BILANGAN KONTRAKSI SISI DOMINASI TOTAL PADA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
SRI SUSANTI
NIM. 10610026

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

BILANGAN KONTRAKSI SISI DOMINASI TOTAL PADA GRAF

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SRI SUSANTI
NIM. 10610026

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

BILANGAN KONTRAKSI SISI DOMINASI TOTAL PADA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
SRI SUSANTI
NIM. 10610026

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 15 Januari 2014

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	Ach. Nasichuddin, M.A
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

BILANGAN KONTRAKSI SISI DOMINASI TOTAL PADA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
SRI SUSANTI
NIM. 10610026

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2014

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Ketua Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd NIP. 19630502 198703 1 005	________________
Sekretaris Penguji	: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	________________
Anggota Penguji	: Ach. Nasichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 002	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sri Susanti

NIM : 10610026

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi Total pada Graf

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Januari 2014
Yang membuat pernyataan,

Sri Susanti
NIM. 10610026

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥

" Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan "

Kesuksesan tidak akan tercapai tanpa adanya usaha yang sungguh-sungguh untuk meraihnya
dan tentunya senantiasa disertai do'a dan tawakkal kepada Allah SWT
(penulis)

وَإِذۡ تَأَذَّنَ رَبُّكُمۡ لَئِن شَكَرۡتُمۡ لَأَزِيدَنَّكُمۡۖ وَلَئِن كَفَرۡتُمۡ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٞ ۝٧

" Dan (ingatlah juga), tatkala Tuhanmu memaklumkan; "Sesungguhnya jika kamu bersyukur, pasti Aku akan menambah (nikmat) kepadamu, dan jika kamu mengingkari (nikmat-Ku), Maka Sesungguhnya azab-Ku sangat pedih "

Ungkapkan rasa syukur ke hadirat Allah SWT atas kesuksesan yang telah tercapai
(penulis)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Teriring do'a dan rasa syukur yang teramat besar kepada Allah SWT, maka penulis persembahkan karya rulis ini kepada :

Kepada kedua orang tua penulis (Bapak Ngatiman dan Ibu Sukarti) yang paling berjasa dalam hidup penulis dan senantiasa memberikan do'a, dukungan serta hal terbaik bagi ananda. Dari lubuk hati yang paling dalam, ananda hanya bisa berkata "Terima kasih atas segala kasih sayang, kebaikan dan pengorbanan kalian sehingga penulis mengerti akan arti ilmu".

Suami penulis tercinta Achmad Dhofi Zakaria yang senantiasa memberikan dukungan, motivasi, semangat dan setia menemani siang dan malam, saat suka maupun duka, tiada kata yang paling pantas terucap selain terima kasih untuk semuanya.

Putri penulis tercinta Khoirun Nisa' Al Chamidah, sungguh engkaulah cahaya inspirasi dan berkah yang amat berarti. Jadilah putri yang senantiasa memberikan kebahagiaan dan kebanggaan abi dan umi.

Serta keluarga besar penulis yang ada di Blitar dan Pasuruan, terima kasih untuk semua do'a dan dukungannya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Syukur Alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "Bilangan Kontraksi Sisi Total pada Graf dengan baik. Shalawat serta salam semoga senantiasa terlimpahkan kepada Baginda Rasulullah Muhammad SAW yang telah menuntun umat Islam dari kegelapan menuju jalan yang terang benderang.

Selanjutnya ucapan terima kasih penulis sampaikanseiring do'a dan harapan *Jazakumullah Ahsanal jaza'* kepadasemua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada :

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Hj. Bayyinatul M., drh., M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd dan Ach. Nashichuddin, M.A, selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas

bimbingan, arahan, saran motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Kedua orang tua penulis, Bapak Ngatiman dan Ibu Sukarti yang tidak pernah lelah mendo'akan, memberikan kasih sayang, semangat, serta motivasi, dan suami penulis Achmad Dhofi Zakaria yang selalu memberikan do'a, dukungan, semangat dan menemani penulis, serta putri penulis Khoirun Nisa' Al Chamidah yang memberikan cahaya inspirasi dan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman terbaik penulis, Rifatul Ridho Elvierayani, Muflihatun Nafisah, Khuriatul Hawin, Siska Dwi Oktavia, Wahyudi, Masruroh, Rianti Mandasari, Rumatus Shofia, yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, serta seluruh teman-teman matematika angkatan 2010 yang sama-sama berjuang demi masa depan yang dicita-citakan yang telah memberikan kebahagiaan dalam kehidupan penulis selama masa kuliah.
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati dan jiwa, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga kritik dan saran sangat penulis harapkan demi tercapainya suatu titik kesempurnaan.

Penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca dan khususnya bagi penulis secara pribadi.

Amin ya Robbal 'alamiin...

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Susanti, Sri. 2014. **Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi Total pada Graf.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H.Wahyu Henky Irawan, M.Pd (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Dominasi Total, Graf Kipas, Graf Lintasan, Graf Tangga, Kontraksi Sisi

Salah satu pembahasan dalam teori graf yang menarik untuk diteliti adalah penelitian mengenai dominasi total dan kontraksi sisi dominasi total, hal ini dikarenakan belum banyak peneliti yang meneliti mengenai hal ini. Sebuah himpunan titik S pada graf $G(V, E)$ disebut himpunan dominasi total jika setiap titik $v \in V$ ber-*adjacent* dengan unsur S. Bilangan total dominasi dari graf G dinotasikan dengan $\gamma t(G)$. bilangan kontraksi dominasi total $\left(ct_{\gamma t}(G)\right)$ adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total. Selanjutnya bilangan dominasi total setelah dikontraksi dinotasikan dengan $\gamma' t(G)$.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah: menentukan himpunan dominasi total, menetukan bilangan dominasi total, mengontraksi sisi dominasi total, menentukan pola bilangan dominasi total, pola bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf lintasan, graf kipas dan graf tangga, dan membuktikannya secara umum. Sehingga diperoleh rumus umumnya sebagai berikut :

1) Untuk graf lintasan (P_m) pola dominasi total sebelum dikontraksi adalah $\gamma t(P_m) = \frac{1}{2}m, m = 4x$; $\frac{1}{2}(m+1),\ m = 4x+1$ & $m = 4x+3$; $\frac{1}{2}(m+2), m = 4x+2,$ pola kontraksi sisi dominasi total adalah $ct_{\gamma t}(P_m) = 3, m = 4x$; $1, m = 4x+1$ dan $m = 4x+2$; $2,\ m = 4x+3,$ pola dominasi total setelah dikontraksi adalah $\gamma' t(P_m) = \frac{1}{2}(m-2),\ m = 4x$; $\frac{1}{2}(m-1), m = 4x+1$ & $m = 4x+3$; $\frac{1}{2}m,\ m = 4x+2.$
2) Untuk graf kipas (F_m) pola dominasi total sebelum dikontraksi adalah $\gamma t(F_m) = 2$, $m \in N$, pola kontraksi sisi dominasi total adalah $ct_{\gamma t}(F_m) = m, m \in N$, pola dominasi total setelah dikontraksi adalah $\gamma' t(F_m) = 0,\ m \in N$.
3) Untuk graf tangga (L_m) pola dominasi total sebelum dikontraksi adalah $\gamma t(L_m) = \frac{2}{3}m$, $m = 3x$; $\frac{1}{3}(2m+4),\ m = 3x+1$; $\frac{1}{3}(2m+2),\ m = 3x+2$, pola kontraksi sisi dominasi total adalah $ct_{\gamma t}(L_m) = 5, m = 3x$; $1,\ m = 3x+1$; $3, m = 3x+2,$ pola dominasi total setelah dikontraksi adalah $\gamma' t(L_m) = \frac{1}{3}(2m-3),\ m = 3x$; $\frac{1}{3}(2m+1)$, $m = 3x+1$; $\frac{1}{3}(2m-1),\ m = 3x+2.$

Penulis membahas bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf lintasan, graf kipas dan graf tangga, sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat menerapkannya dengan bantuan komputer atau menerapkan pada graf lain.

ABSTRACT

Susanti, Sri. 2014. **Total Domination Edge Contraction Number of Graph.** Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors :(I) H.Wahyu Henky Irawan, M.Pd(II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keyword: Total Domination, Fan Graph, Path Graph, Ladder Graph, Edge Contraction

One of the discussion in graph theory is interesting to study is the study of total domination and the total domination edge contraction is done because not many researchers are researching on this subject. A set S of vertices in a graph $G(V, E)$ is called a total dominating set if every vertex $v \in V$ is adjacent to an element of S. The total domination contraction number $\left(ct_{\gamma t}(G)\right)$ as the minimum number of edges which must be contracted in order to decrease the total domination number.Then total domination number after contracted denoted by $\gamma' t(G)$.

The steps are performed in this study were: determine the set of total domination, determine the total domination number, determine total domination of the edge contractions, determine patterns of total domination number, patterns of numbers edge contraction of the total domination and prove it in general. Thus obtained the following general formula:

1) For the path graph (P_m) the pattern of total domination before is contracted $\gamma t(P_m) = \frac{1}{2}m, m = 4x$; $\frac{1}{2}(m+1),\ m = 4x+1 \,\&\, m = 4x+3$; $\frac{1}{2}(m+2), m = 4x+2$,the pattern of total domination edge contraction $ct_{\gamma t}(P_m) = 3, m = 4x$; $1, m = 4x+1$ dan $m = 4x+2$; $2,\ m = 4x+3$, the pattern of total domination after is contracted $\gamma' t(P_m) = \frac{1}{2}(m-2),\ m = 4x$; $\frac{1}{2}(m-1), m = 4x+1 \,\&\, m = 4x+3$; $\frac{1}{2}m,\ m = 4x+2$.
2) For the fan graph (F_m) the pattern of total domination before is contracted $\gamma t(F_m) = 2, m \in N$, the pattern of total domination edge contraction $ct_{\gamma t}(F_m) = m, m \in N$, the pattern of total domination after is contracted $\gamma' t(F_m) = 0,\ m \in N$.
3) For the ladder graph (L_m) the pattern of total domination before is contracted $\gamma t(L_m) = \frac{2}{3}m,\ m = 3x$; $\frac{1}{3}(2m+4),\ m = 3x+1$; $\frac{1}{3}(2m+2),\ m = 3x+2$, the pattern of total domination edge contraction $ct_{\gamma t}(L_m) = 5, m = 3x$; $1,\ m = 3x+1$; $3, m = 3x+2$, the pattern of total domination after is contracted $\gamma' t(P_m) = \frac{1}{3}(2m-3),\ m = 3x$; $\frac{1}{3}(2m+1),\ m = 3x+1$; $\frac{1}{3}(2m-1),\ m = 3x+2$.

The author discusses total domination edge contraction number of path graph, fan graph and ladder graph, so it is advisable to further research can apply to computer assisted or apply to another graph.

ملخص

سوسنتي ، سري . ٢٠١٤ . **الجانب أرقام الانكماش إجمالي الهيمنة على غراف**. أطروحة، قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا التابعة لجامعة ولاية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الوحي هنكي إروان. المشتريات (٢) منظمة العمل ضد الجوع. نسيحدّين، ماجستير

الكلمات الرئيسية: إجمالي الهيمنة، مروحة غراف ، المسار غراف، أجهزة غراف ، جنبا الانكماش

واحدة من النقاش في نظرية الرسم البياني المثير للاهتمام أن الدراسة هي دراسة للهيمنة، ومجموع الجانب الانكماش وهيمنة، وذلك لأن العديد من الباحثين لا يتم البحث في هذا الموضوع. وهناك مجموعة من النقاط Sفي الرسم البياني $G(V,E)$ ويسمى الهيمنة الكاملة تعيين إذا كل نقطة الخامس $v \in V$ المجاورة إلى عنصر الهواء S. وتدل إجمالي عدد هيمنة رسم بياني بواسطة G. $\gamma t(G)$ عدد هيمنة الانكماش الكل هو$\left(ct_{\gamma t}(G)\right)$ الحد الأدنى الذي ينبغي أن يتم التعاقد للحد من عدد من هيمن الكل. ومجموع أرقام الهيمنة برغم الرمز بواسطة $\gamma' t(G)$.

وتتم في هذه الدراسة الخطوات هي : وتحديد مجموعة من الهيمنة الكاملة، وتحديد عدد الهيمنة الكاملة، والسيطرة الكلية للعقود، وتحديد نمط عدد الهيمنة، وعدد هيمنة نمط الانكماش، ونمط مجموع عدد الهيمنة، ونمط تقلص هيمنة العدد الإجمالي على الرسم البياني المسار، والرسم البياني والرسم البياني سلم مروحة، واثبات ذلك بشكل عام .وبالتالي الحصول على الصيغة العامة التالية:

١) إلى الرسم البياني مسار، نمط الهيمنة الكاملة قبل التعاقد هو $\gamma t(P_m) = \frac{١}{٢}m\,, m = ٤x\ ;\ \frac{١}{٢}(m+١),\ m = ٤x+١\ \&\ m = ٤x+٣\ ;\ \frac{١}{٢}(m+٢), m = ٤x+٢$ ، نمط الانكماش الهيمنة الكامله هو $ct_{\gamma t}(P_m) = ٣, m = ٤x\,;\,١\,, m = ٤x+١$ dan $m = ٤x+٢\,;\,٢\,,\ m = ٤x+٣$ ، نمط الهيمنة الكاملة بعد التعاقد هو $\gamma' t(P_m) = \frac{١}{٢}(m-٢),\ m = ٤x\,;\frac{١}{٢}(m-١), m = ٤x+١\ \&\ m = ٤x+٣\,;\ \frac{١}{٢}m\,,\ m = ٤x+٢$.

٢) إلى الرسم البياني مسار، نمط الهيمنة الكاملة قبل التعاقد هو $\gamma t(F_m) = ٢\ ,\ m \in N$ ، نمط الانكماش الهيمنة الكامله هو $ct_{\gamma t}(F_m) = m\,, m \in N$ ، نمط الهيمنة الكاملة بعد التعاقد هو $\gamma' t(F_m) = ٠,\ m \in N$.

٣) إلى الرسم البياني مسار، نمط الهيمنة الكاملة قبل التعاقد هو $\gamma t(P_m) = \frac{١}{٢}m\,, m = ٤x\ ;\ \frac{١}{٢}(m+١),\ m = ٤x+١\ \&\ m = ٤x+٣\ ;\ \frac{١}{٢}(m+٢), m = ٤x+٢$ ، نمط الانكماش الهيمنة الكامله هو $ct_{\gamma t}(P_m) = ٣, m = ٤x\,;\ ١\,, m = ٤x+١$ dan $m = ٤x+٢\,;\,٢\,,\ m = ٤x+٣$، نمط الهيمنة الكاملة بعد التعاقد هو $\gamma' t(P_m) = \frac{١}{٢}(m-٢),\ m = ٤x\,;\frac{١}{٢}(m-١), m = ٤x+١\ \&\ m = ٤x+٣\,;\ \frac{١}{٢}m\,,\ m = ٤x+٢$.

يناقش المؤلف الجانب تقلس هيمنة العدد الإجمالي على الرسم البياني المسار،والرسم البياني مروحة والرسم البياني درج ، ولذلك فمن المستحسن أن إجراء مزيد من البحوث يمكن ان تنطبق على الكمبيو تر أو بمسا عدة تنطبق على الرسم البياني اخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari, baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, hal ini kebenarannya dapat dilihat dalam Al Qur'an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah SWT (Rahman, 2007:1).

Galileo Galilei mengatakan "*Mathematics is the language with wich God created the universe*". Kemudian Stepen Hawking pencetus teori Big Bang mengatakan "*Tuhanlah yang menciptakan alam dengan bahasa itu (Matematika)*". Jika kita melihat ke dalam Al Qur'an sekitar 600 tahun sebelum ungkapan Galileo ataupun Hawking, Al Qur'an sudah mengatakan bahwa segala sesuatu diciptakan secara matematis. Sebagaimana firman Allah dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ﴿٤٩﴾

Artinya : "*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*"

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya (Abdussakir, 2009).

Sejalan dengan hal ini, teori graf yang merupakan salah satu cabang matematika yang menarik untuk dibahas. Hal ini dikarenakan permasalahan yang dirumuskan dalam teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1). Adapun ide dasar teori graf diperkenalkan pertama kali pada abad ke-19 tahun 1736 oleh matematikawan Swiss Leonhard Euler. Pada waktu itu, ia menggunakan graf untuk menyelesaikan masalah jembatan Konisberg. Euler memecahkan masalah ini dengan memodelkannya ke dalam graf, yaitu ke-empat daratan sebagai titik (*vertex*) dan ke tujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) (Munir, 2005:354).

Graf didefinisikan sebagai himpunan titik (*vertex*) yang tidak kosong dan himpunan sisi (*edge*) yang mungkin kososng. Hal ini jika direlevansikan dengan kajian Al Qur'an, maka sejajar dengan hubungan antara manusia dengan manusia (*hablum minannas*) dan hubungan antara manusia dengan Allah (*hablum minallah*) .

Dalam teori graf terdapat hal yang menarik untuk dikaji, yaitu mengenai dominasi total dan kontraksi sisi. Hal ini dikarenakan belum banyak peneliti yang melakukan penelitian mengenai dominasi total dan kontraksi sisi. Penelitian tentang dominasi total dan kontraksi sisi pada suatu graf akan menunjukkan suatu pola dominasi total sebelum di kontraksi, pola kontraksi sisi dominasi total, dan pola dominasi total setelah di kontraksi. Sehingga penulis merumuskan judul untuk skripsi ini yaitu **"Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi Total pada Graf ".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan di atas, maka masalah yang dikaji dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut :

1) Bagaimana pola bilangan dominasi total dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf lintasan (P_m) ?
2) Bagaimana pola bilangan dominasi total dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf kipas (F_m) ?
3) Bagaimana pola bilangan dominasi total dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf tangga (L_m) ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan di atas, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1) Menentukan pola bilangan dominasi total dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf lintasan (P_m).
2) Menentukan pola bilangan dominasi total dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf kipas (F_m).
3) Menentukan pola bilangan dominasi total dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf tangga (L_m).

1.4 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi kerancuan terhadap maksud dari isi penelitian ini, maka perlu adanya pembatasan masalah. Dalam penelitian ini, yang dikaji adalah graf lintasan $(P_4 \text{ sampai } P_6)$, graf kipas $(F_1 \text{ sampai } F_3)$, graf tangga

(L_2 sampai L_6). Selanjutnya dibangun suatu teorema dan pembuktian teorema secara umum tentang bilangan dominasi total sebelum dikontraksi, kontraksi sisi dominasi total, dan bilangan dominasi total setelah dikontraksi pada graf lintasan, graf kipas, dan graf tangga.

1.5 Manfaat Penelitian

1) Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai kontraksi sisi dominasi dan dominasi total pada graf lintasan, graf kipas, dan graf tangga.
2) Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan wacana terhadap pengembangan khasanah keilmuan bidang ilmu matematika tentaang graf, khususnya mengenai kontraksi sisi dominasi dan dominasi total pada graf lintasan, graf kipas, dan graf tangga.
3) Bagi lembaga UIN Maulana Malik Ibrahim, sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*Library Research*) yakni melakukan penelitian dengan cara mengumpulkan dan menelaah berbagai konsep dari sumber informasi yang berkaitan baik buku, jurnal ataupun makalah. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1) Merumuskan masalah dalam bentuk kalimat tanya.

Sebelum melakukan penelitian, peneliti menyusun rumusan masalah tentang bilangan kontraksi sisi dominasi total dan dominasi total dari graf lintasan (P_m), graf kipas (F_m) dan graf tangga (L_m).

2) Menentukan tujuan yang disesuaikan dengan rumusan masalah.
3) Mencari sejumlah data pendukung yang diperoleh dengan menggunakan dua langkah, yaitu data primer dan data sekunder. Data primer, diperoleh dengan mencari bilangan dominasi total dan kontraksi sisi dominasi total yang terdapat pada graf lintasan (P_m), graf kipas (F_m) dan graf tangga (L_m).

   Data sekunder, diperoleh dengan mencari definisi dan sifat tentang graf lintasan (P_m), graf kipas (F_m) dan graf tangga (L_m), himpunan dominasi total, bilangan dominasi total, kontraksi sisi serta teorema dan pembuktian tentang bilangan dominasi total dan kontraksi sisi dominasi total yang terdapat pada sejumlah buku, artikel dan jurnal.
4) Menganalisis data
   i. Menggambar beberapa graf lintasan (P_4 sampai P_6), graf kipas (F_1 sampai F_3), graf tangga (L_2 sampai L_6).
   ii. Menentukan titik-titik yang menjadi titik dominasi total pada graf lintasan, graf kipas, dan graf tangga.
   iii. Menentukan himpunan dominasi total berdasarkan titik-titik yang menjadi titik dominasi total pada graf lintasan, graf kipas, dan graf tangga.
   iv. Menentukan bilangan dominasi total berdasarkan kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi total.

v. Mengkontraksi sisi berdasarkan himpunan bilangan dominasi total yang telah dipilih.

vi. Menentukan pola bilangan dominasi total dan bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf lintasan, graf kipas, dan graf tangga.

vii. Membuat teorema tentang, bilangan dominasi total dan bilangan kontraksi sisi dominasi total dari graf yang diteliti.

viii. Membuktikan kebenaran teorema tersebut secara umum.

5) Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa sub bab dengan rumusan sebagai berikut :

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi : latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang kajian Islam mengenai kesempurnaan ciptaan Allah dalam Al Qur'an, definisi graf, sifat-sifat graf yang meliputi : terhubung langsung (*adjacent*) dan terkait langsung (*incident*), graf terhubung dan tak terhubung, jenis-jenis graf yaitu graf lintasan, graf kipas, dan graf tangga, definisi dominasi total, dan definisi kontraksi.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini berisi tentang penjelasan mengenai cara untuk menentukan titik dominasi total, himpunan dominasi total, kontraksi sisi dominasi total pada pada graf lintasan (P_m), graf kipas (F_m), dan graf tangga (L_m). Selain itu juga berisi tentang penjelasan integrasi antara kesempurnaan ciptaan Allah dalam Al Qur'an dengan pendekatan teori graf.

Bab IV Penutup

Berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kesempurnaan Ciptaan Allah dalam Al Qur'an

Kesempurnaan merupakan cita-cita yang ingin dicapai oleh setiap manusia yang hidup di dunia. Sehingga berbagai cara dilakukan oleh manusia agar dapat terwujud kesempurnaan tersebut, tetapi hal yang kosong yang didapatkan dari semua usaha yang telah dilakukan. Sangat miris ketika melihat sebagian besar manusia tenggelam dalam bayangan kesempurnaan. Hal ini terjadi tidak hanya pada orang-orang yang jauh dari agama, tetapi bagi orang-orang yang dekat dengan agama juga sering tenggelam dalam bayangan yang menjebak ini.

Manusia sempurna sebagai manusia. Manusia bukan malaikat yang tidak punya nafsu dan selalu berdzikir kepada Allah. Manusia juga bukan syetan yang kerjanya selalu menggoda dan menjerumuskan temannya ke dalam neraka. Tapi manusia adalah sesosok makhluk yang dilengkapi dengan *"qalb"* yang dengannya dia bisa menjadi lebih baik dari pada malaikat manapun. Manusia juga dilengkapi dengan nafsu yang dengannya pula manusia bisa menjadi lebih buruk dari syetan. Manusia juga dilengkapi dengan insting dan pikiran yang dengannya menjadi lebih baik dari hewan.

Manusia dapat melakukan segala sesuatu yang dapat mendukungnya untuk melakukan tugasnya. Tugasnya sebagai hamba Allah dan tugasnya sebagai "perpanjangan tangan" Allah di muka bumi. Allah memberikan manusia kemampuan ilmu yang dengannya manusia bisa bertahan dari ganasnya lingkungan sekitar. Allah menganugerahi manusia dengan kulit yang dengannya manusia bisa menjaga tubuhnya dari serangan bakteri dan cuaca.

Sifat jelek yang terdapat pada manusia menyebabkan seseorang mengatakan bahwa manusia itu tidak sempurna. Tapi perlu diketahui dan sadari bahwa sebuah keegoisan adalah sebuah faktor pendukung untuk mecapai "surga". Lalu emosional juga diperlukan untuk membuat manusia bisa mencintai Allah dengan segenap hati. Sehingga hal ini membuat manusia semakin sadar diri, bahwa dirinya tidak patut disombongkan. Saking sombongnya sehingga berani mengatakan bahwa penciptaan manusia tidak sempurna.

Manusia memiliki semuanya, mulai dari sifat jelek sampai pada sifat yang sangat mulia. Selain itu, tidak ada lagi makhluk yang sesempurna manusia di muka bumi sebagai makhluk sempurna. Manusia diberikan kebebasan memilih oleh Allah, memilih sendiri tempat huninya, gaya huninya, dan menerima semua konsekuensi atas pilihannya. Hal ini kesemuanya adalah faktor pendukung kesempurnaan manusia. Jika ada yang cacat maka Allah menantang kita untuk mencari dimanakah sebuah nikmat itu dapat didustakan oleh seseorang yang menamakan dirinya sebagai manusia. Bukankah manusia itu adalah sebuah kesempurnaan yang sempurna sehingga mewajibkan manusia menyukuri dengan menuruti segala perintah-Nya. Karena dengan kesempurnaan tersebutlah Allah membuktikan kepada manusia sebagai Tuhannya manusia, Tuhannya jin, Tuhannya malaikat, dan Tuhan segala alam.

Allah berfirman dalam surat At-Tin ayat 4 sebagai berikut :

لَقَدۡ خَلَقۡنَا ٱلۡإِنسَٰنَ فِيٓ أَحۡسَنِ تَقۡوِيمٖ ٤

Artinya: "*Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dalam bentuk yang sebaik-baiknya*" (QS. At-Tin: 4).

Menurut tafsir Al 'Allaamah Asy-Syaikh Abdurrahman bin Nashir As-Sa'diy, yakni dengan bentuk tubuh yang paling sempurna, anggota tubuh yang paling serasi, sosok yang tegak, tidak kurang suatu apapun yang memang diidamkan secara lahir dan batin. Dengan segala karunia besar yang mestinya harus disyukuri, ternyata kebanyakan orang justru tidak bersyukur kepada Allah SWT sebagai pemberinya. Mereka sibuk dengan bermain-main dan bersenang-senang. Mereka lebih senang memilih hal yang paling rendah, akhlak yang paling hina. Maka Allah pun mengembalikan mereka ke tempat terendah, yakni Naar yang paling bawah (Abdurrahman:183-184).

Menurut tafsir Syaikh Muhammad bin Shalih Al-'Utsaimin, Allah bersumpah bahwa Dia telah menciptakan manusia dalam sebaik-baik bentuk. Kalimat yang menjadi isi sumpah ini ditegaskan dengan tiga penegasan. Sumpah, huruf *laam* dan *qad*. Allah bersumpah bahwa Dia telah menciptakan manusia *"dalam bentuk yang paling baik",* yakni dalam keadaan dan rupa yang paling baik secara fitrah. Karena kenyataannya tidak ada makhluk yang lebih baik bentuknya daripada bani Adam. Seluruh makhluk yang ada di bumi keelokannya jauh di bawah keelokan bani Adam (Muhammad:468-469).

Menurut tafsir Syeh 'Abdul Qadir Jaelani, ringkasnya atas nama semua media sumpah yang agung ini [*sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia*], yaitu jenisnya, [*dalam bentuk yang sebaik-baiknya*] dan proposional. Sebab secara zhahir maupun batin, tidak ada makhluk yang lebih baik dan lebih proposional dari manusia. Karena itulah Kami memilihnya sebagai khalifah Kami di antara makhluk ciptaan Kami yang lain (Jaelani, 2011:213-214).

Pada hakikatnya semua keindahan dan kesempurnaan yang dapat dilihat di alam ini adalah milik Allah. Adapaun kesempurnaan dan keindahan yang ada pada selain Allah hanyalah kesempurnaan dan keindahan perlambang dan pinjaman. Untuk menguatkannya, Al Qur'an menjelaskan dengan cara lain, bahwa keindahan dan kesempurnaan yang dititipkan pada makhluk-makhluk di alam ini terbatas dan berkesudahan. Sedangkan keindahan dan kesempurnaan Allah itu tidak terbatas dan tidak berkesudahan. Allah berfirman dalam Al Qur'an surat Al-Qomar ayat 49 sebagai berikut :

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

Artinya: "*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*" (QS. Al-Qamar: 49).

Menurut tafsir Muyassar atau 'Aidh Al-Qarni, Allah SWT menciptakan segala sesuatu dan menetukan ukurannya sesuai ketetapan, ilmu pengetahuan, dan suratan takdir-Nya. Jadi semua yang terjadi di alam semesta pastilah berdasarkan takdir Allah SWT (Al Qarni, 2007:235).

Menurut tafsir Syaikh Abu Bakar Jabir Al-Jazairi, ayat ini sebuah pemberitahuan dari Allah tentang aturan alam semesta yang telah Dia ciptakan, bahwa segala kejadian yang terjadi di alam ini telah diketahui oleh ilmu Allah dan telah ditentukan. Allah telah menetukan dzat, sifat, perbuatan, dan tempat kembalinya ke neraka atau ke surga, manusia maupun jin. Tidak ada sesuatu pun yang terjadi di alam ini tanpa adanya takdir yang telah diketahui oleh ilmu Allah yang Maha Sempurna sebelum terjadinya sesuatu itu (Al Jazairi, 2009:200).

Menurut tafsir Prof. Dr. Teungku Muhammad Hasbi Ash Shiddieqy, semua yang ada dalam hidup ini adalah dengan takdir Allah, yang ditakdirkan sesuai dengan hikmat-Nya dan menurut sunnah-sunnah-Nya yang telah ditetapkan (Ash Shiddieqy, 2000:4043).

2.2 Definisi Graf

Definisi 1

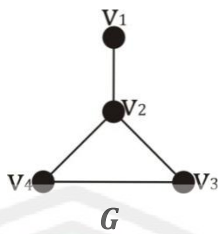
Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi, sehingga tidak terdapat gelung (Chartrand dan Lesniak, 1986:1).

Banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari graf G tersebut cukup ditulis p dan q. Misal G adalah graf dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E adalah :

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$$

Maka gambarnya adalah:

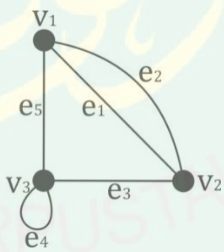


Gambar 2.1 : Gambar Graf G

Graf G di atas mempunyai empat titik dan enam sisi sehingga order dari graf G tersebut adalah $p = 4$ dan size graf G tersebut adalah $q = 6$.

Dalam suatu graf G, apabila suatu titik v dihubungkan dengan dirinya sendiri atau $e = vv$, maka sisi e dinamakan *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan sisi rangkap (*multiple edges*). Graf yang tidak memuat *loop* dan sisi rangkap dinamakan graf sederhana (*simple graf*).

Contoh 1:



Gambar 2.2 : Graf dengan *Loop* dan Sisi Rangkap

2.3 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

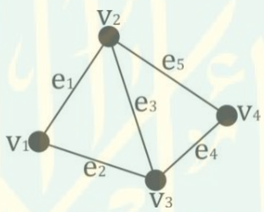
Definisi 2

Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (*adjacent*), sementara u dan e yang sama halnya dengan v dan e adalah terkait langsung (*incident*). Selanjutnya, jika e_1

dan e_2 adalah sisi yang berbeda pada G terkait langsung (*incident*) dengan titik yang sama, maka e_1 dan e_2 adalah sisi yang terhubung langsung (*adjacent*) (Chartrand and Lesniak, 1986:1).

Sebagai contoh, pada gambar 2.4 titik $v_1$dikatakan terhubung langsung dengan titikv_2 danv_3, tetapi v_1 tidak terhubung langsung dengan titik v_4, sedangkan sisi e_2 terkait langsung pada titik v_1 dan v_3. Sisi e_4 terkait langsung pada titik v_2 dan v_4, tetapi sisi e_1 tidak terkait langsung pada titik v_4.

Contoh 2:

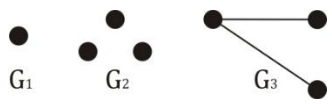


Gambar 2.3 Titik dan Sisi yang *Adjacent* dan *Incident*

Graf trivial adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong, graf non trivial adalah graf yang berorder lebih dari satu (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Graf yang paling sederhana adalah graf Null atau graf kosong dengan n titik, dinotasikan dengan N_n. Graf kosong didefinisikan sebagai suatu graf dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf ini hanya terdiri dari himpunan elemen yang disebut *vertex*.

Contoh 3:



Gambar 2.4 G_1 adalah Graf Null , G_2 adalah Graf Kosong, dan G_3 adalah Graf tidak Kosong

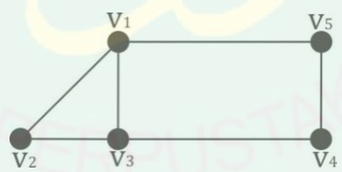
2.4 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

Definisi 3

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung. Suatu graf yang tidak terhubung merupakan graf tak terhubung (*disconected*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:18).

Keterhubungan adalah sifat yang dimiliki graf. Graf terhubung dapat dilihat atau dibuktikan dari keterhubungan antara u dan v. Untuk lebih menguatkan kondisi $(u, v) \in E(G)$, sebut u dan v bersisian atau u dan v dihubungkan oleh satu sisi (Lih Hsing dan Cheng Kuan Lin, 2008:25).

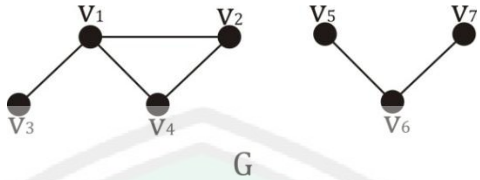
Contoh 4:



Gambar 2.5 Graf yang Terhubung

Graf G di bawah ini terdiri dari himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_7), \}$. Graf G di bawah ini merupakan graf tak terhubung karena tidak terdapat jalan dari v_4 ke v_5, yang dihubungkan oleh sisi, sehingga terpisah menjadi dua komponen. Bagian-bagian dari susunan graf yang menyebabkan grafnya tidak terhubung maka bagian tersebut dinamakan komponen graf (Grimaldi, 1985:533).

Contoh 5:



Gambar 2.6 Graf tak Terhubung

2.5 Jenis-Jenis Graf

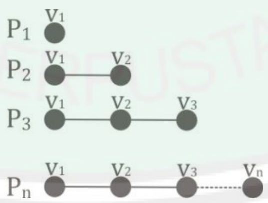
a) Graf Lintasan *(Path Graph)*

Definisi 4

Graf lintasan *(Path Graph)* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan (*path* tunggal). Graf lintasan *(Path Graph)* dengan n titik dinotasikan dengan P_n(Wilson dan Watkins, 1990:36).

Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n dengan n bilangan asli. Secara umum graf P_n mempunyai n titik dan $n - 1$ sisi.

Contoh 6:



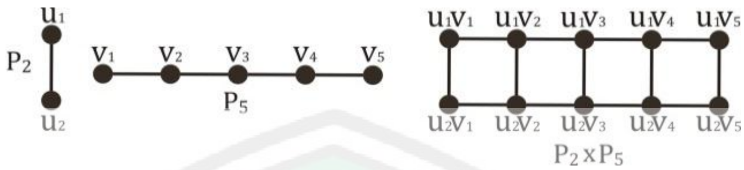
Gambar 2.7 Graf Lintasan P_1, P_2, P_3, dan P_n

b) Graf Tangga *(Ladder Graph)*

Definisi 5

Graf tangga *(Ladder Graph)* adalah graf yang dibangun dari hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_n , yaitu $P_2 \times P_n$. Graf tangga dinotasikan dengan L_n (Tsulutsy, 2009).

Contoh 7:



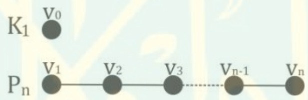
Gambar 2.8 Graf Tangga $P_2 \times P_5$

c) **Graf Kipas *(Fan Graph)***

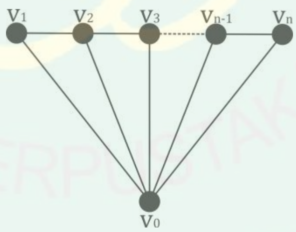
Definisi 6

Graf kipas merupakan graf yang dibentuk dari penjumlahan (*joint*) graf komplit K_1 dan graf lintasan P_n yaitu $F_n = K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas memiliki $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi (Gallian, 2009:16).

Contoh 8:



Maka graf kipas $F_n = K_1 + P_n$ adalah

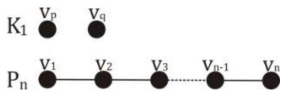


Gambar 2.9 Graf Kipas F_n

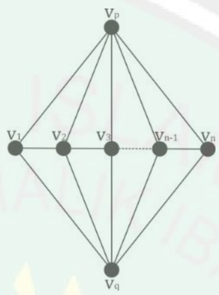
Untuk selanjutnya titik v_0 disebut sebagai titik pusat graf kipas F_n.

Pada graf kipas sendiri ada yang namanya graf kipas ganda, yaitu graf kipas yang dibentuk dari penjumlahan graf komplit $2K_1$ dan graf lintasan P_n yaitu $dF_n = 2K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas ganda memiliki $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$ sisi (Gallian, 2009:16).

Contoh 9:



Maka graf kipas ganda $dF_n = 2K_1 + P_n$ adalah



Gambar 2.10 Graf Kipas Ganda dF_n

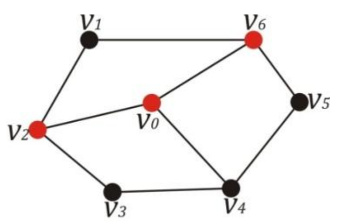
Untuk selanjutnya titik v_p dan titik v_q disebut sebagai titik pusat graf kipas ganda dF_n.

2.6 Definisi Dominasi Total

Definisi 7

Sebuah himpunan titik S pada graf $G(V, E)$ disebut himpunan dominasi total jika setiap titik $v \in V$ yang beradjacent dengan unsur S. Bilangan total dominasi dari graf G dinotasikan dengan $\gamma t(G)$ adalah kardinal minimum dari himpunan total dominasi di G (Soltankhah, 2010:319).

Contoh 10:



G_2

Gambar 2.11 Dominasi Total Graf G_2 dengan Titik Dominasi Total v_0, v_2 dan

Berdasarkan gambar 2.11 maka diperoleh :

Himpunan dominasi total dari G_2 yang memiliki kardinal minimum adalah sebagai berikut :

$S_1 = \{v_0, v_2, v_6\}$ karena titik v_0 ber-*adjacent* dengan titik v_2 dan v_6

karena titik v_1 ber-*adjacent* dengan titik v_2 dan v_6

karena titik v_2 ber-*adjacent* dengan titik v_0

karena titik v_3 ber-*adjacent* dengan titik v_2

karena titik v_4 ber-*adjacent* dengan titik v_0

karena titik v_5 ber-*adjacent* dengan titik v_6

karena titik v_6 ber-*adjacent* dengan titik v_0

$S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$ karena titik v_0 ber-*adjacent* dengan titik v_2 dan v_4

karena titik v_1 ber-*adjacent* dengan titik v_2

karena titik v_2 ber-*adjacent* dengan titik v_0

karena titik v_3 ber-*adjacent* dengan titik v_2 dan v_4

karena titik v_4 ber-*adjacent* dengan titik v_0

karena titik v_5 ber-*adjacent* dengan titik v_4

karena titik v_6 ber-*adjacent* dengan titik v_0

$S_1 = \{v_0, v_4, v_6\}$ karena titik v_0 ber-*adjacent* dengan titik v_4 dan v_6

karena titik v_1 ber-*adjacent* dengan titik v_6

karena titik v_2 ber-*adjacent* dengan titik v_0

karena titik v_3 ber-*adjacent* dengan titik v_4

karena titik v_4 ber-*adjacent* dengan titik v_0

karena titik v_5 ber-*adjacent* dengan titik v_4 dan v_6

karena titik v_6 ber-*adjacent* dengan titik v_0

2.7 Definisi Kontraksi Sisi

Definisi 8

Misal $e = xy$ adalah sisi pada graf $G(V, E)$. $^G/_e$ menunjukkan graf G yang diperoleh dari mengontraksi sisi e menjadi titik baru v_e yang beradjacent dengan semua tetangga pada x dan y (Diestel,2005:18). Selain itu, bilangan kontraksi dominasi $\left(ct_\gamma(G)\right)$ adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi. Bilangan kontraksi dominasi total $\left(ct_{\gamma t}(G)\right)$ adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi (total) (Huang dan Xu, 2010:2)

Contoh 11:

Gambar 2.12 Kontraksi Sisi $e = xy$

Berdasarkan gambar 2.12 di atas, diketahui bahwa graf G dengan himpunan titik $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ kemudian dikontraksi sisi $e = (v_0, v_2)$ menghasilkan graf baru G/e dengan titik baru v_e yang merupakan akibat dari titik v_0 dan v_2 yang berhimpit sehingga titik-titik yang ber-*adjacent* dengan titik v_0 dan v_2 tetap ber-*adjacent* dengan titik v_e.

BAB III

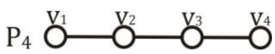
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pola bilangan dominasi total dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf lintasan m titik, graf tangga m titik, dan graf kipas m titik. Untuk mencari pola bilangan dominasi total dan pola bilangan kontraksi dominasi total pada graf lintasan m titik, graf tangga m titik, dan graf kipas m titik, maka dimulai dengan menentukan himpunan titik dominasi total. Kemudian menentukan sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total tersebut kemudian sisi tersebut menjadi sisi yang akan dikontraksi.

Berdasarkan definisi pada bab II, bilangan dominasi total (sebelum dikontraksi) pada graf G dinotasikan dengan $\gamma t(G)$ adalah adalah kardinal minimum dari himpunan total dominasi di G. Bilangan kontraksi dominasi total $\left(ct_{\gamma t}(G)\right)$ adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total. Kemudian penulis menotasikan bilangan dominasi total setelah dikontraksi dengan $\gamma' t(G)$.

3.1 Pola Bilangan Dominasi Total dan Pola Kontraksi Dominasi Bilangan Total Graf Lintasan m Titik (P_m)

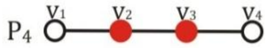
a) Graf lintasan empat titik (P_4)



Gambar 3.1 Graf Lintasan Empat Titik (P_4)

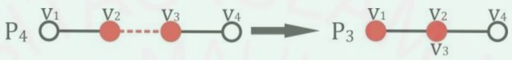
Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

$S_1 = \{v_2, v_3\}$ yaitu



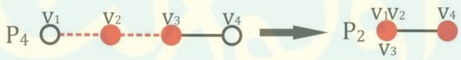
maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_3, v_3 ber-*adjacent* dengan v_2, v_4 ber-*adjacent* dengan v_3.

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_4,



maka himpunan dominasi total dari P_4 yang semula dua titik dominasi total menjadi P_3 dengan himpunan dominasi total dari P_3 adalah dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_4,



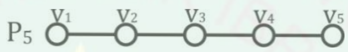
maka himpunan dominasi total dari P_4 yang semula dua titik dominasi total menjadi P_2 dengan himpunan dominasi total dari P_2 adalah dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi tiga sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_4,

maka himpunan dominasi total dari P_4 yang semula dua titik dominasi total menjadi P_1 dengan himpunan dominasi total dari P_1 adalah nol titik dominasi total atau P_1 tidak memiliki titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(P_4) = 3$ karena P_4 dengan $\gamma t(P_4) = 2$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(P_4) = 3$ menghasilkan P_1 dengan $\gamma t(P_1) = 0$ atau $\gamma' t(P_4) = 0$ (bilangan dominasi total P_4 setelah dikontraksi).

b) Graf lintasan lima titik (P_5)



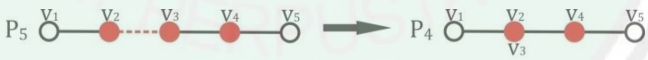
Gambar 3.2 Graf Lintasan Lima Titik (P_5)

Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

$S_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$ yaitu

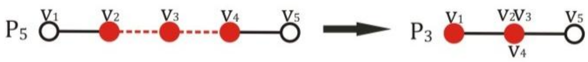
maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_3, v_3 ber-*adjacent* dengan v_2 dan v_4, v_4 ber-*adjacent* dengan v_3, v_5 ber-*adjacent* dengan v_4

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_5,



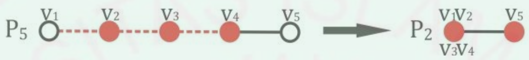
maka himpunan dominasi total dari P_5 yang semula tiga titik dominasi total menjadi P_4 dengan himpunan dominasi total dari P_4 adalah dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_5,



maka himpunan dominasi total dari P_5 yang semula tiga titik dominasi total menjadi P_3 dengan himpunan dominasi total dari P_3 adalah dua titik dominasi total.

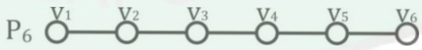
Dengan mengontraksi tiga sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_5,



maka himpunan dominasi total dari P_5 yang semula tiga titik dominasi total menjadi P_2 dengan himpunan dominasi total dari P_2 adalah dua titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(P_5) = 1$ karena P_5 dengan $\gamma t(P_5) = 3$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(P_5) = 1$ menghasilkan P_4 dengan $\gamma t(P_4) = 2$ atau $\gamma' t(P_5) = 2$ (bilangan dominasi total P_5 setelah dikontraksi).

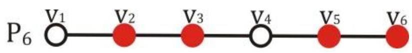
c) Graf lintasan enam titik (P_6)



Gambar 3.3 Graf Lintasan Enam Titik (P_6)

Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

$S_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ yaitu

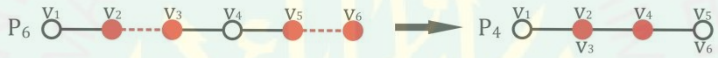


maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_3, v_3 ber-*adjacent* dengan v_2, v_4 ber-*adjacent* dengan v_5, v_5 ber-*adjacent* dengan v_6, v_6 ber-*adjacent* dengan v_5.

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_6,

maka himpunan dominasi total dari P_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi P_5 dengan himpunan dominasi total dari P_5 adalah tiga titik dominasi total.

Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_6,

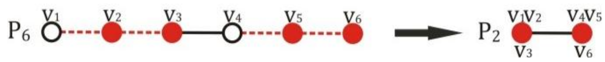


maka himpunan dominasi total dari P_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi P_4 dengan himpunan dominasi total dari P_4 adalah dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi tiga sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_6,

maka himpunan dominasi total dari P_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi P_3 dengan himpunan dominasi total dari P_3 adalah dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi empat sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada P_6,



maka himpunan dominasi total dari P_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi P_2 dengan himpunan dominasi total dari P_2 adalah dua titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(P_6) = 1$ karena P_6 dengan $\gamma t(P_6) = 4$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(P_6) = 1$ menghasilkan P_5 dengan $\gamma t(P_5) = 3$ atau $\gamma' t(P_6) = 3$ (bilangan dominasi total P_6 setelah dikontraksi).

Jika dilanjutkan dengan cara yang sama untuk graf lintasan m titik (P_m), maka diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 3.1 Pola Dominasi Total dan Kontraksi Sisi Dominasi Total pada Graf Lintasan (P_m)

Nama graf	**Bilangan Dominasi total sebelum dikontraksi** $(\gamma t(P_m))$	**Bilangan Kontraksi sisi Dominasi total** $(ct_{\gamma t}(P_m))$	**Bilangan Dominasi total setelah dikontraksi** $(\gamma' t(P_m))$
P_5	3	1	2
P_6	4	1	3
P_7	4	2	3
P_8	4	3	3
P_9	5	1	4
P_{10}	6	1	5
P_{11}	6	2	5
P_{12}	6	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮
P_m	untuk $m \geq 5 \wedge x \in N$ $\frac{1}{2}m, m = 4x$ $\frac{1}{2}(m+1), m = 4x+1$ dan $m = 4x+3$ $\frac{1}{2}(m+2), m = 4x+2$	untuk $m \geq 5 \wedge x \in N$ $3, m = 4x$ $1, m = 4x+1$ dan $m = 4x+2$ $2, m = 4x+3$	untuk $m \geq 5 \wedge x \in N$ $\frac{1}{2}(m-2), m = 4x$ $\frac{1}{2}(m-1), m = 4x+1$ Dan $m = 4x+3$ $\frac{1}{2}m, m = 4x+2$

Teorema 1

Bilangan dominasi total sebelum dikontraksi dari graf lintasan P_m untuk $n \geq 5$ adalah

$$\gamma t(P_m) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\ , m = 4x\ ; x \in N \\ \frac{1}{2}(m+1), m = 4x+1 \text{ dan } m = 4x+3\ ; x \in N \\ \frac{1}{2}(m+2), m = 4x+2\ ; x \in N \end{cases}$$

Bukti Teorema 1

a) $\boldsymbol{\gamma t(P_m) = \frac{1}{2}m\ ; m = 4x\ , x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 4x = 4 \cdot 1 = 4$ sehingga $\gamma t(P_4) = \frac{1}{2}(4) = 2$ benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x = 4 \cdot 2 = 8$ sehingga $\gamma t(P_8) = \frac{1}{2}(8) = 4$ benar dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x = 4k$ sehingga $\gamma t(P_{4k}) = \frac{1}{2}(4k) = 2k$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k+1$ maka $m = 4x = 4(k+1) = 4k+4$ sehingga $\gamma t(P_{4k+4}) = \frac{1}{2}(4k+4) = 2k+2$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4x = 4k$ sehingga P_{4k} memiliki bilangan dominasi total sebelum dikontraksi $\gamma t(P_{4k}) = \frac{1}{2}(4k) = 2k$. Misal $V(P_{4k}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k}\}$, karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 4 titik misal titik $\{u, v, w, y\}$ maka $V(P_{4k+4}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k}, u, v, w, y\}$. Karena u terhubung langsung dengan t_{4k}, serta u, v, w, y didominasi total oleh v dan w, jadi setiap P_{4k} menjadi P_{4k+4} maka $\gamma t(P_{4k+4}) = \gamma t(P_{4k}) + 2 = 2k + 2$.

$\therefore$ **jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma t(P_m) = \frac{1}{2}m\,; m = 4x\,, x \in N}$

b) $\boldsymbol{\gamma t(P_m) = \frac{1}{2}(m+1),\ m = 4x+1}$ **dan** $\boldsymbol{m = 4x+3\,; x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 4x + 1 = (4 \cdot 1) + 1 = 5$ sehingga $\gamma t(P_5) = \frac{1}{2}(5+1) = 3$ benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x + 1 = (4 \cdot 2) + 1 = 9$ sehingga $\gamma t(P_9) = \frac{1}{2}(9+1) = 5$ benar dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x + 1 = 4k + 1$ sehingga $\gamma t(P_{4k+1}) = \frac{1}{2}(4k+1+1) = \frac{1}{2}(4k+2) = 2k+1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k+1$ maka $m = 4x + 1 = 4(k+1) + 1 = 4k + 4 + 1 = 4k + 5$ sehingga $\gamma t(P_{4k+5}) = \frac{1}{2}(4k+5+1) = \frac{1}{2}(4k+6) = 2k+3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4k + 1$ sehingga $\gamma t(P_{4k+1}) = 2k+1$. Misal $V(P_{4k+1}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+1}\}$, karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 4 titik misal titik $\{u, v, w, y\}$ maka $V(P_{4k+5}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+1}, u, v, w, y\}$. Karena u terhubung langsung dengan t_{4k+1}, serta u, v, w, y didominasi total oleh v dan w, jadi setiap P_{4k+1} menjadi P_{4k+5} maka $\gamma t(P_{4k+5}) = \gamma t(P_{4k+1}) + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3$.

Untuk $x = 1$ maka $m = 4x + 3 = (4 \cdot 1) + 3 = 7$ sehingga $\gamma t(P_7) = \frac{1}{2}(7+1) = 4$ benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x + 3 = (4 \cdot 2) + 3 = 11$ sehingga $\gamma t(P_{11}) = \frac{1}{2}(11+1) = 6$ benar dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x + 3 = 4k + 3$ sehingga $\gamma t(P_{4k+3}) = \frac{1}{2}(4k+3+1) =$

$\frac{1}{2}(4k+4)=2k+2$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x=k+1$ maka $m=4x+3=4(k+1)+3=4k+4+3=4k+7$ sehingga $\gamma t(P_{4k+7})=\frac{1}{2}(4k+7+1)=\frac{1}{2}(4k+8)=2k+4$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x=k$ maka $m=4k+3$ sehingga $\gamma t(P_{4k+3})=2k+2$. Misal $V(P_{4k+3})=\{t_1,t_2,t_3,t_4,\dots,t_{4k+3}\}$, karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 4 titik misal titik $\{u,v,w,y\}$ maka $V(P_{4k+7})=\{t_1,t_2,t_3,t_4,\dots,t_{4k+3},u,v,w,y\}$. Karena u terhubung langsung dengan t_{4k+3}, serta u,v,w,y didominasi total oleh v dan w, jadi setiap P_{4k+3} menjadi P_{4k+7} maka $\gamma t(P_{4k+7})=\gamma t(P_{4k+3})+2=2k+2+2=2k+4$.

∴ jadi terbukti bahwa $\gamma t(P_m)=\frac{1}{2}(m+1)$, $m=4x+1$ dan $m=4x+3$; $x\in N$

c) $\boldsymbol{\gamma t(P_m)=\frac{1}{2}(m+2),\ m=4x+2\ ;\ x\in N}$

Untuk $x=1$ maka $m=4x+2=(4\cdot 1)+2=6$ sehingga $\gamma t(P_6)=\frac{1}{2}(6+2)=4$ benar. Untuk $x=2$ maka $m=4x+2=(4\cdot 2)+2=10$ sehingga $\gamma t(P_{10})=\frac{1}{2}(10+2)=6$ benar dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x=k$ maka $m=4x+2=4k+2$ sehingga $\gamma t(P_{4k+2})=\frac{1}{2}(4k+2+2)=\frac{1}{2}(4k+4)=2k+2$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x=k+1$ maka $m=4x+2=4(k+1)+2=4k+4+2=4k+6$ sehingga$\gamma t(P_{4k+6})=\frac{1}{2}(4k+6+2)=\frac{1}{2}(4k+8)=2k+4$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x=k$ maka $m=4k+2$ sehingga $\gamma t(P_{4k+2})=2k+2$. Misal $V(P_{4k+2})=\{t_1,t_2,t_3,t_4,\dots,t_{4k+2}\}$, karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 4 titik misal titik $\{u,v,w,y\}$ maka

$V(P_{4k+6}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+2}, u, v, w, y\}$. Karena u terhubung langsung dengan t_{4k+2}, serta u, v, w, y didominasi total oleh v dan w, jadi setiap P_{4k+2} menjadi P_{4k+6} maka $\gamma t(P_{4k+6}) = \gamma t(P_{4k+2}) + 2 = 2k + 2 + 2 = 2k + 4$.

$\therefore$ **jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma t(P_m) = \frac{1}{2}(m+2),\ m = 4x + 2\,; x \in N}$

Teorema 2

Bilangan kontraksi sisi dominasi total sebelum dikontraksi dari graf lintasan P_m untuk $m \geq 5$ adalah

$$ct_{\gamma t}(P_m) = \begin{cases} 3\,, m = 4x\,; x \in N \\ 1\,, m = 4x + 1\ dan\ m = 4x + 2\,; x \in N \\ 2\,, m = 4x + 3\,; x \in N \end{cases}$$

Bukti Teorema 2

a) $\boldsymbol{ct_{\gamma t}(P_m) = 3\,, m = 4x\,;\ x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x = 4 \cdot 2 = 8$ sehingga$ct_{\gamma t}(P_8) = 3$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_8) = 3$, maka $\gamma t(P_8) = 4$ menjadi $\gamma' t(P_8) = 3$. Untuk $x = 3$ maka $m = 4x = 4 \cdot 3 = 12$ sehingga$ct_{\gamma t}(P_{12}) = 3$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{12}) = 3$, maka $\gamma t(P_{12}) = 6$ menjadi $\gamma' t(P_{12}) = 5$, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x = 4k$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k}) = 3$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{4k}) = 3$, maka $\gamma t(P_{4k}) = 2k$ menjadi $\gamma' t(P_{4k}) = 2k - 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 4x = 4(k+1) = 4k + 4$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+4}) = 3$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{4k+4}) = 3$, maka $\gamma t(P_{4k+4}) = 2k + 2$ menjadi $\gamma' t(P_{4k+4}) = 2k + 1$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4x = 4k$ sehingga

$ct_{\gamma t}(P_{4k}) = 3$. Misal $V(P_{4k}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k}\}$, kemudian untuk $V(P_{4k+4})$ dapat dibentuk dari $V(P_{4k})$ dengan menambah 4 titik yaitu u, v, w, y di kiri 2 titik dan di kanan 2 titik, sehingga menjadi $V(P_{4k+4}) = \{u, v, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k}, w, y\}$ maka dominasi total di P_{4k} tidak menjadi dominasi total di P_{4k+4}. Selain itu untuk $V(P_{4k+4})$ dapat juga dibentuk dari $V(P_{4k})$ dengan menambah 4 titik yaitu u, v, w, y di kanan , sehingga menjadi $V(P_{4k+4}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k,} u, v, w, y\}$ maka dominasi total di P_{4k} tetap menjadi dominasi total di P_{4k+4}. Dengan penambahan 4 titik ini tidak mempengaruhi bilangan kontraksi sisi dominasi (total), sehingga bilangan kontraksi dominasi (total) dari P_{4k+4} yaitu $ct_{\gamma t}(P_{4k+4}) = 3$.

∴ **jadi terbukti bahwa $ct_{\gamma t}(P_m) = 3$, $m = 4x$; $x \in N$**

b) $ct_{\gamma t}(P_m) = 1$, $m = 4x + 1$ dan $m = 4x + 2$; $x \in N$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 4x + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_5) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_5) = 1$, maka $\gamma t(P_5) = 3$ menjadi $\gamma' t(P_5) = 2$. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_9) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_9) = 1$, maka $\gamma t(P_9) = 5$ menjadi $\gamma' t(P_9) = 4$, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x + 1 = 4k + 1$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+1}) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{4k+1}) = 1$, maka $\gamma t(P_{4k+1}) = 2k + 1$ menjadi $\gamma' t(P_{4k+1}) = 2k$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 4x + 1 = 4(k + 1) + 1 = 4k + 5$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+5}) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{4k+5}) = 1$, maka $\gamma t(P_{4k+5}) = 2k + 3$ menjadi $\gamma' t(P_{4k+5}) = 2k + 2$.

Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4x + 1 = 4k + 1$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+1}) = 1$. Misal $V(P_{4k+1}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+1}\}$, kemudian untuk $V(P_{4k+5})$ dapat dibentuk dari $V(P_{4k+1})$ dengan menambah 4 titik yaitu u, v, w, y di kiri 2 titik dan di kanan 2 titik, sehingga menjadi $V(P_{4k+5}) = \{u, v, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+1}, w, y\}$ maka dominasi total di P_{4k+1} tidak menjadi dominasi total di P_{4k+5}. Selain itu untuk $V(P_{4k+5})$ dapat juga dibentuk dari $V(P_{4k+1})$ dengan menambah 4 titik yaitu u, v, w, y di kanan , sehingga menjadi $V(P_{4k+5}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+1,} u, v, w, y\}$ maka dominasi total di P_{4k+1} tetap menjadi dominasi total di P_{4k+5}. Dengan penambahan 4 titik ini tidak mempengaruhi bilangan kontraksi sisi dominasi (total), sehingga bilangan kontraksi dominasi (total) dari P_{4k+5} yaitu $ct_{\gamma t}(P_{4k+5}) = 1$.

Untuk $x = 1$ maka $m = 4x + 2 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_6) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_6) = 1$, maka $\gamma t(P_6) = 4$ menjadi $\gamma' t(P_6) = 3$. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x + 2 = 4 \cdot 2 + 2 = 10$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{10}) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{10}) = 1$, maka $\gamma t(P_{10}) = 6$ menjadi $\gamma' t(P_{10}) = 5$, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x + 2 = 4k + 2$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+2}) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{4k+2}) = 1$, maka $\gamma t(P_{4k+2}) = 2k + 2$ menjadi $\gamma' t(P_{4k+2}) = 2k + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 4x + 2 = 4(k + 1) + 2 = 4k + 6$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+6}) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{4k+6}) = 1$, maka $\gamma t(P_{4k+6}) = 2k + 4$ menjadi $\gamma' t(P_{4k+6}) = \frac{1}{2}\,(4k + 6) = 2k + 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $xx = k$ maka $m = 4x + 2 = 4k + 2$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+2}) = 1$. Misal

$V(P_{4k+2}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+2}\}$, kemudian untuk $V(P_{4k+6})$ dapat dibentuk dari $V(P_{4k+2})$ dengan menambah 4 titik yaitu u, v, w, y di kiri 2 titik dan di kanan 2 titik, sehingga menjadi $V(P_{4k+6}) = \{u, v, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+2}, w, y\}$ maka dominasi total di P_{4k+2} tidak menjadi dominasi total di P_{4k+6}. Selain itu untuk $V(P_{4k+6})$ dapat juga dibentuk dari $V(P_{4k+2})$ dengan menambah 4 titik yaitu u, v, w, y di kanan , sehingga menjadi $V(P_{4k+6}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+2,} u, v, w, y\}$ maka dominasi total di P_{4k+2} tetap menjadi dominasi total di P_{4k+6}. Dengan penambahan 4 titik ini tidak mempengaruhi bilangan kontraksi sisi dominasi (total), sehingga bilangan kontraksi dominasi (total) dari P_{4k+6} yaitu $ct_{\gamma t}(P_{4k+6}) = 1$.

∴ **jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{ct_{\gamma t}(P_m) = 1}$, $\boldsymbol{m = 4x + 1}$ **dan** $\boldsymbol{m = 4x + 2}$; $\boldsymbol{x \in N}$

c) $\boldsymbol{ct_{\gamma t}(P_m) = 2}$, $\boldsymbol{m = 4x + 3}$; $\boldsymbol{x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 4x + 3 = 4 \cdot 1 + 3 = 7$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_7) = 2$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_7) = 2$, maka $\gamma t(P_7) = 4$ menjadi $\gamma' t(P_7) = = 3$. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x + 3 = 4 \cdot 2 + 3 = 11$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{11}) = 2$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{11}) = 2$, maka $\gamma t(P_{11}) = 6$ menjadi $\gamma' t(P_{11}) = 5$, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x + 3 = 4k + 3$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+3}) = 2$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{4k+3}) = 2$, maka $\gamma t(P_{4k+1}) = 2k + 2$ menjadi $\gamma' t(P_{4k+3}) = 2k + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 4x + 3 = 4(k + 1) + 3 = 4k + 7$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+7}) = 2$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(P_{4k+7}) = 2$, maka $\gamma t(P_{4k+7}) = 2k + 4$ menjadi

$\gamma' t(P_{4k+7}) = 2k + 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4x + 3 = 4k + 3$ sehingga $ct_{\gamma t}(P_{4k+3}) = 2$. Misal $V(P_{4k+3}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+3}\}$, kemudian untuk $V(P_{4k+7})$ dapat dibentuk dari $V(P_{4k+3})$ dengan menambah 4 titik yaitu u, v, w, y di kiri 2 titik dan di kanan 2 titik, sehingga menjadi $V(P_{4k+7}) = \{u, v, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+3}, w, y\}$ maka dominasi total di P_{4k+3} tidak menjadi dominasi total di P_{4k+7}. Selain itu untuk $V(P_{4k+7})$ dapat juga dibentuk dari $V(P_{4k+3})$ dengan menambah 4 titik yaitu u, v, w, y di kanan , sehingga menjadi $V(P_{4k+7}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+3}, u, v, w, y\}$ maka dominasi total di P_{4k+3} tetap menjadi dominasi total di P_{4k+7}. Dengan penambahan 4 titik ini tidak mempengaruhi bilangan kontraksi sisi dominasi (total), sehingga bilangan kontraksi dominasi (total) dari P_{4k+7} yaitu $ct_{\gamma t}(P_{4k+7}) = 2$.

∴ **jadi terbukti bahwa $ct_{\gamma t}(P_m) = 2$, $m = 4x + 3$; $x \in N$**

Teorema 3

Bilangan dominasi total setelah dikontraksi dari graf lintasan P_m untuk $m \geq 5$ adalah

$$\gamma' t(P_m) = \begin{cases} \frac{1}{2}(m-2), m = 4x \,; x \in N \\ \frac{1}{2}(m-1), m = 4x + 1 \; dan \; m = 4x + 3 \,; x \in N \\ \frac{1}{2} m \,, m = 4x + 2 \,; x \in N \end{cases}$$

Bukti Teorema 3

a) $\boldsymbol{\gamma' t(P_m) = \frac{1}{2}(m-2),\; m = 4x \,; x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x = 4 \cdot 2 = 8$ sehingga $\gamma' t(P_8) = \frac{1}{2}(8 - 2) = 3$ benar. Untuk $x = 3$ maka $m = 4x = 4 \cdot 3 = 12$ sehingga $\gamma' t(P_{12}) = \frac{1}{2}(12 - 2) = 5$ benar dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x = 4k$ sehingga $\gamma' t(P_{4k}) = \frac{1}{2}(4k - 2) = 2k - 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 4x = 4(k + 1) = 4k + 4$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+4}) = \frac{1}{2}(4k + 4 - 2) = 2k + 1$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4x = 4k$ sehingga P_{4k} memiliki bilangan dominasi total setelah dikontraksi $\gamma' t(P_{4k}) = 2k - 1$. Misal $V(P_{4k}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k}\}$, karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 4 titik misal titik $\{u, v, w, y\}$ maka $V(P_{4k+4}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k}, u, v, w, y\}$. Karena u terhubung langsung dengan t_{4k}, serta u, v, w, y didominasi total oleh v dan w, jadi setiap P_{4k} menjadi P_{4k+4} maka $\gamma' t(P_{4k+4}) = \gamma' t(P_{4k}) + 2 = 2k - 1 + 2 = 2k + 1$.

$\therefore$ **jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma' t(P_m) = \frac{1}{2}(m - 2),\ m = 4x\ ; x \in N}$

b) $\boldsymbol{\gamma'(P_m) = \frac{1}{2}(m - 1),\ m = 4x + 1\ dan\ m = 4x + 3\ ; x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 4x + 1 = (4 \cdot 1) + 1 = 5$ sehingga $\gamma' t(P_5) = \frac{1}{2}(5 - 1) = 2$ benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x + 1 = (4 \cdot 2) + 1 = 9$ sehingga $\gamma' t(P_9) = \frac{1}{2}(9 - 1) = 4$ benar dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x + 1 = 4k + 1$sehingga $\gamma' t(P_{4k+1}) = \frac{1}{2}(4k + 1 -$

$1) = 2k$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 4x + 1 = 4(k + 1) + 1 = 4k + 4 + 1 = 4k + 5$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+5}) = \frac{1}{2}(4k + 5 - 1) = 2k + 2$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4k + 1$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+1}) = 2k$. Misal $V(P_{4k+1}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+1}\}$, karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 4 titik misal titik $\{u, v, w, y\}$ maka $V(P_{4k+5}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+1}, u, v, w, y\}$. Karena u terhubung langsung dengan t_{4k+1}, serta u, v, w, y didominasi total oleh v dan w, jadi setiap P_{4k+1} menjadi P_{4k+5} maka $\gamma' t(P_{4k+5}) = \gamma' t(P_{4k+1}) + 2 = 2k + 2$.

Untuk $x = 1$ maka $m = 4x + 3 = (4 \cdot 1) + 3 = 7$ sehingga $\gamma' t(P_7) = \frac{1}{2}(7 - 1) = 3$ benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x + 3 = (4 \cdot 2) + 3 = 11$ sehingga $\gamma' t(P_{11}) = \frac{1}{2}(11 - 1) = 5$ benar dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x + 3 = 4k + 3$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+3}) = \frac{1}{2}(4k + 3 - 1) = 2k + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 4x + 3 = 4(k + 1) + 3 = 4k + 4 + 3 = 4k + 7$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+7}) = \frac{1}{2}(4k + 7 - 1) = 2k + 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4k + 3$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+3}) = 2k + 1$. Misal $V(P_{4k+3}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+3}\}$, karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 4 titik misal titik $\{u, v, w, y\}$ maka $V(P_{4k+7}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+3}, u, v, w, y\}$. Karena u terhubung langsung dengan t_{4k+3}, serta u, v, w, y didominasi total oleh v dan w, jadi setiap P_{4k+3} menjadi P_{4k+7} maka $\gamma' t(P_{4k+7}) = \gamma' t(P_{4k+3}) + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3$.

$\therefore$ **jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma' t(P_m) = \frac{1}{2}(m - 1),\ m = 4x + 1\ dan\ m = 4x + 3\,; x \in N}$

c) $\boldsymbol{\gamma' t(P_m) = \frac{1}{2}m\,,\ m = 4x + 2\,; x \in N}$

Untuk $x = 1$ maka $m = 4x + 2 = (4 \cdot 1) + 2 = 6$ sehingga $\gamma' t(P_6) = \frac{1}{2}(6) = 3$benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 4x + 2 = (4 \cdot 2) + 2 = 10$ sehingga $\gamma t(P_{10}) = \frac{1}{2}(10) = 5$ benar dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 4x + 2 = 4k + 2$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+2}) = \frac{1}{2}(4k + 2) = 2k + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 4x + 2 = 4(k + 1) + 2 = 4k + 4 + 2 = 4k + 6$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+6}) = \frac{1}{2}(4k + 6) = 2k + 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 4k + 2$ sehingga $\gamma' t(P_{4k+2}) = 2k + 1$. Misal $V(P_{4k+2}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+2}\}$, karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 4 titik misal titik $\{u, v, w, y\}$ maka $V(P_{4k+6}) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{4k+2}, u, v, w, y\}$. Karena u terhubung langsung dengan t_{4k+2}, serta u, v, w, y didominasi total oleh v dan w, jadi setiap P_{4k+2} menjadi P_{4k+6} maka $\gamma' t(P_{4k+6}) = \gamma' t(P_{4k+2}) + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3$.

$\therefore$ **jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma' t(P_m) = \frac{1}{2}m\,,\ m = 4x + 2\,; x \in N}$

3.2 Pola Bilangan Dominasi Total dan Pola Bilangan Kontraksi Dominasi Total pada Graf Kipas $\boldsymbol{m}$ Titik $(\boldsymbol{F_m})$

a) Graf kipas satu titik (F_1)

F_1

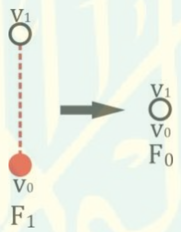
Gambar 3.4 Graf Kipas Satu Titik (F_1)

Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

$S_1 = \{v_0, v_1\}$ yaitu

maka v_0 ber-*adjacent* dengan v_1, v_1 ber-adjacent dengan v_0

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada F_1,



maka himpunan dominasi total dari F_1 yang semula dua titik dominasi total menjadi nol titik dominasi total atau tidak memiliki titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(F_1) = 1$ karena F_1 dengan $\gamma t(F_1) = 2$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(F_1) = 1$ menghasilkan F_0 dengan $\gamma(F_0) = 0$ atau $\gamma' t(F_1) = 0$ (bilangan dominasi total F_1 setelah dikontraksi).

b) Graf kipas dua titik (F_2)

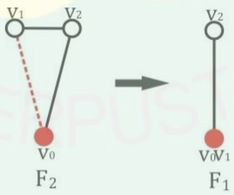
Gambar 3.5 Graf Kipas Dua Titik (F_2)

Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

$S_1 = \{v_0, v_2\}$ yaitu

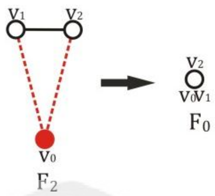
maka v_0 ber-*adjacent* dengan v_2, v_1 ber-*adjacent* dengan v_0 dan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_0.

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada F_2,



maka himpunan dominasi total dari F_2 yang semula dua titik dominasi total menjadi F_1 dengan himpunan dominasi dari F_1 adalah dua titik dominasi total.

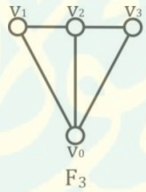
Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada F_2,



maka himpunan dominasi total dari F_2 yang semula dua titik dominasi total menjadi nol titik dominasi total atau tidak memiliki titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(F_2) = 2$ karena F_2 dengan $\gamma t(F_2) = 2$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(F_2) = 2$ menghasilkan F_0 dengan $\gamma(F_0) = 0$ atau $\gamma' t(F_2) = 0$ (bilangan dominasi total F_2 setelah dikontraksi).

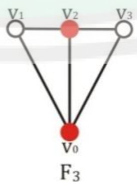
c) Graf kipas tiga titik (F_3)



Gambar 3.6 Graf Kipas Tiga Titik (F_3)

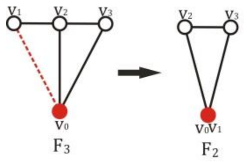
Dengan himpunan dominasi sebagai berikut :

$S_1 = \{v_0, v_2\}$ yaitu



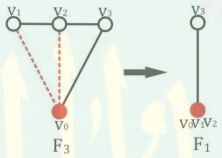
maka v_0 ber-*adjacent* dengan v_2, v_1 ber-*adjacent* dengan v_0 dan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_0, v_3 ber-*adjacent* dengan v_0 dan v_2

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada F_3,



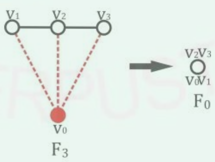
maka himpunan dominasi total dari F_3 yang semula dua titik dominasi total menjadi F_2 dengan himpunan dominasi dari F_2 adalah dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada F_3,



maka himpunan dominasi total dari F_3 yang semula dua titik dominasi total menjadi F_1 dengan himpunan dominasi dari F_1 adalah dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi tiga sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada F_3,



maka himpunan dominasi total dari F_3 yang semula dua titik dominasi total menjadi nol titik dominasi total atau tidak memiliki titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(F_3) = 3$ karena F_3 dengan $\gamma t(F_3) = 2$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(F_3) = 3$

menghasilkan F_0 dengan $\gamma(F_0) = 0$ atau $\gamma' t(F_3) = 0$ (bilangan dominasi total F_3 setelah dikontraksi).

Jika dilanjutkan dengan cara yang sama untuk graf kipas m titik (F_m), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.2 Pola Dominasi Total dan Kontraksi Sisi Dominasi Total pada Graf Kipas (F_m)

Nama graf	**Bilangan dominasi total sebelum dikontraksi $(\gamma t(F_m))$**	**Bilangan kontraksi sisi dominasi total $(ct_{\gamma t}(F_m))$**	**Bilangan dominasi total setelah dikontraksi $(\gamma' t(F_m))$**
F_1	2	1	0
F_2	2	2	0
F_3	2	3	0
F_4	2	4	0
F_5	2	5	0
F_6	2	6	0
F_7	2	7	0
F_8	2	8	0
F_9	2	9	0
F_{10}	2	10	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_m	2	m	0

Teorema 4

Bilangan dominasi total sebelum dikontraksi dari graf kipas F_m adalah

$$\gamma t(F_m) = 2, m \in N$$

Bukti Teorema 4

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $m = 1$ maka $\gamma t(F_1) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$ benar. Untuk $m = 2$ maka $\gamma t(F_2) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$ benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $m = k$ maka $\gamma t(F_k) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $m = k + 1$ maka

$\gamma t(F_{k+1}) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $m = k$ maka $\gamma t(F_k) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$. Misal $V(F_k) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$, kemudian untuk F_{k+1} dapat dibentuk dari F_k dengan penambahan satu titik, misal $V(F_{k+1}) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}\}$. Karena (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$ terhubung dengan semua titik di F_{k+1}, maka (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$ merupakan titik dominasi total pada F_{k+1}. Sehingga dengan penambahan satu titik ini tidak mempengaruhi jumlah titik dominasi total. Jadi terbukti bahwa $\gamma t(F_m) = 2,\ m \in N$.

Teorema 5

Bilangan kontraksi sisi dominasi total dari graf kipas F_m adalah

$$ct_{\gamma t}(F_m) = m\ , m \in N$$

Bukti Teorema 5

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $m = 1$ maka $ct_{\gamma t}(F_1) = 1$, karena dengan $ct_{\gamma t}(F_1) = 1$ maka $\gamma t(F_1) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$ menjadi $\gamma' t(F_1) = 0$ benar. Untuk $m = 2$ maka $ct_{\gamma t}(F_2) = 2$, karena dengan $ct_{\gamma t}(F_2) = 2$ maka $\gamma t(F_2) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$menjadi $\gamma' t(F_2) = 0$ benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $m = k$ maka $ct_{\gamma t}(F_k) = k$, karena dengan $ct_{\gamma t}(F_k) = k$ maka $\gamma t(F_k) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$menjadi $\gamma' t(F_k) = 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $m = k + 1$ maka $ct_{\gamma t}(F_{k+1}) = k + 1$, karena dengan $ct_{\gamma t}(F_{k+1}) = k + 1$ maka $\gamma t(F_{k+1}) = 2$ yaitu (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$ menjadi $\gamma' t(F_{k+1}) = 0$ benar. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $m = k$ maka $ct_{\gamma t}(F_k) = k$. Kemudian untuk F_{k+1} dapat dibentuk dari F_k dengan penambahan satu titik, karena untuk $m = 1$ maka $ct_{\gamma t}(F_1) = 1$, maka $ct_{\gamma t}(F_{k+1}) = ct_{\gamma t}(F_k) + 1 = k + 1$. Jadi terbukti bahwa $ct_{\gamma t}(F_m) = m\ , m \in N$.

Teorema 6

Bilangan dominasi total setelah dikontraksi dari graf kipas F_m adalah

$$\gamma' t(F_m) = 0, m \in N$$

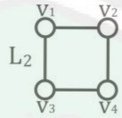
dengan n merupakan banyak titik dari graf kipas F_m

Bukti Teorema 6

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $m = 1$ maka $\gamma' t(F_1) = 0$ benar. Untuk $m = 2$ maka $\gamma' t(F_2) = 0$ benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $m = k$ maka $\gamma' t(F_k) = 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $m = k + 1$ maka $\gamma' t(F_{k+1}) = 0$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $m = k$ maka $\gamma' t(F_k) = 0$. Misal $V(F_k) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$, kemudian untuk F_{k+1} dapat dibentuk dari F_k dengan penambahan satu titik, misal $V(F_{k+1}) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}\}$. Karena (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$ terhubung dengan semua titik di F_{k+1}, maka (v_0, v_i) dengan $i = 1,2, \dots, k$ merupakan titik dominasi total pada F_{k+1}. Sehingga dengan penambahan satu titik ini tidak mempengaruhi jumlah titik dominasi total. Maka $\gamma' t(F_{k+1}) = \gamma' t(F_k) + 0 = 0$. Jadi terbukti bahwa $\gamma' t(F_m) = 0,\ m \in N$

3.3 Pola Bilangan Dominasi Total dan Pola Bilangan Kontraksi Dominasi Total pada Graf Tangga m Titik (L_m)

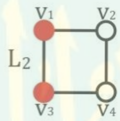
a) Graf Tangga dua titik (L_2)



Gambar 3.7 Graf Tangga Dua Titik (L_2)

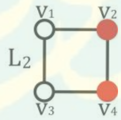
Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

$S_1 = \{v_1, v_3\}$ yaitu



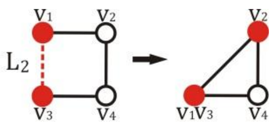
maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_3, v_2 ber-*adjacent* dengan v_1, v_3 ber-*adjacent* dengan v_1, v_4 ber-*adjacent* dengan v_3

$S_2 = \{v_2, v_4\}$ yaitu



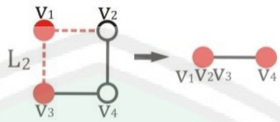
maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_4, v_3 ber-*adjacent* dengan v_4, v_4 ber-*adjacent* dengan v_2.

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_2,



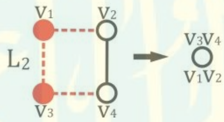
maka himpunan dominasi total dari L_2 yang semula dua titik dominasi menjadi dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_2,



maka himpunan dominasi total dari L_2 yang semula dua titik dominasi menjadi dua titik dominasi total.

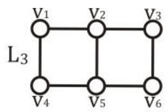
Dengan mengontraksi tiga sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_2,



maka himpunan dominasi total dari L_2 yang semula dua titik dominasi menjadi nol titik dominasi total atau tidak memiliki titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(L_2) = 3$ karena L_2 dengan $\gamma t(L_2) = 2$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(L_2) = 3$ menghasilkan graf baru dengan $\gamma t'(L_2) = 1$ (bilangan dominasi total L_2 setelah dikontraksi).

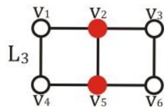
b) Graf Tangga tiga titik (L_3)



Gambar 3.8 Graf Tangga Tiga Titik (L_3)

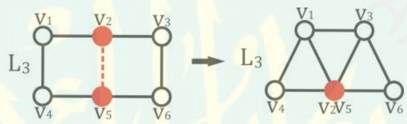
Dengan himpunan dominasi sebagai berikut :

$S_1 = \{v_2, v_5\}$ yaitu



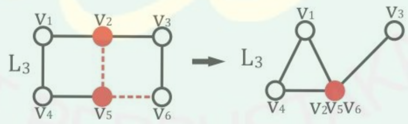
maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_5, v_3 ber-*adjacent* dengan v_2, v_4 ber-*adjacent* dengan v_5, v_5 ber-*adjacent* dengan v_2, v_6 ber-*adjacent* dengan v_5.

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_3,



maka himpunan dominasi total dari L_3 yang semula dua titik dominasi menjadi dua titik dominasi total.

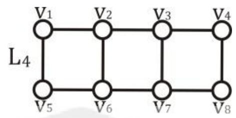
Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_3,



maka himpunan dominasi total dari L_3 yang semula dua titik dominasi menjadi satu titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(L_3) = 2$ karena L_3 dengan $\gamma t(L_3) = 2$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(L_3) = 2$ menghasilkan graf baru dengan $\gamma t'(L_3) = 1$ (bilangan dominasi total L_3 setelah dikontraksi).

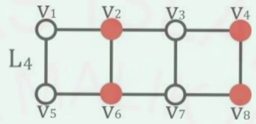
c) Graf tangga empat titik (L_4)



Gambar 3.9 Graf Tangga Empat Titik (L_4)

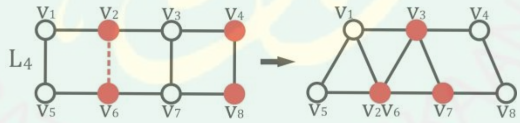
Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

$S_1 = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$



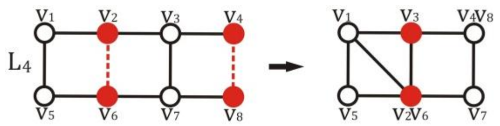
maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_6, v_3 ber-*adjacent* dengan v_2 dan v_4, v_4 ber-*adjacent* dengan v_8, v_5 ber-*adjacent* dengan v_6, v_6 ber-*adjacent* dengan v_2, v_7 ber-*adjacent* dengan v_6 dan v_8, , v_8 ber-*adjacent* dengan v_4.

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_4,



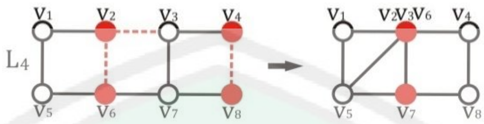
maka himpunan dominasi total dari L_4 yang semula empat titik dominasi total menjadi tiga titik dominasi total.

Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_4,



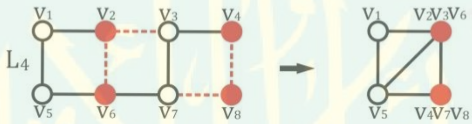
maka himpunan dominasi total dari L_4 yang semula empat titik dominasi total menjadi dua titik dominasi total.

Dengan mengontraksi tiga sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_4,



maka himpunan dominasi total dari L_4 yang semula empat titik dominasi total menjadi dua titik dominasi total.

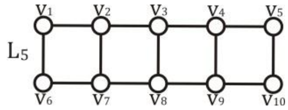
Dengan mengontraksi empat sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_4,



maka himpunan dominasi total dari L_4 yang semula empat titik dominasi total menjadi dua titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(L_4) = 1$ karena L_4 dengan $\gamma t(L_4) = 4$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(L_4) = 1$ menghasilkan graf baru dengan $\gamma t'(L_4) = 3$ (bilangan dominasi total L_4 setelah dikontraksi).

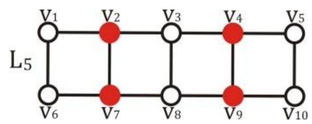
d) Graf tangga lima titik (L_5)



Gambar 3.10 Graf Tangga Lima Titik (L_5)

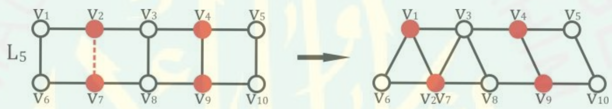
Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

$S_1 = \{v_2, v_4, v_7, v_9\}$ yaitu



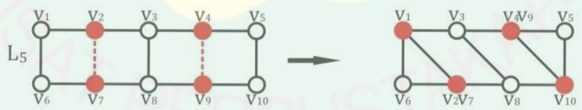
maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_7, v_3 ber-*adjacent* dengan v_2 dan v_4, v_4 ber-*adjacent* dengan v_9, v_5 ber-*adjacent* dengan v_4, v_6 ber-*adjacent* dengan v_7, v_7 ber-*adjacent* dengan v_2, v_8 ber-*adjacent* dengan v_7 dan v_9, v_9 ber-*adjacent* dengan v_4, v_{10} ber-*adjacent* dengan v_9.

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_5,



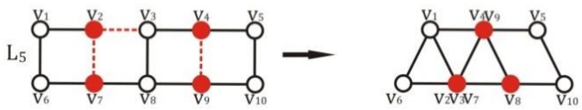
maka himpunan dominasi total dari L_5 yang semula empat titik dominasi total menjadi empat titik dominasi total.

Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_5,



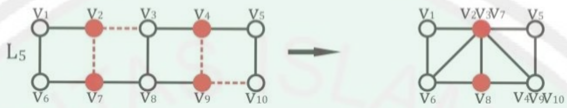
maka himpunan dominasi total dari L_5 yang semula empat titik dominasi total menjadi empat titik dominasi total.

Dengan mengontraksi tiga sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_5,



maka himpunan dominasi total dari L_5 yang semula empat titik dominasi total menjadi tiga titik dominasi total.

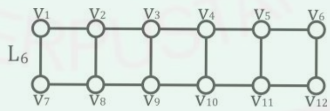
Dengan mengontraksi empat sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_5,



maka himpunan dominasi total dari L_5 yang semula empat titik dominasi total menjadi dua titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(L_5) = 3$ karena L_5 dengan $\gamma t(L_5) = 4$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(L_5) = 3$ menghasilkan graf baru dengan $\gamma t'(L_5) = 3$ (bilangan dominasi total L_5 setelah dikontraksi).

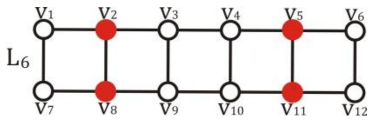
e) Graf tangga enam titik (L_6)



Gambar 3.11 Graf Tangga Enam Titik (L_6)

Dengan himpunan dominasi total sebagai berikut :

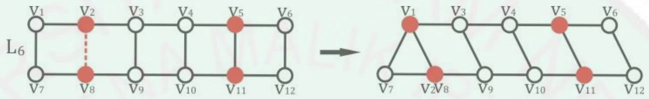
$S_1 = \{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$ yaitu



maka v_1 ber-*adjacent* dengan v_2, v_2 ber-*adjacent* dengan v_8, v_3 ber-*adjacent* dengan v_2, v_4 ber-*adjacent* dengan v_5, v_5 ber-*adjacent* dengan v_{11}, v_6 ber-

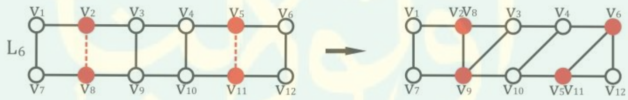
adjacent dengan v_5, v_7 ber-*adjacent* dengan v_8, v_8 ber-*adjacent* dengan v_2, v_9 ber-*adjacent* dengan v_8, v_{10} ber-*adjacent* dengan v_{11}, v_{11} ber-*adjacent* dengan v_{15}, v_{12} ber-*adjacent* dengan v_{11}.

Dengan mengontraksi satu sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_6,



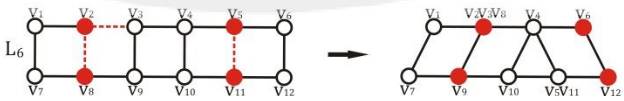
maka himpunan dominasi total dari L_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi empat titik dominasi total.

Dengan mengontraksi dua sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_6,



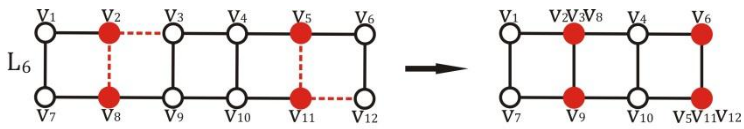
maka himpunan dominasi total dari L_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi empat titik dominasi total.

Dengan mengontraksi tiga sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_6,



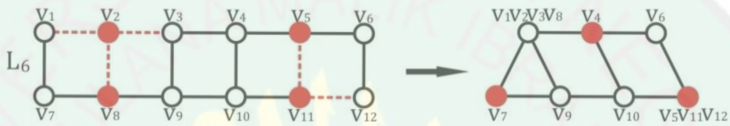
maka himpunan dominasi total dari L_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi empat titik dominasi total.

Dengan mengontraksi empat sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_6,



maka himpunan dominasi total dari L_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi empat titik dominasi total.

Dengan mengontraksi lima sisi yang ber-*incident* dengan titik dominasi total pada L_6,



maka himpunan dominasi total dari L_6 yang semula empat titik dominasi total menjadi tiga titik dominasi total.

Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi total adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi total, maka $ct_{\gamma t}(L_6) = 5$ karena L_6 dengan $\gamma t(L_6) = 4$ dan dikontraksi dengan $ct_{\gamma t}(L_6) = 5$ menghasilkan graf baru dengan $\gamma t'(L_6) = 3$ (bilangan dominasi total L_6 setelah dikontraksi).

Jika dilanjutkan dengan cara yang sama untuk graf tangga m titik (L_m), maka diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 3.3 Pola Dominasi Total dan Kontraksi Sisi Dominasi Total pada Graf Tangga (L_m)

Nama graf	Bilangan dominasi total sebelum dikontraksi $(\gamma t(L_m))$	Bilangan Kontraksi sisi dominasi total $(ct_{\gamma t}(L_m))$	Bilangan dominasi total setelah dikontraksi $(\gamma t'(L_m))$
L_2	2	1	1
L_3	2	2	1
L_4	4	1	3
L_5	4	3	3
L_6	4	5	3
L_7	6	1	5
L_8	6	3	5
L_9	6	5	5
L_{10}	8	1	7
L_{11}	8	3	7
L_{12}	8	5	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L_m	$m \geq 2 \wedge x \in N$ $\frac{2}{3}m, m = 3x$ $\frac{1}{3}(2m+4), m = 3x+1$ $\frac{1}{3}(2m+2), m = 3x+2$	$m \geq 4 \wedge x \in N$ $5, m = 3x$ $1, m = 3x+1$ $3, m = 3x+2$	$m \geq 2 \wedge x \in N$ $\frac{1}{3}(2m-3), m = 3x$ $\frac{1}{3}(2m+1), m = 3x+1$ $\frac{1}{3}(2m-1), m = 3x+2$

Teorema 7

Bilangan dominasi total sebelum dikontraksi dari graf tangga L_m untuk $m \geq 2$ adalah

$$\gamma t(L_m) = \begin{cases} \frac{2}{3}m, m = 3x; x \in N \\ \frac{1}{3}(2m+4), m = 3x+1; x \in N \\ \frac{1}{3}(2m+2), m = 3x+2; x \in N \end{cases}$$

Bukti Teorema 7

a) $\boldsymbol{\gamma t(L_m) = \frac{2}{3}m,\ m = 3x; x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 3x = 3 \cdot 1 = 3$ sehingga $\gamma t(P_3) = \frac{2}{3}(3) =$

2 benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x = 3 \cdot 2 = 6$ sehingga $\gamma t(P_6) = \frac{2}{3}(6) = 4$ benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x = 3k$ sehingga $\gamma t(P_{3k}) = \frac{2}{3}(3k) = 2k$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 3x = 3(k + 1) = 3k + 3$ sehingga $\gamma t(P_{3k+3}) = \frac{2}{3}(3k + 3) = 2k + 2$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x = 3k$ sehingga $\gamma t(P_{3k}) = 2k$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Jadi setiap P_{3k} menjadi P_{3k+3} maka $\gamma t(P_{3k+3}) = \gamma t(P_{3k}) + 2 = 2k + 2$.

∴ **jadi terbukti bahwa $\boldsymbol{\gamma t(L_m) = \frac{2}{3}m\,,\, m = 3x\,;\, x \in N}$**

b) $\boldsymbol{\gamma t(L_m) = \frac{1}{3}(2m + 4),\ m = 3x + 1\,;\, x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 3x + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ sehingga $\gamma t(P_4) = \frac{1}{3}(2 \cdot 4 + 4) = \frac{1}{3}(12) = 4$ benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ sehingga $\gamma t(P_7) = \frac{1}{3}(2 \cdot 7 + 4) = \frac{1}{3}(18) = 6$ benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x + 1 = 3k + 1$ sehingga $\gamma t(P_{3k+1}) = \frac{1}{3}(2(3k + 1) + 4) = \frac{1}{3}(6k + 6) = 2k + 2$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 3x + 1 = 3(k + 1) + 1 = 3k + 3 + 1 = 3k + 4$ sehingga $\gamma t(P_{3k+4}) = \frac{1}{3}(2(3k + 4) + 4) = \frac{1}{3}(6k + 12) = 2k + 4$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x + 1 = 3k + 1$ sehingga $\gamma t(P_{3k+1}) = 2k + 2$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah

3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Jadi setiap P_{3k+1} menjadi P_{3k+4} maka $\gamma t(P_{3k+4}) = \gamma t(P_{3k+1}) + 2 = 2k + 2 + 2 = 2k + 4$.

∴ **jadi terbukti bahwa $\boldsymbol{\gamma t(L_m) = \frac{1}{3}(2m + 4),\ m = 3x + 1\ ; x \in N}$**

c) $\boldsymbol{\gamma t(L_m) = \frac{1}{3}(2m + 2),\ m = 3x + 2\ ; x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 3x + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ sehingga $\gamma t(P_5) = \frac{1}{3}(2 \cdot 5 + 2) = \frac{1}{3}(12) = 4$ benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ sehingga $\gamma t(P_8) = \frac{1}{3}(2 \cdot 8 + 2) = \frac{1}{3}(18) = 6$ benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x + 2 = 3k + 2$ sehingga $\gamma t(P_{3k+2}) = \frac{1}{3}(2(3k + 2) + 2) = \frac{1}{3}(6k + 6) = 2k + 2$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 3x + 2 = 3(k + 1) + 2 = 3k + 3 + 2 = 3k + 5$ sehingga $\gamma t(P_{3k+5}) = \frac{1}{3}(2(3k + 5) + 2) = \frac{1}{3}(6k + 12) = 2k + 4$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x + 2 = 3k + 2$ sehingga $\gamma t(P_{3k+2}) = 2k + 2$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Jadi setiap P_{3k+2} menjadi P_{3k+5} maka $\gamma t(P_{3k+5}) = \gamma t(P_{3k+2}) + 2 = 2k + 2 + 2 = 2k + 4$.

∴ **jadi terbukti bahwa $\boldsymbol{\gamma t(L_m) = \frac{1}{3}(2m + 2),\ m = 3x + 2\ ; x \in N}$**

Teorema 8

Bilangan kontraksi sisi dominasi total sebelum dikontraksi dari graf tangga L_m untuk $m \geq 4$ adalah

$$ct_{\gamma t}(L_m) = \begin{cases} 5\,, m = 3x\,; x \in N \\ 1\,, m = 3x + 1\,; x \in N \\ 3\,, m = 3x + 2\,; x \in N \end{cases}$$

Bukti Teorema 8

a) $\boldsymbol{ct_{\gamma t}(L_m) = 5\,, m = 3x\,;\ x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x = 3 \cdot 2 = 6$ sehingga$ct_{\gamma t}(L_6) = 5$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_6) = 5$, maka $\gamma t(L_6) = 4$ menjadi $\gamma' t(L_6) = 3$. Untuk $x = 3$ maka $m = 3x = 3 \cdot 3 = 9$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_9) = 5$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_9) = 5$, maka $\gamma t(L_9) = 6$ menjadi $\gamma' t(L_9) = 5$, begitu seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x = 3k$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k}) = 5$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_{3k}) = 5$, maka $\gamma t(L_{3k}) = 2k$ menjadi $\gamma' t(L_{3k}) = 2k - 1$ Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 3x = 3(k + 1) = 3k + 3$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+3}) = 5$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_{3k+3}) = 5$, maka $\gamma t(L_{3k+3}) = 2k + 2$ menjadi $\gamma' t(L_{3k+3}) = 2k + 1$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x = 3k$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k}) = 5$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Dengan penambahan dua titik ini tidak mempengaruhi kontraksi sisi dominasi totalnya, sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+3}) = 5$.

∴ **jadi terbukti bahwa $ct_{\gamma t}(L_m) = 3$, $m = 3x$; $x \in N$**

b) $\boldsymbol{ct_{\gamma t}(L_m) = 1}$, $\boldsymbol{m = 3x + 1}$; $\boldsymbol{x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 3x + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_4) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_4) = 1$, maka $\gamma t(L_4) = 4$ menjadi $\gamma' t(L_4) = 3$. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_7) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_7) = 1$, maka $\gamma t(L_7) = 6$ menjadi $\gamma' t(L_7) = 5$, begitu seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x + 1 = 3k + 1$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+1}) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_{3k+1}) = 1$, maka $\gamma t(L_{3k+1}) = 2k + 2$ menjadi $\gamma' t(L_{3k+1}) = 2k + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 3x + 1 = 3(k + 1) + 1 = 3k + 4$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+4}) = 1$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_{3k+4}) = 1$, maka $\gamma t(L_{3k+4}) = 2k + 4$ menjadi $\gamma' t(L_{3k+4}) = 2k + 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x + 1 = 3k + 1$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+1}) = 1$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Dengan penambahan dua titik ini tidak mempengaruhi kontraksi sisi dominasi totalnya, sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+4}) = 1$.

∴ **jadi terbukti bahwa $ct_{\gamma t}(L_m) = 1$, $m = 3x + 1$; $x \in N$**

c) $\boldsymbol{ct_{\gamma t}(L_m) = 2}$, $\boldsymbol{m = 3x + 2}$; $\boldsymbol{x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 3x + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ sehingga

$ct_{\gamma t}(L_5) = 2$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_5) = 2$, maka $\gamma t(L_5) = 4$ menjadi $\gamma' t(L_5) = 3$. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_8) = 2$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_8) = 2$, maka $\gamma t(L_8) = 6$ menjadi $\gamma' t(L_8) = 5$, begitu seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x + 2 = 3k + 2$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+2}) = 2$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_{3k+2}) = 2$, maka $\gamma t(L_{3k+2}) = 2k + 2$ menjadi $\gamma' t(L_{3k+2}) = 2k + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 3x + 2 = 3(k + 1) + 2 = 3k + 5$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+5}) = 2$. Karena dengan $ct_{\gamma t}(L_{3k+5}) = 2$, maka $\gamma t(L_{3k+5}) = 2k + 4$ menjadi $\gamma' t(L_{3k+5}) = 2k + 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x + 2 = 3k + 2$ sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+2}) = 2$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Dengan penambahan dua titik ini tidak mempengaruhi kontraksi sisi dominasi totalnya, sehingga $ct_{\gamma t}(L_{3k+5}) = 2$.

$\therefore$ **jadi terbukti bahwa $ct_{\gamma t}(L_m) = 2$, $m = 3x + 2$; $x \in N$**

Teorema 9

Bilangan dominasi total setelah dikontraksi dari graf tangga L_m untuk $m \geq 2$ adalah

$$\gamma' t(P_m) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2m - 3), m = 3x \,; x \in N \\ \frac{1}{3}(2m + 1), m = 3x + 1 \,; x \in N \\ \frac{1}{3}(2m - 1), m = 3x + 2 \,; x \in N \end{cases}$$

Bukti Teorema 9

a) $\boldsymbol{\gamma' t(L_m) = \frac{1}{3}(2m-3)\ ,\ m = 3x\ ; x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 3x = 3 \cdot 1 = 3$ sehingga $\gamma' t(L_3) = \frac{1}{3}(6-3) = 1$ benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x = 3 \cdot 2 = 6$ sehingga $\gamma' t(L_6) = \frac{1}{3}(12-3) = 3$benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x = 3k$ sehingga $\gamma' t(L_{3k}) = \frac{1}{3}(6k-3) = 2k-1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k+1$ maka $m = 3x = 3(k+1) = 3k+3$ sehingga $\gamma' t(L_{3k+3}) = \frac{1}{3}(6k+6-3) = 2k+1$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x = 3k$ sehingga $\gamma' t(L_{3k}) = 2k-1$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Jadi setiap P_{3k} menjadi P_{3k+3} maka $\gamma' t(L_{3k+3}) = \gamma' t(L_{3k}) +\ 2 = 2k-1+2 = 2k+1$.

$\therefore$ **jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma' t(L_m) = \frac{1}{3}(2m-3)\ ,\ m = 3x\ ; x \in N}$

b) $\boldsymbol{\gamma' t(L_m) = \frac{1}{3}(2m+1),\ m = 3x+1\ ; x \in N}$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 3x+1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ sehingga $\gamma' t(L_4) = \frac{1}{3}(8+1) = 3$benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x+1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ sehingga $\gamma' t(L_7) = \frac{1}{3}(14+1) = 5$ benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x+1 = 3k+1$ sehingga $\gamma' t(L_{3k+1}) = \frac{1}{3}(6k+2+1) = 2k+1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 3x + 1 = 3(k + 1) + 1 = 3k + 3 + 1 = 3k + 4$ sehingga $\gamma' t(L_{3k+4}) = \frac{1}{3}(6k + 8 + 1) = 2k + 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x + 1 = 3k + 1$ sehingga $\gamma' t(L_{3k+1}) = 2k + 1$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Jadi setiap P_{3k+1} menjadi P_{3k+4} maka $\gamma' t(L_{3k+4}) = \gamma' t(L_{3k+1}) + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3$.

∴ **jadi terbukti bahwa $\gamma' t(L_m) = \frac{1}{3}(2m + 1),\ m = 3x + 1\,; x \in N$**

c) $\gamma' t(L_m) = \frac{1}{3}(2m - 1),\ m = 3x + 2\,; x \in N$

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan bukti dengan induksi matematika. Untuk $x = 1$ maka $m = 3x + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ sehingga $\gamma' t(L_5) = \frac{1}{3}(10 - 1) = 3$benar. Untuk $x = 2$ maka $m = 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ sehingga $\gamma' t(L_8) = \frac{1}{3}(16 - 1) = 5$ benar, dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $x = k$ maka $m = 3x + 2 = 3k + 2$ sehingga $\gamma' t(L_{3k+2}) = \frac{1}{3}(6k + 4 - 1) = 2k + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $x = k + 1$ maka $m = 3x + 2 = 3(k + 1) + 2 = 3k + 3 + 2 = 3k + 5$ sehingga $\gamma' t(L_{3k+5}) = \frac{1}{3}(6k + 10 - 1) = 2k + 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dari asumsi bahwa untuk $x = k$ maka $m = 3x + 2 = 3k + 2$ sehingga $\gamma' t(L_{3k+2}) = 2k + 1$. Karena setiap x bertambah 1 maka m bertambah 3, pada graf tangga jika m bertambah 3 berarti titik pada graf tangga bertambah 6, sehingga titik dominasi totalnya bertambah 2. Jadi setiap P_{3k+2} menjadi P_{3k+5} maka $\gamma' t(L_{3k+5}) = \gamma' t(L_{3k+2}) + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3$.

$\therefore$ **jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma t(L_m) = \frac{1}{3}(2m+2),\ m = 3x+2\ ;x \in N}$

3.4 Penjelasan Kesempurnaan Ciptaan Allah dengan Pendekatan Teori Graf

Manusia adalah makhluk ciptaan Allah yang paling sempurna sebagai manusia. Manusia bukan malaikat yang tak punya nafsu dan selalu berdzikir kepada Allah. Manusia juga bukan syetan yang kerjanya selalu menggoda dan menjerumuskan temannya ke dalam neraka. Tetapi manusia adalah sosok makhluk yang dilengkapi *qalb*, nafsu, insting, pikiran serta ilmu pengetahuan. Sehingga manusia diberikan kebebasan memilih oleh Allah, memilih sendiri tempat huninya, gaya huninya, dan menerima semua konsekuensi atas pilihannya. Oleh karena itu, manusia yang merupakan sebuah kesempurnaan yang sempurna seharusnya bersyukur kepada Allah dengan menjalankan segala perintah-Nya dan menjauhi segala larangan-Nya.

Karunia Allah yang diberikan kepada manusia berupa *qalb*, nafsu, insting, pikiran serta ilmu pengetahuan dapat digunakan untuk melakukan hal-hal yang positif dan bermanfaat, seperti menggunakannya untuk penelitian ilmiah. Dengan bekal pikiran dan ilmu pengetahuan tersebut, seseorang dapat menemukan hal-hal baru yang belum ditemukan orang lain.

Hal ini dapat diterapkan pada salah satu cabang matematika yaitu teori graf. Pada teori graf terdapat banyak pembahasan, diantaranya mengenai dominasi, dominasi total, dan kontraksi sisi. Setelah mempelajari pembahasan mengenai dominasi, dominasi total, dan kontraksi sisi kemudian dilakukan penelitian untuk mengetahui lebih jauh mengenai dominasi, dominasi total, dan kontraksi sisi dengan cara menerapkan ke beberapa graf terhubung sederhana seperti graf lintasan, graf kias, dan graf tangga. Ternyata baik dominasi, dominasi total, dan kontraksi sisi dari graf lintasan, graf kias, dan graf tangga membentuk suatu pola bilangan tertentu yang kemudian dapat dituliskan rumus umumnya.

Kesempurnaaan ciptaan Allah ternyata berkaitan dengan pembahasan pada teori graf, yaitu mengenai dominasi, dominasi total dan kontraksi sisi. Jika dilakukan penelitian mengenai dominasi, dominasi total dan kontraksi sisi dengan menerapkannya pada graf lintasan, graf kipas dan graf tangga maka akan diperoleh suatu pola bilangan tertentu yang kemudian dapat dituliskan sebagai rumus umumnya. Hal ini juga berlaku untuk penelitian mengenai kesempurnaan ciptaan Allah pada anatomi tubuh manusia. Ketika melakukan penelitian pada tubuh manusia, diperoleh hasil bahwa dengan melakukan perhitungan pada anatomi tubuh manusia menunjukkan angka ajaib yaitu 1,618. Hal ini menunjukkan bahwa dalam tubuh manusia juga dapat membentuk suatu pola bilangan tertentu yaitu 1,618. Adapun jika penelitian ini dilakukan pada ciptaan-ciptaan Allah yang lain di alam semesta ini, kemungkinan akan muncul suatu pola bilangan yang lain.

Pola bilangan yang diperoleh dari penelitian mengenai dominasi, dominasi total dan kontraksi sisi yang diterapkan pada graf lintasan, graf kipas dan graf tangga, kemudian pola bilangan yang diperoleh dari penelitian pada anatomi tubuh manusia, maupun pola bilangan yang diperoleh dari penelitian pada ciptaan Allah yang lain menunjukkan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu di alam semesta dengan kesempurnaan, keindahan serta perhitungan yang teliti. Sehingga segala sesuatu di alam semesta ini sudah ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya. Sebagaimana firman Allah dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

"*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*". (Q.S Al Qamar/54: 49).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan, dapat disimpulkan bahwa dengan cara mengontraksi sisi himpunan dominasi total dapat didapatkan rumusan sebagai berikut :

1. Pola bilangan dominasi total dan bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf lintasan (P_m)

a) $$\gamma t(P_m) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\,,\ \ m = 4x\,; x \in N\ \wedge\ \text{untuk}\, m \geq 5 \\ \frac{1}{2}(m+1), m = 4x+1 \text{ dan }\ m = 4x+3\,; x \in N\ \wedge\ \text{untuk}\, m \geq 5 \\ \frac{1}{2}(m+2),\ \ m = 4x+2\,; x \in N\ \wedge\ \text{untuk}\, m \geq 5 \end{cases}$$

b) $$ct_{\gamma t}(P_m) = \begin{cases} 3\,,\ \ m = 4x\,; x \in N\ \wedge\ \text{untuk}\, m \geq 5 \\ 1\,,\ \ m = 4x+1\ dan\ \ m = 4x+2\,; x \in N\ \wedge\ \text{untuk}\, m \geq 5 \\ 2\,,\ \ m = 4x+3\,; x \in N\ \wedge\ \text{untuk}\, m \geq 5 \end{cases}$$

c) $$\gamma' t(P_m) = \begin{cases} \frac{1}{2}(m-2), m = 4x\,; x \in N \\ \frac{1}{2}(m-1), m = 4x+1\ dan\ \ m = 4x+3\,; x \in N \\ \frac{1}{2}m\,, m = 4x+2\,; x \in N \end{cases}$$

2. Pola bilangan bilangan dominasi total dan bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf kipas (F_m)

a) $\gamma t(F_m) = 2\ \ m \in N$

b) $ct_{\gamma t}(F_m) = m\,, m \in N$

c) $\gamma' t(F_m) = 0,\ \ m \in N$

3. Pola bilangan dominasi total dan bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf tangga (L_m)

$$\text{a) } \gamma t(L_m) = \begin{cases} \frac{2}{3}m\,, m = 3x\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 2 \\ \frac{1}{3}(2m+4), \ m = 3x+1\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 2 \\ \frac{1}{3}(2m+2), \ m = 3x+2\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } ct_{\gamma t}(L_m) = \begin{cases} 5\,, m = 3x\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 4 \\ 1\,, m = 3x+1\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 4 \\ 3\,, \ m = 3x+2\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \gamma' t(P_m) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2m-3), m = 3x\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 2 \\ \frac{1}{3}(2m+1), m = 3x+1\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 2 \\ \frac{1}{3}(2m-1), \ m = 3x+2\,; x \in N \ \wedge \ \text{untuk}\, m \geq 2 \end{cases}$$

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian mengenai bilangan kontraksi sisi dominasi total pada graf terhubung sederhana ini menggunakan program komputer, sehingga dapat memudahkan untuk mencari polanya. Selain itu, dapat mengembangkan untuk mencari bilangan kontraksi dominasi dan dominasi total pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, Al 'Allaamah Asy-Syaikh. *Tafsir Juz 'Amma Karimirrahman*. Solo: At-Tibyan

Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al Qur'an Al Aisar (Jilid 7)*. Jakarta : Darus Sunnah

Al Qarni, Aidh. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press

Asy-Ahiddieqy, Teungku Muhammad Hasbi. 2000. *Tafsir Al Qur'anul Majid An-Nur*. Semarang : Pustaka Rizki Putra

Bondy, J.A and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory With Applications*. New york: Elsiever Science Publishing Co, Inc

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph* 2nd *Edition.* California : Wadsworth. Inc.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph Third Edition.* Chapman & Hall/CRC

Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Theory Electronic Edition 2005*. New York : Springer-Verlag Heidelberg

Gallian, Joseph A. 2009. *A Dynamic Survey og Graph Labeling. Electronic Journal of Combinatorics.* (Online), Jilid 16, No.1, (http://www1.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf , diakses 18 April 2013)

Grimaldi, Ralph. 1985. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. RHI

Hsu, Lih-Hsing and Cheng Kuan-Lin. 2008. *Graph Theory and Interconnection Networks*. New York: CRC Press

Huang, Jia dan Jun-Ming Xu. *Domination and Total Domination Contraction Numbers of Graphs*. Jurnal Tidak Diterbitkan. Department of Mathematics University of Sciene and Technology of China

Jaelani, Syekh 'Abdul Qadir. 2011. *Tafsir Al-Jaelani / Syekh 'Abdul Qadir Al Jaelani*. Jakarta : Sahara

Purwanto, 1998. *Teori Graph*. Malang: IKIP Malang

Lipschutz, Seymour dan Lipson, Marc Lars. 2002. *Matematika Diskrit 2*. Jakarta: Salemba Tentika

Muhammad, Syaikh. *Tafsir Juz ‘Amma*. Solo : At-Tibyan

Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*. Bandung: Informatika Bandung

Soltankhah, Nasrin. 2010. *Results on Total Domination and Total Restrained Domination in Grid Graphs. Internasional Mathematical Forum.* (Online), Jilid 5, No.7, (http://www.m-hikari.com/.../soltankhahIMF5-8-2010.pdf , diakses 24 Juni 2013)

Tsulutsy, Fatanur B. 2009. *Menentukan Bilangan Pewarnaan* ë −*Backbone pada Graf Split*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang, Malang.

Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach*: *A first Course in Discrete Mathematic.* New York : John Wiley & Sons, Inc.