SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS PADA KOORDINAT POLAR

SKRIPSI

Oleh:
FATMA MUFIDAH
NIM. 10610030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2014

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS PADA KOORDINAT POLAR

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FATMA MUFIDAH
NIM. 10610030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS PADA KOORDINAT POLAR

SKRIPSI

Oleh:
FATMA MUFIDAH
NIM. 10610030

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 04 September 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	**H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd**
NIP. 19810502 200501 1 004	**NIP. 19710420 200003 1 003**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS PADA KOORDINAT POLAR

SKRIPSI

Oleh:
FATMA MUFIDAH
NIM. 10610030

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 11 September 2014

Penguji Utama	:	Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	____________________
Ketua Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	____________________
Sekretaris Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si NIP. 19810502 200501 1 004	____________________
Anggota Penguji	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	____________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fatma Mufidah

NIM : 10610030

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Solusi Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis pada Koordinat Polar

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 September 2014
Yang membuat pernyataan,

Fatma Mufidah
NIM. 10610030

MOTO

~ إِن تَنصُرُواْ ٱللَّهَ يَنصُرۡكُمۡ ~

Jika kamu menolong (agama) Allah, niscaya Dia akan menolongmu

(QS. Muhammad/47:7)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk

Ayah dan ibu tercinta

Abdurrahman dan Mahmudah

Yang tak henti mendo'akan dan memberikan kasih sayang

Kakak-kakak dan adik tersayang

Ermayani, Miftachul Fanani, Riza Zakaria, dan Muzdalifah

Yang selalu mendo'akan dan memberikan motivasi

Adik-adik terlucu

M. Ali Fikri, M. Fachri A., Larevan Firdaus F., M. Rifki F., dan M. Rizki A.

Yang senyum indah kalian selalu memberikan kekuatan dan semangat

Dan Aditya Cahya

Untuk kesabaran, kasih sayang, dan perhatian

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil ‘Alamin, puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini serta menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan baik dan lancar. Pada kesempatan ini, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang banyak memberikan pengetahuan, ilmu, dan bimbingan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
5. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi, sekaligus dosen wali yang telah memberikan motivasi, bimbingan, dan saran sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

6. Seluruh dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan cahaya ilmu pengetahuan.
7. Kedua orang tua penulis Ayah Abdurrahman dan Ibu Mahmudah, serta seluruh keluarga, terima kasih atas kasih sayang dan do'a yang selalu tercurahkan untuk penulis.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis, Binti Tsamrotul Fitria, Rista Umdah Masrifah, Wahyudi, Laila Fitriyah, Syifa'ul Amamah, serta mahasiswa Jurusan Matematika 2010, terima kasih atas kenangan indah dan pengalaman berharga selama menuntut ilmu.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. *Jazakumullahu khoiron katsiron*.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin *Ya Rabbal 'Alamin*.

Malang, September 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Mufidah, Fatma. 2014. **Solusi Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis pada Koordinat Polar**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si
(II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Kata Kunci: Solusi Numerik, Persamaan Poisson, Jaringan Fungsi Radial Basis, Koordinat Polar

Persamaan Poisson dalam koordinat polar atau lingkaran merupakan persamaan diferensial parsial linier orde dua tipe eliptis. Persamaan ini merupakan bentuk khusus atau bentuk non homogen dari persamaan Laplace. Persamaan Poisson pada koordinat polar dalam skripsi ini menggambarkan distribusi panas dalam ruang, yang dalam hal ini berbentuk lingkaran.

Solusi numerik persamaan Poisson diperoleh dengan metode jaringan fungsi radial basis. Dengan metode ini, setiap fungsi dan turunannya dapat didekati secara langsung dengan sebuah fungsi basis. Dalam penelitian ini, fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis jenis *multiquadrics*. Metode yang digunakan adalah metode langsung yaitu dengan menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya.

Solusi numerik menggunakan metode jaringan fungsi radial basis khususnya metode langsung yang diperoleh dari penelitian ini menunjukkan keakuratan yang tinggi dengan diperolehnya galat yang relatif kecil. Dengan galat mutlak maksimum terkecil yaitu 0,00088, dengan pemilihan $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$. Ini menunjukkan bahwa metode jaringan fungsi radial basis cukup efektif dalam mengaproksimasi persamaan Poisson dengan domain lingkaran.

ABSTRACT

Mufidah, Fatma. 2014. **Numerical Solution of Poisson's Equation Using Radial Basis Function Networks on the Polar Coordinate**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si
(II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Keywords: Numerical Solution, Poisson's Equation, Radial Basis Function Networks, Polar Coordinate

Poisson equation on the polar coordinate is one of the second order partial differential equations of elliptic type. This equation is also a special case of Laplace equation and inhomogeneous version of Laplace equation. In this research, Poisson equation describes heat conduction on the polar region.

Numerical solution of Poisson equation can be obtained by radial basis function networks method. Poisson equation can be approximate directly by a basis function. In this research, basis function that used is multiquadrics. And with direct radial basis function networks method by differentiating basis function to its independent variables.

Numerical solutions show that radial basis function network method especially direct radial basis function network method achieves great accuracy. The smallest maximum absolute errors is 0,00088 with $\Delta r = 0{,}1$ and $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$. From this result, it can be concluded that radial basis function networks method is effective to approximate Poisson equation on the polar coordinate.

ملخص

مفيدة, فطمة. ٢٠١٤. **الحل العددي لمعادلة بواسون باستخدام شبكة الدالة الشعاعية لتنسيق دائرة**. بحث جامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: (١) محمد جمهورى الماجستير

(٢) الحاج وحيو هنكى اروان الماجستير

الكلمة المفتاحية: الحل العددي، معادلة بواسون ، شبكة الدالة الشعاعية، تنسيق دائرة

معادلة بواسون في الإحداثيات القطبية أو دائرة هي المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية على الرتبة الثانية من نوع إليبتيك. هذه المعادلة هي شكل خاص أو شكل غير متجانس من معادلة لابلاس . في هذا البحث معادلة بواسون يدل على انتشار الحرارة في الغرفة الدائرة.

الحل العددي لمعادلة بواسون يستطيع أن يناله باستخدام شبكة القاعدة الشعاعية. بهذه الطريقة كل معادلة ومشتقاته يمكن ان يحاسبه مباشرة بالقاعدة الأساسية. في هذا البحث، تكون القاعدة الأساسية المستخدمة هي القاعدة الأساسية من نوع multiquadrics. بالطريقة المباشرة وهي تحسب مشتقات إلى المغيراتها الحر.

الحل العددي باستخدام شبكة القاعدة الشعاعية ، وخاصة الطريقة المباشرة المستمدة من هذا البحث تدل على دقة عالية بالخطأ الصغير . نتيجة أكبر الخطأ مطلق الأصغر هو 0,00088 ب Δr=0,1 و $\Delta\theta=\frac{\pi}{45}$. فهذا يشير إلى أن الأسلوب شبكة القاعدة الشعاعية لها فعالية الجيدة في محاسبة الحل العددي لمعادلة بواسون لتنسيق دائرة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyelesaian suatu persamaan diferensial yang memiliki bentuk geometri sederhana dapat dilakukan dengan metode analitik. Namun, untuk persamaan diferensial yang kompleks dan rumit, digunakan metode numerik sebagai langkah alternatif dalam penyelesaian masalah tersebut. Saat ini, metode numerik tidak hanya dikembangkan oleh para ilmuwan matematika saja, tetapi juga oleh para ilmuwan bidang yang lainnya, seperti teknik mesin dan teknik elektro (Munir, 2010).

Konsep dari metode numerik adalah menghampiri solusi eksak dengan proses atau teknik tertentu untuk mendapatkan solusi numerik dari suatu persoalan matematika. Metode numerik dalam bahasa matematika lainnya bisa disebut dengan estimasi atau taksiran. Ternyata konsep estimasi dalam ilmu matematika telah ditunjukkan Allah Swt dalam Al-Qur'an sejak ribuan tahun yang lalu. Allah Swt berfirman dalam Al-Qur'an surat Ash-Shaffaat ayat 147:

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: *"Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih."*(QS. Ash-Shaffaat/37:147).

Melalui ayat tersebut dapat diketahui bahwa sesungguhnya Allah Swt telah memberikan petunjuk-Nya kepada umat manusia tentang konsep estimasi. Estimasi dalam ayat tersebut tidak disebutkan secara langsung, namun dari ayat tersebut tersirat makna hampiran atau kesan ketidakyakinan akan jumlah "seratus ribu orang atau lebih". Menurut penulis, kata "أَوْ يَزِيدُونَ" dalam ayat tersebut memberikan kesan ketidak pastian jumlah orang yang disebutkan. Dapat diambil kesimpulan bahwa jumlah orang yang dimaksud dalam ayat tersebut bisa jadi lebih dari seratus ribu. Seratus ribu bukan jumlah yang sebenarnya melainkan jumlah hampiran atau taksiran. Jumlah taksiran dalam ayat tersebut seperti yang ada pada konsep metode numerik yang menghasilkan solusi numerik (Abdussakir, 2006).

Salah satu metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan masalah persamaan diferensial adalah jaringan fungsi radial basis (*Radial Basis Function Networks*). Jaringan fungsi radial basis telah lama dikenal dalam bidang rekayasa dan teknik sebagai jaringan syaraf tiruan yang menggunakan fungsi basis sebagai fungsi pengaktif. Gagasan jaringan fungsi radial basis diperoleh dari teori aproksimasi fungsi. Mengaproksimasi suatu fungsi adalah menghampiri fungsi tersebut dengan fungsi lainnya (Hajek, 2005).

Jaringan fungsi radial basis merupakan pemetaan dari suatu vektor *input* dengan p-dimensi ke vektor *output* yang hanya 1 dimensi. Secara aljabar disimbolkan dengan $f{:}R^p \to R^1$. Fungsi f terdiri dari himpunan bobot $\{w_j\}_{j=1}^{m}$ dan himpunan fungsi basis $\{\phi(x_i, c_j)\}_{j=1}^{m}$, dengan $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Secara umum, fungsi basis dapat ditulis dengan $\phi(x_i, c_j) = \sqrt{(x_i - c_j)^2 + \alpha}$, $\alpha = \mathrm{var}(x)$. x_i adalah vektor *input* dan c_j adalah titik *center* dari x ke-i (Mai-Duy dan Tran-Cong, 2003).

Kelebihan metode ini dibandingkan dengan metode numerik lainnya adalah setiap fungsi dan turunannya dapat dihampiri secara langsung dengan sebuah fungsi basis. Metode jaringan fungsi radial basis terdiri dari metode langsung dan metode tidak langsung. Metode langsung yaitu dengan menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya, metode tidak langsung yaitu dengan mengintegralkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya. Metode yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah metode langsung (Mai-Duy dan Tran-Cong, 2003).

Persamaan Poisson merupakan persamaan diferensial parsial orde dua tipe eliptis yang implementasinya banyak digunakan dalam teknik elektro, teknik mesin, dan fisika teori. Dinamai dari nama belakang seorang matematikawan Perancis yang juga seorang ahli fisika dan geometri Siméon Denis Poisson. Dalam fisika teori, persamaan Poisson menggambarkan distribusi panas dalam ruang (Suarga, 2007).

Penelitian ini diharapkan dapat diperoleh ketelitian yang lebih baik serta waktu komputasi yang cepat untuk solusi numerik persamaan Poisson pada koordinat polar. Persamaan Poisson pada koordinat polar sebenarnya dapat diselesaikan secara analitik menggunakan metode separasi variabel. Metode separasi variabel tersebut langkah dan prosesnya cukup panjang dan rumit, sehingga diambil langkah alternatif yaitu dengan metode numerik menggunakan jaringan fungsi radial basis.

Berdasarkan jurnal yang berjudul *Approximation of function and its derivatives using radial basis function networks* yang ditulis oleh Nam Mai-Duy dan Tanh Tran-Cong (2003), aproksimasi fungsi menggunakan jaringan fungsi radial basis memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode konvensional lain. Galat yang dihasilkan relatif kecil, grafik solusi numeriknya hampir menyamai solusi eksaknya. Metode ini cukup efektif dalam masalah aproksimasi. Disimpulkan pula dalam jurnal tersebut, bahwa jenis fungsi basis *multiquadrics* mencapai ketelitian lebih baik dalam metode langsung maupun metode tidak langsung.

Berdasarkan skripsi yang ditulis oleh Rohmawati Fitriya (2011), telah dibahas tentang penyelesaian numerik persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa metode ini cukup efektif dalam menghitung solusi numerik persamaan Poisson tersebut, serta menghasilkan galat yang relatif kecil. Persamaan Poisson yang diselesaikan tersebut berada pada koordinat *Cartesius* atau persegi panjang.

Koordinat *Cartesius* bukan merupakan satu-satunya jalan untuk menunjukkan kedudukan suatu titik pada bidang. Hal ini disebabkan karena bentuk geometris di alam tidak selalu berupa kotak-kotak atau persegi panjang, namun adakalanya berbentuk lingkaran. Cara lain untuk menunjukkan kedudukan suatu titik pada bidang ialah menggunakan sistem koordinat polar. Berdasarkan latar belakang tersebut penulis bermaksud untuk menyelesaikan masalah yang sama tetapi domainnya berada pada koordinat polar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana solusi numerik persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis pada koordinat polar?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis pada koordinat polar.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan Poisson yang diselesaikan berdimensi dua pada domain lingkaran (r, θ).
2. Fungsi basis yang digunakan adalah jenis fungsi basis *multiquadrics*.
3. Metode yang digunakan adalah metode langsung yaitu dengan menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan Poisson.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan secara numerik persamaan Poisson pada koordinat polar adalah menggunakan pendekatan studi literatur atau *library research*. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mentransformasi persamaan Poisson beserta kondisi batasnya dari koordinat *Cartesius* ke koordinat polar.
2. Menurunkan fungsi basis *multiquadrics* terhadap variabel-variabel bebasnya (r, θ) hingga turunan kedua.
3. Mendiskritisasi persamaan Poisson pada koordinat polar menggunakan jaringan fungsi radial basis serta kondisi batasnya.
4. Mensubstitukan nilai-nilai input (r_i, θ_i) dan $f(r_i, \theta_i)$ ke dalam persamaan Poisson dalam bentuk persamaan jaringan fungsi radial basis yang telah diperoleh.

5. Menghitung nilai bobot w_j .
6. Menghitung solusi persamaan Poisson pada koordinat polar dengan mengalikan nilai bobot w_j yang telah diperoleh dan fungsi basis *multiquadrics* yang tanpa diturunkan.
7. Melakukan simulasi, menggambarkan grafik, serta menganalisis galat.
8. Memberikan kesimpulan atas hasil penelitian yang telah diperoleh serta saran untuk penelitian selanjutnya.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan penelitian ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, yang masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini meliputi beberapa subbab yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang ulasan-ulasan yang berkaitan dengan penelitian, baik dari hasil penelitian terdahulu, berbagai literatur (buku), serta dari jurnal ilmiah. Di antaranya adalah tentang persamaan Poisson, sistem koordinat polar, turunan parsial, jaringan fungsi radial basis, metode langsung jaringan fungsi radial basis, analisis galat, dan kajian agama solusi numerik persamaan Poisson.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis menjelaskan cara menyelesaikan persamaan Poisson pada koordinat polar menggunakan jaringan fungsi radial basis, yaitu dengan mentransformasi persamaan Poisson beserta kondisi batasnya dari koordinat *Cartesius* ke koordinat polar, mendiskritisasi persamaan Poisson pada koordinat polar menggunakan jaringan fungsi radial basis serta kondisi batasnya, menghitung nilai bobot w_j, menghitung solusi numerik persamaan Poisson pada koordinat polar dengan persamaan jaringan fungsi radial basis dan nilai bobot w_j yang telah diperoleh, melakukan simulasi dan menggambarkan grafiknya.

Bab IV Penutup

Pada bab ini penulis mengkaji tentang kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian yang dilakukan, dan saran yang disampaikan penulis untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Poisson

Strauss (2008) menyatakan bahwa jika sebuah persamaan difusi atau persamaan gelombang tidak bergantung pada waktu (t), yaitu $u_t = 0$ dan $u_{tt} = 0$, maka persamaan difusi dan persamaan gelombang tersebut menghasilkan persamaan Laplace:

$u_{xx} = 0$ dalam satu dimensi

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ dalam dua dimensi

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ dalam tiga dimensi

Bentuk non homogen dari persamaan Laplace adalah:

$$\nabla^2 u = f \tag{2.1}$$

f adalah sebuah fungsi yang diberikan, maka disebut persamaan Poisson.

Persamaan Poisson merupakan bentuk non homogen dari persamaan Laplace yang juga merupakan bentuk khusus dari persamaan Laplace. Bentuk umum dalam dua dimensinya yaitu:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{2.2}$$

Persamaan Poisson tersebut merupakan persamaan Poisson pada sistem koordinat *Cartesius*. *Superscript* kuadrat pada persamaan tersebut mengindikasikan bahwa persamaan tersebut melibatkan turunan parsial orde kedua. Jika $f(x,y) = 0$, maka:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{2.3}$$

yang kemudian dikenal dengan persamaan Laplace. Pada domain $x_a < x < x_b$, $y_a < y < y_b$.

Boyce dan DiPrima (2001) menyatakan bahwa masalah kondisi batas untuk persamaan Poisson 2 dimensi (x, y) dalam sistem koordinat *Cartesius* adalah:

$$\begin{aligned} u(x_a, y) &= f_1(y) \qquad & u(x_b, y) &= f_2(y) \\ u(x, y_a) &= f_3(x) \qquad & u(x, y_b) &= f_4(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$f_1(y), f_2(y), f_3(x), f_4(x)$ adalah fungsi-fungsi yang menyatakan kondisi pada batas-batas tersebut.

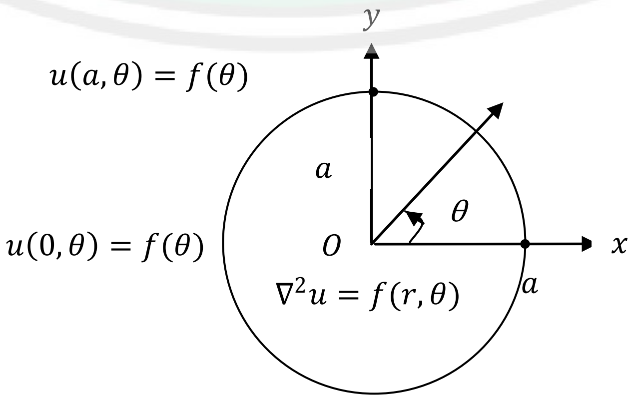
Persamaan Poisson pada sistem koordinat polar (r, θ), dengan $u(r, \theta)$ adalah:

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} = f(r,\theta) \tag{2.4}$$

Domain persamaan Poisson tersebut adalah $0 < r < a$ dan $0 \leq \theta \leq b$. Kondisi batas untuk persamaan Poisson pada sistem koordinat polar 2 dimensi (r, θ) adalah:

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= f(\theta) \\ u(0, \theta) &= f(\theta) \end{aligned} \tag{2.6}$$

a adalah jari-jari lingkaran dan $f(\theta)$ adalah fungsi yang menyatakan kondisi pada batas tersebut.



Gambar 2.1 Kondisi Batas pada Koordinat Polar

2.2 Sistem Koordinat Polar

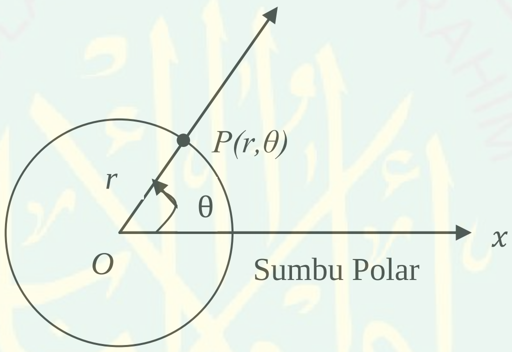
Sistem koordinat diciptakan untuk menyatakan kedudukan suatu benda dalam ruang. Sistem koordinat *Cartesius* atau siku-siku dikenalkan oleh dua matematikawan, Pierre Fermat dan Renê Descartes. Dasar pemikiran mereka ialah untuk menunjukkan kedudukan titik *P* pada suatu bidang dengan dua bilangan yang ditulis dengan lambang (x, y). Setiap bilangan menggambarkan jarak berarah dari dua sumbu yang saling tegak lurus. Sistem koordinat tersebut merupakan dasar dari geometri analitik, yang sangat membantu dalam pengembangan kalkulus diferensial dan kalkulus integral (Purcell dan Varberg, 1990).

Bentuk geometri di alam tidak selalu berupa kotak-kotak, sehingga sistem koordinat *Cartesius* yang dikenal selama ini menjadi amat terbatas penggunaannya. Koordinat *Cartesius* bukan merupakan jalan satu-satunya untuk menunjukkan kedudukan suatu benda atau titik pada bidang. Sistem koordinat polar atau kutub merupakan salah satu sistem koordinat lain yang diciptakan untuk menunjukkan kedudukan titik pada bidang yang berbentuk lingkaran (Soedojo, 1995).

Setiap titik pada bidang *Cartesius* dihubungkan pada jarak tertentu pada sumbu x yang disebut absis, dan pada sumbu y yang disebut ordinat. Pasangan berurutan (x, y) disebut dengan koordinat. Sepasang koordinat polar suatu titik pada sistem koordinat polar, ditulis dengan (r, θ).

Illustrasi sistem koordinat polar dimulai dengan menggambar sebuah setengah garis tetap yang dinamakan sumbu polar yang berpangkal pada sebuah titik pusat *O*. Titik ini disebut polar atau titik asal. Biasanya sumbu polar ini digambar mendatar dan mengarah ke kanan dan oleh sebab itu sumbu ini dapat disamakan dengan sumbu *x* positif pada sistem koordinat *Cartesius*.

Purcell dan Varberg (1990) menyatakan bahwa setiap titik *P* adalah perpotongan antara sebuah lingkaran tunggal yang berpusat di *O* dan sebuah sinar tunggal yang memancar dari *O*. *r* adalah jari- jari ingkaran dan *θ* adalah salah satu sudut antara sinar dan sumbu polar. Sepasang koordinat polar dari titik *P* dan ditulis dengan *P* (*r*, *θ*) adalah (r, θ). Sistem koordinat polar digambarkan dalam gambar 2.2 sebagai berikut:



Gambar 2.2 Sistem Koordinat Polar

Purcell dan Varberg (1990) menyatakan bahwa andaikan sumbu polar berimpit dengan sumbu *x* positif pada sistem koordinat *Cartesius*, maka koordinat polar (*r*, *θ*) sebuah titik *P* dan koordinat *Cartesius* (x, y) titik itu dihubungkan oleh persamaan:

$$x = r\cos\theta \tag{2.7}$$

$$y = r\sin\theta \tag{2.8}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{2.9}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = arc\tan\frac{y}{x} \tag{2.10}$$

2.3 Turunan Parsial

Purcell dan Varberg (1990) menyatakan bahwa diberikan fungsi f adalah suatu fungsi dengan dua variabel yaitu x dan y. y diasumsikan konstan atau $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ menjadi fungsi satu variabel yaitu x saja. Turunannya di $x = x_0$ disebut turunan parsial f terhadap x di (x_0, y_0) dan dinyatakan sebagai $f_x(x_0, y_0)$.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{2.11}$$

Turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan oleh $f_y(x_0, y_0)$ dan dituliskan sebagai:

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{2.12}$$

Purcell dan Varberg (1990) menyatakan bahwa turunan parsial orde kedua suatu fungsi f yang mengandung variabel x dan y, diperoleh dari empat buah turunan parsial orde kedua fungsi f tersebut.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{2.13}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{2.14}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{2.15}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{2.16}$$

Purcell dan Varberg (1990) menyatakan bahwa turunan parsial tingkat tiga dan lebih tinggi didefinisikan dengan cara yang sama dan cara penulisannya pun sama. f merupakan suatu fungsi dua variabel yaitu x dan y, turunan parsial orde ketiga f yang diperoleh dengan menurunkan f secara parsial, pertama terhadap x dan kemudian dua kali terhadap y, akan ditunjukkan oleh:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f_{xyy} \quad (2.17)$$

Andaikan f merupakan suatu fungsi tiga variabel yaitu x, y, dan z. Turunan parsial f terhadap x di (x, y, z) dinyatakan oleh $f_x(x, y, z)$ atau $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ akan didefinisikan oleh:

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z,)}{\Delta x} \quad (2.18)$$

$f_x(x, y, z)$ diperoleh dengan mengasumsikan y dan z sebagai konstanta dan menurunkan f terhadap variabel x. Turunan parsial terhadap y dan z didefinisikan dengan cara yang sama.

Diberikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi variabel bebas x dan y. Variabel x dan y merupakan variabel bebas, dapat dimungkinkan x berubah-ubah sementara y diasumsikan tetap, dapat dimungkinkan y berubah-ubah sementara x diasumsikan tetap, dapat dibolehkan x dan y keduanya berubah-ubah. Dua keadaan pertama tersebut, z merupakan fungsi variabel tunggal dan dapat diturunkan menurut aturan-aturan yang biasa (Ayres, 1996).

Menurut Ayres (1996) jika x berubah sedangkan y diasumsikan tetap, maka z adalah fungsi x dan turunannya ke x.

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) disebut turunan pertama parsial dari $z = f(x, y)$ ke x. x diasumsikan tetap sedangkan y berubah, maka z adalah fungsi y dan turunannya ke y.

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) disebut turunan pertama parsial dari $z = f(x, y)$ ke y.

2.4 Jaringan Fungsi Radial Basis

Jaringan fungsi radial basis mulai dikenal pertama kali sejak D. S. Broomhead dan David Lowe menyampaikan makalahnya yang berjudul *Radial basis functions*, *Multi-variable functional interpolation and adaptive networks* pada tahun 1988. Metode ini merupakan salah satu dari metode jaringan syaraf tiruan yang menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi basis. Jaringan syaraf tiruan itu sendiri dikembangkan pertama kali oleh *neurophysiologist* Waren McCulloch dan *logician* Walter Pitts pada tahun 1943 sebagai algoritma pemrosesan informasi yang terinspirasi oleh sistem kerja jaringan syaraf biologis pada otak manusia (Hajek, 2005).

Jaringan fungsi radial basis berkembang beberapa tahun terakhir dan banyak digunakan dalam penyelesaian masalah aproksimasi fungsi. Struktur jaringan fungsi radial basis ini terdiri atas 3 bagian, yaitu *input layer*, *hidden layer*, dan *output layer*. Tiap-tiap unit pada bagian *hidden layer* merupakan representasi dari fungsi aktivasi yaitu fungsi basis (Setiawan, 2002).

Diberikan sebuah himpunan yang anggotanya berisi pasangan variabel bebas (x) dan variabel terikat (y). Himpunan tersebut dilambangkan dengan $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$ dengan n adalah banyaknya input. Jaringan fungsi radial basis merepresentasikan sebuah pemetaan dari vektor *input* dengan *p*-dimensi ke vektor *output* yang hanya 1-dimensi. Secara matematis jaringan fungsi radial basis ditulis dengan $f: R^p \rightarrow R^1$ (Mai-Duy dan Tran-Cong, 2003).

Fungsi f pada $f{:}R^p{\rightarrow}R^1$ terdiri dari himpunan bobot $\{w_j\}_{j=1}^{m}$ dan himpunan fungsi basis $\{\phi(x_i, c_j)\}_{j=1}^{m}$, dengan $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Secara umum, fungsi basis dapat ditulis dengan $\phi(x_i, c_j) = \sqrt{(x_i - c_j)^2 + \alpha}$, $\alpha = \mathrm{var}(x_i)$. x_i adalah vektor *input* dan c_j adalah titik *center* dari x ke-i. (Mai-Duy dan Tran-Cong, 2003).

Terdapat beberapa jenis fungsi basis dalam jaringan fungsi radial basis. Fungsi basis yang umum digunakan di antaranya adalah fungsi basis *multiquadrics*, *invers multiquadrics*, dan *Gaussians*. Fungsi basis *multiquadrics* merupakan jenis fungsi basis yang memiliki keakuratan lebih baik dari jenis fungsi yang lain. Dikembangkan pertama kali oleh Roland Hardy pada tahun 1971 dalam karya penelitiannya yang berjudul *Multiquadrics equations of topography and other irregular surfaces*. Fungsi *multiquadrics* ini kemudian dikembangkan oleh matematikawan, Richard Franke pada tahun 1979 dan selanjutnya mengalami perkembangan yang signifikan dengan digunakannya fungsi *multiquadrics* dalam penyelesaian masalah persamaan diferensial, melalui penelitian yang dilakukan oleh Edward Kansa pada tahun 1990 (Sarra dan Kansa, 2009).

Bentuk umum fungsi *multiquadrics* dalam mengaproksimasi fungsi yaitu:

1. Untuk fungsi 1 variabel

$$\phi(x_i, c_j) = \sqrt{(x_i - c_j)^2 + \alpha}, \text{ untuk setiap } \alpha > 0 \qquad (2.21)$$

2. Untuk fungsi 2 variabel

$$\phi(x_i, y_i, c_j, d_j) = \sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta}, \text{ untuk setiap } \beta > 0 \qquad (2.22)$$

Keterangan,

x_i : vektor *input* ke-i

y_i : vektor *input* ke-i

c_j : titik *center* ke-j dari x ke-i

d_j : titik *center* ke-j dari y ke-i

α : nilai parameter *width* untuk fungsi 1 variabel, dengan $\alpha = \text{var}\ (x_i)$

β : nilai parameter *width* untuk fungsi 2 variabel, dengan $\beta = \frac{\text{var}\ (x_i)+\text{var}\ (y_i)}{2}$

Diberikan fungsi 1 variabel yaitu $y(x)$. $\hat{y}(x)$ adalah aproksimasi fungsi tersebut menggunakan fungsi basis jenis *multiquadrics*, maka:

$$\hat{y}(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \sqrt{(x - c_j)^2 + \alpha} \tag{2.23}$$

Diberikan fungsi 2 variabel $u(x, y)$. $\hat{u}(x, y)$ adalah aproksimasi fungsi tersebut menggunakan jenis fungsi *multiquadrics*, maka:

$$\hat{u}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} w_j \sqrt{(x - c_j)^2 + (y - d_j)^2 + \beta} \tag{2.24}$$

Aproksimasi fungsi 3 variabel sampai n variabel, hanya akan merubah fungsi basisnya saja, mengikuti fungsi yang diaproksimasi tersebut.

Aminataei dan Mazarei (2008) menyatakan bahwa pembahasan yang penting dalam jaringan fungsi radial basis adalah menghitung nilai bobot w_j yang belum diketahui. Langkah-langkah dalam mengaproksimasi suatu fungsi menggunakan jaringan fungsi radial basis setelah dipilih sebuah himpunan fungsi basis ϕ, adalah menghitung nilai-nilai bobot w_j. Langkah selanjutnya, jika telah didapatkan himpunan nilai-nilai bobot w_j, maka jaringan fungsi radial basis dapat dibentuk. Jaringan fungsi radial basis dibentuk oleh himpunan nilai bobot w_j dan himpunan fungsi basis ϕ. Solusi numerik/ aproksimasi fungsi tersebut dapat dihitung dengan :

$$\hat{y}(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \, \phi(x, c_j) \tag{2.25}$$

Mai-Duy dan Tran-Cong (2003) menyatakan bahwa hubungan antara nilai bobot w, f, dan fungsi basis A adalah:

$$Aw = f \tag{2.26}$$

$$(A^{-1}A)w = A^{-1}f \tag{2.27}$$

$$w = A^{-1}f \tag{2.28}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1(x_1, c_1) & A_2(x_1, c_2) & \cdots & A_m(x_1, c_n) \\ A_1(x_2, c_1) & A_2(x_2, c_2) & \cdots & A_m(x_2, c_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1(x_n, c_1) & A_2(x_n, c_2) & \cdots & A_m(x_n, c_n) \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$w = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T \tag{2.30}$$

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \tag{2.31}$$

A merupakan fungsi basis ϕ yang telah diturunkan ataupun diintegralkan terhadap variabel bebasnya. $m = n$ pada kasus tertentu.

2.4.1 Metode Langsung Jaringan Fungsi Radial Basis

Aproksimasi fungsi menggunakan metode langsung jaringan fungsi radial basis yaitu dengan menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya. Jenis fungsi basis yang digunakan dalam penelitian ini adalah jenis *multiquadrics*, maka fungsi *multiquadrics* tersebut diturunkan terhadap variabel bebasnya. Penurunan fungsi basis tersebut menyesuaikan dengan persamaan yang diaproksimasi. Fungsi basis akan diturunkan terhadap variabel bebasnya hingga orde ke$-n$ bergantung pada persamaan yang diaproksimasi tersebut melibatkan turunan hingga orde ke$-n$. Turunan-turunan fungsi basis ini akan digunakan dalam menghitung nilai bobot w_j.

Diasumsikan bahwa fungsi yang akan diaproksimasi adalah fungsi 2 variabel, maka $h(x)$ adalah turunan orde pertama fungsi basis *multiquadrics* $\phi(x, y, c_j, d_j)$ terhadap x adalah:

$$h(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{(x - c_j)}{\sqrt{(x - c_j)^2 + (y - d_j)^2 + \beta}} \tag{2.32}$$

Turunan orde pertama terhadap y ditulis dengan $h(y)$:

$$h(y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{(y - d_j)}{\sqrt{(x - c_j)^2 + (y - d_j)^2 + \beta}} \tag{2.33}$$

Turunan orde kedua fungsi basis *multiquadrics* $\phi(x, y, c_j, d_j)$ terhadap x adalah dengan menurunkan sekali lagi $h(x)$ terhadap x, atau dapat ditulis dengan $\bar{h}(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$. Turunan orde kedua terhadap y diperoleh dengan cara yang sama.

2.5 Analisis Galat

Analisis galat sangat penting dalam metode numerik. Besarnya galat menunjukkan seberapa dekat solusi numerik dengan solusi eksaknya. Semakin kecil galat, berarti semakin teliti solusi numerik yang dihasilkan. Diasumsikan bahwa $\hat{y}$ adalah solusi numerik yang didapat dari metode jaringan fungsi radial basis, dan y adalah solusi eksaknya, maka selisih antara solusi eksak (y) dengan solusi numerik ($\hat{y}$) disebut galat dan dilambangkan dengan ε.

$$\varepsilon = y - \hat{y} \tag{2.34}$$

Perlu diketahui bahwa metode numerik selalu menghasilkan solusi numerik yang pastinya terdapat galat dalam solusi tersebut. Secara umum, beberapa sumber utama galat adalah:

1. *Round-off errors* (galat pembulatan): galat yang timbul akibat adanya pembulatan angka.
2. *Truncation errors* (galat pemotongan): galat yang timbul karena pemotongan suku pada suatu deret aproksimasi.
3. *Range errors*: galat yang terjadi karena nilai hasil komputasi melampaui batas angka yang diperbolehkan oleh komputer, misalnya sangat kecil atau sangat besar.

Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari solusi numerik. Galat ini terjadi apabila solusi numerik digunakan untuk menggantikan solusi eksak. Suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke n dengan membuat semua angka di sebelah kanan dari posisi tersebut nol. Angka pada posisi ke n tersebut tidak berubah atau dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar dari setengah dari angka posisi ke n (Triatmodjo, 2002).

Galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya proses perhitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Misalnya suatu proses tak terhingga diganti dengan proses berhingga. Suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak terhingga. Solusi eksak akan diperoleh apabila semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku saja, maka hasilnya tidak tepat sama dengan solusi eksak. Galat karena hanya diperhitungkan beberapa suku pertama disebut galat pemotongan (Triatmodjo, 2002).

2.6 Kajian Agama Solusi Numerik Persamaan Poisson

Keindahan dan keteraturan pola bilangan matematika telah lama ditunjukkan oleh Allah Swt kepada manusia sejak diturunkannya Al-Qur'an. Tanpa disadari, Al-Qur'an yang telah ada sejak zaman Rasulullah Saw ternyata di dalamnya mengkaji tentang ilmu pengetahuan yang baru-baru ini berkembang. Konsep tentang ilmu pengetahuan itu telah ada dalam Al-Qur'an sejak 1400 tahun yang lalu.

Keindahan pola bilangan matematika dalam Al-Qur'an menunjukkan bahwa Allah Swt sebenarnya telah menunjukkan tentang adanya konsep ilmu matematika, yaitu suatu ilmu hitung yang selanjutnya dapat digunakan untuk membantu manusia dalam memecahkan masalah yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai manusia tentunya harus mempelajari terlebih dahulu ilmu tersebut untuk dapat mengaplikasikannya dalam kehidupan sehari-hari. Konsep matematika yang telah dibahas dalam Al-Qur'an menyangkut konsep estimasi atau taksiran. Allah Swt berfirman dalam Al-Qur'an surat Ash-Shaffaat ayat 147:

وَأَرْسَلْنَـٰهُ إِلَىٰ مِا۟ئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: *"Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih."*(QS. Ash-Shaffaat/37:147).

Terjemah dari ayat tersebut dapat diketahui bahwa nabi Yunus diutus oleh Allah Swt kepada umatnya yang berjumlah 100.000 orang atau lebih. Terjemah dari ayat tersebut jika dibaca dengan seksama, ada rasa atau kesan bahwa terdapat keraguan dalam menyatakan jumlah umat nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah Swt Maha Mengetahui segala sesuatu? Termasuk jumlah umat nabi Yunus? Jawaban dari pertanyaan tersebut adalah “inilah estimasi (taksiran)” (Abdussakir, 2006).

Melalui ayat tersebut dapat ditangkap bahwa Allah Swt sebenarnya telah mengajarkan suatu ilmu dalam matematika yang dikenal dengan estimasi. ketrampilan estimasi dalam kehidupan sehari-hari sangat dibutuhkan dan menghemat waktu dalam perhitungan. Estimasi adalah ketrampilan untuk menentukan suatu jumlah tanpa melakukan penghitungan secara eksak (Abdussakir, 2006).

Kata " مِائَةِ أَلف أَوْ يَزِيدُونَ " yang berarti seratus ribu atau lebih jika dihayati terdapat kesan ketidakpastian akan jumlah tersebut. Bisa jadi jumlahnya memang seratus ribu atau lebih dari seratus ribu. Ayat tersebut menunjukkan bahwa seratus ribu bukanlah jumlah sebenarnya, namun jumlah taksiran yang dalam ilmu matematika biasa disebut dengan solusi numerik karena diperoleh dari proses numerik atau proses pendekatan.

Al-Qur’an merupakan petunjuk bagi umat manusia dalam menjalani kehidupan sehari-hari. Maha besar Allah Swt yang telah menciptakan Al-Qur’an yang tidak hanya berisi tentang hukum dan syari’ah agama, namun juga berisi petunjuk-petunjuk tentang ilmu pengetahuan yang ada di alam semesta. Fenomena yang terdapat di alam semesta ini pada hakikatnya dapat dimodelkan ke dalam bentuk persamaan diferensial. Keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah SWT (Rahman, 2007).

BAB III

PEMBAHASAN

Penyelesaian numerik persamaan Poisson pada koordinat polar menggunakan jaringan fungsi radial basis akan dijelaskan dalam bab ini. Bab ini juga membahas simulasi penyelesaian numerik persamaan Poisson, grafik dari simulasi tersebut, serta analisis galat metode jaringan fungsi radial basis. Bab ini terdiri dari 6 subbab, yaitu transformasi persamaan Poisson serta kondisi batasnya dari koordinat *Cartesius* ke koordinat polar, diskritisasi persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis beserta kondisi batasnya, menghitung nilai bobot w_j, solusi numerik persamaan Poisson pada koordinat polar, simulasi, dan kajian agama.

3.1 Transformasi Persamaan Poisson serta Kondisi Batasnya dari Koordinat *Cartesius* ke Koordinat Polar

Diberikan persamaan Poisson dimensi 2 pada sistem koordinat *Cartesius*:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{3.1}$$

Domain persamaan Poisson (3.1) tersebut adalah $x_a < x < x_b$, $y_a < y < y_b$, dengan $f(x,y) \neq 0$. Kondisi batas pada sistem koordinat *Cartesius*:

$$\begin{aligned} u(x_a, y) &= f_1(y) & \quad u(x_b, y) &= f_2(y) \\ u(x, y_a) &= f_3(x) & \quad u(x, y_b) &= f_4(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$f_1(y), f_2(y), f_3(x), f_4(x)$ adalah fungsi yang menyatakan kondisi pada batas tersebut.

Andaikan sumbu polar berimpit dengan sumbu x positif pada sistem koordinat *Cartesius*, maka koordinat polar (r, θ) sebuah titik dan koordinat

Cartesius (x, y) titik itu dihubungkan oleh persamaan (2.7), (2.8), (2.9), dan (2.10) yang telah dijelaskan pada subbab 2.3. Turunan parsial orde pertama $u(x, y)$ terhadap x dan y diperoleh dengan kaidah rantai (*chain rule*).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Turunan parsial orde kedua $u(x, y)$ terhadap x diperoleh dengan menurunkan turunan pertama $u(x, y)$ terhadap x sekali lagi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r}]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + [\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}]\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (3.3)$$

$$[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r}] = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r}] = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad (3.4)$$

$$[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}] = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}] = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad (3.5)$$

Persamaan (3.4) dan (3.5) tersebut kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.3), menjadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial \theta}{\partial x}]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + [\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}]\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (3.6)$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pada persamaan (3.6) diperoleh dengan mencari turunan parsial r dan θ terhadap x terlebih dahulu:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{x}{r} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{(x^2+y^2)} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+y^2)} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}}{(x^2+y^2)} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{\frac{r^2 - x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r}\frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{x^2 + y^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2}{r^3} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(arc \tan \frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot -\frac{y}{x^2}$$

$$= -\frac{\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{r^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{\frac{r^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2}\frac{x^2}{r^2} = -\frac{y}{r^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{r^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)}\right)$$

$$= \frac{0(x^2+y^2) - (-y) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2xy}{r^4}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} = \frac{2xy}{r^4} \tag{3.10}$$

Persamaan (3.7), (3.8), (3.9), dan (3.10) kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.6), menjadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial \theta}{\partial x}]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + [\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}]\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}(-\frac{y}{r^2})]\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y^2}{r^3} + [\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{x}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(-\frac{y}{r^2})](-\frac{y}{r^2}) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2xy}{r^4}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x}{r}\frac{x}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\left(-\frac{y}{r^2}\right)\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y^2}{r^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{x}{r}(-\frac{y}{r^2}) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(-\frac{y}{r^2})(-\frac{y}{r^2}) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2xy}{r^4}$$

$$= \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Diasumsikan bahwa $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{y^4}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{3.11}$$

Turunan parsial orde kedua $u(x,y)$ terhadap y yaitu dengan menurunkan sekali lagi $u(x,y)$ terhadap y.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial r}]\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + [\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}]\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{3.12}$$

$$[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial r}] = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial r}] = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{3.13}$$

$$[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}] = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}] = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{3.14}$$

Persamaan (3.13) dan (3.14) kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.12), menjadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial \theta}{\partial y}]\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + [\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial y}]\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{3.15}$$

Langkah selanjutnya, yaitu mencari $\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$,

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y$$

$$= \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{y}{r} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{(x^2+y^2)} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+y^2)} - \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} = \frac{\frac{r^2 - y^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - y^2}{r}\frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3} = \frac{x^2 + y^2 - y^2}{r^3} = \frac{x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(arc\tan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{r^2}{x^2}} = \frac{1}{x}\frac{x^2}{r^2} = \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} \qquad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)}\right) \\
&= \frac{0(x^2+y^2)-(x)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
&= -\frac{2xy}{r^4}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{r^4} \qquad (3.19)$$

Persamaan (3.16), (3.17), (3.18), dan (3.19) kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.15), diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \\
&= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{y}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\frac{x}{r^2}\right]\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x^2}{r^3} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{y}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{x}{r^2}\right]\frac{x}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{y}{r}\frac{y}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\frac{x}{r^2}\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x^2}{r^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{y}{r}\frac{x}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{x}{r^2}\frac{x}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right) \\
&= \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} + \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

Diasumsikan bahwa $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} + \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x^4}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\theta} \qquad (3.20)$$

Langkah selanjutnya setelah diperoleh $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) dan (3.20) ke persamaan (3.1).

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y)$$

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} + \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \\ &\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} + \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\theta}\end{aligned} = f(r,\theta)$$

$$\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = f(r,\theta)$$

$$\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{y^2}{r^3} + \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = f(r,\theta)$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{x^2+y^2}{r^3}\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{x^2+y^2}{r^4}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = f(r,\theta)$$

$$\left(\frac{r^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{r^2}{r^3}\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{r^2}{r^4}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = f(r,\theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = f(r,\theta)$$

Persamaan Poisson 2 dimensi dalam sistem koordinat *Cartesius* (3.1) ketika dalam sistem koordinat polar akan berbentuk:

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial\theta^2} = f(r,\theta) \tag{3.21}$$

Domain persamaan Poisson (3.21) tersebut adalah $0 < r < a$ dan $0 \leq \theta \leq b$. a adalah jari-jari lingkaran. Kondisi batas persamaan Poisson pada sistem koordinat *Cartesius* yang berbentuk persegi panjang tidak dapat diimplementasikan pada kondisi batas yang domainnya berupa lingkaran, sehingga kondisi batas yang diberikan harus berupa kondisi pada tepi dan pusat lingkaran yaitu:

$$\begin{aligned} u(a,\theta) &= f(\theta) \\ u(0,\theta) &= f(\theta) \end{aligned} \tag{3.22}$$

a adalah jari-jari lingkaran dan $f(\theta)$ adalah fungsi yang menyatakan kondisi pada batas tersebut.

3.2 Diskritisasi Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis serta Kondisi Batasnya

Persamaan Poisson merupakan bentuk non homogen dari persamaan Laplace. Persamaan Laplace dengan domain persegi panjang $f(x,y) = 0$, pada persamaan Poisson adalah $f(x,y) \neq 0$. Persamaan Laplace dengan domain lingkaran, $f(r,\theta) \neq 0$. Pendefinisian $f(x,y)$ dan $f(r,\theta)$ berbeda-beda pada setiap kasus, serta kondisi batasnya berbeda-beda pula. Misalnya pada masalah gravitasi Newton, $\nabla^2 V = 4\pi G\rho$.

Langkah selanjutnya dalam menghitung solusi numerik persamaan Poisson pada sistem koordinat polar (3.21) dengan kondisi batas (3.22) adalah mendiskritisasi persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis beserta kondisi batasnya. Suatu fungsi dapat dihampiri dengan metode jaringan fungsi radial basis untuk mendapatkan solusi numeriknya. Fungsi radial basis didefinisikan sebagai $f(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi(x, c_j)$ dengan $\{w_j\}_{j=1}^{m}$ adalah himpunan bobot dan $\{\phi(x, c_j)\}_{j=1}^{m}$ adalah himpunan fungsi basis. Fungsi basis $\phi(x, c_j)$ digunakan untuk menghampiri fungsi $u(r,\theta)$ pada persamaan (3.21). Jenis fungsi basis yang digunakan adalah jenis fungsi basis *multiquadrics* dengan 2 variabel (2.22).

Metode jaringan fungsi radial basis yang digunakan adalah metode langsung yaitu dengan cara menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya, sehingga diperoleh $u_r(r,\theta), u_{rr}(r,\theta), u_\theta(r,\theta)$, dan $u_{\theta\theta}(r,\theta)$ sebagai berikut:

$$u(r,\theta) = \sum_{j=1}^{m} w_j \, \phi(r, \theta, c_j, d_j) \tag{3.23}$$

$$u_r(r,\theta) = \sum_{j=1}^{m} w_j\ \phi_r(r,\theta,c_j,d_j) \tag{3.24}$$

$$u_{rr}(r,\theta) = \sum_{j=1}^{m} w_j\ \phi_{rr}(r,\theta,c_j,d_j) \tag{3.25}$$

$$u_\theta(r,\theta) = \sum_{j=1}^{m} w_j\ \phi_\theta(r,\theta,c_j,d_j) \tag{3.26}$$

$$u_{\theta\theta}(r,\theta) = \sum_{j=1}^{m} w_j\ \phi_{\theta\theta}(r,\theta,c_j,d_j) \tag{3.27}$$

Persamaan (3.24), (3.25), dan (3.27) kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.21), maka:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} w_j\ \phi_{rr}(r,\theta,c_j,d_j) + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{m} w_j\ \phi_r(r,\theta,c_j,d_j)\\ +\frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{m} w_j\ \phi_{\theta\theta}(r,\theta,c_j,d_j) = f(r,\theta)\end{aligned} \tag{3.28}$$

Persamaan (3.28) merupakan persamaan Poisson dalam bentuk persamaan jaringan fungsi radial basis. Persamaan tersebut dapat dibentuk jika terlebih dahulu dicari $\phi(r,\theta,c_j,d_j)$, $\phi_r(r,\theta,c_j,d_j)$, $\phi_{rr}(r,\theta,c_j,d_j)$, $\phi_\theta(r,\theta,c_j,d_j)$, dan $\phi_{\theta\theta}(r,\theta,c_j,d_j)$. $\phi_r(r,\theta,c_j,d_j)$ merupakan turunan $\phi(r,\theta,c_j,d_j)$ terhadap r karena menggunakan metode langsung, dimana $\phi(r,\theta,c_j,d_j)$ adalah:

$$\phi(r,\theta,c_j,d_j) = \sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta} \tag{3.29}$$

$$\phi_r(r,\theta,c_j,d_j) = \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(r - c_j\right)^2 + \left(\theta - d_j\right)^2 + \beta\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2r - 2c_j$$

$$= \frac{2r-2c_j}{2}\left(\left(r - c_j\right)^2 + \left(\theta - d_j\right)^2 + \beta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{r-c_j}{\left(\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{r-c_j}{\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}}$$

$$\phi_r\left(r,\theta,c_j,d_j\right) = \frac{r-c_j}{\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}} \tag{3.30}$$

$$\phi_{rr}\left(r,\theta,c_j,d_j\right) = \frac{\partial}{\partial r}\phi_r\left(r,\theta,c_j,d_j\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\frac{r-c_j}{\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}}$$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta} - \left(r-c_j\left(\frac{r-c_j}{\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}}\right)\right)}{\left(\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta} - \frac{\left(r-c_j\right)^2}{\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}}}{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}$$

$$= \frac{\frac{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta-\left(r-c_j\right)^2}{\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}}}{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}$$

$$= \frac{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta-\left(r-c_j\right)^2}{\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}}\,\frac{1}{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}$$

$$= \frac{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta-\left(r-c_j\right)^2}{\left(\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta\right)\sqrt{\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}}$$

$$= \frac{\left(\theta-d_j\right)^2+\beta}{\left(\left(r-c_j\right)^2+\left(\theta-d_j\right)^2+\beta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\phi_{rr}(r,\theta,c_j,d_j) = \frac{(\theta-d_j)^2+\beta}{\left((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.31}$$

$\phi_{\theta\theta}(r,\theta,c_j,d_j)$ diperoleh dengan menurunkan $\phi_\theta(r,\theta,c_j,d_j)$ terhadap θ.

$$\phi_\theta(r,\theta,c_j,d_j) = \frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\theta-2d_j$$

$$= \frac{2\theta-2d_j}{2}((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\theta-d_j}{((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\theta-d_j}{\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}}$$

$$\phi_{\theta\theta}(r,\theta,c_j,d_j) = \frac{\partial}{\partial\theta}\phi_\theta(r,\theta,c_j,d_j)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\theta-d_j}{\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}}$$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}-\left(\theta-d_j\left(\frac{\theta-d_j}{\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}}\right)\right)}{(\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}-\frac{(\theta-d_j)^2}{\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}}}{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}$$

$$= \frac{\frac{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta-(\theta-d_j)^2}{\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}}}{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}$$

$$= \frac{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta-(\theta-d_j)^2}{\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}}\frac{1}{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}$$

$$= \frac{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta-(\theta-d_j)^2}{\left((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta\right)\sqrt{(r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta}}$$

$$= \frac{(r-c_j)^2+\beta}{\left((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\phi_{\theta\theta}(r,\theta,c_j,d_j) = \frac{(r-c_j)^2+\beta}{\left((r-c_j)^2+(\theta-d_j)^2+\beta\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.32)$$

$\phi_r(r,\theta,c_j,d_j)$, $\phi_{rr}(r,\theta,c_j,d_j)$, dan $\phi_{\theta\theta}(r,\theta,c_j,d_j)$ pada persamaan (3.30), (3.31), dan (3.32) kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.28) menjadi:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j\,\phi_{rr}(r_i,\theta_i,c_j,d_j) + \frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{m} w_j\,\phi_r(r_i,\theta_i,c_j,d_j)$$

$$+\frac{1}{r_i^2}\sum_{j=1}^{m} w_j\,\phi_{\theta\theta}(r_i,\theta_i,c_j,d_j) = f(r_i,\theta_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j\left[\phi_{rr}(r_i,\theta_i,c_j,d_j) + \frac{1}{r_i}\phi_r(r_i,\theta_i,c_j,d_j) + \frac{1}{r_i^2}\phi_{\theta\theta}(r_i,\theta_i,c_j,d_j)\right]$$

$$= f(r_i,\theta_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j\left[\frac{(\theta_i-d_j)^2+\beta}{\left((r_i-c_j)^2+(\theta_i-d_j)^2+\beta\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_i}\frac{r_i-c_j}{\sqrt{(r_i-c_j)^2+(\theta_i-d_j)^2+\beta}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r_i^2}\frac{(r_i-c_j)^2+\beta}{\left((r_i-c_j)^2+(\theta_i-d_j)^2+\beta\right)^{\frac{3}{2}}}\right] = f(r_i,\theta_i) \quad (3.33)$$

$i = 1,2,\dots,n$ dan $\beta = \frac{var(r_i)+var(\theta_i)}{2}$.

3.3 Menghitung Nilai Bobot w_j

Persamaan (3.33) merupakan persamaan Poisson dalam bentuk persamaan jaringan fungsi radial basis. Langkah selanjutnya dalam mengaproksimasi persamaan Poisson dengan metode ini adalah menghitung nilai bobot w_j. Persamaan (3.33) akan digunakan untuk menghitung nilai bobot w_j. Langkah-langkah dalam menghitung nilai bobot w_j adalah sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \left[\frac{(\theta_i - d_j)^2 + \beta}{\left((r_i - c_j)^2 + (\theta_i - d_j)^2 + \beta\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_i} \frac{r_i - c_j}{\sqrt{(r_i - c_j)^2 + (\theta_i - d_j)^2 + \beta}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{{r_i}^2} \frac{(r_i - c_j)^2 + \beta}{\left((r_i - c_j)^2 + (\theta_i - d_j)^2 + \beta\right)^{\frac{3}{2}}} \right] = f(r_i, \theta_i)$$

$i = 1,2, \dots, n$ dan $\beta = \frac{var\,(r_i) + var\,(\theta_i)}{2}$

Misal

$$A(r_i, \theta_i, c_j, d_j) = \frac{(\theta_i - d_j)^2 + \beta}{\left((r_i - c_j)^2 + (\theta_i - d_j)^2 + \beta\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_i} \frac{r_i - c_j}{\sqrt{(r_i - c_j)^2 + (\theta_i - d_j)^2 + \beta}} +$$

$$\frac{1}{{r_i}^2} \frac{(r_i - c_j)^2 + \beta}{\left((r_i - c_j)^2 + (\theta_i - d_j)^2 + \beta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j\, A(r_i, \theta_i, c_j, d_j) = f(r_i, \theta_i)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 A(r_1, \theta_1, c_1, d_1) + w_2 A(r_1, \theta_1, c_2, d_2) + \cdots + w_m A(r_1, \theta_1, c_m, d_m) \\ w_1 A(r_2, \theta_2, c_1, d_1) + w_2 A(r_2, \theta_2, c_2, d_2) + \cdots + w_m A(r_2, \theta_2, c_m, d_m) \\ \vdots \\ w_1 A(r_n, \theta_n, c_1, d_1) + w_2 A(r_n, \theta_n, c_2, d_2) + \cdots + w_m A(r_n, \theta_n, c_m, d_m) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f(r_1, \theta_1) \\ f(r_2, \theta_2) \\ \vdots \\ f(r_n, \theta_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A(r_1, \theta_1, c_1, d_1) & A(r_1, \theta_1, c_2, d_2) & \cdots & A(r_1, \theta_1, c_m, d_m) \\ A(r_2, \theta_2, c_1, d_1) & A(r_2, \theta_2, c_2, d_2) & \cdots & A(r_2, \theta_2, c_m, d_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(r_n, \theta_n, c_1, d_1) & A(r_n, \theta_n, c_2, d_2) & \cdots & A(r_n, \theta_n, c_m, d_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f(r_1,\theta_1) \\ f(r_2,\theta_2) \\ \vdots \\ f(r_n,\theta_n) \end{bmatrix}$$

Nilai bobot w_j diperoleh dengan perhitungan:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \qquad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} A(r_1,\theta_1,c_1,d_1) & A(r_1,\theta_1,c_2,d_2) & \cdots & A(r_1,\theta_1,c_m,d_m) \\ A(r_2,\theta_2,c_1,d_1) & A(r_2,\theta_2,c_2,d_2) & \cdots & A(r_2,\theta_2,c_m,d_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(r_n,\theta_n,c_1,d_1) & A(r_n,\theta_n,c_2,d_2) & \cdots & A(r_n,\theta_n,c_m,d_m) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(r_1,\theta_1) \\ f(r_2,\theta_2) \\ \vdots \\ f(r_n,\theta_n) \end{bmatrix}$$

Nilai bobot w_j dihitung dengan mensubstitusikan nilai-nilai *input* (r_i,θ_i) dan $f(r_i,\theta_i)$ yang didefinisikan dari persamaan Poisson pada koordinat polar yang diaproksimasi, ke persamaan (3.34).

3.4 Solusi Numerik Persamaan Poisson pada Koordinat Polar

Persamaan Poisson 2 dimensi dengan domain lingkaran (r,θ) merupakan persamaan diferensial parsial linier orde dua. Persamaan ini tentunya melibatkan turunan parsial orde kedua terhadap variabel-variabel bebasnya (r,θ). Fungsi basis yang digunakan pada persamaan (3.33) merupakan fungsi basis *multiquadrics* yang telah diturunkan dua kali terhadap variabel r dan θ. Mengingat metode yang digunakan adalah metode langsung.

Langkah selanjutnya setelah diperoleh nilai bobot w_j pada persamaan (3.34), adalah menghitung solusi numerik persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis adalah mengalikan fungsi basis dengan nilai bobot yang telah diperoleh. Fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis *multiquadrics* 2 variabel tanpa diturunkan. Fungsi basis ini dalam sistem koordinat *Cartesius* (x,y) adalah persamaan (2.22), dan dalam sistem koordinat polar (r,θ) adalah persamaan (3.29).

Solusi numerik persamaan Poisson dapat dihitung seperti pada persamaan (2.24) pada bab II subbab 2.5. Langkah-langkah dalam menghitung solusi numerik persamaan Poisson pada koordinat polar adalah sebagai berikut:

$$\hat{u}(r_i,\theta_i) = \sum_{j=1}^{m} w_j \, \phi\left(r_i,\theta_i,c_j,d_j\right)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(r_1,\theta_1) \\ \hat{u}(r_2,\theta_2) \\ \vdots \\ \hat{u}(r_n,\theta_n) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} w_1\phi(r_1,\theta_1,c_1,d_1) + w_2\phi(r_1,\theta_1,c_2,d_2) + \cdots + w_m\phi(r_1,\theta_1,c_m,d_m) \\ w_1\phi(r_2,\theta_2,c_1,d_1) + w_2\phi(r_2,\theta_2,c_2,d_2) + \cdots + w_m\phi(r_2,\theta_2,c_m,d_m) \\ \vdots \\ w_1\phi(r_n,\theta_n,c_1,d_1) + w_2\phi(r_n,\theta_n,c_2,d_2) + \cdots + w_m\phi(r_n,\theta_n,c_m,d_m) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(r_1,\theta_1) \\ \hat{u}(r_2,\theta_2) \\ \vdots \\ \hat{u}(r_n,\theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(r_1,\theta_1,c_1,d_1) & \phi(r_1,\theta_1,c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_1,\theta_1,c_m,d_m) \\ \phi(r_2,\theta_2,c_1,d_1) & \phi(r_2,\theta_2,c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_2,\theta_2,c_m,d_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(r_n,\theta_n,c_1,d_1) & \phi(r_n,\theta_n,c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_n,\theta_n,c_m,d_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

$i = 1,2,\dots,n$ dan w_j adalah nilai-nilai bobot yang diperoleh dari perhitungan persamaan (3.34), dan $\phi\left(r_i,\theta_i,c_j,d_j\right)$ adalah fungsi basis *multiquadrics* untuk fungsi 2 variabel yaitu persamaan (3.29).

Solusi numerik persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis pada koordinat polar dapat diperoleh dengan:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(r_1,\theta_1) \\ \hat{u}(r_2,\theta_2) \\ \vdots \\ \hat{u}(r_n,\theta_n) \end{bmatrix} = \tag{3.35}$$

$$\begin{bmatrix} \phi(r_1,\theta_1,c_1,d_1) & \phi(r_1,\theta_1,c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_1,\theta_1,c_m,d_m) \\ \phi(r_2,\theta_2,c_1,d_1) & \phi(r_2,\theta_2,c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_2,\theta_2,c_m,d_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(r_n,\theta_n,c_1,d_1) & \phi(r_n,\theta_n,c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_n,\theta_n,c_m,d_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

Perhitungan galat ε_i diperoleh dengan:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u(r_1,\theta_1) & \hat{u}(r_1,\theta_1) \\ u(r_2,\theta_2) \; - & \hat{u}(r_2,\theta_2) \\ \vdots & \vdots \\ u(r_n,\theta_n) & \hat{u}(r_n,\theta_n) \end{vmatrix} \tag{3.36}$$

Besarnya galat menunjukkan seberapa dekat solusi eksak dengan solusi numeriknya.

3.5 Simulasi

Penjelasan mengenai cara menyelesaikan persamaan Poisson menggunakan metode jaringan fungsi radial basis pada koordinat polar telah dibahas pada subbab-subbab sebelumnya. Simulasi penyelesaian numerik persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis serta analisis galatnya akan dibahas dalam subbab ini.

Persamaan Poisson pada koordinat polar yang akan diselesaikan adalah:

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} = -3\cos\theta,$$

$$0 < r < 1 \text{ dan } 0 \le \theta \le 2\pi \tag{3.37}$$

Kondisi batas persamaan (3.37) adalah:

$$u(1,\theta) = 0$$

$$u(0,\theta) = 0 \tag{3.38}$$

Domain pada persamaan (3.37) kemudian dipartisi menjadi beberapa data diskrit, dengan $\Delta r = 0{,}05$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{12}$.

θ_i tersebut masih dalam satuan derajat (°), sehingga dirubah terlebih dahulu ke dalam satuan radian supaya dapat dioperasikan dengan r_i.

π radian $= 180^{\circ} \approx 3{,}1415927$ radian

1 radian $\approx 57{,}29578^{\circ}$

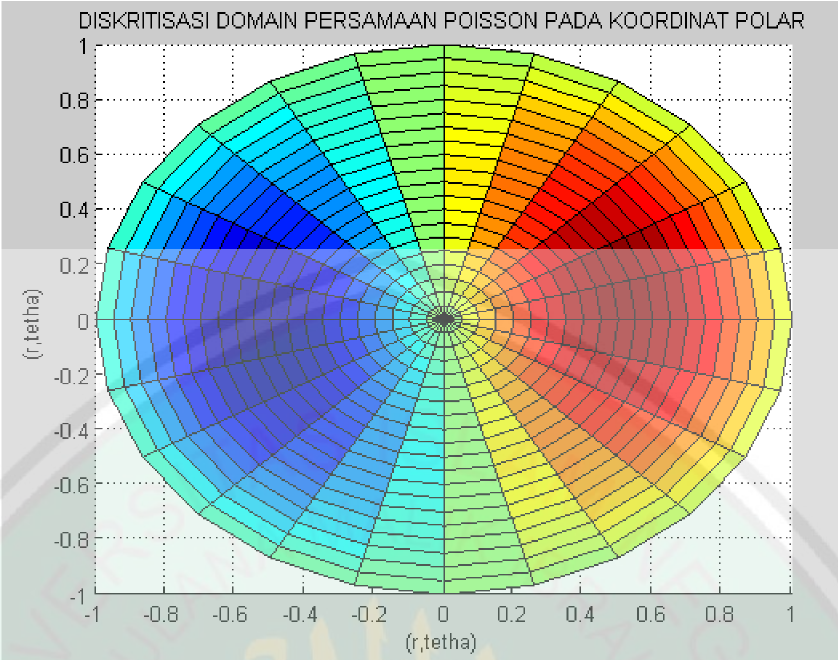
$1^{\circ} \approx 0{,}0174533$ radian

Berikut ini merupakan nilai *input* θ_i yang telah dirubah dalam satuan radian, yang ditunjukkan dalam tabel 3.1.

Tabel 3.1 θ_i dalam Satuan Radian

No	$\boldsymbol{\theta_i}$	**No**	$\boldsymbol{\theta_i}$	**No**	$\boldsymbol{\theta_i}$
1	0	10	2,3562	19	4,7124
2	0,2618	11	2,6180	20	4,9742
3	0,5236	12	2,8798	21	5,2360
4	0,7854	13	3,1416	22	5,4978
5	1,0472	14	3,4034	23	5,7596
6	1,3090	15	3,6652	24	6,0214
7	1,5708	16	3,9270	25	6,2832
8	1,8326	17	4,1888		
9	2,0944	18	4,4506		

Domain pada persamaan Poisson (3.37) dengan r_i dan θ_i yang telah sama penyebutnya dapat digambarkan dengan gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1 Diskritisasi Domain Persamaan Poisson

Domain persamaan Poisson (3.37) dengan kondisi batas (3.38) tersebut telah didiskritisasi menjadi beberapa data diskrit. Langkah selanjutnya yaitu merubah persamaan Poisson pada koordinat polar (3.37) menjadi persamaan jaringan fungsi radial basis yang merupakan persamaan (3.39).

$$\sum_{j=1}^{525} w_j \left[\frac{\left(\theta_i - d_j\right)^2 + \beta}{\left(\left(r_i - c_j\right)^2 + \left(\theta_i - d_j\right)^2 + \beta\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_i} \frac{r_i - c_j}{\sqrt{\left(r_i - c_j\right)^2 + \left(\theta_i - d_j\right)^2 + \beta}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{{r_i}^2} \frac{\left(r_i - c_j\right)^2 + \beta}{\left(\left(r_i - c_j\right)^2 + \left(\theta_i - d_j\right)^2 + \beta\right)^{\frac{3}{2}}} \right] = -3\cos\theta_i \qquad (3.39)$$

Kondisi batas pada persamaan (3.38) yaitu $u(1,\theta) = 0$ dan $u(0,\theta) = 0$. Artinya, ketika $r_i = 0{,}00$ dan $r_i = 1{,}00$ maka ruas kanan pada persamaan (3.39) sama dengan 0 atau $f(0,\theta_i) = 0$ dan $f(1,\theta_i) = 0$.

Langkah selanjutnya, yaitu menghitung nilai bobot w_j. Nilai bobot w_j dapat dihitung dengan persamaan (3.40) berikut:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{525} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A(r_1,\theta_1,c_1,d_1) & A(r_1,\theta_1,c_2,d_2) & \cdots & A(r_1,\theta_1,c_{525},d_{525}) \\ A(r_2,\theta_2,c_1,d_1) & A(r_2,\theta_2,c_2,d_2) & \cdots & A(r_2,\theta_2,c_{525},d_{525}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(r_{525},\theta_{525},c_1,d_1) & A(r_{525},\theta_{525},c_2,d_2) & \cdots & A(r_{525},\theta_{525},c_{525},d_{525}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} f(r_1,\theta_1) \\ f(r_2,\theta_2) \\ \vdots \\ f(r_{525},\theta_{525}) \end{bmatrix}$$

$$A(r_i,\theta_i,c_j,d_j) = \frac{(\theta_i-d_j)^2+\beta}{\left((r_i-c_j)^2+(\theta_i-d_j)^2+\beta\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_i}\frac{r_i-c_j}{\sqrt{(r_i-c_j)^2+(\theta_i-d_j)^2+\beta}} +$$

$$\frac{1}{{r_i}^2}\frac{(r_i-c_j)^2+{a_i}^2}{\left((r_i-c_j)^2+(\theta_i-d_j)^2+\beta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$i = 1,2,\dots,n$ dan $\beta = \frac{var(r_i)+var(\theta_i)}{2}$.

Himpunan fungsi basis $A(r_i,\theta_i,c_j,d_j)$ yang berbentuk matriks 525×525 dan himpunan $f(r_i,\theta_i)$ yang berbentuk matriks 525×1 diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai *input* pada tabel 3.1 ke dalam persamaan (3.40). Nilai-nilai bobot w_j pada persamaan (3.40) tersebut berbentuk matriks 525×1.

Solusi numerik persamaan (3.35) dengan kondisi batas (3.38) dapat dihitung dengan persamaan (3.41):

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(r_1,\theta_1) \\ \hat{u}(r_2,\theta_2) \\ \vdots \\ \hat{u}(r_n,\theta_n) \end{bmatrix} =$$

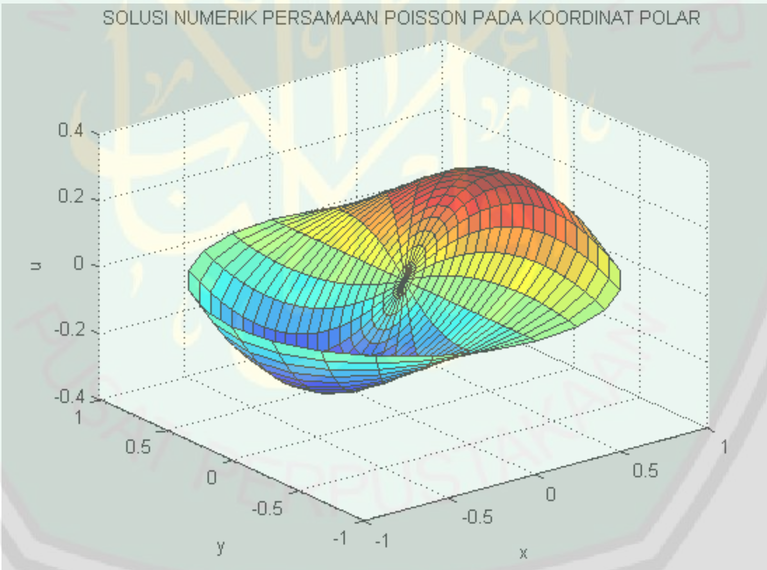
$$\begin{bmatrix} w_1\phi(r_1,\theta_1,c_1,d_1) & w_2\phi(r_1,\theta_1,c_2,d_2) & \cdots & w_{525}\phi(r_1,\theta_1,c_{525},d_{525}) \\ w_1\phi(r_2,\theta_2,c_1,d_1) & w_2\phi(r_2,\theta_2,c_2,d_2) & \cdots & w_{525}\phi(r_2,\theta_2,c_{525},d_{525}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1\phi(r_{525},\theta_{525},c_1,d_1) & w_2\phi(r_{525},\theta_{525},c_2,d_2) & \cdots & w_{525}\phi(r_{525},\theta_{525},c_{525},d_{525}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(r_1,\theta_1) \\ \hat{u}(r_2,\theta_2) \\ \vdots \\ \hat{u}(r_n,\theta_n) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \phi(r_1,\theta_1,c_1,d_1) & \phi(r_1,\theta_1,c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_1,\theta_1,c_{525},d_{525}) \\ \phi(r_2,\theta_2,c_1,d_1) & \phi(r_2,\theta_2,c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_2,\theta_2,c_{525},d_{525}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(r_{525},\theta_{525},c_1,d_1) & \phi(r_{525},\theta_{525},c_2,d_2) & \cdots & \phi(r_{525},\theta_{525},c_{525},d_{525}) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{525} \end{bmatrix}$$

Hasil simulasi solusi numerik persamaan (3.37) dengan kondisi batas (3.38) kemudian diperoleh $\hat{u}(r_i,\theta_i)$ seperti dalam gambar 3.2 berikut:



Gambar 3.2 Solusi Numerik Persamaan Poisson dengan $\Delta r = 0{,}05$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{12}$

Simulasi solusi numerik persamaan Poisson tersebut dilakukan dengan program Matlab 2008R.

Persamaan Poisson merupakan bentuk khusus atau bentuk non homogen dari persamaan Laplace. Persamaan Laplace itu sendiri terbentuk dari persamaan difusi dan persamaan gelombang yang tidak bergantung waktu. Persamaan

Poisson pada koordinat polar (r, θ), domainnya berbentuk lingkaran. Persamaan ini menggambarkan distribusi panas atau penyebaran panas dalam suatu ruang dengan keadaan *steady state* atau tetap. Panas dalam suatu ruang yang berbentuk lingkaran menyebar tanpa ada pengaruh waktu, atau dapat dikatakan waktu=konstan.

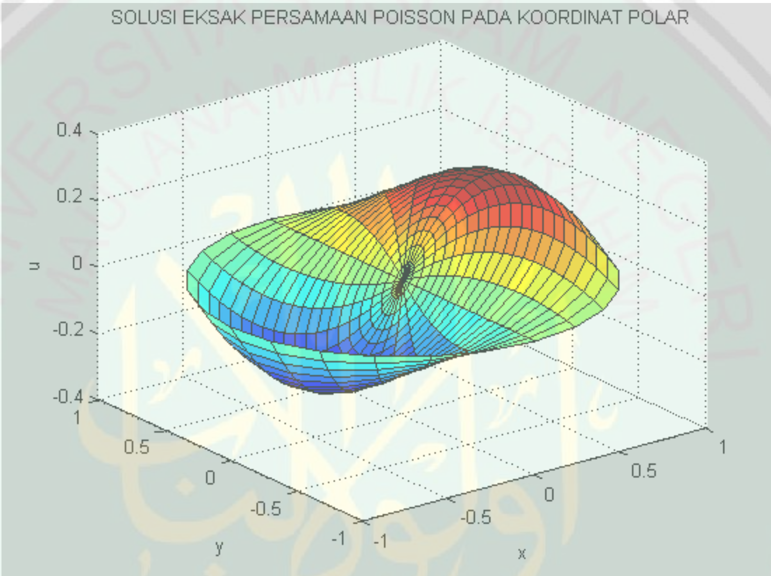
Gambar 3.2 mendeskripsikan bahwa panas menyebar pada seluruh ruang/ domain yang berbentuk lingkaran dengan jari-jari 1. Kondisi pada batas persamaan ini adalah untuk $u(1, \theta) = 0$ dan untuk $u(0, \theta) = 0$. Artinya, pada saat $r_i = 1$ dan $r_i = 0$, suhu/ panas ruang adalah sebesar 1 satuan panas.

Gambar 3.2 menjelaskan bahwa panas menyebar dari $r = 0$ ke $r = 1$. Panas dalam keadaan meningkat/ suhu akan naik pada saat tertentu, yaitu pada saat $r = 0{,}3$ sampai $r = 0{,}7$. Gambar 3.2 juga menjelaskan bahwa suhu tertinggi ketika grafik berwarna coklat tua yaitu pada $r = 0{,}3$. Suhu terendah terlihat ketika grafik berwarna biru tua yaitu $r = -0{,}3$ sampai $r = -0{,}7$. kondisi batas yang diketahui adalah $u(1, \theta) = 0$ dan $u(0, \theta) = 0$, artinya suhu di pusat lingkaran/ pusat ruang sama dengan suhu di batas/ tepi ruang yang pada kasus ini berbentuk lingkaran.

Perhitungan galat dilakukan untuk mengetahui seberapa dekat solusi analitik atau solusi eksak dengan solusi numeriknya. Galat diperoleh dari selisih antara solusi eksak dan solusi numeriknya. Solusi eksak dari persamaan Poisson pada koordinat polar $\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} = -3\cos\theta$ dengan domain $0 < r < 1$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ pada kondisi batas $u(1, \theta) = 0$ dan $u(0, \theta) = 0$ tersebut diketahui dalam artikel yang ditulis oleh R. C. Mittal dan S. Gahlaut (1987):

$$u(r,\theta) = r(1-r)\cos\theta$$
$$= (r-r^2)\cdot\cos\theta$$
$$= (r\cos\theta - r^2\cos\theta)$$
$$u(r,\theta) = r\cos\theta - r^2\cos\theta \tag{3.42}$$

Solusi eksak persamaan Poisson (3.37) dengan kondisi batas (3.38) dapat dilihat pada gambar 3.3 berikut:

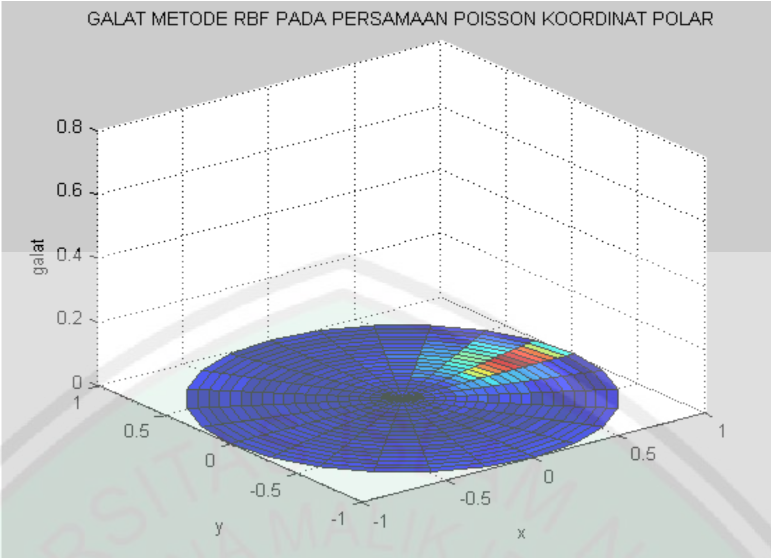


Gambar 3.3 Solusi Eksak Persamaan Poisson dengan $\Delta r = 0{,}05$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{12}$

Galat solusi numerik persamaan Poisson (3.37) menggunakan metode jaringan fungsi radial basis dihitung dari persamaan (3.43) berikut:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{525} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u(r_1,\theta_1) & & \hat{u}(r_1,\theta_1) \\ u(r_2,\theta_2) & - & \hat{u}(r_2,\theta_2) \\ \vdots & & \vdots \\ u(r_{525},\theta_{525}) & & \hat{u}(r_{525},\theta_{525}) \end{vmatrix} \tag{3.43}$$

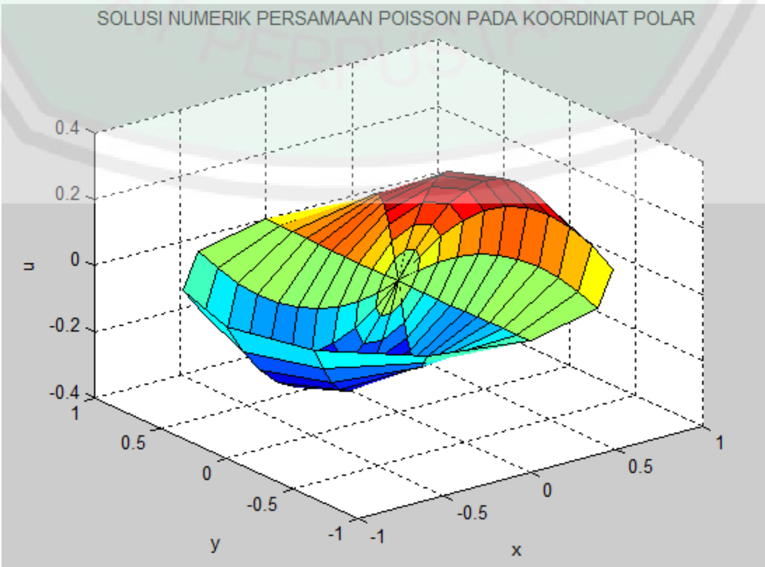
Hasil perhitungannya dapat dilihat pada gambar 3.4 berikut:



Gambar 3.4 Galat Jaringan Fungsi Radial Basis ketika $\Delta r = 0{,}05$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{12}$

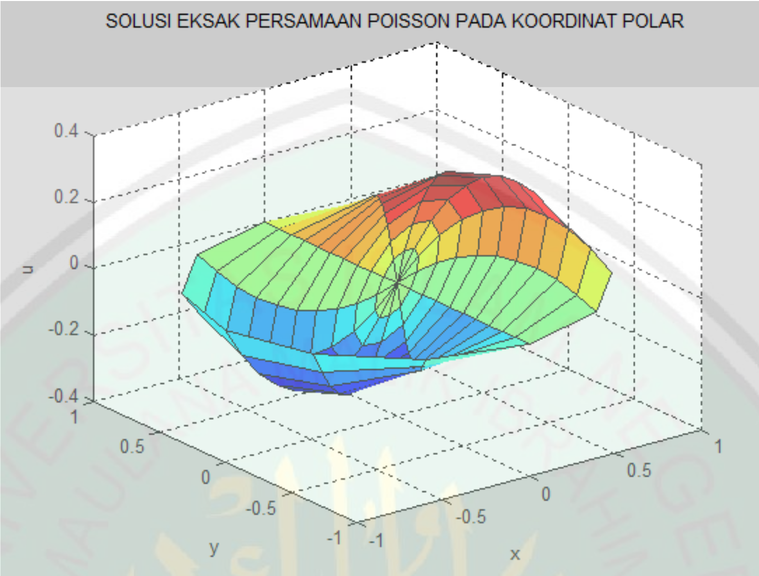
Galat mutlak maksimum diketahui dari program matlab yaitu 0,0012.

Analisis galat metode jaringan fungsi radial basis pada solusi numerik persamaan Poisson (3.37) dapat diketahui dari beberapa simulasi yang dilakukan, dengan memperbesar dan memperkecil Δr serta $\Delta\theta$. Solusi numerik persamaan Poisson (3.37) dengan kondisi batas (3.38) untuk $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{6}$ dilakukan dengan program Matlab. Gambar solusi numeriknya dapat dilihat pada gambar 3.5 berikut:

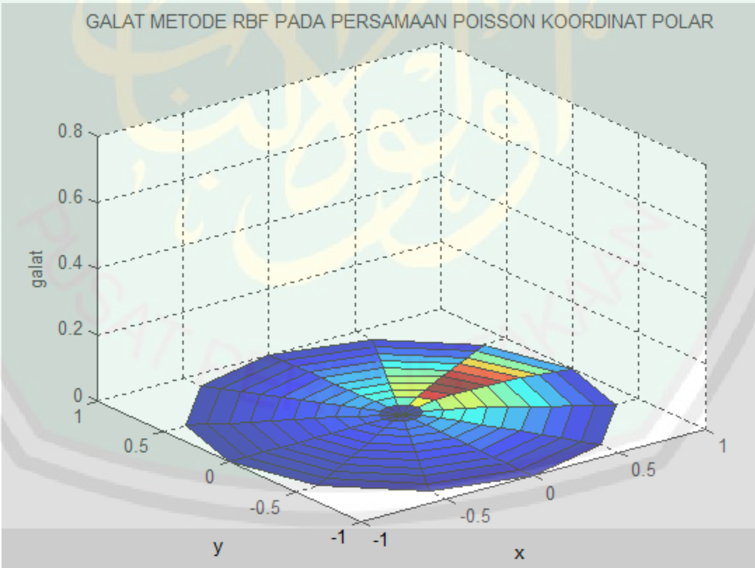


Gambar 3.5 Solusi Numerik Persamaan Poisson dengan $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{6}$

Solusi eksak dan galat persamaan (3.37) tersebut ketika $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{6}$ dapat dilihat pada gambar 3.36 dan gambar 3.37.



Gambar 3.6 Solusi Eksak Persamaan Poisson dengan $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{6}$



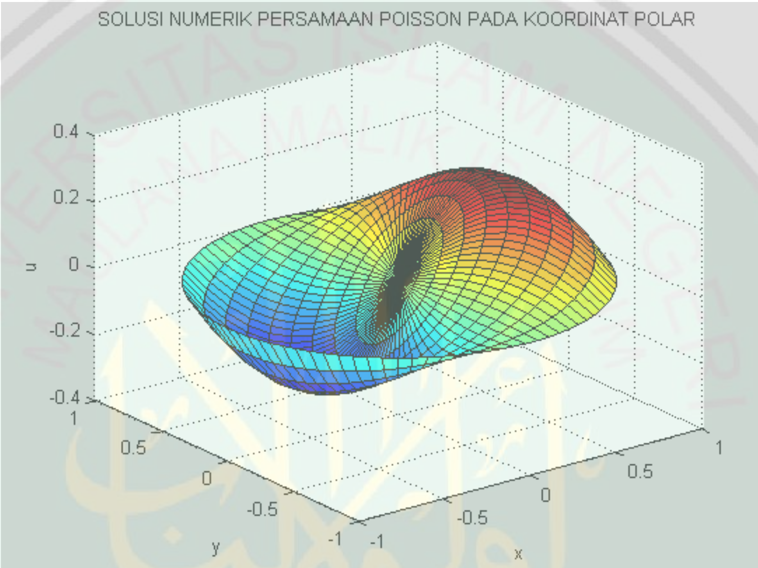
Gambar 3.7 Galat Metode Jaringan Fungsi Radial Basis ketika $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{6}$

Galat mutlak maksimum diketahui dari program matlab yaitu 0,029. Galat tersebut lebih besar daripada galat ketika $\Delta r = 0{,}05$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{12}$, dengan kata lain:

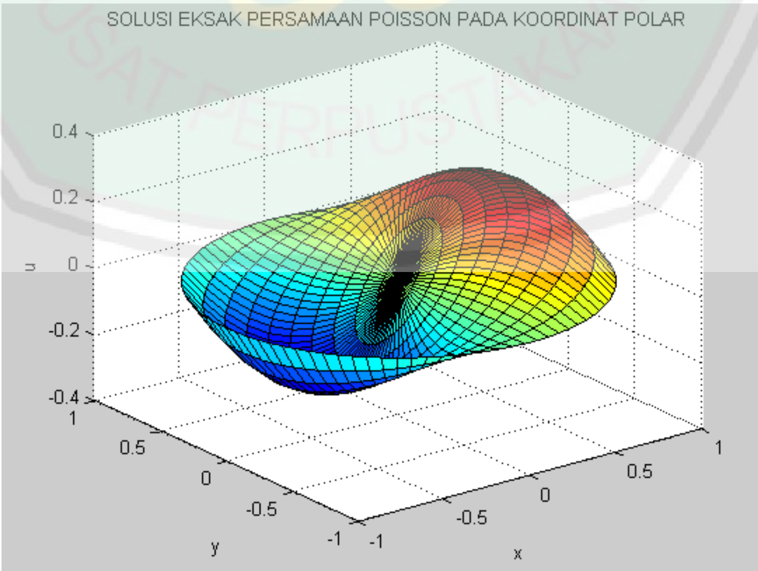
$$|\varepsilon_{max}|_{\Delta r=0{,}05 \text{ dan } \Delta\theta=\frac{\pi}{12}} < |\varepsilon_{max}|_{\Delta r=0{,}1 \text{ dan } \Delta\theta=\frac{\pi}{6}}$$

$$0{,}0012 < 0{,}0219$$

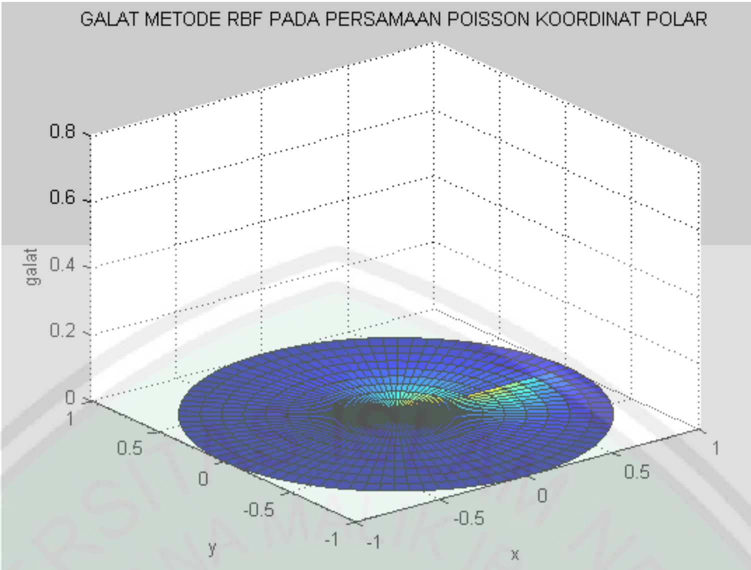
Simulasi selanjutnya dilakukan dengan cara memperkecil $\Delta\theta$, yaitu dengan $\Delta r = 0{,}1$ $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$. Solusi numerik, solusi eksak, dan galat metode jaringan fungsi radial basis ditunjukkan pada gambar 3.8, 3.9, dan 3.10 berikut:



Gambar 3.8 Solusi Numerik Persamaan Poisson dengan $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$



Gambar 3.9 Solusi Eksak Persamaan Poisson dengan $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$



Gambar 3.10 Galat Metode Jaringan Fungsi Radial Basis ketika $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$

Galat mutlak maksimum diketahui dari program matlab yaitu 0,00088. Besarnya galat mutlak maksimum tersebut lebih kecil daripada ketika $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{6}$ dan $\Delta r = 0{,}05$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{12}$, yaitu:

$$|\varepsilon_{max}|_{\Delta r=0{,}1 \text{ dan } \Delta\theta=\frac{\pi}{45}} < |\varepsilon_{max}|_{\Delta r=0{,}1 \text{ dan } \Delta\theta=\frac{\pi}{6}}$$

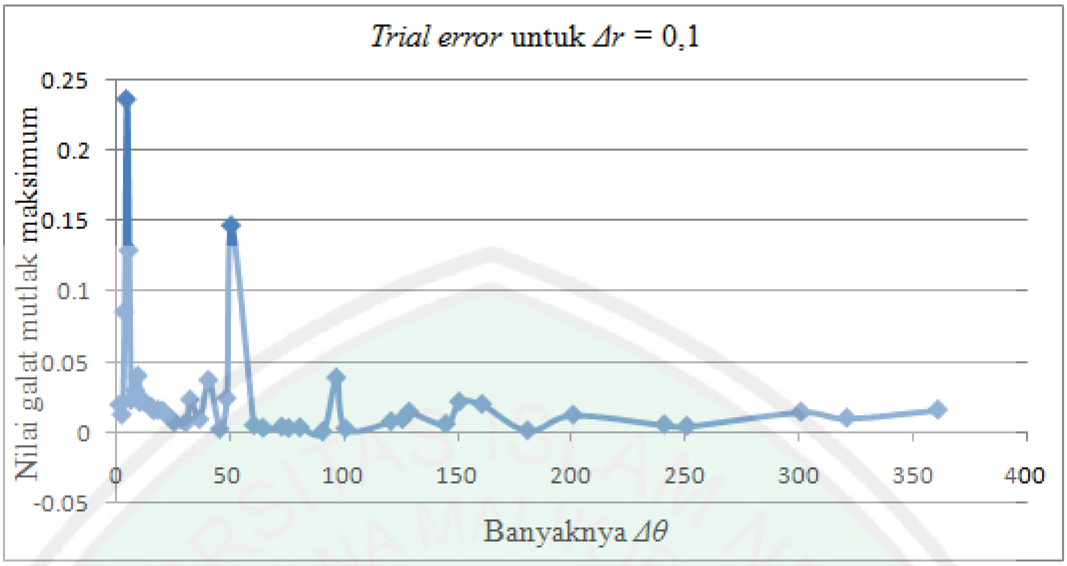
$$0{,}00088 < 0{,}0219$$

dan

$$|\varepsilon_{max}|_{\Delta r=0{,}1 \text{ dan } \Delta\theta=\frac{\pi}{45}} < |\varepsilon_{max}|_{\Delta r=0{,}05 \text{ dan } \Delta\theta=\frac{\pi}{12}}$$

$$0{,}00088 < 0{,}0012$$

Hasil dari beberapa simulasi tersebut belum dapat memberikan kesimpulan bahwa besarnya galat dipengaruhi oleh banyaknya iterasi yang dilakukan dengan memperkecil Δr dan $\Delta\theta$, sehingga perlu dilakukan beberapa simulasi lagi. *Trial error* dilakukan dengan pemilihan $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta$ yang berbeda-beda. Hasil *trial error* kemudian dapat dilihat dari gambar 3.11.



Gambar 3.11 Trial *Error* untuk $\Delta r = 0{,}1$

Gambar 3.11 tersebut merupakan gambar hasil *trial error* untuk simulasi $\Delta r = 0{,}1$ yang menunjukkan bahwa untuk iterasi paling banyak yaitu ketika $\Delta\theta = \frac{\pi}{180}$ yang artinya nilai input θ_i sebanyak 361 titik belum tentu menghasilkan galat mutlak maksimum terkecil. Galat yang diperoleh ketika $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{180}$ adalah 0,016. Nilai tersebut tidak lebih kecil dari galat ketika $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$.

Hasil dari *trial error* menunjukkan bahwa semakin banyaknya iterasi dan *input* r_i serta θ_i untuk perhitungan solusi numerik persamaan Poisson (3.37) belum tentu menghasilkan galat mutlak yang lebih kecil, begitu juga sebaliknya. Semakin banyak iterasi dan *input* r_i serta θ_i yang diperoleh dengan memperkecil Δr dan $\Delta\theta$ ternyata belum tentu dapat menghasilkan galat mutlak yang lebih kecil. Galat mutlak maksimum terkecil yang diperoleh dari hasil *trial error* adalah ketika $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$ yaitu 0,00088. Penjelasan matematis mengenai analisis galat ini, dapat dilakukan penelitian selanjutnya untuk meneliti Δr dan $\Delta\theta$ yang optimal sehingga diperoleh galat mutlak yang minimal.

Hasil-hasil dari simulasi tersebut menunjukkan bahwa metode jaringan fungsi radial basis cukup efektif dalam mengaproksimasi persamaan Poisson pada koordinat polar (3.37) dengan kondisi batas (3.38), walaupun terdapat galat pada masing-masing simulasi. Mengingat solusi numerik merupakan solusi numerik dimana nilai atau hasil yang diperoleh bukan merupakan solusi eksak sehingga terdapat selisih yang tidak lain merupakan galat.

3.6 Kajian Agama

Aproksimasi persamaan Poisson pada koordinat polar menggunakan jaringan fungsi radial basis adalah menghampiri persamaan Poisson tersebut dengan persamaan jaringan fungsi radial basis. Hasil dari aproksimasi persamaan Poisson disebut solusi numerik, yang pada konsep estimasi menghasilkan nilai taksiran.

Allah Swt berfirman dalam Al-Qur'an surat Ash-Shaffaat ayat 147:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: *"Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih."*(QS. Ash-Shaffaat/37:147).

Terjemah dari ayat tersebut memberikan kesan atau makna ketidak pastian akan jumlah umat yang disebutkan, melalui kata "seratus ribu atau lebih". Kata "atau lebih" yang mengikuti jumlah 100.000 tersebutlah yang menjadikan kesan bahwa jumlah umat belum tentu 100.000, bisa jadi jumlahnya 100.000, bisa jadi lebih dari 100.000. Ayat tersebut menerangkan bahwa Allah Swt sebenarnya telah mengajarkan kepada umat manusia tentang konsep estimasi atau taksiran.

Konsep estimasi yang ada pada ayat tersebut sama dengan konsep metode numerik yang menghasilkan solusi numerik atau nilai taksiran. Estimasi dan metode numerik dalam kehidupan sehari-hari dapat digunakan untuk menghemat waktu dalam memperoleh solusi. Pencarian solusi dengan metode analitik akan sulit untuk dilakukan dan memerlukan waktu yang panjang jika persamaan yang diselesaikan merupakan persamaan yang rumit.

Al-Quran yang telah diturunkan oleh Allah Swt merupakan petunjuk dan pedoman bagi umat manusia dalam menjalani hidup. Adanya ayat tersebut, menjelaskan bahwa ternyata konsep ilmu pengetahuan telah ada dalam Al-Qur'an sejak ribuan tahun yang lalu. Ilmu pengetahuan baru berkembang beberapa tahun terakhir ini. Manusia sebagai makhluk Allah Swt yang dianugerahi akal pikiran wajib mempelajari lagi dan mencari tau lebih banyak lagi tentang ilmu pengetahuan yang ada dalam Al-Qur'an. Manusia juga wajib beriman dan meyakini bahwa ayat Al-Qur'an tersebut benar adanya. Al-Qur'an diciptakan dan diturunkan Allah Swt sebagai petunjuk bagi manusia yang bertaqwa. Allah Swt berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 2:

ذَٰلِكَ ٱلۡكِتَٰبُ لَا رَيۡبَۛ فِيهِۛ هُدٗى لِّلۡمُتَّقِينَ ٢

Artinya: *"Kitab (Al Quran) ini tidak ada keraguan padanya; petunjuk bagi mereka yang bertaqwa,"* (QS. Al-Baqarah/2:2).

Ayat tersebut menerangkan bahwa semua yang difirmankan oleh Allah Swt di dalam kitab suci Al-Qur'an merupakan petunjuk, dan tidak ada keraguan di dalam petunjuk tersebut. Petunjuk Allah Swt mengenai teori tentang solusi numerik yang disampaikan dalam bahasa estimasi atau taksiran dalam tafsir ayat Al-Qur'an surat Ash-Shaffaat ayat 147 merupakan suatu kebenaran yang tidak dapat diragukan lagi. Pengetahuan dasar tentang solusi numerik dalam ilmu matematika tidak lain adalah berasal dari Al-Qur'an yang telah diciptakan oleh Allah Swt sejak ribuan tahun yang lalu.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Persamaan Poisson pada koordinat polar menggambarkan penyebaran panas dalam ruang/ domain lingkaran. Solusi numerik persamaan Poisson pada skripsi ini diperoleh dengan metode jaringan fungsi radial basis. Persamaan Poisson dapat didekati secara langsung dengan sebuah fungsi basis jenis *multiquadrics* untuk mendapatkan solusi numeriknya.

Langkah-langkah penyelesaian numerik persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis pada koordinat polar yaitu: mentransformasi persamaan Poisson dari koordinat *Cartesius* ke koordinat polar, mendiskritisasi persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis serta kondisi batasnya, menghitung nilai bobot w_j, menghitung solusi numerik persamaan Poisson pada koordinat polar, melakukan simulasi dan menggambarkan grafiknya.

Solusi numerik persamaan Poisson pada koordinat polar yang diperoleh dalam penelitian ini menunjukkan hasil yang cukup dekat dengan solusi eksaknya. Berdasarkan hasil simulasi yang telah dilakukan, menunjukkan bahwa besarnya galat mutlak maksimum dari masing-masing simulasi belum tentu dipengaruhi oleh banyaknya iterasi. Semakin banyak iterasi, belum tentu dapat menghasilkan galat mutlak yang kecil, begitu pula sebaliknya. Galat mutlak maksimum yang terkecil yang diperoleh adalah 0,00088 dari pemilihan $\Delta r = 0{,}1$ dan $\Delta\theta = \frac{\pi}{45}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode jaringan fungsi radial basis cukup efektif dalam mengaproksimasi persamaan Poisson pada koordinat polar.

4.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah meneliti tentang analisis Δr dan $\Delta\theta$ sehingga dapat menghasilkan galat mutlak yang minimal.

Lampiran. ***Coding*** **Matlab untuk Solusi Numerik Persamaan Poisson**

```
clc,clear all
clf
R = 0:.05:1;
T = deg2rad(0:15:360);

[r,t] = meshgrid(R,T);
k=length(T)-1;
[mr,nr] = size(r);

R = reshape(r,mr*nr,1);
T = reshape(t,mr*nr,1);
l=length(R);

H   = mq(R,T);
Hr  = mqr(R,T);
Hrr = mqrr(R,T);
Htt = mqtt(R,T);


for i = 1:length(R)
    if R(i,:)==0
        G(i,:) = H(i,:);
    else
        G(i,:) = Hrr(i,:) + (1/R(i))*Hr(i,:) + 1/R(i)^2)*Htt(i,:);
    end

end

for i = 1:length(R)
    if R(i,:)==0
        B(i,1) =0;
    else
        B(i,1) = -3*(cos(T(i)));
    end

end

size(T),size(R)

G(l-k:l,:) = H(l-k:l,:);
B(l-k:l,1) = 0;

W = G\B;

U = H*W;

u = reshape(U,mr,nr);

[x,y,z]=pol2cart(t,r,u);
figure(1)
surf(x,y,z)
title('SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN POISSON PADA KOORDINAT POLAR')
```

```
% solusi eksak dan galat
R = 0:.05:1;
T = deg2rad(0:15:360);
[r,t]=meshgrid(R,T);
for i=1:length(R)
    for j=1:length(T)
        ueksak(j,i)=(R(i)-R(i)^2)*cos(T(j));
    end
end

[x,y,z]=pol2cart(t,r,ueksak);
figure(2)
surf(x,y,z)
title('SOLUSI EKSAK PERSAMAAN POISSON PADA KOORDINAT POLAR')

galat=abs(ueksak-u);
[x,y,z]=pol2cart(t,r,galat)

figure(3)
surf(x,y,z)
title('GALAT METODE RBF PADA PERSAMAAN POISSON KOORDINAT POLAR')
```

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al Qur'an*. Malang: UIN-Maliki Press.

Aminataei, A. dan Mazarei, M.M.. 2008. Numerical Solution of Poisson's Equation Using Radial Basis Function Networks on the Polar Coordinate. *Computers and Mathematics with Applications*, Volume 56 Halaman 2887-2895.

Ayres, F.. 1996. *Kalkulus*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C.. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Fitriya, R.. 2011. Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: UIN Malang.

Hajek, M.. 2005. Neural Networks. *Modul Kuliah* Tidak Diterbitkan. California: University of California.

Mai-Duy, N. dan Tran-Cong, T.. 2003. Approximation of Function and its Derivatives Using Radial Basis Function Networks. *Applied Mathematical Modelling*, Volume 27 Halaman 197-220.

Mittal, R.C. dan Gahlaut, S.. 1987. A Boundary Integral Formulation for Poisson's Equation in Polar Coordinates. *Indian Journal Pure Application*, Volume 18 Halaman 965-972.

Munir, R.. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Penerbit Informatika.

Purcell, E.J. dan Varberg, D.. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Rahman, H.. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-Maliki Press.

Sarra, S.A. dan Kansa, E.. 2009. Multiquadrics Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations. *Modul Kuliah* Tidak Diterbitkan. California: University of California.

Setiawan, I.. 2002. Jaringan Syaraf Tiruan Jenis AMN (Associative Memory Networks): CMAC, B-Spline dan RBF untuk Aplikasi Pemodelan dan Pengontrolan. *Modul Kuliah* Tidak Diterbitkan. Semarang: UNDIP.

Soedojo, P.. 1995. *Asas-Asas Matematika Fisika dan Teknik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Suarga. 2007. *Fisika Komputasi*. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Strauss, W.A.. 2008. *Partial Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik*. Jakarta: Beta Offset.