3.2 Diskritisasi

Grimshaw, dkk (2007) menyebutkan bahwa persamaan (2.4) merupakan bentuk umum dari persamaan *forced* KdV. Dengan nilai  $\mu, \lambda, c$

$$\mu = \frac{3}{2}, \lambda = \frac{1}{6}, c = 1$$

didapatkan

$$u_t + \gamma u_x - \frac{3}{2} uu_x - \frac{1}{6} u_{xxx} = \frac{1}{2} F_x \quad (3.1)$$

Persamaan *forced* KdV yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan (3.1). Penyelesaian numerik persamaan tersebut menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Adapun persamaan beda CTCS yang digunakan di antaranya:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{3} (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \approx \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \quad (3.5)$$

Selanjutnya diskritisasi pada persamaan *forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS dapat dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5) ke dalam persamaan (3.1), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \gamma \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) - \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ - \frac{1}{6} \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2(\Delta x)^3} = \frac{1}{2} F_x \end{aligned} \quad (3.6)$$

Persamaan (3.6) dapat diuraikan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} = & u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{2} \right) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\
 & + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n) + \Delta t F_x \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

### 3.3 Analisis Konvergensi

Teorema ekuivalensi lax menyebutkan bahwa untuk suatu masalah syarat awal yang *well posed*, dan jika suatu persamaan beda konsisten dan stabil, maka persamaan tersebut konvergen. Dalam hal ini akan digunakan analisis stabilitas *von Neumann* yang mana syarat kestabilannya adalah  $|\rho| \leq 1$ . Oleh karena itu, jika skema yang digunakan stabil dan konsisten maka konvergensi dari skema tersebut akan terpenuhi.

#### 3.3.1 Analisis Kestabilan

Untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk mendekati persamaan *forced* KdV tersebut stabil atau tidak, maka perlu melakukan uji kestabilan dengan menggunakan analisis stabilitas *von Neumann*, sehingga syarat kestabilan dari persamaan (3.7) dapat dicari dengan cara mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ,  $\forall i = \sqrt{-1}$  ke dalam persamaan tersebut, yaitu

$$\begin{aligned}
\rho^{n+1}e^{iaj} &= \rho^{n-1}e^{iaj} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{\rho^n e^{ia(j+1)} + \rho^n e^{iaj}}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho^n e^{ia(j-1)}}{2} \right) (\rho^n e^{ia(j+1)} - \rho^n e^{ia(j-1)}) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (\rho^n e^{ia(j+2)} - 2\rho^n e^{ia(j+1)} \\
&\quad + 2\rho^n e^{ia(j-1)} - \rho^n e^{ia(j-2)})
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Untuk penyederhanaan, persamaan (3.8) dibagi dengan  $\rho^n e^{iaj}$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho^{-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{e^{ia} + 1 + e^{-ia}}{2} \right) (e^{ia} - e^{-ia}) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (e^{2ia} - 2e^{ia} + 2e^{-ia} - e^{-2ia})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Karena  $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$ , maka persamaan (3.9) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
\rho^2 + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{2 \cos a + 1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (2 \cos a - 2) \right] (2i \sin a) \rho \\
- 1 = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Misalkan

$$\left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{2 \cos a + 1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (2 \cos a - 2) \right] (2i \sin a) = \beta$$

maka persamaan (3.10) dapat ditulis

$$\rho^2 + \beta \rho - 1 = 0$$

sehingga akar-akar dari persamaan (3.10) adalah

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4}}{2}$$

atau dapat ditulis

$$\rho_1 = -i \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{2 \cos a + 1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (2 \cos a - 2) \right] \sin a$$

$$+ \sqrt{1 - \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{2 \cos a + 1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (2 \cos a - 2) \right]^2 \sin^2 a}$$

$$\rho_2 = -i \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{2 \cos a + 1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (2 \cos a - 2) \right] \sin a$$

$$- \sqrt{1 - \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{2 \cos a + 1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (2 \cos a - 2) \right]^2 \sin^2 a}$$

Misalkan

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{2 \cos a + 1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (2 \cos a - 2) = S \quad (3.11)$$

sehingga diperoleh

$$\rho_1 = -iS \sin a + \sqrt{1 - S^2 \sin^2 a}$$

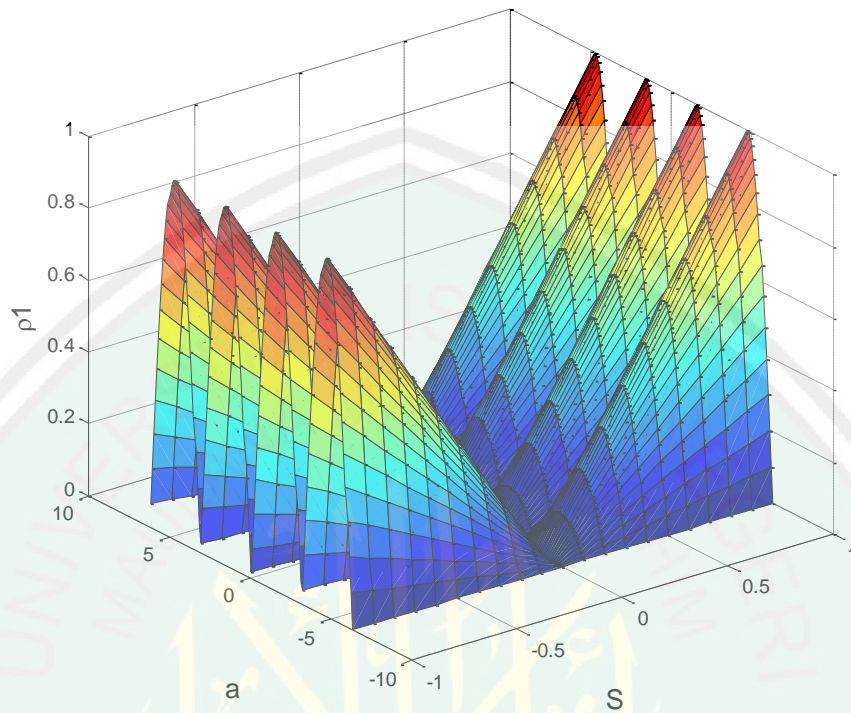
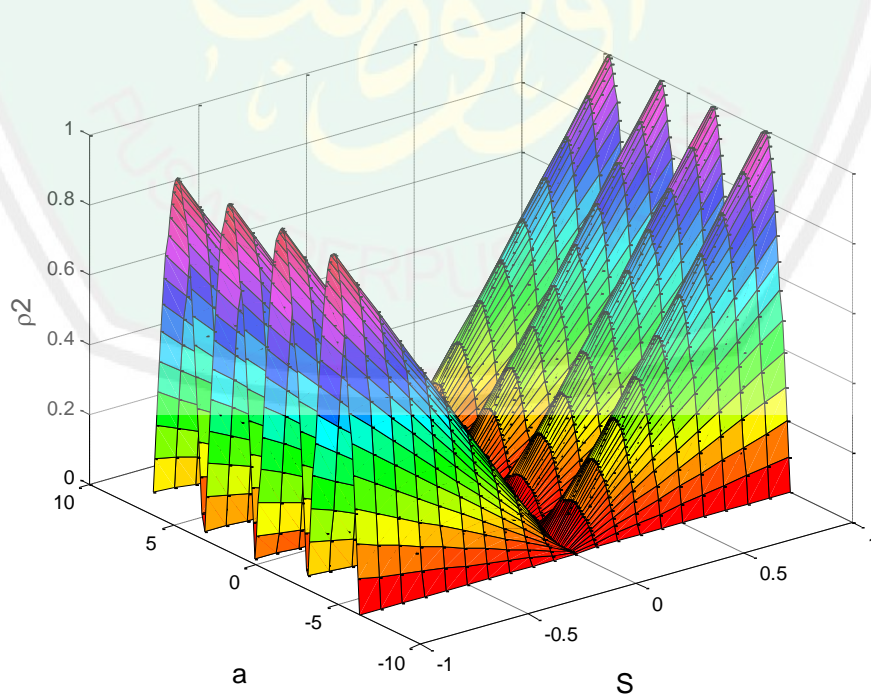
$$\rho_2 = -iS \sin a - \sqrt{1 - S^2 \sin^2 a}$$

Jika  $\sqrt{1 - S^2 \sin^2 a}$  bernilai real maka  $|\rho_1| = 1$ , dan jika  $\sqrt{1 - S^2 \sin^2 a}$  bernilai imajiner maka

$$|\rho_1| = \sqrt{\left( -S \sin a + \sqrt{S^2 \sin^2 a - 1} \right)^2}$$

$$|\rho_2| = \sqrt{\left( -S \sin a - \sqrt{S^2 \sin^2 a - 1} \right)^2}$$

Dalam kajian pustaka telah dijelaskan bahwa syarat kestabilannya yaitu  $|\rho_1| \leq 1$  dan  $|\rho_2| \leq 1$ , sehingga untuk mengetahui nilai dari  $S$  yang memenuhi syarat kestabilan tersebut, maka  $|\rho_1|$  dan  $|\rho_2|$  dapat disajikan dalam gambar berikut:

Gambar 3.1 Akar Persamaan (3.10) untuk  $|\rho_1|$ Gambar 3.2 Akar Persamaan (3.10) untuk  $|\rho_2|$

Dari Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 di atas diperoleh bahwa  $|\rho_1| \leq 1$  dan  $|\rho_2| \leq 1$  akan terpenuhi jika  $|S| \leq 1$ , jika terdapat  $|S| \geq 1$  maka akan terdapat pula  $|\rho_1| \geq 1$  dan  $|\rho_2| \geq 1$  hal ini tidak memenuhi syarat kestabilan. Sehingga untuk syarat kestabilan metode beda hingga skema eksplisit yaitu  $|S| \leq 1$ .

Karena persamaan (3.11) masih mengandung  $\cos a$ , dalam hal ini akan diambil titik diskritnya yaitu  $\cos a = -1$ ,  $\cos a = 0$  dan  $\cos a = 1$ , sehingga dapat diuraikan sebagai berikut:

Jika  $\cos a = -1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.11) maka diperoleh

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{-1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (-4) \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) - \frac{4\Delta t}{6(\Delta x)^3} \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Delta t}{3(\Delta x)^3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

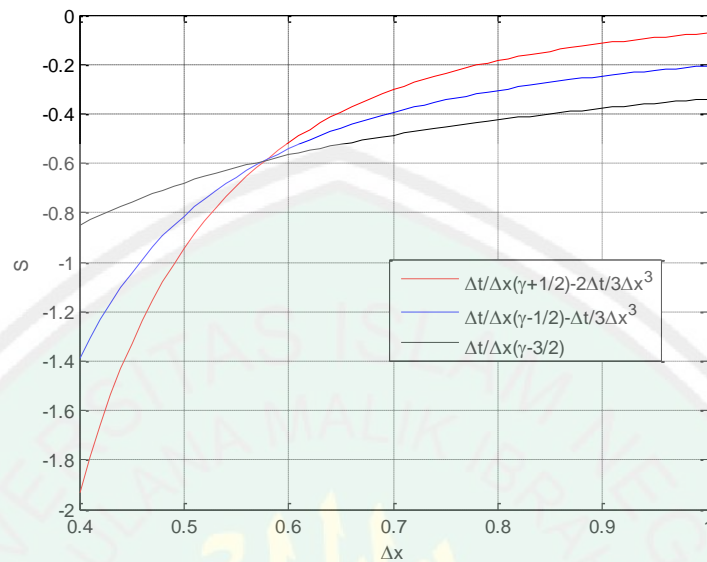
Jika  $\cos a = 0$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.11) maka diperoleh

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3} (-2) \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Delta t}{6(\Delta x)^3} \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{\Delta t}{3(\Delta x)^3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Jika  $\cos a = 1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.11) maka diperoleh

$$S = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{3}{2} \right) \quad (3.14)$$

Selanjutnya persamaan (3.12), (3.13) dan (3.14) disajikan ke dalam bentuk gambar berikut:



Gambar 3.3 Persamaan (3.12), (3.13), dan (3.14)

Dari Gambar 3.3 tersebut diperoleh bahwa pada saat  $\Delta x \leq 0,6$  hasil dari persamaan (3.14) lebih besar dari persamaan (3.12) dan persamaan (3.13) namun pada saat tersebut terdapat  $|S| \geq 1$ . Sedangkan pada saat  $\Delta x \geq 0,6$  hasil dari persamaan (3.12) lebih besar dari persamaan (3.13) dan persamaan (3.14) dengan  $|S| \leq 1$ . Oleh karena itu, untuk syarat kestabilan akan diambil yang menghasilkan  $|S| \leq 1$  dan jika persamaan (3.12) terpenuhi, maka persamaan (3.13) dan (3.14) dengan sendirinya akan terpenuhi. Sehingga syarat kestabilan dari persamaan beda hingga skema eksplisit dalam menyelesaikan persamaan *forced* KdV yaitu

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Delta t}{3(\Delta x)^3} \right| \leq 1$$

### 3.3.2 Analisis Konsistensi

Konsistensi metode beda hingga skema eksplisit dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6), ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam persamaan (3.6) yaitu

$$u_j^{n\pm 1} = u_j^n \pm \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n \pm \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n + \dots \quad (3.15)$$

$$u_{j\pm 1}^n = u_j^n \pm \Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n \pm \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.16)$$

$$u_{j\pm 2}^n = u_j^n \pm 2\Delta x u_x |_j^n + 2\Delta x^2 u_{xx} |_j^n \pm \frac{4}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.17)$$

Untuk penyederhanaan, maka persamaan (3.15), (3.16), dan (3.17) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6) yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^{n-1} &= \left( u_j^n + \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{tttt} |_j^n \dots \right) \\ &\quad - \left( u_j^n - \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt} |_j^n - \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{tttt} |_j^n + \dots \right) \\ &= u_j^n + \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n \\ &\quad + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{tttt} |_j^n + \dots - u_j^n \\ &\quad + \Delta t u_t |_j^n - \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n \\ &\quad - \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{tttt} |_j^n - \dots \\ &= 2\Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{3} \Delta t^3 u_{ttt} + \frac{1}{60} \Delta t^5 u_{tttt} |_j^n + \dots \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} &= \frac{2\Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{3} \Delta t^3 u_{ttt} + \frac{1}{60} \Delta t^5 u_{tttt} |_j^n + \dots}{2\Delta t} \\ &= u_t |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 u_{ttt} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^4 u_{tttt} |_j^n + \dots \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n - u_{j-1}^n &= \left( u_j^n + \Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right) \\
&\quad - \left( u_j^n - \Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n - \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right) \\
&= u_j^n + \Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \\
&\quad + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots - u_j^n \\
&\quad + \Delta x u_x |_j^n - \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \\
&\quad - \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n - \dots \\
&= 2\Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{60} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \tag{3.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} &= \frac{2\Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{60} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots}{2\Delta x} \\
&= u_x |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \dots \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n + u_{j-1}^n &= \left( u_j^n + \Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right) \\
&\quad + \left( u_j^n - \Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n - \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_j^n + \Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \\
&\quad + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots u_j^n \\
&\quad - \Delta x u_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \\
&\quad + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n - \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \\
&= 2u_j^n + \Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \dots \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{j+2}^n - u_{j-2}^n &= \left( u_j^n + 2\Delta x u_x |_j^n + 2\Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{4}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \frac{4}{15} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right) \\
&\quad - \left( u_j^n - 2\Delta x u_x |_j^n + 2\Delta x^2 u_{xx} |_j^n - \frac{4}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n - \frac{4}{15} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right) \\
&= u_j^n + 2\Delta x u_x |_j^n + 2\Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{4}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \\
&\quad + \frac{2}{3} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \frac{4}{15} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots - u_j^n \\
&\quad + 2\Delta x u_x |_j^n - 2\Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{4}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n \\
&\quad - \frac{2}{3} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \frac{4}{15} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \\
&= 4\Delta x u_x |_j^n + \frac{8}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n + \frac{8}{15} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk mengetahui *first truncation term* dari persamaan *forced* KdV maka substitusikan persamaan (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) dan (3.22) ke dalam persamaan (3.6) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \gamma \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) - \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \\
& \quad - \frac{1}{6} \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2(\Delta x)^3} = \frac{1}{2} F_x \\
& \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \gamma \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) - \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \\
& \quad - \frac{1}{6} \frac{(u_{j+2}^n - u_{j-2}^n) - 2(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2(\Delta x)^3} = \frac{1}{2} F_x \\
& \left( u_t |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 u_{ttt} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^4 u_{tttt} |_j^n + \dots \right) \\
& \quad + \gamma \left( u_x |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right) \\
& \quad - \frac{1}{2} \left( 3u_j^n + \Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right) \left( u_x |_j^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6} \Delta x^2 u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^4 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right) \\
& \quad - \frac{1}{6(2\Delta x^3)} \left( 4\Delta x u_x |_j^n + \frac{8}{3} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n + \frac{16}{30} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n + \dots \right. \\
& \quad \left. - 4\Delta x u_x |_j^n - \frac{2}{3} \Delta x^3 u_{xxx} - \frac{1}{30} \Delta x^5 u_{xxxx} |_j^n - \dots \right) = \frac{1}{2} F_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( u_t \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 u_{ttt} \Big|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^4 u_{tttt} \Big|_j^n + \dots \right) \\
& + \left( \gamma u_x \Big|_j^n + \frac{1}{6} \gamma \Delta x^2 u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{120} \gamma \Delta x^4 u_{xxxx} \Big|_j^n + \dots \right) \\
& - \left( \frac{3}{2} uu_x + \frac{1}{4} \Delta x^2 uu_{xxx} + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_x u_{xx} + \frac{1}{12} \Delta x^4 u_{xx} u_{xxx} \right. \\
& + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_x u_{xxxx} + \frac{1}{80} \Delta x^4 uu_{xxxx} + \frac{1}{240} \Delta x^6 u_{xx} u_{xxxx} \\
& \left. + \frac{1}{144} \Delta x^6 u_{xxx} u_{xxxx} + \frac{1}{2880} \Delta x^8 u_{xxxx} u_{xxxx} + \dots \right) \Big|_j^n \\
& - \left( \frac{2\Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^5 u_{xxxx} \Big|_j^n + \dots}{12\Delta x^3} \right) = \frac{1}{2} F_x
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
& \left( u_t + \gamma u_x - \frac{3}{2} uu_x - \frac{1}{6} u_{xxx} \right) \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 u_{ttt} \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{6} \gamma u_{xxx} - \frac{1}{4} uu_{xxx} - \frac{1}{2} u_x u_{xx} - \frac{1}{24} u_{xxxx} \right) \Delta x^2 \Big|_j^n \\
& + \frac{1}{120} \Delta t^4 u_{tttt} \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{120} \gamma u_{xxxx} + \frac{1}{24} u_x u_{xxxx} + \frac{1}{12} u_{xx} u_{xxx} \right. \\
& \left. + \frac{1}{80} uu_{xxxx} \right) \Delta x^4 \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{240} u_{xx} u_{xxxx} + \frac{1}{144} u_{xxx} u_{xxxx} \right) \Delta x^6 \Big|_j^n \\
& + \frac{1}{2880} \Delta x^8 u_{xxxx} u_{xxxx} + \dots = \frac{1}{2} F_x \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.23) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde dua  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$ . Persamaan (3.23) dikatakan konsisten jika

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \frac{1}{6} \Delta t^2 u_{ttt} \Big|_j^n + \left( \frac{1}{6} \gamma u_{xxx} - \frac{1}{4} uu_{xxx} - \frac{1}{2} u_x u_{xx} - \frac{1}{24} u_{xxxx} \right) \Delta x^2 \Big|_j^n = 0$$

Jika  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai  $u_{xxx}$ ,  $uu_{xxx}$ ,  $u_{xxx}$ ,  $u_x u_{xx}$ ,  $u_{ttt}$  jika dikalikan dengan nilai dari  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  akan ikut mengecil. *Error* pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ .

### 3.4 Simulasi dan Interpretasi Hasil

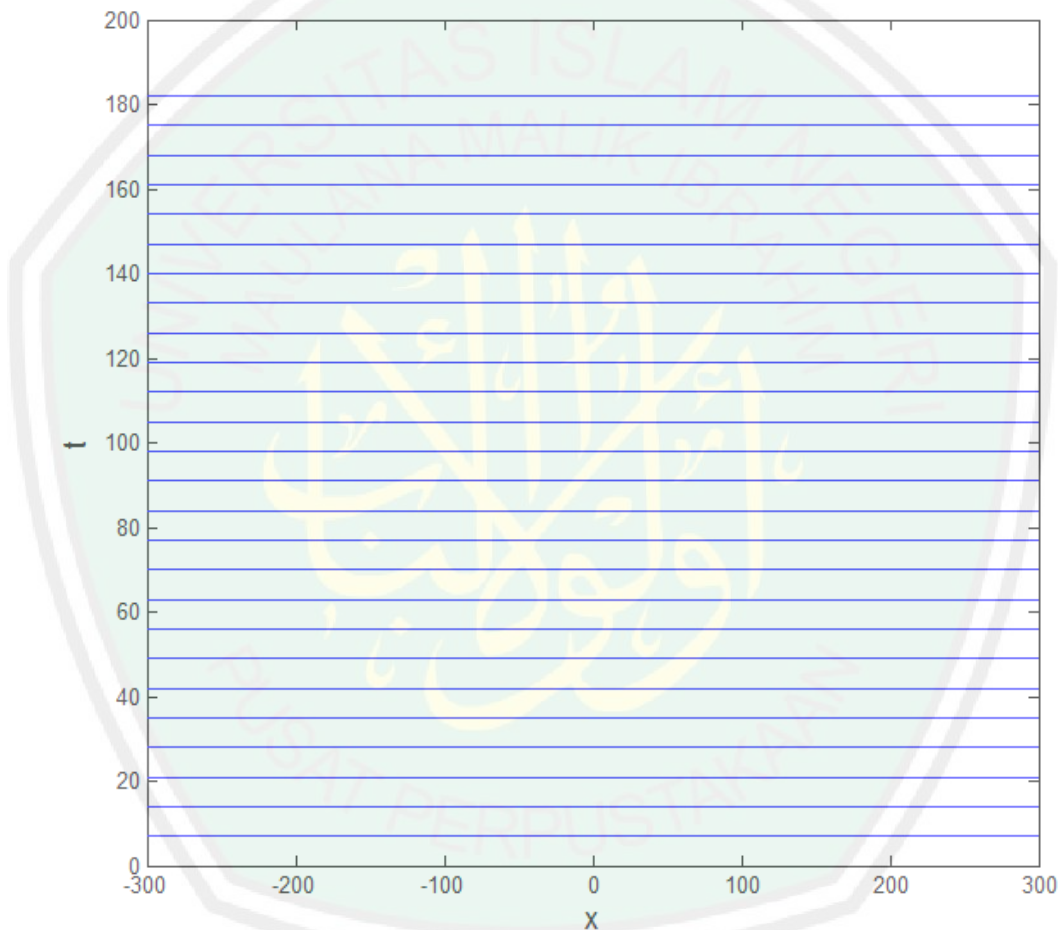
Pada sub bab ini simulasi dilakukan menggunakan program MATLAB. Setelah diperoleh syarat kestabilan dari skema yang digunakan, maka dapat diketahui nilai dari  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  yang memenuhi syarat kestabilan yang akan digunakan dalam simulasi. Persamaan yang digunakan dalam program tersebut yaitu persamaan (3.7) yang merupakan bentuk diskrit dari persamaan *forced* KdV, dalam persamaan tersebut terdapat  $\gamma$  yang merupakan perbedaan kecepatan aliran. Maka dalam simulasi tersebut akan digunakan tiga kemungkinan nilai  $\gamma$  yaitu  $\gamma < 0$ ,  $\gamma = 0$  dan  $\gamma > 0$ .

Persamaan *forced* KdV merupakan representasi dari gelombang permukaan yang dihasilkan oleh aliran yang melalui sebuah gundukan, maka dalam simulasi ini gaya luar yang diberikan sebagaimana yang terdapat dalam Grimshaw, dkk (2007) yaitu

$$F(x) = \frac{F_M}{2} (\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$$

Bentuk gaya luar yang digunakan di atas, berupa gundukan dengan puncak datar dengan lebar  $L$  dan tinggi gundukan sebesar  $F_M$ . sedangkan  $\mu$  merupakan sudut kemiringan antara  $F_M$  dan  $s$  sebagai lebar kaki dari gundukan tersebut.

Simulasi pertama, pada saat  $F_x = 0$  yang artinya pada dasar saluran tersebut tidak terdapat gundukan serta dapat diberikan syarat awal  $u(x, 0) = 0$ , sehingga simulasi persamaan *forced* KdV (3.1) untuk  $\gamma = 0$  dapat dilihat pada Gambar 3.4 berikut:

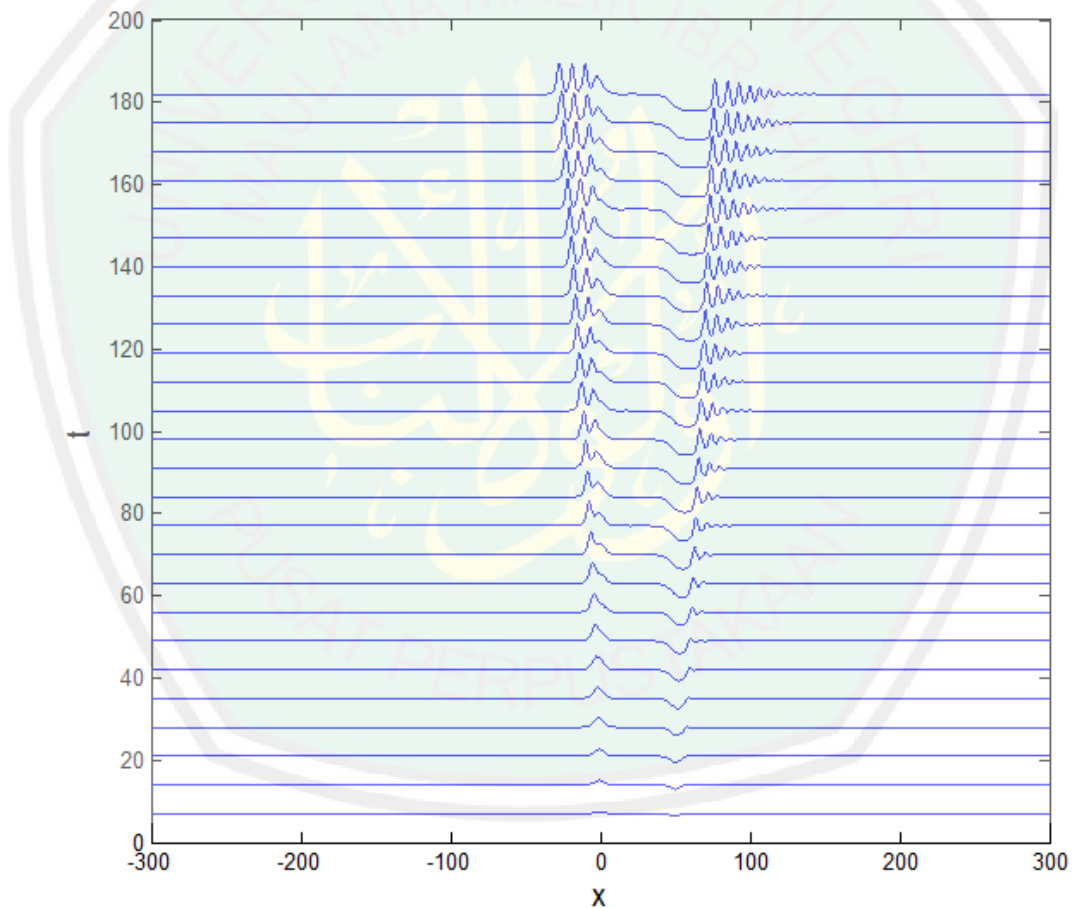


Gambar 3.4 Solusi Persamaan (3.1) untuk  $\gamma = 0$

Dengan menggunakan  $\Delta x = 0,6$  dan  $\Delta t = 0,25$  yang memenuhi syarat kestabilan, pada gambar tersebut diperoleh bahwa tidak adanya gundukan pada dasar saluran maka aliran tersebut tidak mengalami gangguan, sehingga pada dasar permukaannya tidak terdapat riak-riak gelombang. Begitu juga untuk  $\gamma > 0$  dan

$\gamma < 0$  karena berapapun nilai  $\gamma$ , jika tidak terdapat gundukan dan syarat awal maka akan didapatkan hasil perhitungan numerik yang sama.

Simulasi kedua aliran kritis, pada saat  $F_x \neq 0$  yang artinya pada dasar saluran tersebut terdapat gundukan dengan  $F_M = 0.1, L = 50$  dan  $\mu = 0.25$ . Serta dapat diberikan syarat awal  $u(x, 0) = 0$ , sehingga hasil perhitungan numerik untuk  $\gamma = 0$  dapat dilihat pada Gambar 3.5 berikut:



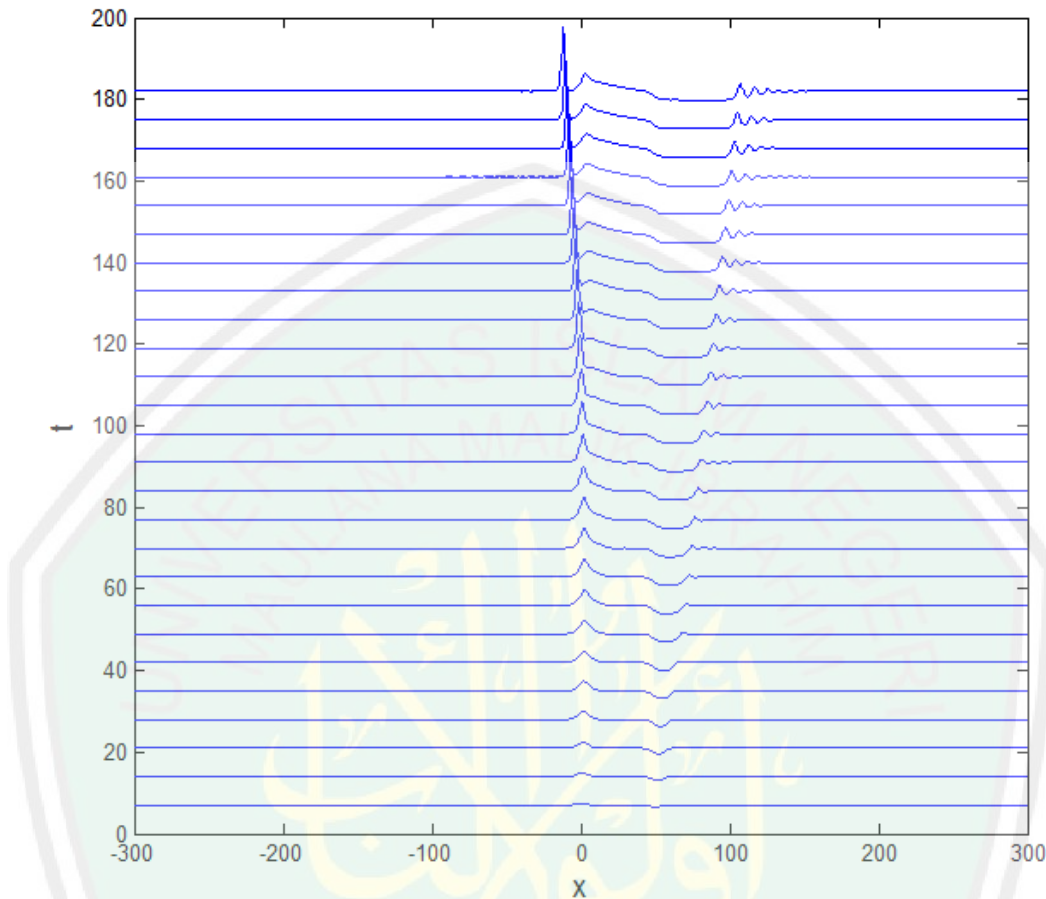
Gambar 3.5 Solusi Persamaan (3.1) untuk  $\gamma = 0$

Dari Gambar 3.5 diperoleh solusi persamaan (3.1) dengan  $\Delta x = 0.6$  dan  $\Delta t = 0.25$  yang memenuhi syarat kestabilan dengan  $S = 0.563$ . Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa karena adanya gundukan pada dasar salurannya maka aliran

tersebut mengalami gangguan, sehingga menimbulkan riak-riak gelombang pada permukaan tersebut. Riak-riak gelombang tersebut berjalan menuju ke arah hulu pada saat  $x = 0$  dan berjalan menuju ke arah hilir pada saat  $x = 50$ .

Gambar 3.5 pada saat  $F_M = 0.1, L = 50$ , dan  $\mu = 0.25$  menghasilkan tinggi gelombang sebesar 0,3737 pada saat  $t = 780$ . Jika tinggi dari gundukan diperbesar  $F_M = 0.2$  dengan  $L$  dan  $\mu$  yang sama, maka diperoleh tinggi dari gelombang permukaan sebesar 0,5561 pada saat  $t = 780$ , dan jika lebar dari gundukan diperbesar  $L = 55$  dengan  $F_M$  dan  $\mu$  yang sama maka diperoleh tinggi gelombang pada permukaan sebesar 0,5562 pada saat  $t = 780$ . Jika  $\mu = 10$ ,  $F_M = 0.1$ , dan  $L = 50$  maka gelombang yang tampak pada permukaan semakin banyak dengan tinggi gelombang yang diperoleh sebesar 0,4825.

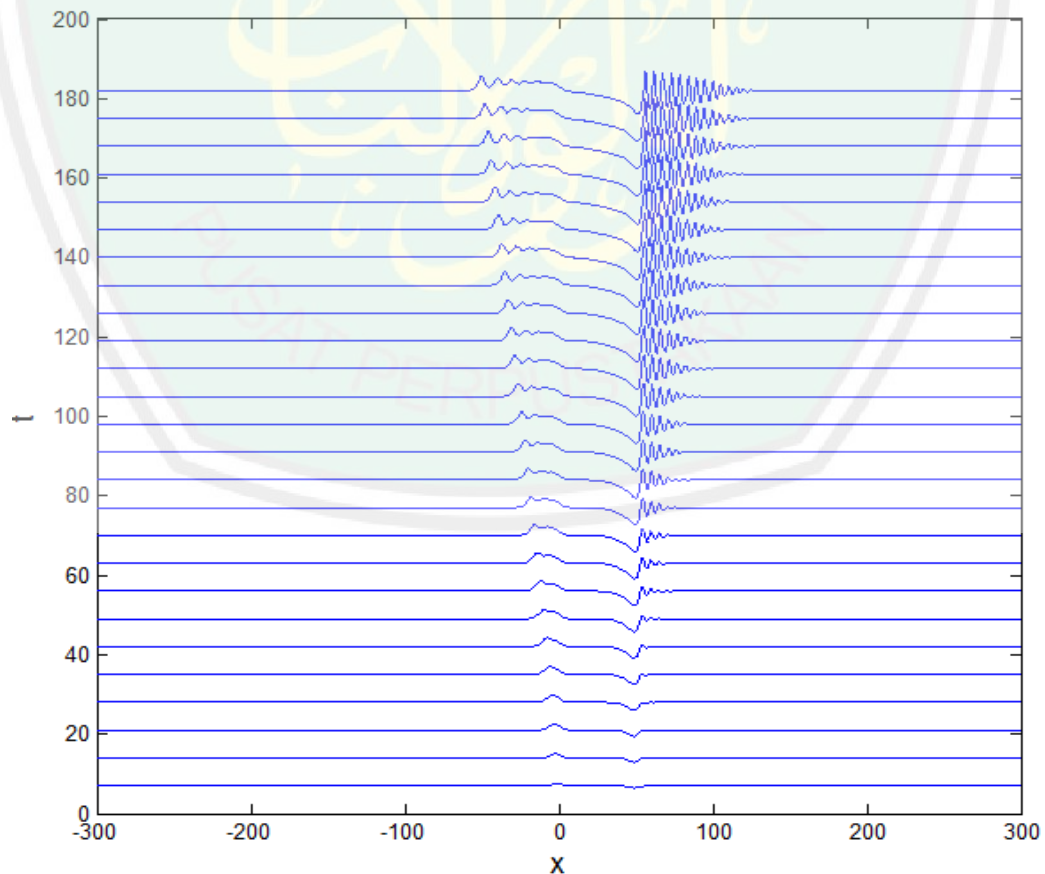
Simulasi ketiga aliran superkritis jika  $\gamma = 0.2$ , hampir sama dengan simulasi kedua yang menggunakan  $\Delta x = 0.6$  dan  $\Delta t = 0.25$  sebagai syarat kestabilan dengan  $S = 0.4799$ . Pada permukaannya terdapat riak-riak gelombang dikarenakan adanya gundukan pada dasar salurannya. Riak-riak gelombang permukaan tersebut berjalan menuju ke arah hulu dan ke arah hilir, tetapi pada saat  $x = 50$  riak-riak gelombang yang berjalan menuju ke arah hilir mengalami penipisan gelombang, sehingga tinggi riak gelombang yang bergerak ke arah hulu dan ke arah hilir berbeda. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 3.6 berikut:



Gambar 3.6 Solusi Persamaan (3.1) untuk  $\gamma = 0.2$

Gambar 3.6 pada saat  $F_M = 0.1, L = 50$  dan  $\mu = 0.25$  menghasilkan tinggi gelombang sebesar 0,7935 pada saat  $t = 780$  dan jika  $\mu$  diperbesar 10 maka diperoleh tinggi gelombang sebesar 0,8264. Jika tinggi dari gundukan diperbesar  $F_M = 0.2$  dengan  $L = 50$  dan  $\mu = 0.25$ , maka diperoleh tinggi gelombang sebesar 0,9519 pada saat  $t = 780$  serta riak-riak gelombang yang timbul semakin banyak, dan jika lebar gundukan diperbesar  $L = 55$  diperoleh tinggi gelombang sebesar 0,9636 pada saat  $t = 780$ . Besar kecilnya gundukan pada dasar saluran aliran menghasilkan tinggi dan banyaknya gelombang permukaan yang berbeda.

Simulasi keempat solusi persamaan (3.1) aliran subkritis jika  $\gamma = -0.2$ , hampir sama dengan simulasi kedua yang menggunakan  $\Delta x = 0.6$  dan  $\Delta t = 0.25$  sebagai syarat kestabilan dengan  $S = 0.6466$ . Pada permukaan alirannya terdapat riak-riak gelombang dikarenakan adanya gundukan pada dasar salurannya. Riak-riak gelombang permukaan tersebut berjalan menuju ke arah hulu dan ke arah hilir, tetapi pada saat  $x = 0$  riak gelombang yang berjalan menuju ke arah hulu mengalami penipisan gelombang, sehingga tinggi gelombang yang bergerak ke arah hulu terlihat lebih kecil serta riak-riak gelombang yang merambat ke arah hilir terlihat lebih banyak. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 3.7 berikut:



Gambar 3.7 Solusi Persamaan (3.1) untuk  $\gamma = -0,2$

Gambar 3.7 pada saat  $F_M = 0.1, L = 50$ , dan  $\mu = 0.25$  menghasilkan tinggi gelombang sebesar 0,2421 pada saat  $t = 780$  dan jika  $\mu$  diperbesar 10 maka diperoleh tinggi gelombang sebesar 0,3726 pada saat  $t = 780$ . Misalkan tinggi gundukan diperkecil  $F_M = 0.09$  maka tinggi gelombang juga kecil yaitu 0,2064 pada saat  $t = 780$ . Hal ini dapat disimpulkan bahwa, bentuk dari gundukan yang berbeda-beda pada dasar saluran aliran akan menghasilkan tinggi dan banyaknya gelombang permukaan yang berbeda, semakin besar gundukan maka semakin besar pula amplitudo pada gelombang permukaan tersebut.

### 3.5 Kajian Keagamaan

Persamaan *forced* KdV sampai saat ini belum memiliki solusi analitik, namun persamaan *forced* KdV bukan berarti tidak memiliki solusi. Berdasarkan hasil pembahasan di atas, bahwa solusi persamaan *forced* KdV dapat diselesaikan secara numerik salah satunya dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Hal ini menunjukkan bahwa semua permasalahan dapat diselesaikan sekalipun melalui beberapa kesulitan, sebagaimana yang terdapat dalam surat Al-Insyiroh ayat 5 yakni sesudah kesulitan akan terdapat kemudahan, pada hakikatnya semua kemudahan akan terwujud jika Allah menghendaki, baik itu dalam menyelesaikan persoalan matematika.

Menyelesaikan persoalan matematika, seperti penyelesaian persamaan *forced* KdV langkah-langkahnya harus teliti, untuk memperoleh hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Untuk memperoleh solusi yang mendekati solusi analitiknya maka diperlukan syarat kestabilan dan syarat konsistensi dari

metode beda hingga skema eksplisit, sehingga untuk memperoleh syarat tersebut langkah demi langkah harus teliti dan cermat. Dalam Islam sangat menekankan keharusan melakukan segala sesuatu dengan teliti agar didapatkan hasil yang baik dan benar seperti dalam surat Maryam ayat 94.

Dari ayat tersebut menunjukkan bahwa dalam menyelesaikan suatu permasalahan diperlukan ketelitian dalam melakukannya, begitu juga dalam matematika. Perhitungan dengan metode numerik secara manual memerlukan waktu yang lama dan berulang-ulang, dalam hal ini komputer dapat mempermudah proses perhitungan tanpa membuat kesalahan serta mempercepat perhitungan, salah satunya program MATLAB. Dengan diperolehnya syarat kestabilan maka  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  yang memenuhi syarat kestabilan dapat dimasukkan ke dalam program tersebut.

Ilmu matematika banyak memberikan manfaat bagi manusia dalam hal ilmu hitung-menghitung dalam kehidupan sehari-hari dan juga banyak menemukan nikmat dari Allah yang sebelumnya tidak ia ketahui. Al-Qur'an memberikan petunjuk tentang jalan yang benar menuju ilmu pengetahuan serta mampu mendapatkan kesimpulan yang benar berdasarkan penalaran dan observasi tentang keajaiban dan rahasia Allah.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan berikut:

1. Penyelesaian numerik persamaan *forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema eksplisit, dapat dilakukan dengan langkah-langkah antara lain yaitu Menentukan syarat awal dan kondisi batas, melakukan diskritisasi pada persamaan *forced* KdV dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit untuk menghampiri solusi analitiknya, selanjutnya menentukan syarat kestabilan dan syarat konsistensi untuk menunjukkan bahwa metode yang digunakan tersebut memiliki solusi yang dapat mendekati solusi analitiknya. Setelah diperoleh syarat kestabilan dan konsistensi dari skema yang digunakan maka simulasi dari skema yang digunakan dapat dilakukan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan metode beda hingga skema eksplisit pada persamaan *forced* KdV stabil dengan syarat tertentu.
2. Syarat kestabilan dari metode beda hingga skema eksplisit untuk persamaan *forced* KdV adalah

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Delta t}{3(\Delta x)^3} \right| \leq 1$$

Model diskrit yang digunakan tersebut memenuhi syarat konsistensi karena *error* pemotongannya menuju nol untuk  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ , dengan *error* pemotongan pertama dari model diskrit yang digunakan memiliki orde  $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$ .

#### 4.2 Saran

Berdasarkan temuan penelitian dan analisis, maka saran untuk penelitian selanjutnya yaitu dalam menyelesaikan persamaan *forced* KdV dapat menggunakan metode numerik lainnya, salah satunya metode *semi-implicit pseudo-spectral*.



## DAFTAR PUSTAKA

- Candra, R.. 2011. Analisis Stabilitas Metode Forward Time Central Space dan Lax Wendroff pada Simulasi Penyelesaian Persamaan Adveksi. *Skripsi tidak diterbitkan*, Universitas Sumatera Utara, Medan.
- Grimshaw, R.H.J, Zhang, D.H, & Chow, K.W.. 2007. Generation of Solitary Waves by Transcritical Flow Over a Step. *J.Fluid Mech.* Hal.235-254.
- Gross, M.. 1993. *Oceanography a View of Earth 6 Edition*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc.
- Kusumah, Y.. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- Munir, R.. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Nagle, K.R & Saff, E.B.. 1996. *Foundamentals of Differential Equation and Boundary Value Problems*. University of south Florida.
- Prastumi & Primadi, H.. 2009. Kajian Hidrolika Saluran Transisi dan Saluran Peluncur pada Uji Model Fisik Waduk Jhem Kabupaten Bangli Bali. *Jurnal Rekayasa Sipil*. Vol.3.No.3.
- Ross, L.S.. 1984. *Differential Equation*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- Pamuntjak & Santoso. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 8*. Jakarta: Lentera Hati.
- Spiegel, M.R.. 1983. *Advanced mathematics for Enginer and Scientists*. Terjemahan oleh Koko Martono. 1994. Jakarta: Eirlangga.
- Strauss, A.W.. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Susatio, Y.. 2005. *Metode Numerik Berbasis MathCAD*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta offset.
- Wiryanto, L & Akbar, A.. 2008. *an Implicit Finite Difference Method for a Forced KDV Equation*.
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Thrid Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Syifa'ul Amamah  
NIM : 10610037  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced* KdV  
Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit  
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si  
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	31 Oktober 2013	Konsultasi BAB I BAB II	1.
2.	07 Nopember 2013	Revisi BAB I BAB II Konsultasi BAB III	2.
3.	11 Nopember 2013	ACC BAB I BAB II Revisi BAB III	3.
4.	12 Nopember 2013	Konsultasi Keagamaan	4.
5.	20 Nopember 2013	Revisi Keagamaan	5.
6.	03 Desember 2013	ACC Keagamaan	6.
7.	16 Januari 2014	Revisi BAB III	7.
8.	23 Januari 2014	Revisi BAB III Konsultasi BAB IV	8.
9.	06 Februari 2014	Revisi BAB IV ACC BAB III	9.
10.	24 Februari 2014	ACC BAB IV	10.
11.	03 Maret 2014	Konsultasi Abstrak	11.
12.	13 Maret 2014	Konsultasi Keagamaan BAB III	12.
13.	02 April 2014	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 03 April 2014  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
**NIP. 19751006 200312 1 001**

## LAMPIRAN-LAMPIRAN

### Lampiran 1. Script M-file solusi *forced* KdV

```
clc,clear,clf
%dengan gundukan tanpa syarat awal

dx=0.6;
dt=0.25;
x=-300:dx:300;
t=0:dt:200;
A=dt/dx;
B=dt/(6*(dx.^3));

FM=0.1; %tinggi gelombang
miu=0.25; %kemiringan
L=50; %lebar gelombang
gama=0;

F=(FM/2)*(tanh(miu*x)-(tanh(miu*(x-L))));
Fx= diff(F);

%plot(x, F)
%area(F)
%ylim([-0.3 0.3]), break

s1=A*(gama+(1/2))-((2*dt)/(3*(dx^3)))
S2=A*(gama-(1/2))-(dt/(3*(dx^3)))
S3=A*(gama-(3/2))

if s1 >= S3
    disp('S1 > S3')
elseif s1<= S3
    disp('S1 < S3')
end

Mx=length(x);
Nt=length(t);
u=sparse(Mx,Nt);
u(:,1)=0;
u(:,2)=0;
u(1,:)=0;
u(2,:)=0;
```

```

figure(1), clf

k=0;
for n=2:Nt-1
    for j=3:Mx-2
        C=(A*(gama-((u(j+1,n)+u(j,n)+u(j-1,n))/2))
            *(u(j+1,n)-u(j-1,n)));
        D=(B*(u(j+2,n)-(2*u(j+1,n))+(2*u(j-1,n))-
            u(j-2,n)));

        u(j,n+1)=u(j,n-1)-C+D+(dt*Fx(j));
    end
    max(u(:,n));

    if mod(n,30)==0
        k=k+1;
        plot(x,u(:,n)+0.35*k), hold on
        pause(0.01)
        n
        Tinggi=max(u(:,n))
    end
end
end

```

## Lampiran 2. Script M-file Grafik rho

```
clc,clear,clf
[S,a]=meshgrid(-1:0.1:1, -2*pi:0.1:2*pi);

ro1=sqrt((-S.*sin(a))+(sqrt((S.^2).*(sin(a)).^2)-
1)).^2);

figure(1)
surf(S,a,real(ro1))

xlabel(['\fontsize{13}S'])
ylabel(['\fontsize{13}a'])
zlabel(['\fontsize{13}\rho1'])

figure(2)
[S,a]=meshgrid(-1:0.1:1, -2*pi:0.1:2*pi);
ro2=sqrt((-S.*sin(a))-(sqrt((S.^2).*(sin(a)).^2)-
1)).^2);
surf(S,a,real(ro2))

xlabel(['\fontsize{13}S'])
ylabel(['\fontsize{13}a'])
zlabel(['\fontsize{13}\rho2'])
```

### Lampiran 3. Script M-file Grafik Persamaan (3.12), (3.13) dan (3.14)

```
clc,clear,clf
dx=0.4:0.01:1;
dt=0.2;
gamma=-0.2;
S1=(dt./dx).*(gamma+(1/2))-((2.*dt)./(3.*dx.^3));
S2=(dt./dx).*(gamma-(1/2))-((1.*dt)./(3.*dx.^3));
S3=(dt./dx).*(gamma-(3/2));

plot(dx, S1, 'r')
hold on
plot(dx, S2, 'b')
plot(dx, S3, 'k')
legend('\Deltat/\Deltax(\gamma+1/2)-
2\Deltat/3\Deltax^3', '\Deltat/\Deltax(\gamma-1/2)-
\Deltat/3\Deltax^3', '\Deltat/\Deltax(\gamma-3/2)')
grid on
xlabel('\Deltax')
ylabel('S')
```

Lampiran 4. Hasil Perhitungan Nilai dari  $|S|$  untuk  $\gamma = 0$ 

$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,1	66,16666667	0,1	0,2	132,3333
0,2	0,1	8,083333333	0,2	0,2	16,16667
0,3	0,1	2,302469136	0,3	0,2	4,604938
0,4	0,1	0,916666667	0,4	0,2	1,833333
0,5	0,1	0,433333333	0,5	0,2	0,866667
0,6	0,1	0,225308642	0,6	0,2	0,450617
0,7	0,1	0,122934888	0,7	0,2	0,24587
0,8	0,1	0,067708333	0,8	0,2	0,135417
0,9	0,1	0,035893919	0,9	0,2	0,071788
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,3	198,5	0,1	0,4	264,6667
0,2	0,3	24,25	0,2	0,4	32,33333
0,3	0,3	6,907407407	0,3	0,4	9,209877
0,4	0,3	2,75	0,4	0,4	3,666667
0,5	0,3	1,3	0,5	0,4	1,733333
0,6	0,3	0,675925926	0,6	0,4	0,901235
0,7	0,3	0,368804665	0,7	0,4	0,49174
0,8	0,3	0,203125	0,8	0,4	0,270833
0,9	0,3	0,107681756	0,9	0,4	0,143576
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,5	330,8333333	0,1	0,6	397
0,2	0,5	40,41666667	0,2	0,6	48,5
0,3	0,5	11,51234568	0,3	0,6	13,81481
0,4	0,5	4,583333333	0,4	0,6	5,5
0,5	0,5	2,166666667	0,5	0,6	2,6
0,6	0,5	1,12654321	0,6	0,6	1,351852
0,7	0,5	0,614674441	0,7	0,6	0,737609
0,8	0,5	0,338541667	0,8	0,6	0,40625
0,9	0,5	0,179469593	0,9	0,6	0,215364
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,7	463,1666667	0,1	0,8	529,3333
0,2	0,7	56,58333333	0,2	0,8	64,66667
0,3	0,7	16,11728395	0,3	0,8	18,41975
0,4	0,7	6,416666667	0,4	0,8	7,333333
0,5	0,7	3,033333333	0,5	0,8	3,466667
0,6	0,7	1,577160494	0,6	0,8	1,802469
0,7	0,7	0,860544218	0,7	0,8	0,983479

0,8	0,7	0,473958333	0,8	0,8	0,541667
0,9	0,7	0,25125743	0,9	0,8	0,287151
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,9	595,5	0,1	1	661,6667
0,2	0,9	72,75	0,2	1	80,83333
0,3	0,9	20,72222222	0,3	1	23,02469
0,4	0,9	8,25	0,4	1	9,166667
0,5	0,9	3,9	0,5	1	4,333333
0,6	0,9	2,027777778	0,6	1	2,253086
0,7	0,9	1,106413994	0,7	1	1,229349
0,8	0,9	0,609375	0,8	1	0,677083
0,9	0,9	0,323045267	0,9	1	0,358939



Lampiran 5. Hasil Perhitungan Nilai dari  $|S|$  untuk  $\gamma = 0.2$ 

$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,1	65,966667	0,1	0,2	131,9333
0,2	0,1	7,9833333	0,2	0,2	15,96667
0,3	0,1	2,2358025	0,3	0,2	4,471605
0,4	0,1	0,8666667	0,4	0,2	1,7333333
0,5	0,1	0,3933333	0,5	0,2	0,786667
0,6	0,1	0,1919753	0,6	0,2	0,383951
0,7	0,1	0,0943635	0,7	0,2	0,188727
0,8	0,1	0,0427083	0,8	0,2	0,085417
0,9	0,1	0,0136717	0,9	0,2	0,027343
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,3	197,9	0,1	0,4	263,8667
0,2	0,3	23,95	0,2	0,4	31,93333
0,3	0,3	6,7074074	0,3	0,4	8,94321
0,4	0,3	2,6	0,4	0,4	3,466667
0,5	0,3	1,18	0,5	0,4	1,573333
0,6	0,3	0,5759259	0,6	0,4	0,767901
0,7	0,3	0,2830904	0,7	0,4	0,377454
0,8	0,3	0,128125	0,8	0,4	0,170833
0,9	0,3	0,0410151	0,9	0,4	0,054687
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,5	329,83333	0,1	0,6	395,8
0,2	0,5	39,916667	0,2	0,6	47,9
0,3	0,5	11,179012	0,3	0,6	13,41481
0,4	0,5	4,3333333	0,4	0,6	5,2
0,5	0,5	1,9666667	0,5	0,6	2,36
0,6	0,5	0,9598765	0,6	0,6	1,151852
0,7	0,5	0,4718173	0,7	0,6	0,566181
0,8	0,5	0,2135417	0,8	0,6	0,25625
0,9	0,5	0,0683585	0,9	0,6	0,08203
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,7	461,76667	0,1	0,8	527,7333
0,2	0,7	55,883333	0,2	0,8	63,86667
0,3	0,7	15,650617	0,3	0,8	17,88642
0,4	0,7	6,0666667	0,4	0,8	6,933333
0,5	0,7	2,7533333	0,5	0,8	3,146667
0,6	0,7	1,3438272	0,6	0,8	1,535802
0,7	0,7	0,6605442	0,7	0,8	0,754908

0,8	0,7	0,2989583	0,8	0,8	0,341667
0,9	0,7	0,0957019	0,9	0,8	0,109374
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,9	593,7	0,1	1	659,6667
0,2	0,9	71,85	0,2	1	79,83333
0,3	0,9	20,122222	0,3	1	22,35802
0,4	0,9	7,8	0,4	1	8,666667
0,5	0,9	3,54	0,5	1	3,933333
0,6	0,9	1,7277778	0,6	1	1,919753
0,7	0,9	0,8492711	0,7	1	0,943635
0,8	0,9	0,384375	0,8	1	0,427083
0,9	0,9	0,1230453	0,9	1	0,136717



Lampiran 6. Hasil Perhitungan Nilai dari  $|S|$  untuk  $\gamma = -0.2$ 

$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,1	66,36667	0,1	0,2	132,7333
0,2	0,1	8,183333	0,2	0,2	16,36667
0,3	0,1	2,369136	0,3	0,2	4,738272
0,4	0,1	0,966667	0,4	0,2	1,933333
0,5	0,1	0,473333	0,5	0,2	0,946667
0,6	0,1	0,258642	0,6	0,2	0,517284
0,7	0,1	0,151506	0,7	0,2	0,303013
0,8	0,1	0,092708	0,8	0,2	0,185417
0,9	0,1	0,058116	0,9	0,2	0,116232
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,3	199,1	0,1	0,4	265,4667
0,2	0,3	24,55	0,2	0,4	32,73333
0,3	0,3	7,107407	0,3	0,4	9,476543
0,4	0,3	2,9	0,4	0,4	3,866667
0,5	0,3	1,42	0,5	0,4	1,893333
0,6	0,3	0,775926	0,6	0,4	1,034568
0,7	0,3	0,454519	0,7	0,4	0,606025
0,8	0,3	0,278125	0,8	0,4	0,370833
0,9	0,3	0,174348	0,9	0,4	0,232465
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,5	331,8333	0,1	0,6	398,2
0,2	0,5	40,91667	0,2	0,6	49,1
0,3	0,5	11,84568	0,3	0,6	14,21481
0,4	0,5	4,833333	0,4	0,6	5,8
0,5	0,5	2,366667	0,5	0,6	2,84
0,6	0,5	1,29321	0,6	0,6	1,551852
0,7	0,5	0,757532	0,7	0,6	0,909038
0,8	0,5	0,463542	0,8	0,6	0,55625
0,9	0,5	0,290581	0,9	0,6	0,348697
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,7	464,5667	0,1	0,8	530,9333
0,2	0,7	57,28333	0,2	0,8	65,46667
0,3	0,7	16,58395	0,3	0,8	18,95309
0,4	0,7	6,766667	0,4	0,8	7,733333
0,5	0,7	3,313333	0,5	0,8	3,786667
0,6	0,7	1,810494	0,6	0,8	2,069136
0,7	0,7	1,060544	0,7	0,8	1,212051

0,8	0,7	0,648958	0,8	0,8	0,741667
0,9	0,7	0,406813	0,9	0,8	0,464929
$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $	$\Delta x$	$\Delta t$	$ S $
0,1	0,9	597,3	0,1	1	663,6667
0,2	0,9	73,65	0,2	1	81,83333
0,3	0,9	21,32222	0,3	1	23,69136
0,4	0,9	8,7	0,4	1	9,666667
0,5	0,9	4,26	0,5	1	4,733333
0,6	0,9	2,327778	0,6	1	2,58642
0,7	0,9	1,363557	0,7	1	1,515063
0,8	0,9	0,834375	0,8	1	0,927083
0,9	0,9	0,523045	0,9	1	0,581161

