

**METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON
PADA PENYELESAIAN MODEL OSILASI VERTIKAL DAWAI**

SKRIPSI

**OLEH
SRI SASI YUNI NURHAYATI
NIM. 11610047**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON
PADA PENYELESAIAN MODEL OSILASI VERTIKAL DAWAI**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Sri Sasi Yuni Nurhayati
NIM. 11610047**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON
PADA PENYELESAIAN MODEL OSILASI VERTIKAL DAWAI**

SKRIPSI

Oleh
Sri Sasi Yuni Nurhayati
NIM. 11610047

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 13 Mei 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON
PADA PENYELESAIAN MODEL OSILASI VERTIKAL DAWAI**

SKRIPSI

Oleh
Sri Sasi Yuni Nurhayati
NIM. 11610047

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sri Sasi Yuni Nurhayati

NIM : 11610047

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Metode Adams Bashforth Moulton pada Penyelesaian Model
Osilasi Vertikal Dawai

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Mei 2015
Yang membuat pernyataan,

Sri Sasi Yuni Nurhayati
NIM. 11610047

MOTO

Perjuanganmu di jalan Allah tak akan pernah sia-sia



PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur, skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Ayahanda Dono Sasmito

Ibunda Sri Harlin

Adik Srimin Dwi Marcelani

Adik Sri Agustin Tria Sasmi



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd dan Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi.
5. Bapak dan Ibu dosen Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan bimbingan selama belajar.
6. Ayahanda Dono Sasmito dan Ibunda Sri Harlin dengan segala ketulusan doa dan usaha beliau yang tak pernah lelah memperjuangkan pendidikan dan

- segala kebutuhan penulis. Adik Srimin Dwi Marcelani dan Sri Agustin Tria Sasmi yang selalu mendukung dan memberikan semangatnya kepada penulis.
7. Ibunda Hj. Zubaidah Nashrulloh yang senantiasa membimbing dan memberi asupan semangat untuk selalu belajar menjadi insan yang lebih baik.
 8. Seluruh sahabat-sahabati “Integral” Matematika khususnya angkatan 2011 yang telah memberikan dukungan dan semangat luar biasa dalam mengarungi “roda pembelajaran”.
 9. Seluruh sahabat-sahabati pengurus Himpunan Mahasiswa Jurusan “Integral” Matematika 2012-2013 serta seluruh sahabat-sahabati pengurus Dewan Eksekutif Mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi 2014.
 10. Seluruh sahabat-sahabati kader Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia Rayon “Pencerahan” Galileo Komisariat “Sunan Ampel” Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
 11. Seluruh keluarga besar HIMMABA (Himpunan Mahasiswa Malang Alumni Bahrul Ulum) khususnya angkatan 2011.
 12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut membantu dan memberikan semangat dalam penyelesaian skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
ملخص	xviii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Riset Terdahulu	9
2.2 Masalah Osilasi Vertikal	19
2.3 Analisis Model Matematika Vibrasi Vertikal Dawai	21
2.4 Analisis Numerik dengan Metode Adams Bashforth Moulton	26
2.5 Kajian Keagamaan	38
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Model Osilasi Vertikal Dawai	41

3.2 Solusi Numerik Model Osilasi Vertikal Dawai dan Perbandingannya	43
3.2.1 Solusi Numerik untuk $\theta(t)$	45
3.2.2 Solusi Numerik untuk $y(t)$	51
3.2.3 Perbandingan Solusi Numerik Model Osilasi Vertikal Dawai	58
3.3 Kajian Keagamaan	60
3.4 Simulasi dan Interpretasi Solusi Numerik dengan Variasi Parameter	61
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	66
4.2 Saran	67
DAFTAR PUSTAKA	68
LAMPIRAN-LAMPIRAN	
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Solusi Numerik dan Analitik untuk $y(t)$	16
Tabel 2.2 Solusi Numerik dan Analitik untuk $\theta(t)$	18
Tabel 3.1 Hasil Numerik untuk θ_1 dan θ_2 dengan Menggunakan Metode Runge Kutta	47
Tabel 3.2 Hasil Numerik untuk y dan x dengan Menggunakan Metode Runge Kutta	53



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Model Sederhana pada Pusat Rentang	9
Gambar 2.2	Penampang Horizontal Rentang Pusat	10
Gambar 2.3	Partisi Bagian Balok Sebesar dm	12
Gambar 2.4	Skema Simulasi untuk Pergerakan Vertikal dan Respon dari Jembatan atau Dawai, $y(0) = 14$	15
Gambar 2.5	Pergerakan Torsi untuk $K = 0, f(t) = 0.05 \sin 1.3t$	18
Gambar 2.6	Gerak Harmonis Teredam	20
Gambar 2.7	Translasi Tak-Terdistorsi dari Sebuah Fungsi $\xi(x)$	22
Gambar 2.8	Rambatan Tak-Terdistorsi Sebuah Gelombang (a) Ke Kanan, dan (b) Ke Kiri. (c) Gelombang Merambat pada Arah Berlawanan Menghasilkan Hasil-Hasil Tambahan yang Gelombangnya Mengganggu	23
Gambar 2.9	Gelombang Selaras	23
Gambar 2.10	Gelombang Selaras Merambat ke Kanan. Gelombang Memajukan Jarak λ dalam Waktu P	25
Gambar 3.1	Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,2]$ dengan θ_1 Bergerak Naik dari 1.2 sampai 1.261	50
Gambar 3.2	Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,2]$ dengan θ_2 Bergerak Naik dari 0 sampai 0.07	50
Gambar 3.3	Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,5]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dari 1.2 sampai 1.38	50
Gambar 3.4	Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,5]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun di sekitar 0.075 sampai -0.009	50
Gambar 3.5	Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,25]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dari 1.2 sampai 1.875	50
Gambar 3.6	Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,25]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun di Sekitar 0.075 sampai -0.006	50
Gambar 3.7	Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,200]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dari 1.2 sampai 4.51	51
Gambar 3.8	Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,200]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun di Sekitar 0.075 sampai -0.035	51
Gambar 3.9	Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,1800]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dari 1.2 sampai 5.03 dan Mulai Stabil di Persekitaran Titik 5	51
Gambar 3.10	Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,1800]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun di Sekitar -0.039 sampai 0.075 dan Pergerakan dari θ_2 Mulai Stabil di Antara -0.039 sampai 0.039	51

Gambar 3.11 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,2]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara 0 sampai -3.99	56
Gambar 3.12 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,2]$ dengan y Mulai Bergerak Turun dari 14 sampai 8.37	56
Gambar 3.13 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,5]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara -3.99 sampai 3.99	56
Gambar 3.14 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,5]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara 6.01 sampai 14	56
Gambar 3.15 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,20]$ dengan x Mulai Bergerak Naik Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil	57
Gambar 3.16 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,20]$ dengan y Mulai Bergerak Naik Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil	57
Gambar 3.17 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,200]$ dengan x Mulai Bergerak Naik Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil	57
Gambar 3.18 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,200]$ dengan y Mulai Bergerak Naik Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil	57
Gambar 3.19 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,1500]$ dengan x Mulai Bergerak Naik Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil Mendekati Titik 0 (Asimtotik)	57
Gambar 3.20 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,1500]$ dengan y Mulai Bergerak Naik Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil Mendekati Titik 10	57
Gambar 3.21 Pergerakan Torsi untuk $K = 0$, $f(t) = 0.05 \sin 1.3t$	60
Gambar 3.22 Grafik Sistem Persamaan (3.8) Saat $t = [0,1800]$ dengan $\theta_1(0) = 1.2$, $\theta_2(0) = 0$, $K = 0$, $\delta_1 = 0.01$, $m = 6000$, dan $f(t) = 0.05 \sin 1.3t$	60
Gambar 3.23 Skema Simulasi untuk Pergerakan Vertikal dan Respon dari Dawai, $y(0) = 14$)	60
Gambar 3.24 Grafik dari Sistem Persamaan (3.10) Saat $t = [0,1500]$ dengan $x(0) = 0$, $y(0) = 14$, $K = 3000$, $\delta_2 = 0.01$, dan $m = 6000$	60
Gambar 3.25 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,2]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara 1.2 sampai -1.2	62
Gambar 3.26 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,2]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara -4.12 sampai 4.12	62
Gambar 3.27 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,5]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara 1.2 sampai -1.2	63
Gambar 3.28 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,5]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara -4.12 sampai 4.12	63
Gambar 3.29 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,20]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Kecil	63

Gambar 3.30	Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,20]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Kecil	63
Gambar 3.31	Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,200]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Kecil	63
Gambar 3.32	Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,200]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Kecil	63
Gambar 3.33	Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0,1800]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Stabil	63
Gambar 3.34	Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0,1800]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Stabil	63
Gambar 3.35	Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,2]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun	64
Gambar 3.36	Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,2]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun	64
Gambar 3.37	Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,5]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Sedikit Mengecil	64
Gambar 3.38	Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,5]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Sedikit Mengecil	64
Gambar 3.39	Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,20]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil	65
Gambar 3.40	Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,20]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil	65
Gambar 3.41	Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,200]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil	65
Gambar 3.42	Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,200]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil	65
Gambar 3.43	Grafik $x(t)$ Saat $t = [0,1500]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil Asimtotik Mendekati Titik 0	65
Gambar 3.44	Grafik $y(t)$ Saat $t = [0,1500]$ dengan y Mulai Bergerak Naik Turun dan Amplitudo Semakin Kecil Mendekati 0	65

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai benda-benda bergetar atau berosilasi. Salah satu contohnya adalah dawai saat dipetik atau diregangkan akan bergerak naik dan turun (vertikal) kemudian akan kembali ke posisi setimbangnya. Hal ini menandakan bahwa sebuah dawai akan melakukan beberapa getaran setiap detiknya. Sejumlah getaran yang dilakukan setiap detiknya disebut frekuensi getaran. Sehingga dapat dikatakan bahwa frekuensi adalah banyaknya getaran yang terjadi setiap satuan waktu atau dapat disimbolkan dengan $f = \frac{n}{t}$ dengan f adalah frekuensi, n adalah banyaknya getaran, dan t adalah waktu melakukan getaran. Sedangkan untuk melakukan satu kali getaran dawai membutuhkan waktu tertentu. Waktu yang dibutuhkan untuk sekali getaran disebut periode atau dapat disimbolkan dengan $T = \frac{t}{n}$ (Fikri, 2011).

Suatu dawai yang berosilasi karena adanya gangguan maka lambat laun pergerakan dari osilasi tersebut akan semakin kecil (pelan) dan kemudian kembali ke titik setimbangnya (berhenti). Hal ini dinamakan gerak harmonis teredam. Giancoli (1998) menyatakan bahwa “redaman biasanya disebabkan oleh hambatan udara dan gesekan internal pada sistem yang berosilasi”.

Beberapa parameter yang mempengaruhi pergerakan dari osilasi vertikal dawai antara lain lendutan (*downward distance*) pada waktu t , sudut dawai terhadap bidang horizontal pada waktu t , konstanta pegas, massa dawai, konstanta redaman, kekuatan eksternal pada waktu t , dan gaya gravitasi. Penelitian

terdahulu untuk model osilasi vertikal dawai ini dilakukan oleh McKenna dan Moore (2000), dalam jurnal penelitiannya penulis menekankan pada persamaan untuk pergerakan torsi sepanjang bidang terhadap pusat dawai. Jurnal ini menggambarkan dinamika pergerakan torsi dawai yang dinyatakan sebagai $\ddot{\theta} = -\frac{6K}{m}\cos\theta\sin\theta - \delta_1\dot{\theta} + f(t)$ dengan $\theta(t)$ menyatakan sudut horizontal di waktu t . Sistem dinamik dari pergerakan vertikal dawai dinyatakan sebagai $\ddot{y} = -\frac{2K}{m}y - \delta_2\dot{y} + g(t)$ dengan $y(t)$ menyatakan *downward distance* pada waktu t , K adalah konstanta spring, m adalah massa, δ adalah parameter/nilai redaman, dan $g(t)$ adalah gaya gravitasi.

Persamaan di atas merupakan persamaan diferensial biasa orde kedua. Urifah (2008) menyatakan bahwa metode penyelesaian persamaan diferensial biasa secara numerik terbagi menjadi dua, yaitu metode satu langkah dan metode banyak langkah. Metode yang termasuk satu langkah adalah metode deret Taylor, metode Euler, metode Runge-Kutta, dan metode Heun. Sedangkan metode yang termasuk banyak langkah adalah metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM), metode Milne-Simpson, dan metode Hamming.

Fikriyah (2008) menyatakan pada metode banyak langkah (*multistep*) dikenal beberapa metode antara lain metode Adams, metode Milne, dan metode Hamming. Penelitian ini difokuskan pada penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Adams. Metode Adams yang digunakan adalah metode Adams Bashforth orde 4 sebagai *predictor* (prediksi) dan Adams Moulton orde 4 sebagai *corrector* (pembenar) untuk menyelesaikan persamaan matematika.

Adanya metode-metode tersebut diharapkan dapat menghasilkan solusi numerik dengan *error* atau galat sekecil mungkin dan mendekati nilai yang nyata

atau memiliki tingkat ketelitian yang relatif tinggi dan mudah diprogramkan. Menurut Munir (2010) metode *predictor-corrector* dikatakan ideal jika galat per langkah *predictor* mempunyai orde yang sama dengan galat per langkah *corrector*. Sehingga dapat dikatakan metode ini relatif teliti untuk digunakan. Oleh karena itu, dalam penulisan skripsi ini penulis menggunakan metode Adams Bashforth Moulton sebagai *predictor-corrector* dalam menyelesaikan persamaan matematis dari osilasi vertikal dawai.

Penelitian terkait persamaan osilasi vertikal dawai ini diharapkan dapat diaplikasikan pada permasalahan kehidupan sehari-hari, misalnya pada jembatan, kabel penghubung tiang listrik, dan jembatan rel kereta api. Sehingga ilmu matematika tidak hanya dipahami sebagai suatu hal yang menakutkan namun nyata fungsi dalam kehidupan sehari-hari. Berdasarkan surat al-Kahfi ayat 54 difirmankan bahwa:

وَلَقَدْ صَرَّفْنَا فِي هَذَا الْقُرْآنِ لِلنَّاسِ مِنْ كُلِّ مَثَلٍ ۚ وَكَانَ الْإِنْسَانُ أَكْثَرِ شَيْءٍ جَدَلًا ﴿٥٤﴾

“Dan Sesungguhnya kami Telah mengulang-ulangi bagi manusia dalam Al Quran Ini bermacam-macam perumpamaan. dan manusia adalah makhluk yang paling banyak membantah” (QS. Al-Kahfi: 54).

Ayat di atas merupakan pernyataan Allah Swt. tentang kandungan al-Quran yang mengingatkan manusia dengan berbagai perumpamaan secara berulang-ulang. Apabila makna ayat tersebut diperluas dengan peristiwa atau gejala fisis bahwa Allah menciptakan alam semesta dengan wujudnya atau materinya yang selalu bergerak secara berulang-ulang. Gerak berulang dalam ruang berdimensi satu sering disebut dengan getaran atau osilasi.

Berdasarkan uraian tersebut maka penulis mengangkat judul “*Metode Adams Bashforth Moulton pada Penyelesaian Model Osilasi Vertikal Dawai*” sebagai judul pada penelitian ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, rumusan masalah penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis model osilasi vertikal dawai?
2. Bagaimana penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton dan perbandingannya dengan solusi dari penelitian sebelumnya?
3. Bagaimana simulasi dan interpretasi solusi numerik untuk model osilasi vertikal dawai dengan beberapa parameter?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan uraian latar belakang dan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah

1. Mengetahui analisis model osilasi vertikal dawai.
2. Mengetahui penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton dan perbandingannya dengan solusi dari penelitian sebelumnya.
3. Mengetahui simulasi dan interpretasi solusi numerik untuk model osilasi vertikal dawai dengan beberapa parameter.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan skripsi ini lebih terstruktur, maka batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Dawai tidak pernah kehilangan ketegangan, sehingga $y \pm l \sin \theta \geq 0$ (McKenna dan Moore, 2000).
2. Analisis numerik dalam skripsi ini menggunakan metode Adams Bashforth Moulton untuk menghitung θ_i dan y_i dengan $i = 4,5,6, \dots$, dan menggunakan metode Runga-Kutta orde empat untuk membangkitkan nilai sudut θ_i dan lendutan y_i dengan $i = 1,2,3$.
3. Nilai awal pada sistem persamaan $\theta(t)$ adalah $\theta_1(0) = 1.2$, $\theta_2(0) = 0$ dan pada sistem persamaan $y(t)$ adalah $x(0) = 14$, $y(0) = 0$, dengan $m = 6000$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$, dan $g = 10$.
4. Solusi dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton dibandingkan dengan solusi secara Runga Kutta yang dikerjakan oleh Ohene, dkk (2012).
5. Parameter yang mempengaruhi pergerakan dari osilasi vertikal dawai mengacu pada jurnal karya McKenna dan Moore (2000) yaitu:

$y(t)$ = lendutan pada waktu t

$\theta(t)$ = sudut batang dengan bidang horizontal pada waktu t

K = konstanta pegas

m = Massa

ℓ = setengah dari lebar rentang (span)

δ_1, δ_2 = konstanta redaman

$f(t)$ = kekuatan eksternal pada waktu t

g = gaya gravitasi

1.5 Manfaat Penelitian

Karya penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat untuk menambah khazanah keilmuan tentang penerapan metode Adams Bashforth Moulton khususnya dalam menemukan solusi numerik pada penyelesaian model osilasi vertikal dawai.

1.6 Metode Penelitian

Berdasarkan uraian di atas, penyelesaian dari model osilasi vertikal dawai diselesaikan secara numerik dengan metode penelitian sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan dari osilasi vertikal dawai menjadi dua buah persamaan diferensial orde kedua sebagai akibat dari batasan $y \pm l \sin \theta \geq 0$.
2. Mereduksi persamaan diferensial orde kedua menjadi sistem persamaan diferensial orde pertama.
3. Formulasi numerik, yakni mencari solusi numerik dari persamaan-persamaan tersebut dengan metode Adams Bashforth Moulton.
4. Membandingkan solusi menggunakan metode Adams Bashforth Moulton dengan solusi secara Runga Kutta.
5. Simulasi dan pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Demi mempermudah pembaca dalam memahami penelitian ini, maka penulis membagi sistematika penulisan menjadi empat bab, dengan rincian sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menyajikan kajian-kajian kepustakaan yang menjadi landasan dan dasar teori dalam pembahasan terkait analisis numerik pada model osilasi vertikal dawai. Kajian pustaka ini berisi tentang riset-riset terdahulu, masalah osilasi vertikal, analisis model matematika vibrasi vertikal dawai, analisis numerik dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton, dan kajian keagamaan.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas terkait proses dari model osilasi vertikal dawai yang kemudian dapat ditentukan parameter yang mempengaruhi pergerakan osilasi tersebut, menyederhanakan sistem persamaan diferensial menjadi dua persamaan diferensial orde kedua, mereduksi persamaan diferensial orde kedua menjadi sistem persamaan diferensial orde pertama, dan dilanjutkan dengan mencari solusi numerik dari persamaan-persamaan tersebut.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian dan saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian ini.



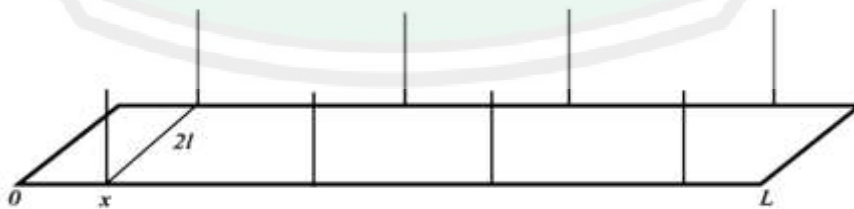
BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Riset Terdahulu

Pada tahun 1999, McKenna mengusulkan model persamaan diferensial biasa untuk gerakan torsional penampang. Dengan menggunakan konstanta-konstanta fisik dari laporan para insinyur tentang runtuhnya jembatan Tacoma Narrows, McKenna menyelidiki model ini secara numerik. McKenna merumuskan suatu model mekanik untuk keseimbangan balok yang berfluktuasi secara torsional dan ditanggihkan pada keduanya oleh dawai (kawat) (Ohene, 2012).

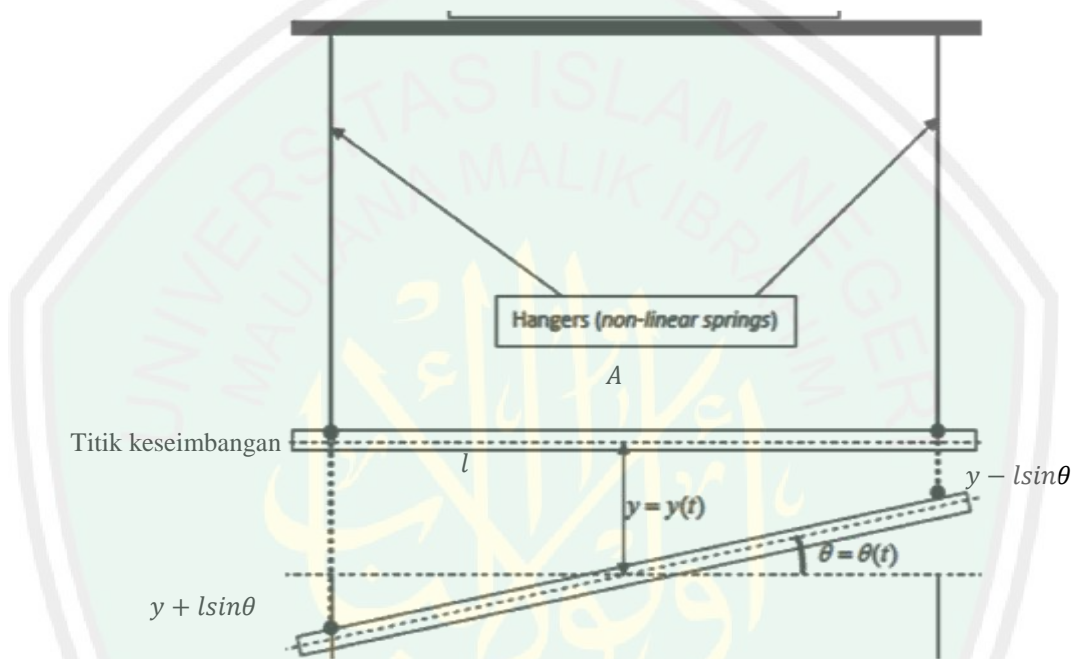
McKenna dan Moore (2000) membahas persamaan untuk gerak torsional penampang (pada dawai gantung) dengan mengasumsikan bahwa dawai tersebut akan mengalami osilasi vertikal yang serupa pada dawai jika diberi gangguan. Dalam jurnal penelitian ini diasumsikan bahwa rentang tengah dawai memiliki panjang L dan lebar 2ℓ yang ditanggihkan (digantungkan) oleh kabel pada kedua sisinya (Gambar 2.1).



Gambar 2.1 Model Sederhana pada Pusat Rentang (McKenna dan Moore, 2000)

Untuk memodelkan gerakan penampang horizontal balok, maka penampang tersebut diperlakukan sebagai batang panjang 2ℓ dan massa m yang digantung dengan kabel. Diberikan $y(t)$ adalah lendutan (*downward distance*)

pada waktu t dan $\theta(t)$ adalah sudut batang dengan bidang horizontal pada waktu t (Gambar 2.2). Diasumsikan bahwa kabel tidak menahan kompresi, tetapi menolak perpanjangan sesuai dengan hukum Hooke dengan konstanta pegas K , yaitu gaya yang diberikan oleh kabel sebanding dengan perpanjangan pada kabel dengan proporsionalitas konstan K .



Gambar 2.2 Penampang Horizontal Rentang Pusat (Ohene, 2011)

Gaya yang digunakan oleh dawai sebanding dengan perpanjangan pada dawai. Diketahui bahwa perpanjangan dawai bagian kanan adalah $(y - l \sin(\theta))$.

Oleh karena itu gaya yang digunakan adalah

$$-K(y - l \sin(\theta))^+ = \begin{cases} -K(y - l \sin(\theta)) & , y - l \sin(\theta) \geq 0 \\ 0 & , y - l \sin(\theta) < 0 \end{cases}$$

Dengan cara yang sama, gaya yang digunakan oleh dawai bagian kiri adalah

$$-K(y + l \sin(\theta))^+ = \begin{cases} -K(y + l \sin(\theta)) & , y + l \sin(\theta) \geq 0 \\ 0 & , y + l \sin(\theta) < 0 \end{cases}$$

Penurunan persamaan vibrasi merambat pada dawai mengikuti energi potensial (EP) dari dawai dengan konstanta spring k dan merentang sejauh x dari titik kesetimbangan. Sehingga diperoleh

$$EP_{dawai} = \int Kx dx = \frac{1}{2} Kx^2$$

Dengan demikian energi potensial total dari dawai kanan dan kiri (Gambar 2.2) adalah

$$EP_{dawai\ total} = \frac{1}{2} K(((y - l \sin(\theta))^+)^2 - ((y + l \sin(\theta))^+)^2)$$

Energi potensial (EP_{balok}) yang disebabkan oleh beban dari balok dengan massa m yang mengalami perubahan posisi ke bawah dari titik kesetimbangan dengan jarak y , diberikan persamaan

$$EP_{balok} = -mgy$$

Dimana g adalah gaya gravitasi. Sehingga diperoleh energi potensial model dari dawai dan balok sebagai berikut

$$EP_m = EP_{dawai\ total} + EP_{balok}$$

$$EP_m = \frac{K}{2} ([(y - l \sin(\theta))^+]^2 - [(y + l \sin(\theta))^+]^2) - mgy$$

Kemudian dilanjutkan untuk menemukan energi kinetik total, untuk pergerakan vertikal energi kinetik dari pusat massa balok adalah

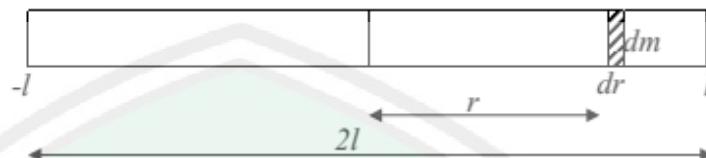
$$EK_{vertikal} = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$

Dimana \dot{y} adalah kecepatan dari berat balok, dan persamaan untuk energi kinetik dari gerak torsi yaitu

$$EK_{torsi} = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2$$

dimana $\dot{\theta}$ adalah kecepatan dari perubahan sudut.

Untuk membuktikan persamaan EK_{balok} perhatikan bagian yang sangat kecil dari batang dengan massa dm pada jarak r dari pusat balok yang telah ditunjukkan pada gambar berikut



Gambar 2.3 Partisi Bagian Balok Sebesar dm (Ohene, 2011)

Energi kinetik dari massa dm yaitu

$$EK_{dm} = \frac{1}{2} dm (r\dot{\theta})^2$$

$r\dot{\theta}$ adalah kecepatan linier v dari bagian yang sangat kecil dm . Massa dari balok adalah m dan panjangnya adalah $2l$, maka

$$dm = \frac{m}{2l} dr. \quad (2.1)$$

Substitusi persamaan (2.1) ke dalam persamaan EK_{dm} dan diintegrasikan dengan batas $[-1,1]$, maka diperoleh

$$EK_{torsion} = \frac{m\dot{\theta}}{4l} \int_{-1}^1 r^2 dr = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}.$$

Dengan demikian, energi kinetik total diberikan sebagai berikut

$$EK_m = EK_{vertikal} + EK_{torsion}$$

$$EK_m = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2.$$

Sekarang diperoleh Lagrangian sebagai berikut

$$L = EK_m - EP_m$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{K}{2} ([y - l \sin(\theta)]^2 + [(y + l \sin(\theta))]^2) + myg.$$

Berdasarkan pada asas *least action*, gerakan balok memenuhi persamaan Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Selanjutnya dengan mengevaluasi turunan yang diperlukan pada persamaan Euler-Lagrange. Pertama, L diturunkan terhadap $\dot{\theta}$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ml^2 \dot{\theta}}{3}$$

Kemudian $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ diturunkan terhadap t , sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{ml^2 \ddot{\theta}}{3}$$

Kemudian L diturunkan terhadap θ , sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = Kl \cos \theta [(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+].$$

Maka $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ menjadi

$$\frac{ml^2 \ddot{\theta}}{3} = Kl \cos(\theta) [(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+]. \quad (2.2)$$

Dengan cara yang sama, L diturunkan terhadap \dot{y} sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

Kemudian $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ diturunkan terhadap t .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}$$

Kemudian L diturunkan terhadap y , sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -K[(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+] + mg.$$

Maka $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ menjadi

$$m\ddot{y} = -K[(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+] + mg. \quad (2.3)$$

Penyederhanaan dan penambahan redaman $\delta_1 \dot{\theta}$ dan $\delta_2 \dot{y}$ berturut-turut ke persamaan (2.1) dan persamaan (2.2), karena pasti ada faktor eksternal yang mempengaruhi gerakan torsi maka tambahkan fungsi gaya luar $f(t)$ ke persamaan (2.1) diperoleh sistem persamaan diferensial orde dua

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{3K}{ml} \cos(\theta) [(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+] - \delta_1 \dot{\theta} + f(t) \\ \ddot{y} = -\frac{K}{m} [(y - l \sin(\theta))^+ + (y + l \sin(\theta))^+] - \delta_2 \dot{y} + g. \end{cases} \quad (2.3)$$

Sistem persamaan (2.3) merupakan model vibrasi dawai yang diusulkan oleh McKenna (Ohene, 2011).

McKenna (1999) menunjukkan bahwa gerak torsional dan vertikal memuat sistem persamaan

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{3K}{ml} \cos \theta [(y - \ell \sin \theta)^+ - (y + \ell \sin \theta)^+] - \delta_1 \dot{\theta} + f(t) \\ \ddot{y} = -\frac{K}{m} [(y - \ell \sin \theta)^+ + (y + \ell \sin \theta)^+] - \delta_2 \dot{y} + g \end{cases} \quad (2.4)$$

di mana δ_1, δ_2 adalah konstanta redaman, g adalah gaya gravitasi, dan $f(t)$ adalah kekuatan eksternal pada waktu t .

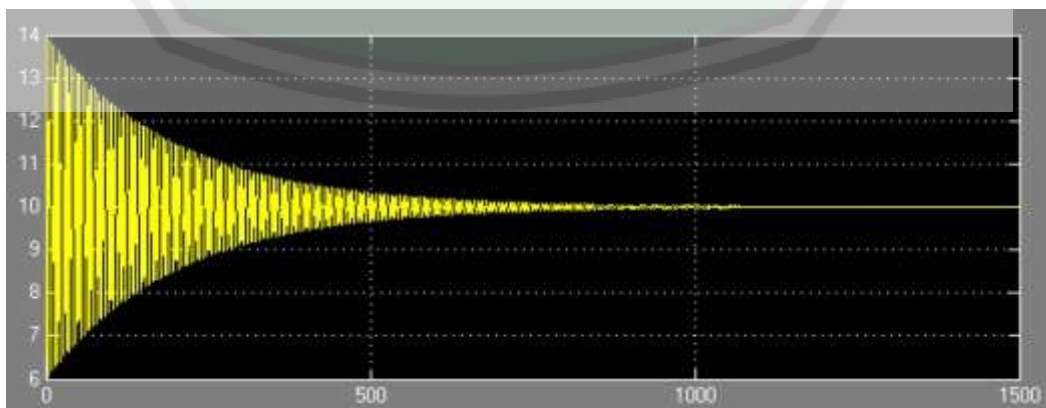
Dengan berasumsi bahwa kabel tidak pernah kehilangan ketegangan, maka $y \pm \ell \sin \theta \geq 0$. Oleh karena itu, $(y \pm \ell \sin \theta)^+ = (y \pm \ell \sin \theta)$. Dengan demikian, pada persamaan (2.4) gerakan torsional dan vertikalnya masing-masing memuat

$$\ddot{\theta} = -\frac{6K}{m} \cos \theta \sin \theta - \delta_1 \dot{\theta} + f(t) \quad (2.5)$$

$$\ddot{y} = -\frac{2K}{m} y - \delta_2 \dot{y} + g(t) \quad (2.6).$$

Persamaan (2.6) adalah persamaan untuk gerak vertikal yang redaman, paksaan, osilasi harmonik sederhana dan solusi dari perilakunya diketahui. Sedangkan persamaan (2.5) adalah gerak torsional yang redaman, paksaan, persamaan pendulum dan proses solusi kacau/gangguan (*chaotic*)-nya diketahui.

Untuk memilih kontanta fisika dari $K, m, \delta = \delta_2$ dan paksaan eksternal $f(t)$ McKenna dan Moore (2000) memilih $m = 2500$ dan $\delta = 0.01$. Untuk menentukan K diketahui bahwa rentang utama akan menyimpang sekitar setengah meter ketika dikenai beban muatan sebesar 100 kg per satuan panjang, jadi $100(9.8) - 2K(0.5) = 0$, sehingga didapatkan $K = 1000$. Untuk penampang yang mirip dengan jembatan Tacoma Narrows, percobaan terowongan angin (*wind tunnel experiments*) menunjukkan bahwa gaya aerodinamik menginduksi pergerakan (osilasi) di sekitar sinusoidal dari amplitudo tiga derajat, sehingga pada persamaan (2.1) dipilih $f(t) = \lambda \sin(\mu t)$ di mana $\lambda \in [0, 0.06]$ dipilih untuk menghasilkan perilaku yang tepat dekat dengan keseimbangan, dan frekuensi μ dipilih untuk mencocokkan frekuensi osilasi yang diamati di Tacoma Narrows pada hari keruntuhannya. Frekuensi gerakan torsional adalah sekitar satu siklus setiap empat atau lima detik, sehingga diambil $\mu \in [1.2, 1.6]$.



Gambar 2.4 Skema Simulasi untuk Pergerakan Vertikal dan Respon dari Jembatan atau Dawai, $y(0) = 14$ (Ohene, 2011)

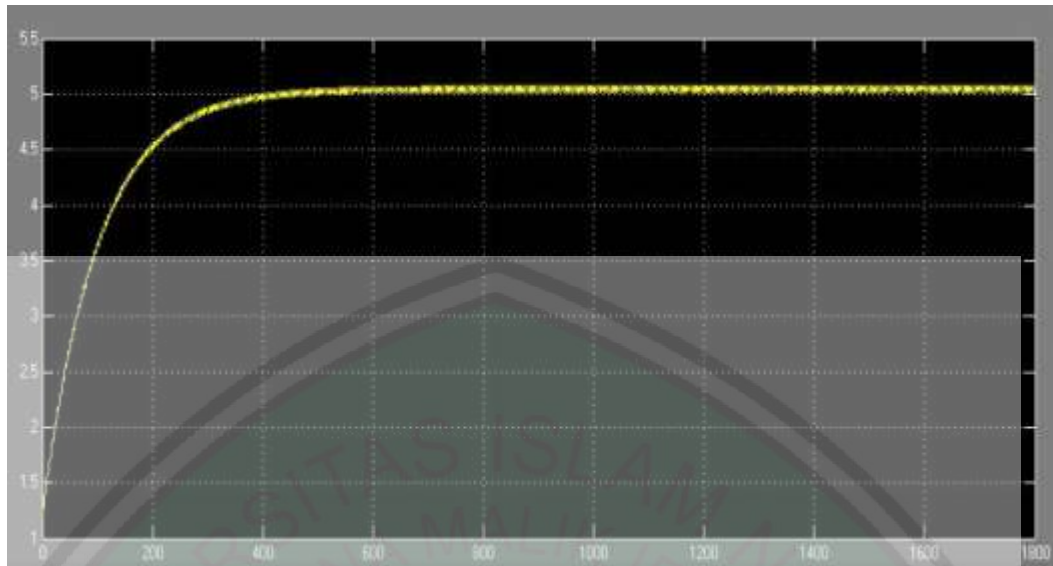
Pada tahun 2011 penelitian terkait model osilasi vertikal dawai ini dikembangkan oleh Ohene (2011). Dalam penelitiannya digunakan sistem persamaan yang sama dengan penelitian milik McKenna dan Moore (2000). Ohene menganalisis solusi numerik dari sistem tersebut menggunakan metode Runga Kutta orde keempat dengan massa (m) adalah 6000, dan konstanta redaman ($\delta_1 = \delta_2$) adalah 0.01. Pada persamaan $y(t)$ digunakan konstanta pegas ($K = 3000$), nilai gaya gravitasi ($g = 10$), nilai awal $y(0) = 14$ dan $\dot{y}(0) = 0$. Dengan menggunakan parameter-parameter tersebut didapatkan nilai solusi analitik dan numerik dari persamaan diferensial untuk $y(t)$ dengan t berada di antara 0 sampai 6000 dengan beberapa interval. Dari perbandingan nilai analitik dan numerik tersebut menunjukkan galat yang sangat kecil (Tabel 2.1). Gambar 2.4 menunjukkan hasil skema simulasi dan solusi numerik dari persamaan diferensial pada grafik y (pergerakan naik dan turun) terhadap waktu (t), dengan t sampai 1500 detik.

Tabel 2.1. Solusi Numerik dan Analitik untuk $y(t)$ (Ohene, 2011)

Waktu	Solusi Numerik	Solusi Analitik	Galat
0	14.00000000	14.00000000	0.00000000
0.1	13.98002332	13.98002282	0.00000004
0.2	13.92031940	13.92031742	0.00000014
0.3	13.82152421	13.82151978	0.00000032
0.4	13.68466343	13.68465566	0.00000057
0.5	13.51114191	13.51112995	0.00000089
0.6	13.30272920	13.30271230	0.00000127
0.7	13.06154150	13.06151901	0.00000172
0.8	12.79002026	12.78999164	0.00000224
0.9	12.49090737	12.49087223	0.00000281
1	12.16721756	12.16717563	0.00000345

2	8.37007107	8.36998057	0.00001081
3	6.10178894	6.10176667	0.00000365
4	7.42221424	7.42236122	0.00001980
5	11.08769484	11.08792920	0.00002114
6	13.72166444	13.72174871	0.00000614
7	12.92479517	12.92457620	0.00001694
8	9.46021205	9.45983172	0.00004021
9	6.52390816	6.52372674	0.00002781
10	6.79679825	6.79705211	0.00003735
20	11.49433323	11.49351302	0.00007136
30	10.51277827	10.51405368	0.00012131
40	7.82926076	7.82803014	0.00015721
50	13.00144605	13.00197844	0.00004095
60	7.17257393	7.17322426	0.00009066
70	11.79796260	11.79607703	0.00015985
80	9.68804089	9.69069640	0.00027403
90	8.87115882	8.86858334	0.00029040
100	12.08438405	12.08594881	0.00012947
1000	10.01554304	10.01526855	0.00002741
1500	9.99970403	9.99974506	0.00000410
2000	9.99993837	9.99993411	0.00000043
3000	9.99999882	9.99999881	0.00000000
4000	9.99999999	9.99999999	0.00000000
5000	10.00000000	10.00000000	0.00000000
6000	10.00000000	10.00000000	0.00000000

Sedangkan untuk menyelidiki solusi numerik pada persamaan $\theta(t)$ digunakan konstanta pegas (K) = 0, $f(t) = 0.05 \sin 1.3t$, nilai awal $\theta(0) = 1.2$ dan $\dot{\theta}(0) = 0$. Gambar 2.5 menunjukkan hasil skema simulasi dan solusi numerik dari persamaan diferensial pada grafik $\theta(t)$ terhadap waktu (t), dengan t sampai 1800 detik dengan hasil solusi numerik dan analitik pada Tabel 2.2.



Gambar 2.5 Pergerakan Torsi untuk $K = 0$, $f(t) = 0.05 \sin 1.3t$ (Ohene, 2011)

Tabel 2.2. Solusi Numerik dan Analitik untuk $\theta(t)$ (Ohene, 2011)

Waktu	Solusi Numerik	Solusi Analitik	Galat
0	1.20000000	1.20000000	0.00000000
0.1	1.20001083	1.20001082	0.00000001
0.2	1.20008636	1.20008633	0.00000002
0.3	1.20029012	1.20029007	0.00000004
0.4	1.20068341	1.20068333	0.00000007
0.5	1.20132429	1.20132418	0.00000010
1	1.20992871	1.20992835	0.00000030
2	1.26132722	1.26132643	0.00000062
3	1.33440468	1.33440403	0.00000048
4	1.37705822	1.37705808	0.00000010
5	1.38120925	1.38120927	0.00000001
10	1.55357913	1.55357914	0.00000001
20	1.87466908	1.87466910	0.00000001
30	2.16844823	2.16844832	0.00000004
40	2.43900148	2.43900142	0.00000003
50	2.68914931	2.68914928	0.00000001
100	3.65891689	3.65891735	0.00000013
200	4.50561804	4.50561635	0.00000037
400	5.00521705	5.00521440	0.00000053

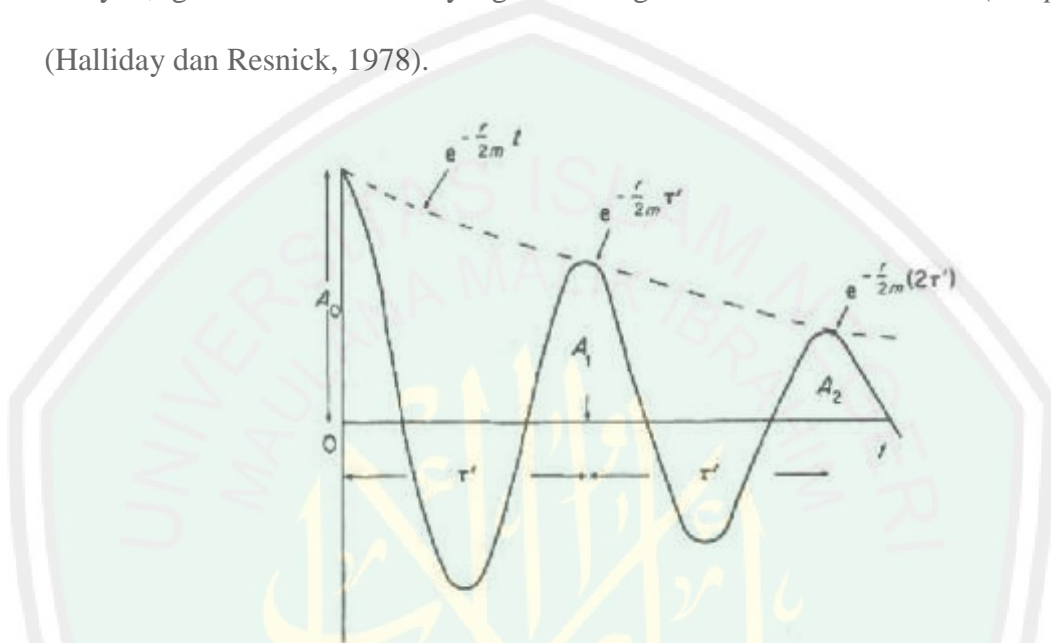
1000	5.06296764	5.06296848	0.00000017
1200	5.01717679	5.01717563	0.00000023
1500	5.02259121	5.02258948	0.00000034
1800	5.03252323	5.03252001	0.00000064

Telah dibahas pula oleh Fikriyah (2008) terkait penggunaan metode *predictor-corrector* dalam skripsinya yang berjudul “*Penyelesaian Integrasi Numerik Newton Cotes dengan Metode Adam dan Milne*”. Dalam penelitiannya dikatakan bahwa untuk mengintegrasikan sebuah persamaan dengan metode Adam dan metode Milne maka langkah pertama yang harus dilakukan adalah menyelesaikan persamaan matematika (baik persamaan linier maupun persamaan non linier) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk menentukan nilai awal. Sehingga akan diperoleh nilai-nilai y yang akan digunakan sebagai pemulai (*starting value*) untuk menghitung integral numerik dengan menggunakan metode Milne dan metode Adam orde keempat. Dengan menggunakan rumus prediktor dan korektor pada metode Adam orde keempat dan metode Milne yang didasarkan pada rumus terbuka dan tertutup Newton Cotes, sehingga dapat pula digunakan untuk menghitung kesalahan perkiraan sehingga akan diperoleh *error* yang diinginkan.

2.2 Masalah Osilasi Vertikal

Setiap gerak yang berulang dalam selang waktu yang sama disebut gerak periodik. Jika suatu partikel dalam gerak periodik bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama, gerakanya disebut gerak *osilasi* atau *vibrasi* (getaran). Bumi penuh dengan gerak osilasi, misalnya pada roda keseimbangan arloji, dawai biola, massa yang diikatkan pada pegas, atom dalam molekul atau dalam kisi zat padat,

dan molekul udara ketika ada gelombang bunyi. Banyak benda beresilasi yang gerak bolak-baliknya tidak tepat sama karena gaya gesekan melepaskan tenaga geraknya. Dawai biola akhirnya berhenti bergetar dan bandul akhirnya berhenti berayun, gerak semacam ini yang disebut gerak harmonik teredam (*damped*) (Halliday dan Resnick, 1978).



Gambar 2.6 Gerak Harmonis Teredam (Giancoli, 1998)

Amplitudo semua pegas atau pendulum yang berayun pada kenyataannya perlahan-lahan berkurang terhadap waktu sampai osilasi berhenti sama sekali. Gambar 2.6 menunjukkan grafik yang khas dari simpangan sebagai fungsi waktu. Gerak ini disebut gerak harmonis teredam (“meredam” berarti mengurangi, menahan, atau memadamkan). Redaman biasanya disebabkan oleh hambatan udara dan gesekan internal pada sistem yang beresilasi. Jika redaman tidak besar maka osilasi dapat dianggap sebagai gerak harmonis sederhana di mana redaman ditimpa, yaitu pengurangan amplitudo yang digambarkan sebagai kurva terputus-putus pada Gambar 2.6. Walaupun peredaman karena gesekan mempengaruhi frekuensi getaran, efeknya biasanya kecil kecuali peredaman cukup besar, sehingga persamaan

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.7)$$

dan

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.8)$$

dengan T adalah periode, m adalah massa, dan k adalah konstanta pegas tetap yang dapat digunakan pada sebagian besar kasus.

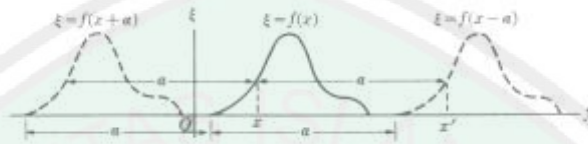
Ketika sistem yang bergetar mulai bergerak, sistem tersebut bergetar dengan frekuensi alaminya seperti pada persamaan (2.7) dan persamaan (2.8) dengan g adalah gaya gravitasi dan L adalah panjang tali. Bagaimanapun, sistem bisa memiliki gaya eksternal yang bekerja padanya dan mempunyai frekuensi sendiri, sehingga didapatkan getaran yang dipaksakan (resonansi) (Giancoli, 1998).

2.3 Analisis Model Matematika Vibrasi Vertikal Dawai

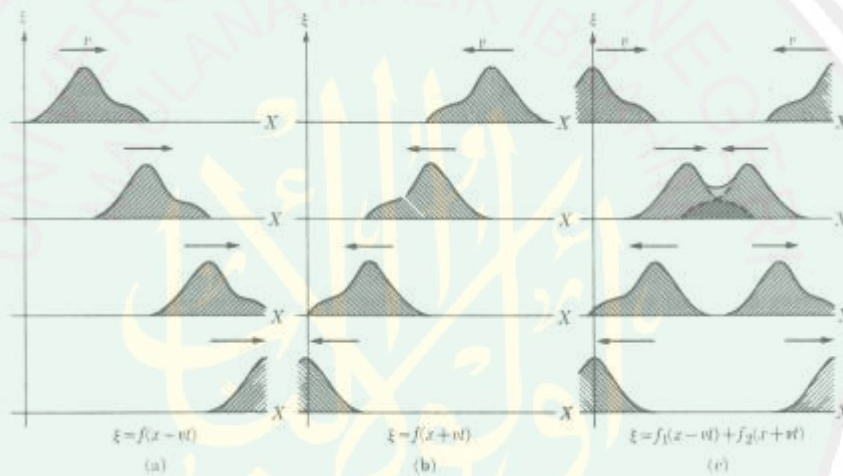
Persamaan diferensial seringkali digunakan untuk memodelkan perilaku sistem teknik. Suatu kelas model demikian yang diterapkan secara luas pada kebanyakan bidang teknik adalah osilator harmonis. Beberapa contoh dasar dari osilator harmonis adalah bandul sederhana, massa pada sebuah per, dan rangkaian listrik induktansi-kapasitansi. Walaupun ini merupakan sistem fisika yang sangat berbeda, semua osilasinya dapat dijelaskan oleh model matematika yang serupa (Chapra & Canale, 1985).

Suatu fungsi $\xi = f(x)$, yang secara grafis diwakili oleh kurva tebal pada Gambar 2.7, jika setiap titik kurva dipindah sejarak $\Delta x = a$ di sebelah kanan atau kiri tanpa perubahan bentuk, maka nilai fungsi pada setiap titik baru (x') adalah

sama seperti nilai fungsinya pada $x' - a$ atau $x' + a$. Dengan demikian $f(x + a)$ mewakili kurva yang terpindah tanpa *deformasi* ke kanan dengan suatu sejarak a , dan dengan cara serupa $f(x - a)$ mewakili kurva yang sama yang dipindahkan ke kiri dengan jarak a .



Gambar 2.7 Translasi Tak-Terdistorsi dari Fungsi $\xi(x)$ (Alonso dan Finn, 1980)



Gambar 2.8 Rambatan Tak-Terdistorsi Sebuah Gelombang (a) Ke Kanan, dan (b) Ke Kiri. (c) Gelombang Merambat pada Arah Berlawanan Menghasilkan Hasil-Hasil Tambah yang Gelombangnya Mengganggu (Alonso dan Finn, 1980)

Pemindahan menerus pada kurva $f(x)$. Ketika kurva dipindah dengan jarak Δx dari posisi kurva pada waktu $t = 0$, dengan rentang waktu Δt , kecepatan v , sedemikian hingga $a = \Delta x = v\Delta t = vt$ dimana v adalah *kecepatan fase*, maka suatu “pulsa” sedang “bergerak” sepanjang arah sumbu x (Gambar 2.8). Oleh karena itu, suatu pernyataan matematis dengan bentuk

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt) \tag{2.9}$$

adalah memadai untuk menggambarkan suatu gangguan permukaan yang bergerak atau “merambat” tanpa perubahan bentuk sepanjang sumbu x positif atau negatif, rambatan ini adalah ciri khas gerak gelombang. Kuantitas $\xi(x, t)$ dapat

mewakili keragaman yang besar pada besaran fisik, seperti deformasi pada benda padat, tekanan pada gas, dan satu medan listrik atau magnetik.

Kasus yang secara khusus menarik ialah kasus di mana $\xi(x, t)$ adalah fungsi sinusoida atau fungsi selaras seperti

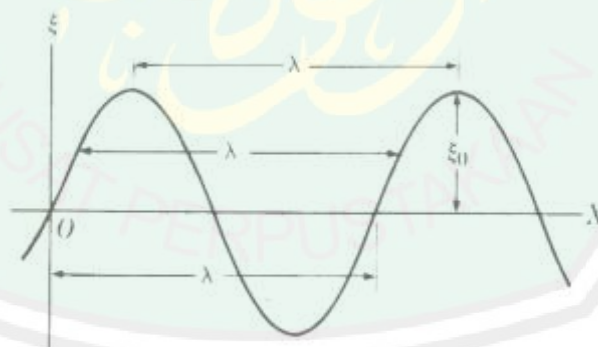
$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin[k(x - vt) + 2\pi] \quad (2.10).$$

Besaran k mempunyai arti khusus. Ketika nilai x diganti oleh $x + \frac{2\pi}{k}$, maka fungsi $\xi(x, t)$ mempunyai nilai yang sama, yaitu

$$\begin{aligned} \xi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) &= \xi_0 \sin k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) \\ &= \xi_0 \sin[k(x - vt) + 2\pi] = \xi_0 \sin k(x - vt) \\ &= \xi(x, t) \end{aligned}$$

Maka

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (2.11)$$



Gambar 2.9 Gelombang Selaras (Alonso dan Finn, 1980)

merupakan “periode ruang” dari kurva pada Gambar 2.9. Ini berarti bahwa kurva tersebut berulang setiap jarak panjang λ . Besaran λ dinamakan *panjang-gelombang*, dan besaran $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ mewakili banyaknya panjang gelombang dengan jarak 2π dan dinamakan angka gelombang. Ada kalanya istilah angka gelombang

disediakan untuk $\frac{1}{\lambda}$, yang terkait dengan banyaknya panjang-gelombang dalam satu satuan panjang. Oleh karena itu

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \quad (2.12)$$

mewakili gelombang sinusoida atau gelombang selaras dengan panjang-gelombang λ yang merambat ke kanan sepanjang sumbu x dengan kecepatan fase v . Persamaan (2.12) dapat juga dituliskan dalam bentuk

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(k(x - \omega t)), \quad (2.13)$$

di mana

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}, \quad (2.14)$$

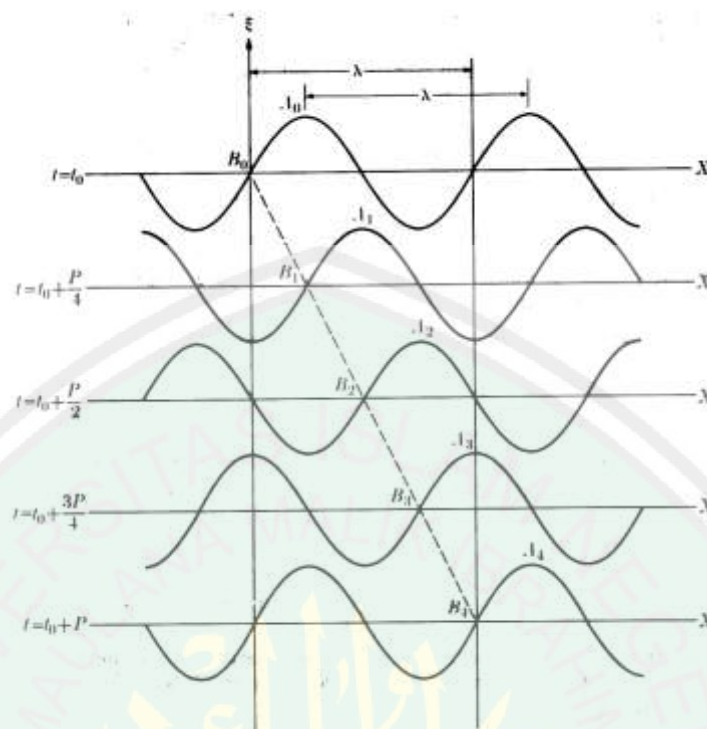
yang dinamakan *frekuensi sudut* suatu gelombang. Menurut persamaan (2.14), $\omega = 2\pi v$ di mana v adalah *frekuensi* yang gangguan fisiknya bervariasi pada setiap titik x . Dengan demikian jika P adalah periode ayunan pada setiap titik maka diberikan $P = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, sehingga persamaan (2.12) dapat ditulis dalam bentuk

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right). \quad (2.15)$$

Dengan cara serupa

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \sin k(x + vt) \\ &= \xi_0 \sin(kx + \omega t) \\ &= \xi_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{P} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

yang mewakili suatu gelombang sinusoida atau gelombang selaras yang bergerak pada arah x negatif.



Gambar 2.10 Gelombang Selaras Merambat ke Kanan. Gelombang Memajukan Jarak λ dalam Waktu P (Alonso dan Finn, 1980)

Pembagian ruang fungsi $\xi(x, t)$ pada selang waktu yang berbeda dan berurutan telah diwakili dalam Gambar 2.10 pada saat t_0 , $t_0 + \frac{P}{4}$, $t_0 + \frac{P}{2}$, $t_0 + \frac{3P}{4}$, dan $t_0 + P$. Gelombang di atas merambat ke kanan dan gelombang itu mengulangi diri dalam ruang setelah satu periode. Nilai $\lambda = vP$ yang menunjukkan bahwa panjang gelombangnya juga dapat ditentukan sebagai jarak yang dimajukan oleh gelombang itu dalam satu periode. Oleh karena itu, pada gerak gelombang sinusoida terdapat dua macam periode yaitu yang satu periode waktu yang ditunjukkan oleh periode P , dan satu periode ruang yang dinyatakan oleh panjang-gelombang λ , dan keduanya terkait dalam hubungan $\lambda = vP$. Hal tersebut dapat membuktikan bahwa pernyataan umum persamaan (2.9) untuk gelombang selaras yang bergerak dapat dituliskan dalam bentuk alternatif $\xi(x, t) = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$ di mana lambang positifnya sesuai terhadap rambatan pada

arah- x negatif, dan lambang negatifnya sesuai terhadap rambatan pada arah- x negatif. Dengan demikian, jika dipilih bentuk fungsional ini untuk $\xi(x, t)$ maka dapat ditulis

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin \omega \left(t \pm \frac{x}{v} \right) = \xi_0 \sin(\omega t \pm kx) \quad (2.17)$$

sebagai pengganti dari persamaan (2.10) dan persamaan (2.14) (Alonso dan Finn, 1980).

2.4 Analisis Numerik dengan Metode Adams Bashforth Moulton

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/ aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka (Munir, 2010).

Metode penyelesaian persamaan diferensial biasa secara numerik terbagi menjadi dua, yaitu metode satu langkah dan metode banyak langkah. Metode yang termasuk satu langkah adalah metode deret Taylor, metode Euler, metode Runge-Kutta, dan metode Heun. Sedangkan metode yang termasuk banyak langkah adalah metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM), metode Milne-Simpson, dan metode Hamming (Urifah, 2008).

Fikriyah (2008) menyatakan pada metode banyak langkah (*multistep*) dikenal beberapa metode antara lain metode Adams, metode Milne, dan metode Hamming. Dalam penelitian ini yang lebih ditekankan adalah pada metode Adams. Metode Adams yang digunakan adalah metode Adams Bashforth orde 4

sebagai *predictor* (prediksi) dan Adams Moulton orde 4 sebagai *corrector* (pembenar) untuk menyelesaikan sebuah persamaan matematika.

Metode prediktor-korektor (*predictor-corrector*) adalah suatu himpunan dua persamaan untuk y_{n+1} . Persamaan pertama, yang disebut *prediktor* digunakan untuk memprediksi (memperoleh aproksimasi pertama) y_{n+1} . Persamaan kedua, yang disebut *korektor* digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi (aproksimasi kedua) y_{n+1} . Secara umum, korektor bergantung pada nilai yang diprediksi (Bronson dan Costa, 2007).

Menurut Munir (2010) pada metode *predictor-corrector*, ditaksir nilai y_{r+1} dari $y_r, y_{r-1}, y_{r-2}, \dots$ dengan persamaan *predictor*, dan kemudian menggunakan persamaan *corrector* untuk menghitung nilai y_{r+1} yang lebih baik (*improve*).

Predictor : Menaksir y_{r+1} dari $y_r, y_{r-1}, y_{r-2}, \dots$

Corrector : Memperbaiki nilai y_{r+1} dari *predictor*

Menurut Munir (2010) metode *predictor-corrector* yang banyak ditulis dalam literatur adalah:

1. Metode Adams-Bashforth-Moulton

$$\textit{Predictor} : y_{*r+1} = y_r + \frac{h}{24}(-9f_{r-3} + 37f_{r-2} - 59f_{r-1} + 55f_r)$$

$$\textit{Corrector} : y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f_{*r+1})$$

2. Metode Milne-Simpson

$$\textit{Predictor} : y_{*r+1} = y_{r+3} + \frac{4h}{3}(2f_{r-2} - f_{r-1} + 2f_r)$$

$$\textit{Corrector} : y_{r+1} = y_{r-1} + \frac{h}{3}(f_{r-1} + 4f_r + f_{r+1})$$

3. Metode Hamming

$$\text{Predictor} : y_{r+1}^* = y_{r-3} + \frac{4h}{3}(2f_{r-2} - f_{r-1} + 2f_r)$$

$$\text{Corrector} : y_{r+1} = -\frac{y_{r-2}}{8} + \frac{9y_r}{8} + \frac{3h}{8}(-f_{r-1} + 2f_r + f_{r+1})$$

Metode *predictor-corrector* dikatakan ideal jika galat per langkah *predictor* mempunyai orde yang sama dengan galat per langkah *corrector*.

$$\text{galat per langkah predictor} : Y_{r+1} - y_{r+1}^* \approx A_r h^p$$

$$\text{galat per langkah corrector} : Y_{r+1} - y_{r+1} \approx \alpha A_r h^p$$

dengan α adalah tetapan yang diketahui. Metode Adams-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson, dan metode Hamming adalah metode *predictor-corrector* yang ideal. Jika sebuah metode *predictor-corrector* ideal, dapat diperoleh nilai y_{r+1} lebih baik (*improve*) sebagai berikut:

$$\bar{y}_{r+1} - y_{r+1}^* = A_r h^p \quad (2.18)$$

$$\bar{y}_{r+1} - y_{r+1} = \alpha A_r h^p \quad (2.19)$$

dengan \bar{y}_{r+1} adalah taksiran yang lebih baik dari pada y_{r+1} . Rumus \bar{y}_{r+1} dapat diperoleh dengan membagi persamaan (2.18) dengan persamaan (2.19).

$$\frac{\bar{y}_{r+1} - y_{r+1}^*}{\bar{y}_{r+1} - y_{r+1}} = \frac{A_r h^p}{\alpha A_r h^p} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_{r+1} - y_{r+1} = \alpha \bar{y}_{r+1} - \alpha y_{r+1}^*$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_{r+1}(1 - \alpha) = y_{r+1} - \alpha y_{r+1}^*$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_{r+1} = \frac{y_{r+1} - \alpha y_{r+1}^*}{(1 - \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_{r+1} = \frac{y_{r+1}}{(1 - \alpha)} - \frac{\alpha y_{r+1}^*}{(1 - \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_{r+1} = \frac{(1 - \alpha)y_{r+1} + \alpha y_{r+1}^*}{(1 - \alpha)} - \frac{\alpha y_{r+1}^*}{(1 - \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_{r+1} = \frac{(1-\alpha)y_{r+1}}{(1-\alpha)} + \frac{\alpha y_{r+1}}{(1-\alpha)} - \frac{\alpha y^*_{r+1}}{(1-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_{r+1} = y_{r+1} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)}(y_{r+1} - y^*_{r+1}) \quad (2.20)$$

Suku $\frac{\alpha}{(1-\alpha)}(y_{r+1} - y^*_{r+1})$ pada persamaan (2.20) merupakan taksiran galat per langkah untuk menghitung \bar{y}_{r+1} , dan menyatakan faktor koreksi terhadap nilai y_{r+1} . Jadi, untuk mendapatkan taksiran nilai y_{r+1} yang lebih baik maka y_{r+1} dijumlahkan dengan faktor koreksi tersebut.

Menganalisis galat sangat penting di dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Ada dua hal yang harus dipahami yaitu bagaimana menghitung galat dan bagaimana galat timbul. Misalkan \hat{a} adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a , maka selisih

$$\varepsilon = a - \hat{a}$$

disebut galat (Munir, 2010).

Metode Adams Bashforth Moulton didasarkan pada prinsip integral numerik. Jika persamaan diferensial $y'(x) = f(x, y(x))$ diintegrasikan dari x_n sampai x_{n+1} , diperoleh:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = y(x) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} = y(x_{n+1}) - y(x_n)$$

$$= y_{n+1} - y_n$$

Kemudian y_{n+1} dinyatakan di ruas kiri persamaan dan suku lainnya di ruas kanan

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Rumus prediktor (y_{n+1}^p) didapat dengan substitusi interpolasi polinomial arah mundur Newton derajat-3 untuk $y'(x) = f(x, y(x))$ yang terdefinisi pada titik-titik x_n, x_{n-1}, x_{n-2} . Jika dinotasikan $f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) = f_{n+i}$ dan digunakan $\nabla^k f_{n+i}$ sebagai bentuk operasi selisih mundur derajat- k dari fungsi f_{n+i} , maka substitusi ini menghasilkan:

$$y_{n+1}^p = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f_n + \frac{\nabla f_n}{1!h} (x - x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{\nabla^3 f_n}{3!h^3} (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \right] dx \quad (2.21)$$

Untuk menyederhanakan integral persamaan (2.18), didefinisikan peubah:

$$u = \frac{x - x_n}{h}, du = \frac{dx}{h}, h = x_{n+1} - x_n$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{x_n - x_n}{h} = \frac{0}{h} = 0$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka $u = \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{h}{h} = 1$, sehingga persamaan (2.21) diintegrasikan dari 0 sampai 1 terhadap u .

Dengan demikian persamaan (2.21) menjadi

$$y_{n+1}^p = y_n + \int_0^1 \left[f_n + \nabla f_n u + \frac{\nabla^2 f_n}{2} u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} u(u+1)(u+2) \right] h du \quad (2.22)$$

Jika integral dikerjakan, maka didapat rumus prediktor

$$\begin{aligned} y_{n+1}^p &= y_n + \int_0^1 \left[f_n + \nabla f_n u + \frac{\nabla^2 f_n}{2} (u^2 + u) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} (u^3 + 3u^2 + 2u) \right] h du \\ &= y_n + h \left(f_n u + \frac{1}{2} \nabla f_n u^2 + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} \left(\frac{1}{4} u^4 + u^3 + u^2 \right) \right) \Bigg|_0^1 \\ &= y_n + h \left(\left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} (1 + 1 + 1) \right) - 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} \left(\frac{9}{4} \right) \right) \\
&= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n \right)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Persamaan diferensial pada titik berikutnya dapat dihitung sebagai berikut:

$$f_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}^p)$$

Setelah f dihitung, dengan substitusi polinomial Newton derajat-3 yang baru untuk $y' = f(x, y(x))$ dengan menggunakan titik-titik x_{n+1}, x_n, x_{n-1} diperoleh rumus korektor (y_{n+1}^c), yaitu:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^c = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} &\left[f_{n+1} + \frac{\nabla f_{n+1}}{1!h} (x - x_{n+1}) \right. \\
&+ \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2!h^2} (x - x_{n+1})(x - x_n) \\
&\left. + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{3!h^3} (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1}) \right] dx
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Untuk menyederhanakan integral persamaan (2.24), didefinisikan peubah:

$$u = \frac{x - x_{n+1}}{h}, \quad du = \frac{dx}{h}, \quad h = x_{n+1} - x_n$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{x_n - x_{n+1}}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka $u = \frac{x_{n+1} - x_{n+1}}{h} = \frac{0}{h} = 0$, sehingga persamaan (2.24) diintegrasikan dari -1 sampai 0

terhadap u . Dengan demikian persamaan (2.24) menjadi:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} = y_n + \int_{-1}^0 &\left[f_{n+1} + \nabla f_{n+1} u + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2!} u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{3!} u(u \right. \\
&\left. + 1)(u+2) \right] h du
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Jika integral dikerjakan, maka didapat rumus korektor:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}^c &= y_n + \int_{-1}^0 \left[f_{n+1} + \nabla f_{n+1} u + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} (u^2 + u) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} (u^3 + 3u^2 + 2u) \right] h \, du \\
 &= y_n + h \left(\left(f_{n+1} u + \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} u^2 + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} u^4 + u^3 + u^2 \right) \right) \Big|_{-1}^0 \right) \\
 &= y_n + h \left((0) - \left(-f_{n+1} + \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) \right) \right) \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(\frac{1}{6} \right) - \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} \right) \right) \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{n+1} \right) \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Persamaan (2.23) dan persamaan (2.26) diubah menjadi bentuk yang ekuivalen, dengan cara substitusi hubungan ordinat-diferensial (Djojodiharjo, 2000).

Adapun definisi mengenai operator selisih mundur derajat- k adalah

Selisih mundur derajat-1 adalah

$$\nabla f_{n+i} = f_{n+i} - f_{n+i-1}$$

Selisih mundur derajat-2 adalah

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 f_{n+i} &= \nabla f_{n+i} - \nabla f_{n+i-1} \\
 &= (f_{n+i} - f_{n+i-1}) - (f_{n+i-1} - f_{n+i-2}) \\
 &= f_{n+i} - f_{n+i-1} - f_{n+i-1} + f_{n+i-2}
 \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$\nabla^2 f_{n+i} = f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2}$$

Selisih mundur derajat-3 adalah

$$\nabla^3 f_{n+i} = \nabla^2 f_{n+i} - \nabla^2 f_{n+i-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2}) - (f_{n+i-1} - 2f_{n+i-2} + f_{n+i-3}) \\
&= f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2} - f_{n+i-1} + 2f_{n+i-2} - f_{n+i-3}
\end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$\nabla^3 f_{n+i} = f_{n+i} - 3f_{n+i-1} + 3f_{n+i-2} - f_{n+i-3}$$

Kemudian dengan memasukkan selisih mundur derajat-1 sampai derajat-3 di atas ke dalam persamaan (2.23) dan persamaan (2.26) maka didapatkan rumus prediktor dan korektor masing-masing sebagai berikut

Prediktor:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^p &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n \right) \\
&= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} (f_n - f_{n-1}) + \frac{5}{12} (f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} (f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) \right) \\
&= y_n + h \left(1 + \frac{1}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_n - \frac{10}{12} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2} + \frac{3}{8} f_n - \frac{9}{8} f_{n-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} f_{n-2} - \frac{3}{8} f_{n-3} \right) \\
&= y_n + h \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{3}{8} \right) f_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{10}{12} + \frac{9}{8} \right) f_{n-1} + \left(\frac{5}{12} + \frac{9}{8} \right) f_{n-2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{8} f_{n-3} \right) \\
&= y_n + h \left(\frac{55}{24} f_n - \frac{59}{24} f_{n-1} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3} \right) \\
&= y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})
\end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$y_{n+1}^p = y_n + \frac{h}{24} (55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}') \quad (2.27)$$

Korektor

$$\begin{aligned} y_{n+1}^c &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{n+1} \right) \\ &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} (f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{12} (f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{24} (f_{n+1} - 3f_n + 3f_{n-1} - f_{n-2}) \right) \\ &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n - \frac{1}{12} f_{n+1} + \frac{2}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} - \frac{1}{24} f_{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{24} f_n - \frac{3}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\ &= y_n + h \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) f_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{12} + \frac{3}{24} \right) f_n - \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{24} \right) f_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\ &= y_n + h \left(\frac{9}{24} f_{n+1} + \frac{19}{24} f_n - \frac{5}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\ &= y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$y_{n+1}^c = y_n + \frac{h}{24} (9y_{n+1}^p + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}') \quad (2.28)$$

Dengan $y_n' = f(x_n, y_n)$ dan $y_{n+1}^p = f(x_{n+1}, y_{n-1})$, $\forall n = 3, 4, \dots$ (Azizah, 2013).

Menurut Lukmanto (2001) rumus Adams Bashforth Moulton secara eksplisit dan implisit

a. Rumus Adam-Bashforth (eksplisit)

$$1. Y_{n+1} = Y_n + hY'_n + \frac{1}{2}h^2Y''(\hat{t}_n)$$

$$2. Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}[3Y'_n - Y'_{n-1}] + \frac{5}{12}h^3Y^{(3)}(\hat{t}_n)$$

$$3. Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12}[23Y'_n - 16Y'_{n-1} + 5Y'_{n-2}] + \frac{3}{8}h^4Y^{(4)}(\hat{t}_n)$$

$$4. Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{24}[55Y'_n - 59Y'_{n-1} + 37Y'_{n-2} - 9Y'_{n-3}] + \frac{251}{720}h^5Y^{(5)}(\hat{t}_n)$$

b. Rumus Adam-Moulton (implisit)

$$1. Y_{n+1} = Y_n + hY'_{n+1} - \frac{1}{2}h^2Y''(\hat{t}_n)$$

$$2. Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}[Y'_{n+1} + Y'_n] + \frac{1}{12}h^3Y^{(3)}(\hat{t}_n)$$

$$3. F_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12}[5Y'_{n+1} + 8Y'_n - Y'_{n-1}] - \frac{1}{2}h^4Y^{(4)}(\hat{t}_n)$$

$$4. Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{24}[9Y'_{n+1} + 19Y'_n - 5Y'_{n-1} + Y'_{n-2}] - \frac{19}{720}h^5Y^{(5)}(\hat{t}_n)$$

Menurut Sahid (2004) **metode Adams Bahforth Dua Langkah** untuk menghitung hampiran penyelesaian masalah nilai awal $y' = f(t, y)$ dengan $y(t_0) = y_0$ pada $[t_0, b]$

$$t_k = t_{k-1} + h,$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})] \text{ untuk setiap } k = 1, 2, 3, \dots$$

dengan h adalah lebar langkah yang diberikan. Nilai y_1 dihitung dengan metode lain, misalnya metode Euler atau RK2 (Runga-Kutta Orde Dua).

Metode Adams Bahforth Tiga Langkah untuk menghitung hampiran penyelesaian masalah nilai awal $y' = f(t, y)$ dengan $y(t_0) = y_0$ pada $[t_0, b]$:

$$t_k = t_{k-1} + h,$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} [23f(t_k, y_k) - 16f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, y_{k-2})] \quad \text{untuk setiap } k = 2, 4, \dots,$$

Dengan h adalah lebar langkah yang diberikan. Nilai y_1 dan y_2 dihitung dengan metode lain, misalnya metode RK4.

Metode Adams Bashforh Empat Langkah untuk menghitung hampiran

penyelesaian masalah nilai awal $y' = f(t, y)$ dengan $y(t_0) = y_0$ pada $[t_0, b]$

$$t_k = t_{k-1} + h,$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} [55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}] \quad \text{untuk setiap } k = 3, 4, 5, \dots,$$

dengan h adalah lebar langkah yang diberikan, $f_i = f(t_i, y_i)$. Nilai y_1, y_2 , dan y_3 dihitung dengan metode lain, misalnya metode RK4.

Metode Adams Moulton Dua Langkah untuk menghitung hampiran

penyelesaian masalah nilai awal $y' = f(t, y)$ dengan $y(t_0) = y_0$ pada $[t_0, b]$

$$t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$y_{k+1,0} = y_k + \frac{h}{12} [23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}], \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$y_{k+1,j} = y_k + \frac{h}{12} [5f(t_{k+1}, y_{k+1,j-1}) + 8f_k - f_{k-1}], \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} (5f_{k+1} + 8f_k - f_{k-1}) \quad \text{untuk setiap } k = 1, 2, 3, \dots,$$

dengan h adalah lebar langkah dan $f_i = f(t_i, y_i)$. Nilai-nilai y_1 dihitung dengan salah satu metode lain (misalnya RK4).

Metode Adams Moulton Tiga Langkah untuk menghitung hampiran

penyelesaian masalah nilai awal $y' = f(t, y)$ dengan $y(t_0) = y_0$ pada $[t_0, b]$

$$t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$y_{k+1,0} = y_k + \frac{h}{24} [55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}], \quad k = 3, 4, \dots,$$

$y_{k+1,j} = y_k + \frac{h}{24} [9f(t_{k+1}, y_{k+1,j-1}) + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}]$, $j = 1, 2, \dots, m$, dan

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2})$, untuk setiap $k = 2, 3, 4, \dots$,

dengan h adalah lebar langkah dan $f_i = f(t_i, y_i)$. Nilai-nilai y_1 dan y_2 dihitung dengan salah satu metode lain (misalnya RK4).

Sebelum melangkah pada Metode Adams Bashforth Moulton yang merupakan metode banyak langkah, terlebih dahulu harus menggunakan metode satu langkah. Metode satu langkah yang dipilih dalam skripsi ini adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta berusaha mencapai derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan tingkat tinggi, dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih dalam setiap subselang (Conte dan Boor, 1980).

Menurut Munir (2010) metode Runge-Kutta ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode PDB yang paling populer karena banyak dipakai dalam praktik. Bentuk umum metode Runge-Kutta orde- n ialah

$$y_{r+1} = y_r + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (2.29)$$

dengan a_1, a_2, \dots, a_n adalah tetapan dan

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$

$$k_2 = hf(x_r + p_1 h, y_r + q_{11} k_1)$$

$$k_3 = hf(x_r + p_2 h, y_r + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$$

\vdots

$$k_n = hf(x_r + p_{n-1} h, y_r + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_2 + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1})$$

Nilai a_i, p_i, q_{ij} dipilih sedemikian rupa sehingga meminimumkan galat per langkah, dan persamaan (2.29) akan sama dengan metode deret Taylor dari orde setinggi mungkin.

- a. Galat per langkah metode Runge-Kutta orde- n : $O(h^{n+1})$
- b. Galat longgokan metode Runge-Kutta orde- n : $O(h^n)$
- c. Orde metode: n

Sedangkan **Metode Runge-Kutta Orde Empat** berbentuk:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_r, y_r) \\
 k_2 &= hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r - k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= hf(x_r + h, y_r + k_3) \\
 y_{r+1} &= y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Galat per langkah (*truncation error*) metode R-K orde empat adalah $O(h^3)$.

Galat longgokan (*cumulative error*) metode R-K orde empat adalah $O(h^2)$.

Metode Runge-Kutta orde yang lebih tinggi tentu memberikan solusi yang makin teliti. Tetapi ketelitian ini harus dibayar dengan jumlah komputasi yang makin banyak. Jadi ada timbal balik (*trade-off*) dalam memilih suatu metode Runge-Kutta (Munir, 2010).

2.5 Kajian Keagamaan

Banyak jalan atau metode yang dapat digunakan untuk menemukan kejelasan atau selesaian dari permasalahan terkait osilasi vertikal dawai. Dalam penelitian ini penulis memilih menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan

metode Adam Bashforth Moulton yang diawali dengan metode Runge Kutta. Hal ini sesuai dengan perintah Allah dalam firman-Nya dalam surat Yusuf ayat 67:

وَقَالَ يَبْنَى لآ تَدْخُلُوا مِن بَابٍ وَاحِدٍ وَأَدْخُلُوا مِن أَبْوَابٍ مُّتَفَرِّقَةٍ وَمَا أُغْنِي عَنْكُمْ مِنَ اللَّهِ مِنْ شَيْءٍ إِنِ الْحُكْمُ إِلَّا لِلَّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَعَلَيْهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُونَ ﴿٦٧﴾

“Dan Ya'qub berkata: "Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain; namun demikian aku tiada dapat melepaskan kamu barang sedikitpun dari pada (takdir) Allah. Keputusan menetapkan (sesuatu) hanyalah hak Allah; kepada-Nya-lah aku bertawakkal dan hendaklah kepada-Nya saja orang-orang yang bertawakkal berserah diri" (QS. Yusuf: 67).

Setelah nabi Ya'qub diminta oleh anak-anaknya supaya Bunyamin ikut berangkat ke Mesir untuk membeli bahan makanan, maka Nabi Ya'qub terpaksa memberi izin, karena hal itu dijadikan syarat untuk mendapatkan bahan makanan itu. Akan tetapi karena beliau telah diberi wahyu tentang apa yang akan terjadi di Mesir itu, diantaranya supaya Bunyamin dapat berjumpa dengan Yusuf empat mata dan supaya anak-anaknya yang masuk ke Mesir itu tidak terkena hasud, maka Nabi Ya'qub memberikan pedoman, tentang bagaimana mereka nanti memasuki istana raja di Mesir.

Nabi Ya'qub berkata: “Hai anak-anakku, nanti jika kamu sekalian sampai di muka istana raja Mesir, janganlah masuk bersama-sama dari satu pintu gerbang, tetapi masuklah dari pintu-pintu gerbang yang lain, supaya terhindar dari penglihatan mata orang yang hasud atau mengalami hal-hal yang tidak diinginkan. Diriwayatkan bahwa Nabi Muhammad Saw. mengakui adanya hasud-hasud itu sehingga beliau mengatakan: “sesungguhnya hasud itu dapat memasukkan seseorang ke dalam kubur dan seekor unta ke dalam periuk besar. Dan beliau pernah pula mengajarkan sebuah doa supaya terhindar dari padanya”. Doanya

demikian: “Aku berlindung dengan kalimat-kalimat Allah yang sempurna dari setiap setan yang jahat, dan dari setiap mata yang hasud”.

Nabi Ya’kub menasehatkan pula, bahwa walaupun ada usaha demikian, namun beliau tidak dapat mencegah tibanya kepastian dari Allah. Sebab keputusan menetapkan sesuatu hanyalah berada di tangan-Nya. Semua pekerjaan harus dilaksanakan sesuai dengan kemampuan, akan tetapi tetap harus disertai dengan keyakinan bahwa ketentuan dari Allah pasti terjadi dan tidak seorangpun yang dapat menghalang-halangnya. Oleh karena itu kepada-Nya dia bertawakkal dan kepada-Nya pula semua orang bertawakkal berserah diri (Departemen Agama Republik Indonesia, 1990).

Pintu yang dimaksud pada ayat tersebut dapat diartikan sebagai cara atau metode. Untuk menganalisis secara numerik persamaan diferensial biasa orde kedua dapat menggunakan banyak metode. Pada penelitian sebelumnya terkait osilasi vertikal dawai telah digunakan metode Runge-Kutta untuk menemukan penyelesaian dari masalah ini. Sehingga penulis memilih metode Adams Bashforth Moulton untuk menganalisis dan menemukan solusi penyelesaian dari permasalahan ini. Tujuannya adalah untuk memudahkan pembaca dalam membandingkan metode mana yang lebih efisien digunakan untuk menemukan penyelesaian numerik dari persamaan diferensial biasa.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Osilasi Vertikal Dawai

Osilasi vertikal dawai adalah gerak naik turun secara bolak balik pada dawai yang kemudian akan berhenti pada waktu t . Gerak osilasi ini biasanya terjadi karena adanya pengaruh gesekan. Gerak osilasi tidak hanya dipengaruhi oleh gaya internal dari objek namun juga dipengaruhi oleh gaya eksternalnya. Gaya internal dari osilasi vertikal dawai sendiri berupa gaya gravitasi, frekuensi dan massa. Sedangkan gaya eksternalnya berupa gaya dari luar yang memiliki frekuensi sendiri atau biasa dikatakan dengan resonansi atau getaran yang dipaksakan.

McKenna (1999) mengemukakan bahwa gerakan torsi dan vertikal dapat dinyatakan sebagai:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{3K}{m\ell} \cos \theta(t) [(y(t) - \ell \sin \theta(t))^+ - (y(t) + \ell \sin \theta(t))^+] - \delta_1 \dot{\theta}(t) + f(t) \quad (3.1)$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{K}{m} [(y(t) - \ell \sin \theta(t))^+ + (y(t) + \ell \sin \theta(t))^+] - \delta_2 \dot{y}(t) + g \quad (3.2)$$

dengan:

$y(t)$ = lendutan (*downward distance*) pada waktu t

$\theta(t)$ = sudut batang terhadap bidang horizontal pada waktu t

K = konstanta pegas

m = massa

ℓ = setengah dari konstanta lebar rentang (span)

- δ_1, δ_2 = konstanta redaman
 $f(t)$ = fungsi eksternal pada waktu t
 g = gaya gravitasi

Dalam kasus ini, penulis berasumsi bahwa kabel atau tali penyangga tidak pernah kehilangan ketegangan, sehingga $y(t) \pm l \sin \theta(t) \geq 0$. Oleh karena itu $(y(t) \pm l \sin \theta(t))^+ = y(t) \pm l \sin \theta(t)$, sehingga persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{3K}{ml} \cos \theta(t) [(y(t) - l \sin \theta(t)) - (y(t) + l \sin \theta(t))] - \delta_1 \dot{\theta}(t) + f(t),$$

yang dapat ditulis kembali sebagai

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{3K}{m} \sin 2\theta(t) - \delta_1 \dot{\theta}(t) + f(t). \quad (3.3)$$

Dengan asumsi yang sama, maka persamaan (3.2) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{K}{m} [(y(t) - l \sin \theta(t)) + (y(t) + l \sin \theta(t))] - \delta_2 \dot{y}(t) + g,$$

yang dapat dituliskan kembali sebagai

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2K}{m} y(t) - \delta_2 \dot{y}(t) + g \quad (3.4)$$

Mengacu pada persamaan (3.3) dan persamaan (3.4), maka model osilasi vertikal dawai dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{3K}{m} \sin 2\theta(t) - \delta_1 \dot{\theta}(t) + f(t) \quad (3.5)$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2K}{m} y(t) - \delta_2 \dot{y}(t) + g \quad (3.6)$$

Model dari osilasi vertikal dawai tersebut masih berbentuk persamaan diferensial biasa (PDB) orde dua, sedangkan dalam penyelesaiannya menggunakan metode Adams Bashforth Moulton sebagai *predictor-corrector* persamaan tersebut

diharuskan sudah berupa PDB orde satu. Sehingga model tersebut harus direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu terlebih dahulu.

Metode Adams Bashforth Moulton merupakan metode banyak langkah yang tidak *swa-step* (*self started*), sehingga persamaan (3.5) dan persamaan (3.6) tidak dapat diterapkan langsung dan membutuhkan beberapa nilai awal dengan metode satu langkah (*one-step*). Dalam pembahasan ini dibutuhkan beberapa nilai awal berupa $\theta_1(i), \theta_2(i), x(i),$ dan $y(i)$ dengan $i = 1, 2, 3$ yang dicari dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat. Setelah mendapatkan nilai awal tersebut, kemudian dapat dilanjutkan dengan mencari nilai $\theta_1(i + 1), \theta_2(i + 1), x(i + 1), y(i + 1),$ untuk $i = 3, 4, \dots, \frac{\Delta t}{h}$ dengan metode Adams Bashforth Moulton sebagai prediktor (prediksi) dan korektor (pembenar).

Metode Adams Bashforth Moulton dan Runge Kutta sendiri membutuhkan iterasi yang cukup banyak, sehingga dibutuhkan bantuan program untuk menemukan solusi numerik dan plot dari persamaan (3.5) dan persamaan (3.6). Dalam penelitian ini digunakan program MATLAB sebagai penunjang penelitian untuk menemukan solusi numerik dan plot dari persamaan di atas.

3.2 Solusi Numerik Model Osilasi Vertikal Dawai dan Perbandingannya

Masalah model osilasi vertikal dawai dalam skripsi ini diwakili oleh persamaan (3.5) dan persamaan (3.6). Persamaan-persamaan tersebut masih berupa persamaan diferensial biasa (PDB) orde dua yang terlebih dahulu harus direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde pertama sebelum kemudian mencari solusi numerik dengan metode Adams Bashforth Moulton.

Persamaan (3.5) direduksi dengan memisalkan $\theta(t) = \theta_1(t)$ maka $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_1(t)$ dan $\theta_2(t) = \dot{\theta}(t)$ maka $\dot{\theta}_2(t) = \ddot{\theta}(t)$ dan menganggap bahwa $f(t)$ atau paksaan eksternal adalah $0.05 \sin 1.3t$. Sehingga persamaan diferensial tersebut dapat ditulis kembali dengan $\dot{\theta}_2(t) = -\frac{3K}{m} \sin 2\theta_1(t) - \delta_1 \theta_2(t) + 0.05 \sin 1.3t$. Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial orde pertama untuk persamaan (3.5) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1(t) &= \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) &= -\frac{3K}{m} \sin 2\theta_1(t) - \delta_1 \theta_2(t) + 0.05 \sin 1.3t \end{aligned} \quad (3.7)$$

dengan $\theta_1(0) = 1.2$, $\theta_2(0) = 0$, $K = 0$, $\delta_1 = 0.01$ dan $m = 6000$. Sehingga sistem persamaan (3.7) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1(t) &= \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) &= -\frac{3(0)}{6000} \sin 2\theta_1(t) - 0.01\theta_2(t) + 0.05 \sin 1.3t \end{aligned} \quad (3.8)$$

Selanjutnya untuk persamaan (3.6) direduksi dengan memisalkan $x(t) = \dot{y}(t)$ maka $\dot{x}(t) = \ddot{y}(t)$ dan menganggap bahwa $g(t)$ atau gaya gravitasi mempengaruhi pergerakan dari $y(t)$ dengan nilai $g(t) = 10$. Sehingga persamaan diferensial di atas dapat ditulis ulang dengan $\dot{x}(t) = -\frac{2K}{m} y(t) - \delta_2 x(t) + 10$. Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa orde pertama untuk persamaan (3.6) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= x(t) \\ \dot{x}(t) &= -\frac{2K}{m} y(t) - \delta_2 x(t) + 10 \end{aligned} \quad (3.9)$$

dengan $x(0) = 0$, $y(0) = 14$, $K = 3000$, $\delta_2 = 0.01$, dan $m = 6000$. Sehingga sistem persamaan (3.7) dapat ditulis kembali menjadi

$$\dot{y}(t) = x(t)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{2(3000)}{6000}y(t) - 0.01x(t) + 10 \quad (3.10)$$

Solusi analitik untuk sistem persamaan (3.8) dan sistem persamaan (3.10) didapatkan dengan menggunakan program Maple pada Lampiran V dan Lampiran VI. Solusi analitik untuk sistem persamaan (3.8) yaitu

$$\theta_1(t) = -\frac{500}{16901} \sin\left(\frac{13t}{10}\right) - \frac{50}{219713} \cos\left(\frac{13t}{10}\right) - \frac{65000}{16901} e^{-\frac{t}{100}} + \frac{328}{65}$$

$$\theta_2(t) = -\frac{650}{16901} \cos\left(\frac{13t}{10}\right) + \frac{5}{16901} \sin\left(\frac{13t}{10}\right) + \frac{650}{16901} e^{-\frac{1}{100}t}$$

sedangkan solusi analitik untuk sistem persamaan (3.10) adalah

$$x(t) = -\frac{800}{39999} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \sqrt{39999}$$

$$y(t) = 10 + e^{-\frac{1}{200}t} \left(\frac{4}{39999} \sin\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \sqrt{39999} + 4 \cos\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \right)$$

3.2.1 Solusi Numerik untuk $\theta(t)$

Untuk sistem persamaan (3.8) digunakan rentang waktu $t = [0, 1800]$ dan $h = 0.1$, maka banyak iterasi yang dilakukan untuk menemukan solusi numerik pada sudut batang terhadap bidang horizontal ($\theta(t)$) dawai adalah $n = \frac{1800-0}{0.1} = 18000$ iterasi dan nilai $t_{n+1} = t_n + h, t_0 = 0$. Untuk mendapatkan nilai $\theta_1(i)$ dan $\theta_2(i)$ dengan $i = 1, 2, 3$ digunakan metode Runge Kutta orde empat (persamaan (2.29)) sebagai berikut:

Saat $n = 1, t = 1$

$$k_1 = hg(t(0), \theta_1(0), \theta_2(0)) = hf(0, 1, 2, 0)$$

$$= 0.1(0) = 0$$

$$l_1 = hg(t(0), \theta_1(0), \theta_2(0)) = hg(0, 1.2, 0)$$

$$= 0.1 \left[-\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.2) - 0.01(0) + 0.05 \sin 1.3(0) \right] = 0$$

$$k_2 = hf\left(t(0) + \frac{h}{2}, \theta_1(0) + \frac{k_1}{2}, \theta_2(0) + \frac{l_1}{2}\right) = hf(0.05, 1.2, 0)$$

$$= 0.1(0) = 0$$

$$l_2 = hg\left(t(0) + \frac{h}{2}, \theta_1(0) + \frac{k_1}{2}, \theta_2(0) + \frac{l_1}{2}\right) = hg(0.05, 1.2, 0)$$

$$= 0.1 \left[-\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.2) - 0.01(0) + 0.05 \sin 1.3(0.05) \right]$$

$$= 0.0003247711942$$

$$k_3 = hf\left(t(0) + \frac{h}{2}, \theta_1(0) + \frac{k_2}{2}, \theta_2(0) + \frac{l_2}{2}\right) = hf(0.05, 1.2, 0.000162)$$

$$= 0.1(0.000162) = 0.000016$$

$$l_3 = hg\left(t(0) + \frac{h}{2}, \theta_1(0) + \frac{k_2}{2}, \theta_2(0) + \frac{l_2}{2}\right) = hg(0.05, 1.2, 0.000162)$$

$$= 0.1 \left[-\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.2) - 0.01(0.000162) + 0.05 \sin 1.3(0.05) \right]$$

$$= 0.000325$$

$$k_4 = hf(t(0) + h, \theta_1(0) + k_3, \theta_2(0) + l_3) = hf(0.1, 1.1914, 0.000325)$$

$$= 0.1(0.000325) = 0.0000325$$

$$l_4 = hg(t(0) + h, \theta_1(0) + k_3, \theta_2(0) + l_3) = hg(0.1, 1.200016, 0.000325)$$

$$= 0.1 \left[-\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.200016) - 0.01(0.000325) + 0.05 \sin 1.3(0.1) \right]$$

$$= 0.000648$$

$$\begin{aligned}
 \theta_1(1) &= \theta_1(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 &= 1.2 + \frac{1}{6}(0 + 2(0) + 2(0.000016) + 0.0000325) \\
 &= 1.2000108
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2(1) &= \theta_2(0) + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
 &= 0 + \frac{1}{6}(0 + 2(0.000325) + 2(0.000325) + (0.000648)) \\
 &= 0.000324
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan formula yang sama maka didapatkan nilai $\theta_1(i)$ dan $\theta_2(i)$ dengan $i = 1,2,3$ sebagai berikut:

Tabel 3.1 Hasil Numerik untuk θ_1 dan θ_2 dengan Menggunakan Metode Runge Kutta

$n = i$	t	$\theta_1(i)$	$\theta_2(i)$
0	0	1.2000000000000000	0
1	0.1	1.200010823000046	0.000324434351632
2	0.2	1.200086334014282	0.001291829936791
3	0.3	1.200290069937423	0.002885212669596

Selanjutnya untuk menemukan nilai $\theta_1(i)$ dan $\theta_2(i)$, dengan $i = 3,4, \dots, \frac{\Delta t}{h}$

digunakan metode Adams Bashforth Moulton sebagai berikut:

$$n = 4, \quad t_4 = t(4) = t_3 + h = t(3) + h = 0.3 + (0.1) = 0.4$$

$$\dot{\theta}_1(0) = f(t(0), \theta_1(0), \theta_2(0)) = \theta_2(0) = 0$$

$$\dot{\theta}_1(1) = f(t(1), \theta_1(1), \theta_2(1)) = \theta_2(1) = 0.000325$$

$$\dot{\theta}_1(2) = f(t(2), \theta_1(2), \theta_2(2)) = \theta_2(2) = 0.00135$$

$$\dot{\theta}_1(3) = f(t(3), \theta_1(3), \theta_2(3)) = \theta_2(3) = 0.0029$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2(0) &= g(t(0), \theta_1(0), \theta_2(0)) \\ &= -\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.2) - 0.01(0) + 0.05 \sin 1.3(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2(1) &= g(t(1), \theta_1(1), \theta_2(1)) \\ &= -\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.2000107) - 0.01(0.000325) + 0.05 \sin 1.3(0.1) \\ &= 0.006478\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2(2) &= g(t(2), \theta_1(2), \theta_2(2)) \\ &= -\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.20009) - 0.01(0.00135) + 0.05 \sin 1.3(1.2) \\ &= 0.049984\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2(3) &= g(t(3), \theta_1(3), \theta_2(3)) = -\frac{3(0)}{6000} \sin 2\theta_1(3) - 0.01\theta_2(3) + 0.05 \sin 1.3t \\ &= -\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.2003) - 0.01(0.0029) + 0.05 \sin 1.3(0.3) \\ &= 0.018980\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\theta_1(4) &= \theta_1(3) + \frac{h}{24} (55\dot{\theta}_1(3) - 59\dot{\theta}_1(2) + 37\dot{\theta}_1(1) - 9\dot{\theta}_1(0)) \\ &= 1.2003 + \frac{0.1}{24} (55(0.0029) - 59(0.00135) + 37(0.000325) - 9(0)) \\ &= 1.200683\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\theta_2(4) &= \theta_2(3) + \frac{h}{24} (55\dot{\theta}_2(3) - 59\dot{\theta}_2(2) + 37\dot{\theta}_2(1) - 9\dot{\theta}_2(0)) \\ &= 0.0029 + \frac{0.1}{24} (55(0.018980) - 59(0.049984) + 37(0.006478) - 9(0))\end{aligned}$$

$$= 0.005077$$

$$p\dot{\theta}_1(4) = f(t(4), p\theta_1(4), p\theta_2(4)) = p\theta_2(4) = 0.005077$$

$$p\dot{\theta}_2(4) = g(t(4), p\theta_1(4), p\theta_2(4))$$

$$= -\frac{3(0)}{6000} \sin 2(p\theta_1(4)) - 0.01(p\theta_2(4))$$

$$= -\frac{3(0)}{6000} \sin 2(1.200683) - 0.01(0.005077) + 0.05 \sin 1.3(0.3)$$

$$= 0.01895865076$$

$$\theta_1(4) = \theta_1(3) + \frac{h}{24} \left(9(p\dot{\theta}_1(4)) + 19\dot{\theta}_1(3) - 5\dot{\theta}_1(2) + \dot{\theta}_1(1) \right)$$

$$= 1.2003 + \frac{0.1}{24} \left(9(0.005077) + 19(0.0029) - 5(0.00135) + (0.000325) \right)$$

$$= 1.20069$$

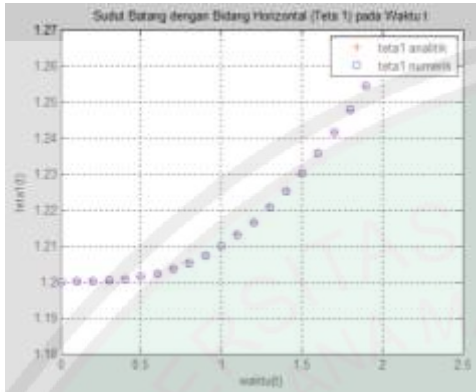
$$\theta_2(4) = \theta_2(3) + \frac{h}{24} \left(9(p\dot{\theta}_2(4)) + 19\dot{\theta}_2(3) - 5\dot{\theta}_2(2) + \dot{\theta}_2(1) \right)$$

$$= 0.0029 + \frac{0.1}{24} \left(9(0.01895865076) + 19(0.018980) - 5(0.049984) + 0.006478 \right)$$

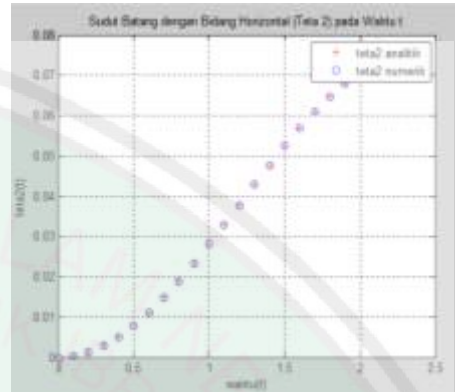
$$= 0.004142$$

Yang berarti bahwa saat $t = 0.4$ atau saat iterasi keempat diperoleh nilai prediksi (*predictor*) dari $\theta_1(0.4)$ adalah 1.200683 dan koreksi (*corrector*) dari $\theta_1(0.4)$ adalah 1.20069. Sedangkan nilai prediksi dari $\theta_2(0.4)$ adalah 0.005077 dan nilai koreksi dari $\theta_2(0.4)$ adalah 0.004142. Sehingga, jika iterasi diteruskan sampai $t = 1800$ atau $n = 18000$ maka diperoleh hasil numerik sebagaimana pada

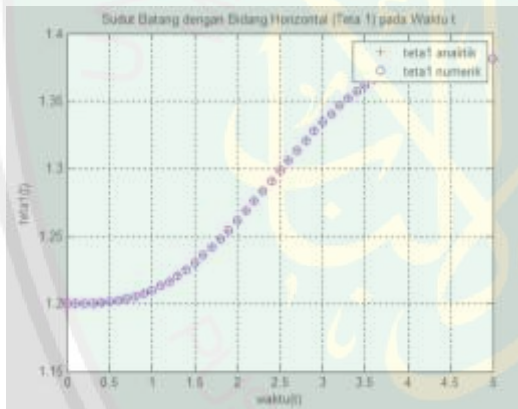
Lampiran III. Dari sistem persamaan (3.8) didapatkan plot hasil numerik dan analitik sebagai berikut:



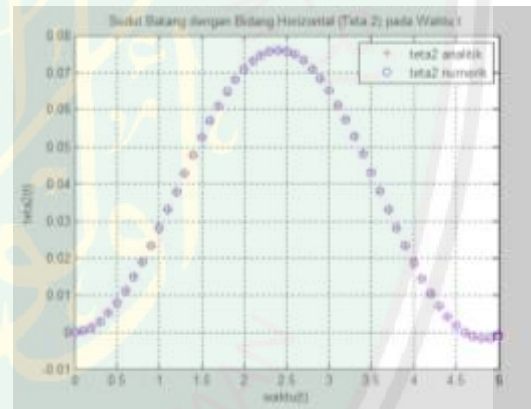
Gambar 3.1 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 2]$ dengan θ_1 Bergerak Naik dari 1.2 sampai 1.261



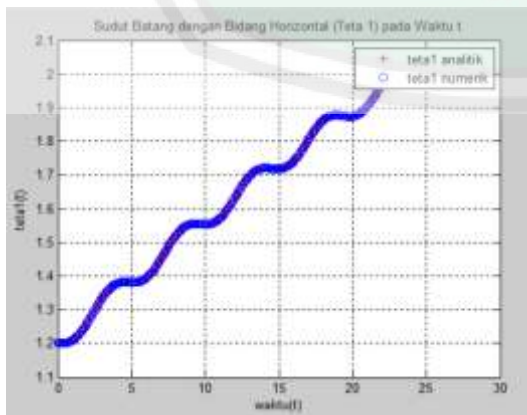
Gambar 3.2 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 2]$ dengan θ_2 Bergerak Naik dari 0 sampai 0.07



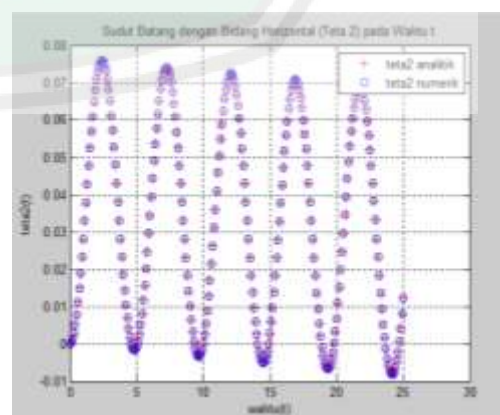
Gambar 3.3 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 5]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dari 1.2 sampai 1.38



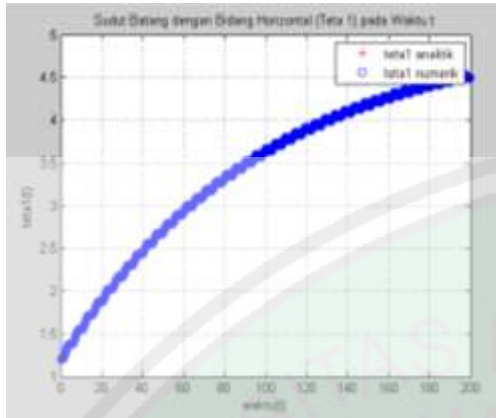
Gambar 3.4 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 5]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun di Sekitar 0.075 sampai -0.009



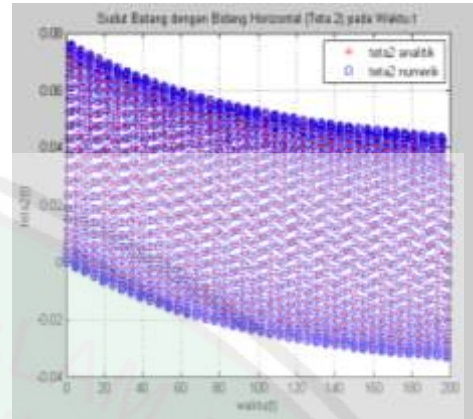
Gambar 3.5 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 25]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dari 1.2 sampai 1.875



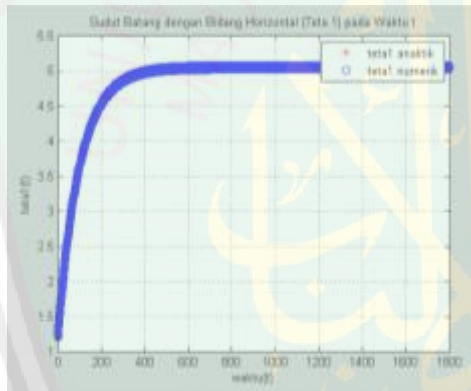
Gambar 3.6 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 25]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun di Sekitar 0.075 sampai -0.006



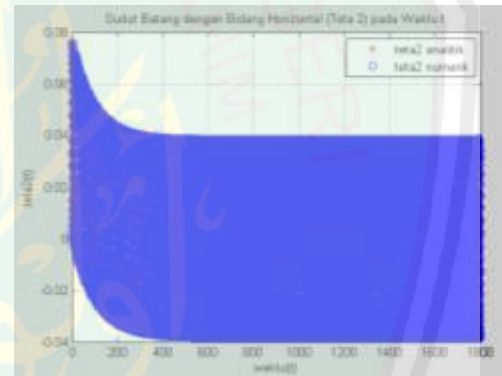
Gambar 3.7 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 200]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dari 1.2 sampai 4.51



Gambar 3.8 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 200]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun di Sekitar 0.075 sampai -0.035



Gambar 3.9 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 1800]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dari 1.2 sampai 5.03 dan Mulai Stabil di Persekitaran Titik 5



Gambar 3.10 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 1800]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun di Sekitar -0.039 sampai 0.075 dan Pergerakan dari θ_2 Mulai Stabil di Antara -0.039 sampai 0.039

Dari plot-plot di atas terlihat bahwa pergerakan dari $\theta_1(t)$ atau sudut antara batang dengan bidang horizontal terus stabil di sekitar angka lima mulai $t = [400, 600]$. Sedangkan untuk $\theta_2(t)$ terus stabil di antara titik -0.039 sampai 0.039 mulai $t = [400, 600]$.

3.2.2 Solusi Numerik untuk $y(t)$

Untuk sistem persamaan (3.10) digunakan rentang waktu $t = [0, 6000]$ dan $h = 0.1$ maka banyak iterasi yang dilakukan untuk menemukan solusi numerik pada lendutan (*downward distance*) dawai ($y(t)$) adalah $n = \frac{6000-0}{0.1} =$

60000 iterasi dan nilai $t_{n+1} = t_n + h$, $t_0 = 0$. Untuk mendapatkan nilai $x(i)$ dan $y(i)$ dengan $i = 1, 2, 3$ digunakan metode Runge Kutta orde empat sebagai berikut

Saat $n = 1$, $t = 1$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t(0), y(0), x(0)) = hf(0, 14, 0) \\ &= 0.01(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= hg(t(0), y(0), x(0)) = hg(0, 14, 0) \\ &= 0.01 \left[-\frac{2(3000)}{6000}(14) - 0.01(0) + 10 \right] \\ &= -0.04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf\left(t(0) + \frac{h}{2}, y(0) + \frac{k_1}{2}, x(0) + \frac{l_1}{2}\right) = hf(0.05, 14, -0.07) \\ &= -0.02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= hg\left(t(0) + \frac{h}{2}, y(0) + \frac{k_1}{2}, x(0) + \frac{l_1}{2}\right) = hg(0.05, 14, -0.07) \\ &= -0.3998 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= hf\left(t(0) + \frac{h}{2}, y(0) + \frac{k_2}{2}, x(0) + \frac{l_2}{2}\right) = hf(0.05, 13.99, -0.1999) \\ &= -0.01999 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_3 &= hg\left(t(0) + \frac{h}{2}, y(0) + \frac{k_2}{2}, x(0) + \frac{l_2}{2}\right) = hg(0.05, 13.99, -0.1999) \\ &= -0.3988001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= hf(t(0) + h, y(0) + k_3, x(0) + l_3) = hf(0.1, 13.98001, -0.3988001) \\ &= 0.1(-0.3988001) = -0.03988001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_4 &= hg(t(0) + h, y(0) + k_3, x(0) + l_3) = hf(0.1, 13.98001, -0.3988001) \\ &= -0.3976021999 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(1) &= y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 &= 14 + \frac{1}{6}(0 + 2(-0.02) + 2(-0.01999) + (-0.03988001)) \\
 &= 13.980023331666667
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(1) &= x(0) + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
 &= 0 + \frac{1}{6}(-0.4 + 2(-0.3998) + 2(-0.3988001) + (-0.3976021999)) \\
 &= -0.399133733316667
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan formula yang sama maka didapatkan nilai $x(i)$ dan $y(i)$ dengan $i = 1,2,3$ sebagai berikut:

Tabel 3.2 Hasil Numerik untuk y dan x dengan Menggunakan Metode Runge Kutta

$n = i$	t	$y(i)$	$x(i)$
0	0	14.000000000000000	0
1	0.1	13.980023331666667	-0.399133733316667
2	0.2	13.920319495884934	-0.793882516185099
3	0.3	13.821524442177489	-1.180308510070151

Selanjutnya untuk menemukan nilai $x(i)$ dan $y(i)$, dengan $i = 3,4, \dots, \frac{\Delta t}{h}$

digunakan metode Adams Bashforth Moulton sebagai berikut:

$$n = 4, \quad t_4 = t(4) = t_3 + h = t(3) + h = 0.3 + (0.1) = 0.4$$

$$\dot{y}(0) = f(t(0), y(0), x(0)) = x(0) = 0$$

$$\dot{y}(1) = f(t(1), y(1), x(1)) = x(1) = -0.399133733316667$$

$$\dot{y}(2) = f(t(2), y(2), x(2)) = x(2) = -0.793882516185099$$

$$\dot{y}(3) = f(t(3), y(3), x(3)) = x(3) = -1.180308510070151$$

$$\dot{x}(0) = g(t(0), y(0), x(0)) = -\frac{2(3000)}{6000}y(0) - 0.01x(0) + 10$$

$$= -\frac{2(3000)}{6000}(14) - 0.01(0) + 10$$

$$= -4$$

$$\dot{x}(1) = g(t(1), y(1), x(1)) = -\frac{2(3000)}{6000}y(1) - 0.01x(1) + 10$$

$$= -\frac{2(3000)}{6000}(13.980023) - 0.01(-0.399134) + 10$$

$$= -3.97603166$$

$$\dot{x}(2) = g(t(2), y(2), x(2)) = -\frac{2(3000)}{6000}y(2) - 0.01x(2) + 10$$

$$= -\frac{2(3000)}{6000}(13.920319) - 0.01(-0.793882) + 10$$

$$= -3.91238018$$

$$\dot{x}(3) = g(t(3), y(3), x(3)) = -\frac{2(3000)}{6000}y(3) - 0.01x(3) + 10$$

$$= -\frac{2(3000)}{6000}(13.821524) - 0.01(-1.180308) + 10$$

$$= -3.80972092$$

$$py(4) = y(3) + \frac{h}{24}(55\dot{y}(3) - 59\dot{y}(2) + 37\dot{y}(1) - 9\dot{y}(0))$$

$$= 13.821524442177489$$

$$+ \frac{0.1}{24}(55(-1.180308510070151)$$

$$- 59(-0.793882516185099) + 37(-0.399133733316667)$$

$$- 9(0))$$

$$= 13.68466674$$

$$px(4) = x(3) + \frac{h}{24}(55\dot{x}(3) - 59\dot{x}(2) + 37\dot{x}(1) - 9\dot{x}(0))$$

$$= -1.180308510070151$$

$$+ \frac{0.1}{24}(55(-3.80972092) - 59(-3.91238018)$$

$$+ 37(-3.97603166) - 9(-4))$$

$$= -1.554547641$$

$$p\dot{y}(4) = f(t(4), py(4), px(4)) = px(4) = -1.554547641$$

$$p\dot{x}(4) = g(t(4), py(4), px(4))$$

$$= -\frac{2(3000)}{6000}py(4) - 0.01px(4) + 10$$

$$= -\frac{2(3000)}{6000}(13.68466674) - 0.01(-1.554547641) + 10$$

$$= -3.66912126$$

$$y(4) = y(3) + \frac{h}{24}(9(p\dot{y}(4)) + 19\dot{y}(3) - 5\dot{y}(2) + \dot{y}(1))$$

$$= 13.821524442177489$$

$$+ \frac{0.1}{24}(9(-1.554547641) + 19(-1.180308510070151)$$

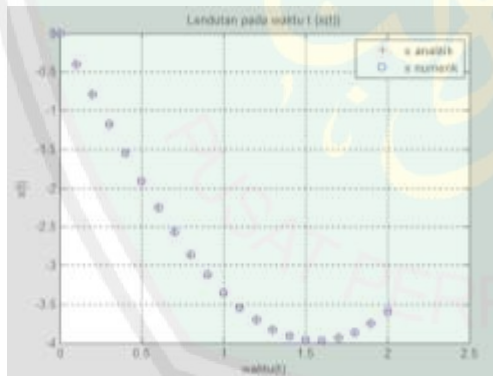
$$- 5(-0.793882516185099) + (-0.399133733316667))$$

$$= 13.68466397$$

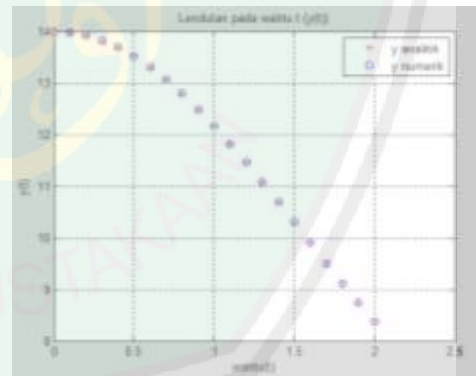
$$x(4) = x(3) + \frac{h}{24}(9(p\dot{x}(4)) + 19\dot{x}(3) - 5\dot{x}(2) + \dot{x}(1))$$

$$\begin{aligned}
&= -1.180308510070151 \\
&\quad + \frac{0.1}{24} (9(-3.66912126) + 19(-3.80972092) \\
&\quad - 5(-3.91238018) + (-3.97603166)) \\
&= -1.554562342
\end{aligned}$$

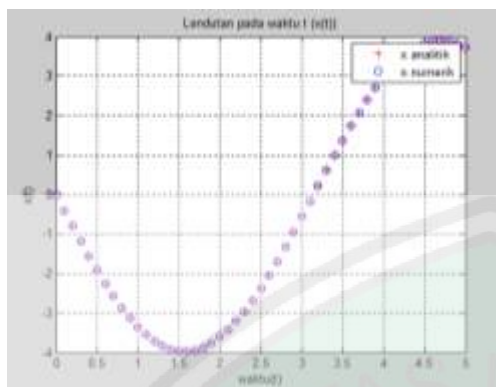
Yang berarti bahwa saat $t = 0.4$ atau saat iterasi keempat diperoleh nilai prediksi (*predictor*) dari $y(0.4)$ adalah 13.68466674 dan koreksi (*corrector*) dari $y(0.4)$ adalah 13.68466397. Sedangkan nilai prediksi dari $x(0.4)$ adalah -1.554547641 dan nilai koreksi dari $x(0.4)$ adalah -1.554562342 . Sehingga, jika iterasi diteruskan sampai $t = 6000$ atau $n = 60000$ maka diperoleh hasil numerik sebagaimana pada Lampiran IV. Dari sistem persamaan (3.10) didapatkan plot hasil numerik dan analitik sebagai berikut:



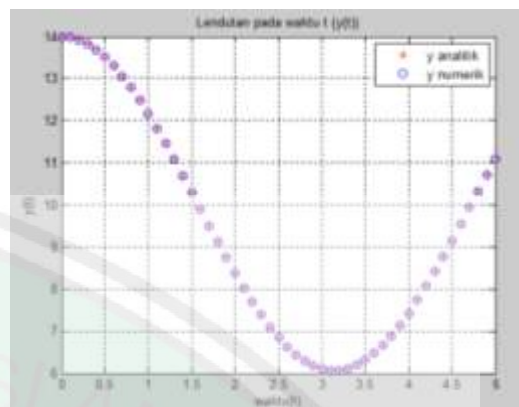
Gambar 3.11 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 2]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara 0 sampai -3.99



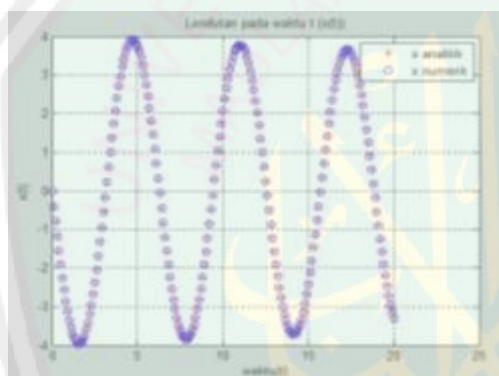
Gambar 3.12 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 2]$ dengan y Mulai Bergerak Turun dari 14 sampai 8.37



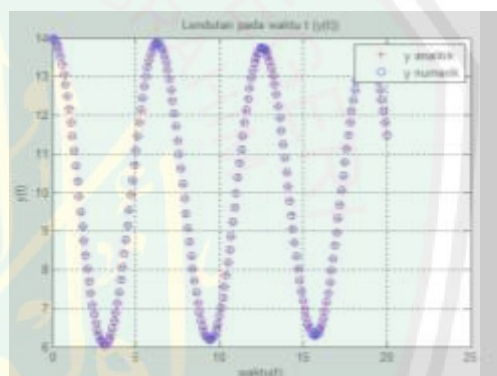
Gambar 3.13 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 5]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara -3.99 sampai 3.99



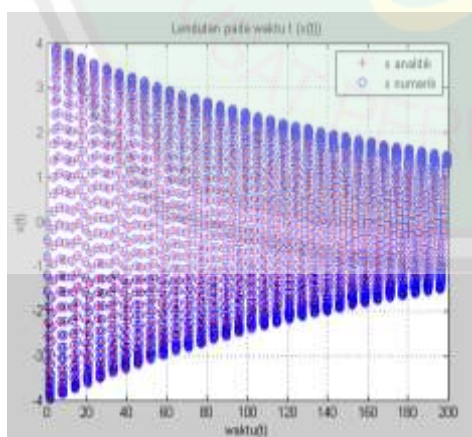
Gambar 3.14 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 5]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara 6.01 sampai 14



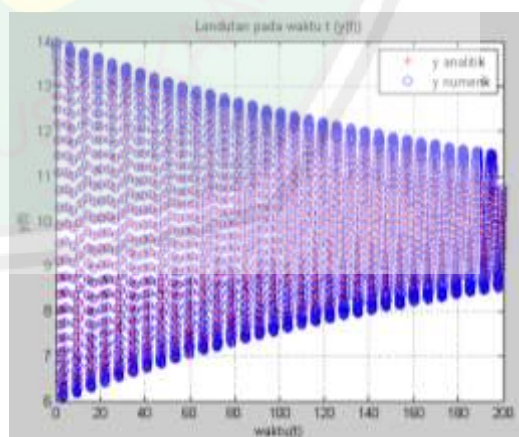
Gambar 3.15 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 20]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil



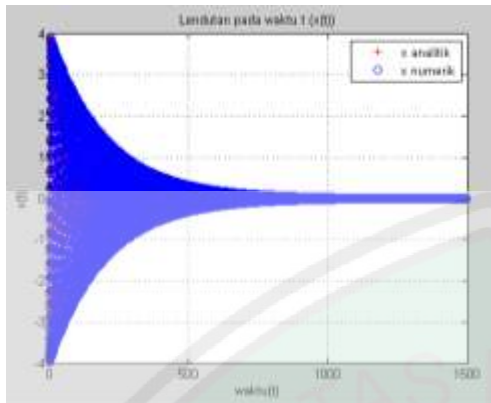
Gambar 3.16 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 20]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil



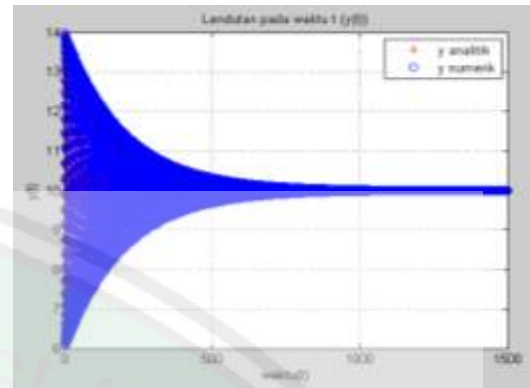
Gambar 3.17 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 200]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil



Gambar 3.18 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 200]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo semakin Mengecil



Gambar 3.19 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 1500]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil Mendekati Titik 0 (Asimtotik)



Gambar 3.20 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 1500]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Mengecil Mendekati Titik 10

Dari grafik tersebut terlihat bahwa pergerakan plot grafik $y(t)$ atau lendutan terus stabil mendekati titik 10 terhadap waktu (t) dan $x(t)$ terus stabil mendekati titik 0 terhadap waktu (t). Hal ini berarti bahwa amplitudo dari osilasi vertikal dawai semakin mengecil saat t semakin besar (lama) dan kemudian akan berhenti atau stabil kembali saat t tertentu. Hal ini berarti gerak osilasi vertikal dawai sendiri merupakan gerak harmonik teredam.

3.2.3 Perbandingan Solusi Numerik Model Osilasi Vertikal Dawai

Metode untuk menemukan solusi numerik dari persamaan diferensial orde dua dibagi menjadi dua yakni metode satu langkah (*onestep*) dan banyak langkah (*multistep*). Macam-macam metode satu langkah yaitu metode deret Taylor, metode Euler, metode Runge-Kutta, dan metode Heun. Sedangkan macam-macam metode banyak langkah yakni metode Adams Bashforth Moulton, metode Milne Simpson, dan metode Hamming. Solusi numerik untuk model osilasi vertikal dawai sebelumnya telah dikerjakan oleh Ohene (2011) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde keempat.

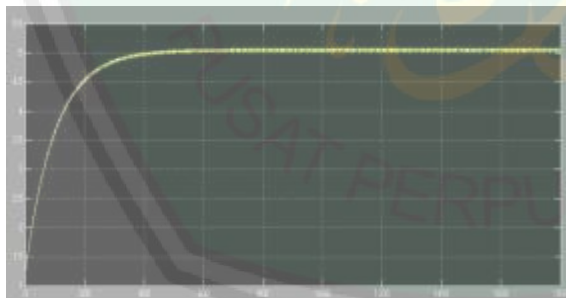
Firman Allah dalam surat Yusuf ayat 67 diperintahkan untuk memakai jalan lain untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Dalam penelitian ini penulis mencari solusi numerik dari model osilasi vertikal dawai dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton. Selanjutnya dapat dibandingkan keakuratan solusi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta (Ohene, 2011) dan metode Adams Bashforth Moulton. Keakuratan dari masing-masing solusi numerik tersebut dapat dilihat dari selisihnya dengan solusi analitik yang diambil dari jurnal karya Ohene (2011). Semakin kecil selisih (galat) maka dapat dikatakan solusi tersebut semakin akurat.

Nilai galat untuk sistem persamaan (3.8) pada saat $t = 0.4$ dari solusi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat adalah 0.00000008 dan nilai galat dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton adalah 0.00000002. Sehingga dapat dikatakan bahwa saat $t = 0.4$ solusi dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton relatif lebih teliti (akurat). Namun pada saat $t = 3$ nilai galat dari solusi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat adalah 0.00000065 dan nilai galat dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton adalah 0.00000082. Sehingga dapat dikatakan bahwa saat $t = 3$ solusi dengan menggunakan metode Runge Kutta relatif lebih teliti (akurat). Adapun rincian hasil perbandingan galat dari kedua metode tersebut dapat dilihat pada Lampiran VII.

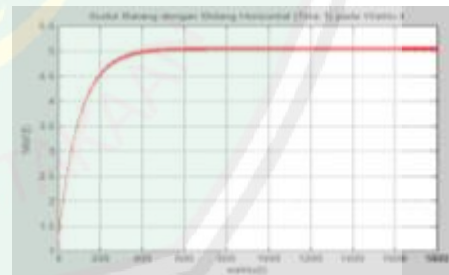
Nilai galat untuk sistem persamaan (3.10) pada saat $t = 0.4$ dari solusi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat adalah 0.00000777 dan nilai galat dengan menggunakan metode Adams Bashforth

Moulton adalah 0.00000832. Sehingga dapat dikatakan bahwa saat $t = 0.4$ solusi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat relatif lebih teliti (akurat). Namun pada saat $t = 3$ nilai galat dari solusi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat adalah 0.00002227 dan nilai galat dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton adalah 0.00000195. Sehingga dapat dikatakan bahwa saat $t = 3$ solusi dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton relatif lebih teliti (akurat). Adapun rincian hasil perbandingan galat dari kedua metode tersebut dapat dilihat pada Lampiran VIII.

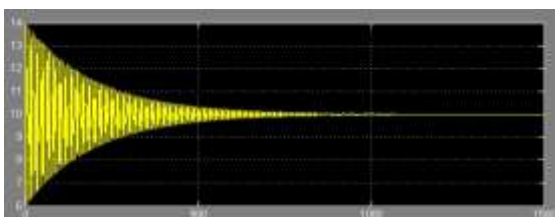
Sedangkan perbandingan dari pergerakan solusi model pada plot dengan menggunakan metode Runge Kutta dan Adams Bashforth Moulton dapat dilihat dari Gambar 3.21, Gambar 3.22, Gambar 3.23, dan Gambar 2.24 yang memiliki bentuk relatif sama. Hal ini menunjukkan solusi numerik dengan menggunakan kedua metode tersebut memiliki selisih (galat) yang sangat kecil.



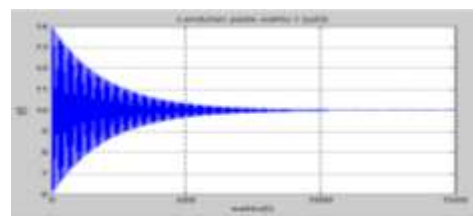
Gambar 3.21 Torsional Motion for $K = 0$, $f(t) = 0.05 \sin 1.3t$ (Pergerakan Torsi) (Ohene, 2011)



Gambar 3.22 Grafik Sistem Persamaan (3.8) saat $t = [0, 1800]$ dengan $\theta_1(0) = 1.2$, $\theta_2(0) = 0$, $K = 0$, $\delta_1 = 0.01$, $m = 6000$, dan $f(t) = 0.05 \sin 1.3t$



Gambar 3.23 Skema Simulasi untuk Pergerakan Vertikal dan Respon dari Dawai, $y(0) = 14$ (Ohene, 2011)



Gambar 3.24 Grafik dari sistem persamaan (3.10) saat $t = [0, 1500]$ dengan $x(0) = 0$, $y(0) = 14$, $K = 3000$, $\delta_2 = 0.01$, dan $m = 6000$

3.3 Kajian Keagamaan

Allah Swt. berfirman dalam Surat an-Nahl ayat 93:

وَلَوْ شَاءَ اللَّهُ لَجَعَلَكُمْ أُمَّةً وَاحِدَةً وَلَكِنْ يُضِلُّ مَنْ يَشَاءُ وَيَهْدِي مَنْ يَشَاءُ ۗ وَلَتُسْأَلُنَّ عَمَّا
كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴿٩٣﴾

“Dan kalau Allah menghendaki, niscaya dia menjadikan kamu satu umat (saja), tetapi Allah menyesatkan siapa yang dikehendaki-Nya dan memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya. dan Sesungguhnya kamu akan ditanya tentang apa yang Telah kamu kerjakan” (QS. an-Nahl: 93).

Pelajaran yang dapat dipetik dari ayat tersebut adalah bahwa Allah Swt. membebaskan manusia untuk menentukan pilihan dalam menjalani kehidupannya. Namun dalam kebebasan tersebut Allah tetap akan memintai pertanggungjawaban manusia atas segala perbuatan baik dan buruknya di hari kiamat kelak (Departemen Agama Republik Indonesia, 1990). Dalam skripsi ini dipilih metode Adams Bashforth Moulton untuk menemukan solusi numerik dari model osilasi vertikal dawai. Untuk memastikan tingkat ketelitian dari solusi metode Adams Bashforth Moulton, maka solusi tersebut dibandingkan dengan solusi metode Runge Kutta yang sebelumnya telah dikerjakan oleh Ohene (2011). Tingkat keakuratan dari solusi numerik dapat dilihat dari selisih dengan solusi analitiknya. Oleh karena itu, solusi dari metode Adams Bashforth Moulton tidak hanya dibandingkan dengan solusi metode Runge Kutta, namun juga dibandingkan dengan selisih terhadap solusi analitiknya juga.

Solusi dari bahasan di atas mengarah pada hasil pemikiran bahwa solusi metode Adams Bashforth Moulton dan metode Runge Kutta memiliki solusi yang sangat dekat dengan solusi analitiknya. Sehingga dapat dikatakan bahwa metode Adams Bashforth Moulton efektif untuk digunakan dalam menemukan solusi

numerik pada model osilasi vertikal dawai. Hal ini juga diperkuat dengan profil grafik metode Adams Bashforth Moulton yang relatif sama dengan profil grafik pada metode Runge Kutta pada masalah yang sama.

3.4 Simulasi dan Interpretasi Solusi Numerik dengan Variasi Parameter

Variasi parameter yang digunakan pada model osilasi vertikal dawai ini berupa massa (m) objek adalah 657.3, konstanta pegas (K) adalah 2226.9, dan $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ adalah 0.01. Sehingga sistem persamaan (3.7) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1(t) &= \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) &= -\frac{3(2226.9)}{657.3} \sin 2\theta_1(t) - 0.01\theta_2(t) + 0.05 \sin 1.3t\end{aligned}\quad (3.11)$$

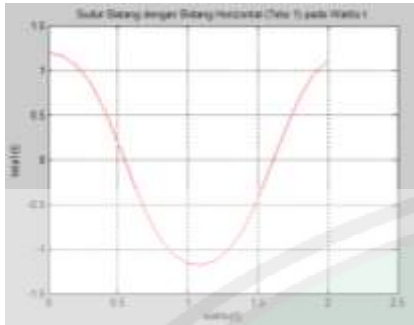
dengan $\theta_1(0) = 1.2, \theta_2(0) = 0$

Sehingga untuk sistem persamaan (3.9) dapat ditulis kembali menjadi:

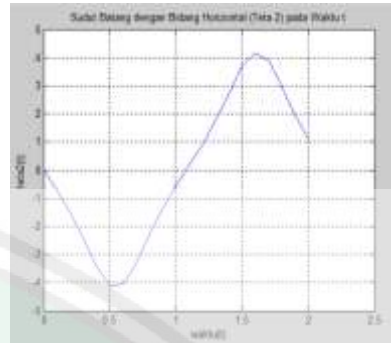
$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= x(t) \\ \dot{x}(t) &= -\frac{2(2226.9)}{657.3} y(t) - 0.01x(t) + 10\end{aligned}\quad (3.12)$$

dengan $x(0) = 0, y(0) = 14$.

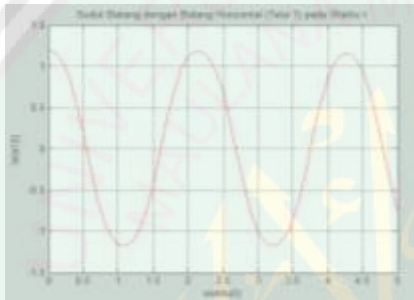
Solusi numerik untuk sistem persamaan (3.11) saat $t = 0.4$ atau saat iterasi keempat diperoleh nilai prediksi (*predictor*) dari $\theta_1(t)$ adalah 0.561560726566616 dan koreksi (*corrector*) dari $\theta_1(t)$ adalah 0.565287225045484. Sedangkan nilai prediksi dari $\theta_2(t)$ adalah -3.475415162323568 dan nilai koreksi dari $\theta_2(t)$ adalah -3.423075599996315. Sehingga, jika iterasi diteruskan sampai $t = 1800$ atau $n = 18000$ maka diperoleh hasil numerik sebagaimana pada Lampiran XIII. Dari sistem persamaan (3.11) didapatkan plot sebagai hasil numerik sebagai berikut:



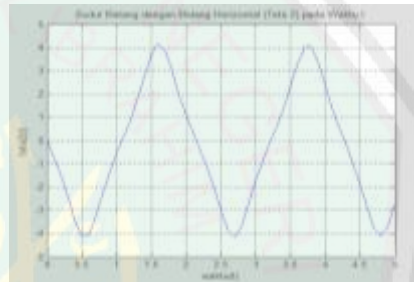
Gambar 3.25 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 2]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara 1.2 sampai -1.2



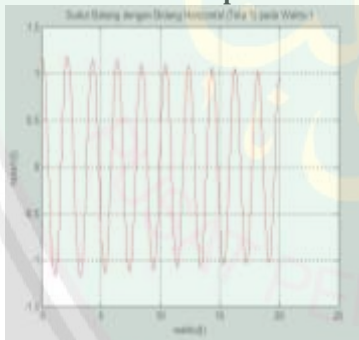
Gambar 3.26 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 2]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara -4.12 sampai 4.12



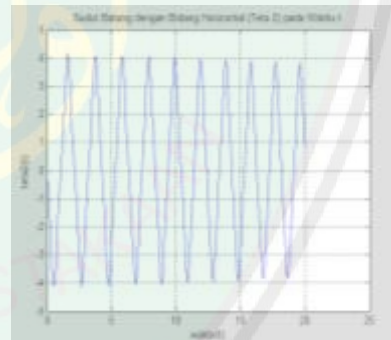
Gambar 3.27 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 5]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara 1.2 sampai -1.2



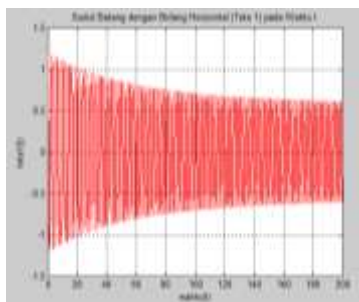
Gambar 3.28 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 5]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun Antara -4.12 sampai 4.12



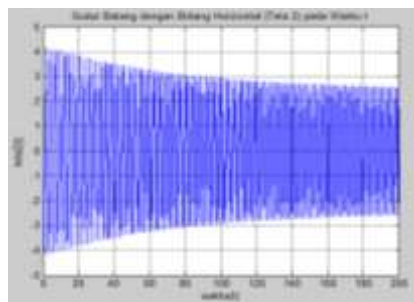
Gambar 3.29 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 20]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Kecil



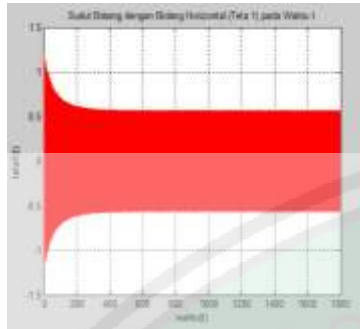
Gambar 3.30 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 20]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Kecil



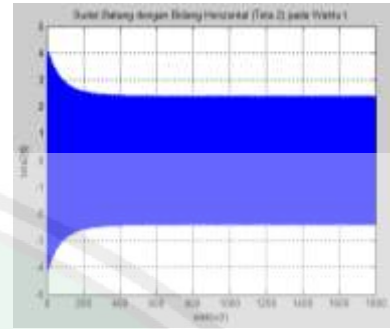
Gambar 3.31 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 200]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Kecil



Gambar 3.32 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 200]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Kecil

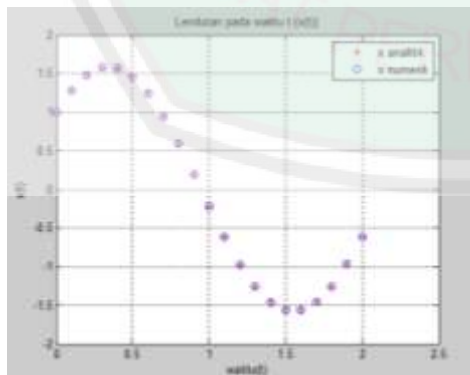


Gambar 3.33 Grafik $\theta_1(t)$ Saat $t = [0, 1800]$ dengan θ_1 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Stabil

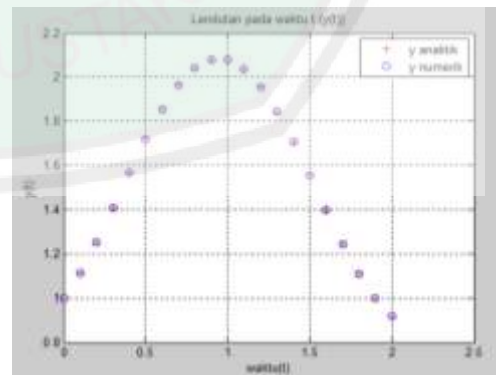


Gambar 3.34 Grafik $\theta_2(t)$ Saat $t = [0, 1800]$ dengan θ_2 Mulai Bergerak Naik dan Turun dengan Amplitudo Semakin Stabil

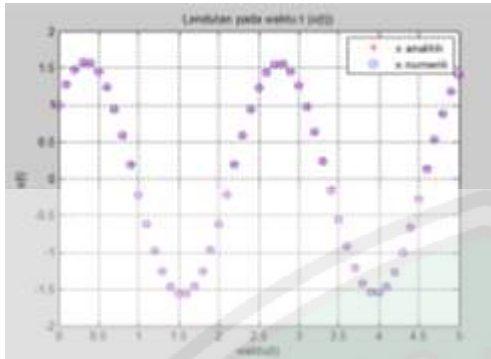
Solusi numerik untuk sistem persamaan (3.12) saat $t = 0.4$ atau saat iterasi keempat diperoleh nilai prediksi (*predictor*) dari $y(0.4)$ adalah 1.565771045443461 dan koreksi (*corrector*) dari $y(0.4)$ adalah 1.566015020015900. Sedangkan nilai prediksi dari $x(0.4)$ adalah 1.569052290776240 dan nilai koreksi dari $x(0.4)$ adalah 1.569358740317620. Sehingga, jika iterasi diteruskan sampai $t = 1500$ atau $n = 15000$ maka diperoleh hasil numerik sebagaimana pada Lampiran XIV. Dari sistem persamaan (3.12) didapatkan plot hasil numerik dan hasil analitik sebagai berikut:



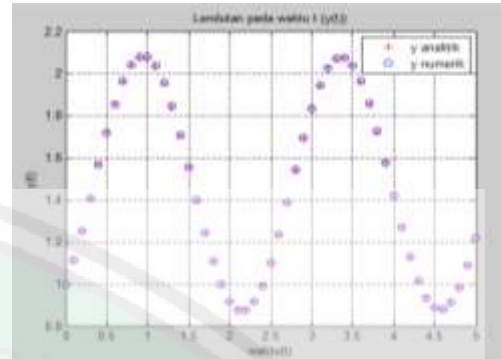
Gambar 3.35 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 2]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun



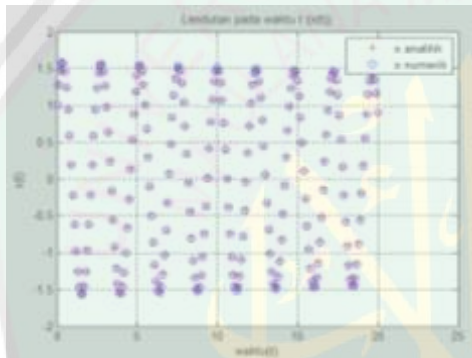
Gambar 3.36 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 2]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun



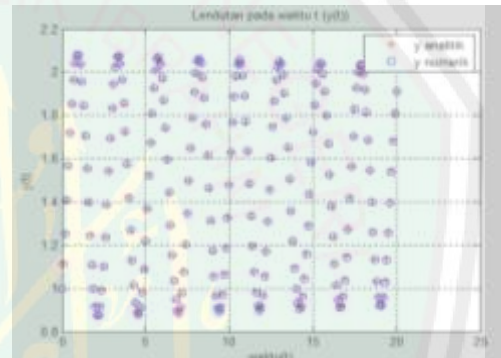
Gambar 3.37 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 5]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Sedikit Mengcil



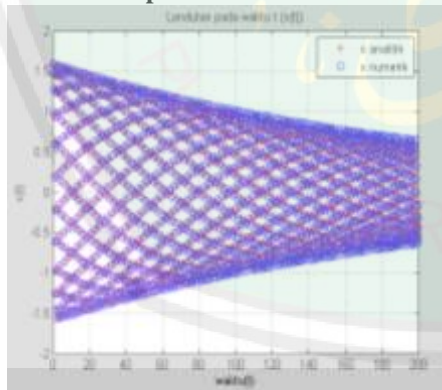
Gambar 3.38 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 5]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Sedikit Mengcil



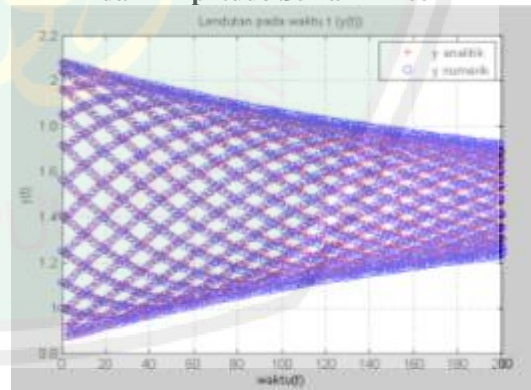
Gambar 3.39 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 20]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil



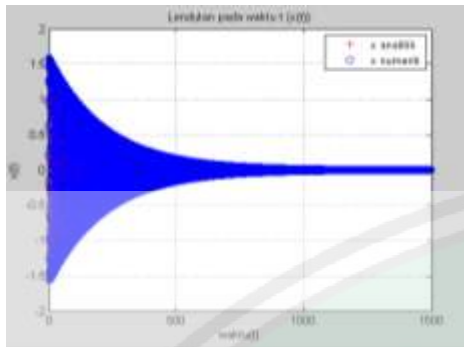
Gambar 3.40 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 20]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil



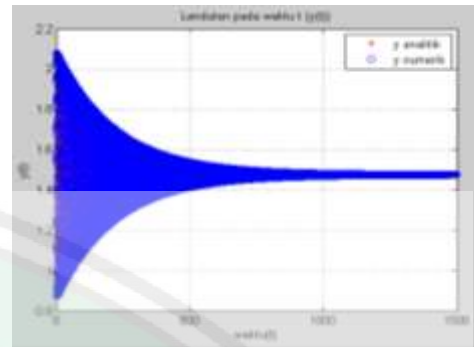
Gambar 3.41 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 200]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil



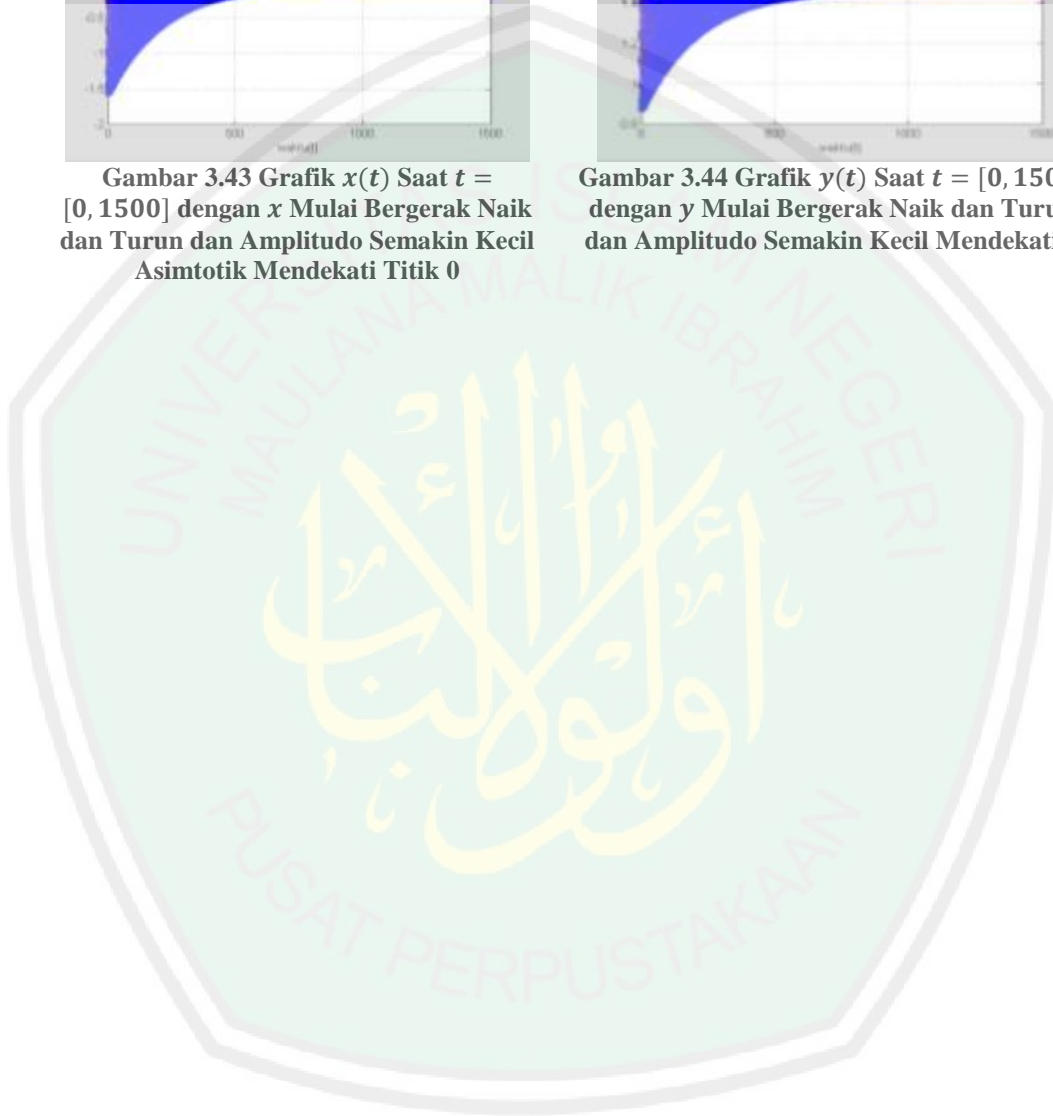
Gambar 3.42 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 200]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil



Gambar 3.43 Grafik $x(t)$ Saat $t = [0, 1500]$ dengan x Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil Asimtotik Mendekati Titik 0



Gambar 3.44 Grafik $y(t)$ Saat $t = [0, 1500]$ dengan y Mulai Bergerak Naik dan Turun dan Amplitudo Semakin Kecil Mendekati 0



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dikarenakan kabel atau tali penyangga tidak pernah kehilangan ketegangan ($y \pm l \sin \theta \geq 0$) maka model dari osilasi vertikal dawai ini diwakili oleh persamaan $\ddot{\theta} = -\frac{3K}{m} \sin 2\theta - \delta_1 \dot{\theta} + f(t)$ dan $\ddot{y} = -\frac{2K}{m} y - \delta_2 \dot{y} + g$.
2. Solusi numerik dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton menghasilkan profil grafik yang relatif sama dengan metode Runge Kutta, yang berarti bahwa kedua solusi tersebut memiliki hasil solusi numerik yang hampir sama dan mendekati solusi analitiknya.
3. Variasi parameter yang digunakan dalam skripsi adalah $m = 657.3$, $K = 2226.9$, dan $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$. Dengan variasi tersebut didapatkan profil grafik solusi numerik untuk $\theta_1(t)$ yang bergerak naik dan turun dengan amplitudo semakin stabil di antara titik -0.56 sampai 0.56 . Selanjutnya untuk $\theta_2(t)$ saat menghasilkan profil grafik yang bergerak naik dan turun dengan amplitudo semakin stabil di antara titik -2.56 sampai 2.56 . Sedangkan untuk $x(t)$ menghasilkan profil grafik yang bergerak naik dan turun dan amplitudo semakin kecil asimtotik mendekati titik 0 dan $y(t)$ menghasilkan profil grafik yang bergerak naik dan turun dan amplitudo semakin kecil mendekati 0.

4.2 Saran

Bahasan dalam skripsi terkait model osilasi vertikal dawai ini dibatasi dengan asumsi bahwa kabel atau tali penyangga tidak pernah kehilangan tegangan, sehingga $y \pm l \sin \theta \geq 0$. Oleh karena itu penulis menyarankan kepada pembaca yang ingin meneliti tentang osilasi vertikal dawai ini untuk mengembangkan karya ini dengan asumsi bahwa kabel atau penyangga pernah kehilangan tegangan.



DAFTAR PUSTAKA

- Alonso, M. & Finn, E.J. 1980. *Dasar-Dasar Fisika Universitas Edisi Kedua Jilid 2 Medan dan Gelombang*. Jakarta: Erlangga.
- Azizah, N. 2013. *Penyelesaian Persamaan Van Der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Bronson, R. & Costa, G. 2007. *Schaum's Outlines Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Chapra, S.C. & Canale, R.P. 1985. *Metode Numerik untuk Teknik dengan Penerapan pada Komputer Pribadi*. Jakarta: UI-Press.
- Conte, S.D. & Boor, C.D. 1980. *Dasar-Dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma*. Jakarta: Erlangga.
- Departemen Agama Republik Indonesia. 1990. *Al-Qur'an dan Tafsirnya*. Jakarta: Menteri Agama Republik Indonesia.
- Djojodiharjo, H. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Fikri, F. 2011. *Amplitudo, Frekuensi, dan Periode*. <http://fauzan-indo.blogspot.com/2011/03/amplitudo-frekuensi-dan-periode.html>. (diakses pada 12 September 2014).
- Fikriyah, U. 2008. *Penyelesaian Integrasi Numerik Newton Cotes dengan Metode Adam dan Milne*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Giancoli, D.C. 1998. *Fisika Edisi Kelima, Jilid I*. Jakarta: Erlangga.
- Halliday, D. & Resnick, R. 1978. *Physics, Jilid 3*. Jakarta: Erlangga.
- Lukmanto, D. 2001. *Metoda Numerik Bahan Kuliah Metoda Numerik Jurusan Teknik Sipil FT UGM Yogyakarta*. Bahan Kuliah Tidak Diterbitkan. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- McKenna, P.J. 1999. Large Torsional Oscillation in Suspension Bridges Revisited Fixing on Old Approximation. *Jurnal the American Mathematical Monthly*, (Online), 106 (1): 1-18, (<http://www.math.uconn.edu/~mckenna/2410f09/monthly1.pdf>), diakses tanggal 15 November 2014.
- McKenna, P.J. & K.S. Moore. 2000. Multiple Periodic Solutions to a Suspension Bridge Ordinary Differential Equation. *Jurnal Nonlinear Differential Equations*, (Online), 183-199, (<http://ejde.math.txstate.edu>) diakses tanggal 15 November 2014.
- Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

- Ohene, K.R. 2011. *A Mathematical Model of a Suspension Bridge Case Study: Adomi Bridge*. Tesis Tidak Diterbitkan. Kumasi: Kwame Nkrumah University.
- Ohene, K.R., E. Osei-Frimpong, Edwin Mends-Brew, & Avordeh Timothy King. 2012. . A Mathematical Model of a Suspension Bridge Case Study: Adomi Bridge, Atimpoku, Ghana. *Global Advanced Research Journal of Engineering, Technology and Innovation*, 1(3), 047-062.
- Sahid. 2004. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Urifah, S.N. 2008. *Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Heun*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.



RIWAYAT HIDUP

Sri Sasi Yuni Nurhayati, lahir di kota Tuban pada tanggal 2 Juni 1993, biasa dipanggil Sasi atau Yuni, tinggal di Dusun Minggu RT/RW 006/001 Desa Sumberejo Kecamatan Widang Kabupaten Tuban. Anak pertama tiga bersaudara dari pasangan Dono Sasmito dan Sri Harlin.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Pulogebang 16 PT Jakarta Timur dan di SDN Sumberejo I Widang lulus pada tahun 2005, setelah itu melanjutkan sekolah di MTsN Tambakberas Jombang dan lulus pada tahun 2008. Kemudian dia melanjutkan pendidikan di MAN Tambakberas Jombang dan lulus pada tahun 2011. Selanjutnya, pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif dalam organisasi ekstra maupun intra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensinya di bidang akademik dan organisasi. Dia pernah menjadi ketua Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada periode 2013, sekretaris Organisasi Mahasantri Intra Ummu Salamah (OMIMUSA) periode 2011/2012, dan berperan aktif dalam organisasi ekstra lainnya.

Sejak di bangku Taman Kanak-kanak hingga Tsanawiyah dia adalah pribadi yang penakut dan pemalu. Keberaniannya untuk memperlihatkan eksistensi dirinya dimulai saat ia mulai mengikuti kegiatan di Pesantren As-Sa'idiyah Bahrul Ulum Tambakberas Jombang. Semenjak itu dia mulai berani berbicara di hadapan banyak orang dan mulai berani menampakkan eksistensinya. Hingga akhirnya dia mulai berani mengikuti banyak lomba baik dalam bidang sains maupun agama. Sampai akhirnya dia mendapatkan penghargaan terbaiknya menjadi juara III dalam olimpiade Matematika se-Provinsi Jawa Timur mewakili almamaternya MAN Tambakberas Jombang.

Lampiran I Program Matlab untuk Sistem Persamaan $\dot{\theta}_1 = \theta_2$ dan $\dot{\theta}_2 = -\frac{3(0)}{6000} \sin 2\theta_1 - \delta_1 \theta_2 + 0.05 \sin 1.3t$

```

clc,clear all
format long

disp('teta1=x dan teta2=y')
f=inline('y','t','x','y')
g=inline('((-3*0)/6000)*sin(2*x)-
(0.01*y)+0.05*sin(1.3*t)','t','x','y')
h=0.1;
t0=0;
tn=1800;
n=(tn-t0)/h
x0=1.2;
y0=0;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
t=[t0:h:tn];

%untuk RK 4
for i=1:3
    k1=h*f(t(i),x(i),y(i));
    l1=h*g(t(i),x(i),y(i));
    k2=h*f(t(i)+(h/2),x(i)+(k1/2),y(i)+(l1/2));
    l2=h*g(t(i)+(h/2),x(i)+(k1/2),y(i)+(l1/2));
    k3=h*f(t(i)+(h/2),x(i)+(k2/2),y(i)+(l2/2));
    l3=h*g(t(i)+(h/2),x(i)+(k2/2),y(i)+(l2/2));
    k4=h*f(t(i)+h,x(i)+k3,y(i)+l3);
    l4=h*g(t(i)+h,x(i)+k3,y(i)+l3);

    x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
    t(i+1)=t(i)+h;
end

for i=4:n
    t(i+1)=t(i)+h;
    px(i+1)=x(i)+(h/24)*(55*f(t(i),x(i),y(i))-59*f(t(i-1),x(i-1),y(i-1))+37*f(t(i-2),x(i-2),y(i-2))-9*f(t(i-3),x(i-3),y(i-3))));
    py(i+1)=y(i)+(h/24)*(55*g(t(i),x(i),y(i))-59*g(t(i-1),x(i-1),y(i-1))+37*g(t(i-2),x(i-2),y(i-2))-9*g(t(i-3),x(i-3),y(i-3))));

    x(i+1)=x(i)+(h/24)*(9*f(t(i+1),px(i+1),py(i+1))+19*f(t(i),x(i),y(i))-5*f(t(i-1),x(i-1),y(i-1))+f(t(i-2),x(i-2),y(i-2))));

    y(i+1)=y(i)+(h/24)*(9*g(t(i+1),px(i+1),py(i+1))+19*g(t(i),x(i),y(i))-5*g(t(i-1),x(i-1),y(i-1))+g(t(i-2),x(i-2),y(i-2))));

end
disp('hasil:')
disp('=====')
disp('          t                px                y          ')
disp('          x                py                ')

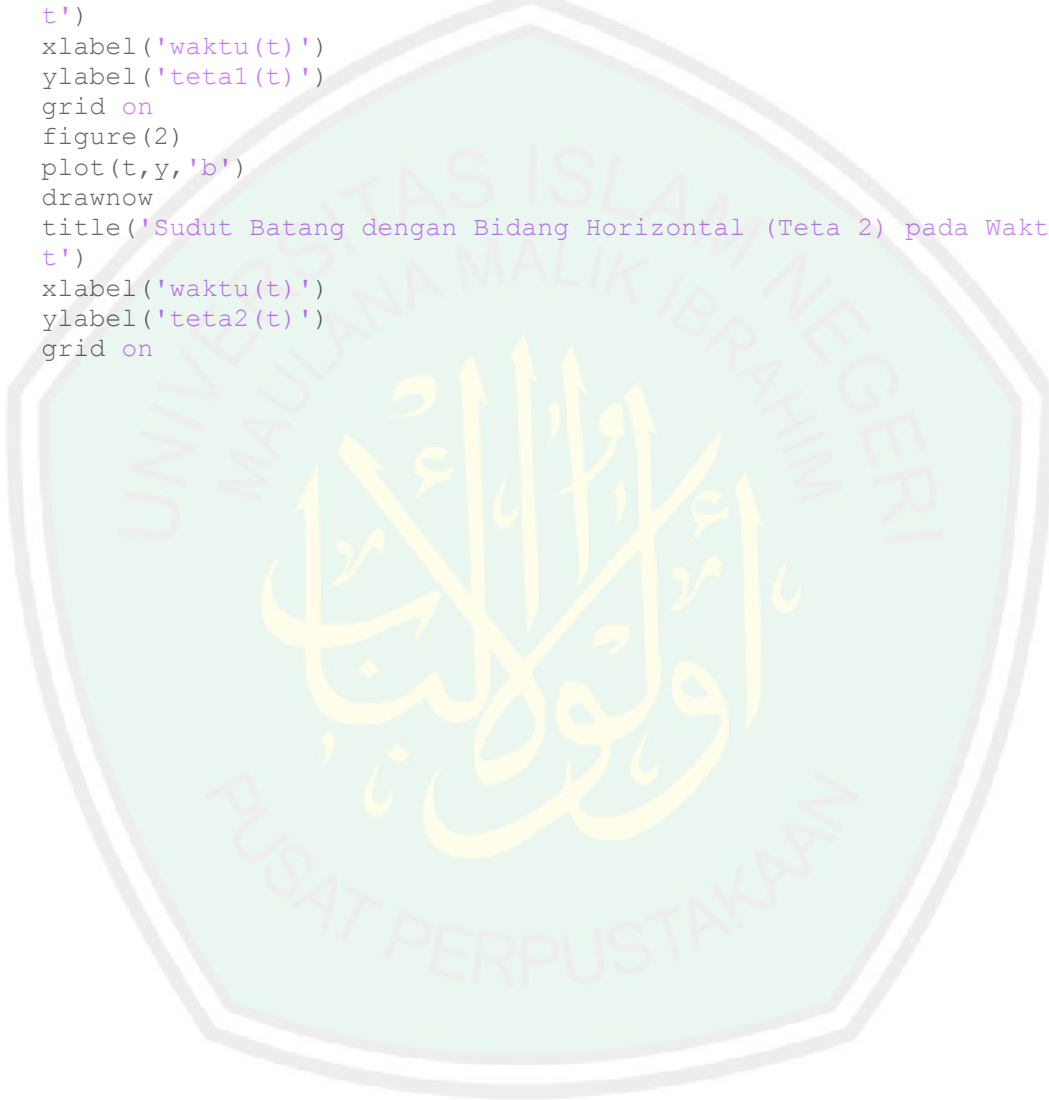
```

```

disp([ t' px' py' x' y' ])
disp('=====')

figure(1)
plot(t,x,'r');
title('Sudut Batang dengan Bidang Horizontal (Teta 1) pada Waktu
t')
xlabel('waktu(t)')
ylabel('teta1(t)')
grid on
figure(2)
plot(t,y,'b')
drawnow
title('Sudut Batang dengan Bidang Horizontal (Teta 2) pada Waktu
t')
xlabel('waktu(t)')
ylabel('teta2(t)')
grid on

```



Lampiran II Program Matlab untuk Sistem Persamaan $\dot{y} = x$ dan $\dot{x} = -\frac{2(3000)}{6000}y - 0.01x + 10$

```

clc,clear all
format long

disp('untuk menemukan y(t)')
f=inline('x','t','y','x')
g=inline('((-2*3000)/6000)*y-(0.01*x)+10','t','y','x')
h=0.1;
t0=0;
tn=1500;
n=(tn-t0)/h
x0=1;
y0=1;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
t=[t0:h:tn];

%untuk RK 4
for i=1:3
    k1=h*f(t(i),y(i),x(i));
    l1=h*g(t(i),y(i),x(i));
    k2=h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(k1/2),x(i)+(l1/2));
    l2=h*g(t(i)+(h/2),y(i)+(k1/2),x(i)+(l1/2));
    k3=h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(k2/2),x(i)+(l2/2));
    l3=h*g(t(i)+(h/2),y(i)+(k2/2),x(i)+(l2/2));
    k4=h*f(t(i)+h,y(i)+k3,x(i)+l3);
    l4=h*g(t(i)+h,y(i)+k3,x(i)+l3);

    y(i+1)=y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    x(i+1)=x(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
    t(i+1)=t(i)+h;
end

for i=4:n
    t(i+1)=t(i)+h;
    py(i+1)=y(i)+(h/24)*(55*f(t(i),y(i),x(i))-59*f(t(i-1),y(i-1),x(i-1))+37*f(t(i-2),y(i-2),x(i-2))-9*f(t(i-3),y(i-3),x(i-3))));
    px(i+1)=x(i)+(h/24)*(55*g(t(i),y(i),x(i))-59*g(t(i-1),y(i-1),x(i-1))+37*g(t(i-2),y(i-2),x(i-2))-9*g(t(i-3),y(i-3),x(i-3))));

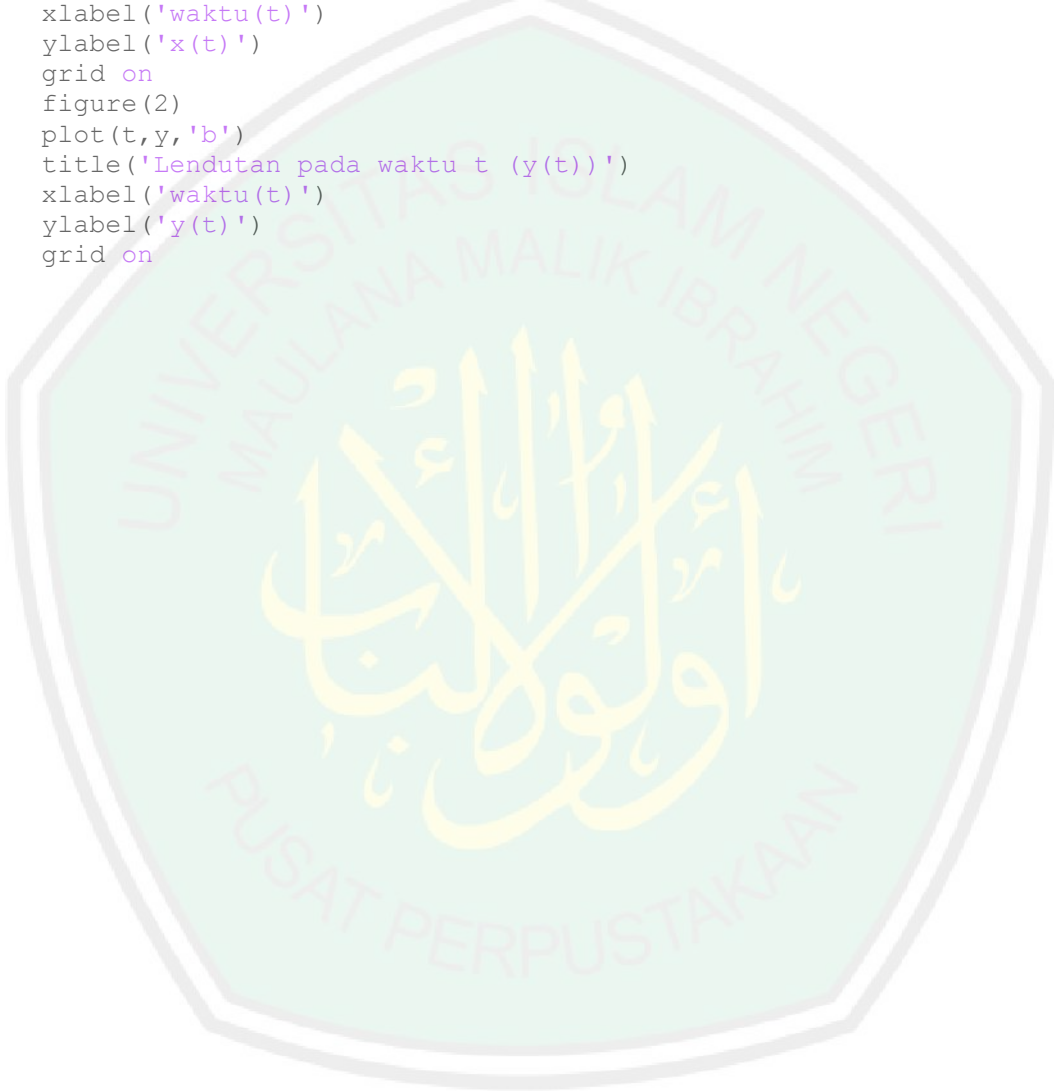
    y(i+1)=y(i)+(h/24)*(9*f(t(i+1),py(i+1),px(i+1))+19*f(t(i),y(i),x(i))-5*f(t(i-1),y(i-1),x(i-1))+f(t(i-2),y(i-2),x(i-2))));

    x(i+1)=x(i)+(h/24)*(9*g(t(i+1),py(i+1),px(i+1))+19*g(t(i),y(i),x(i))-5*g(t(i-1),y(i-1),x(i-1))+g(t(i-2),y(i-2),x(i-2))));
end
disp('hasil:')
disp('=====')
disp('          t                py                x')
disp('px          y                ')
disp([' t' py' px' y' x' ])

```

```
disp('=====')
```

```
figure(1)  
plot(t,x,'r')  
title('Lendutan pada waktu t (x(t))')  
xlabel('waktu(t)')  
ylabel('x(t)')  
grid on  
figure(2)  
plot(t,y,'b')  
title('Lendutan pada waktu t (y(t))')  
xlabel('waktu(t)')  
ylabel('y(t)')  
grid on
```



**Lampiran III Hasil Numerik Menggunakan Program MATLAB untuk
Sistem Persamaan (3.8)**

t	$p\theta_1$	$p\theta_2$	θ_1	θ_2
0.4	1.200683706610621	0.005076916625169	1.200683305666659	0.005077057918781
0.5	1.201324507485506	0.007829513447586	1.201324120200300	0.007829720345722
1	1.209928400828142	0.028073549795644	1.209928178265547	0.028074012555719
2	1.261326197346897	0.070805662126023	1.261326471039679	0.070806043058119
3	1.334404479538777	0.065038729711650	1.334404848526370	0.065038470749354
4	1.377059570084506	0.018671760277107	1.377059493799224	0.018671240800789
5	1.381211015599773	-0.000911620871699	1.381210605799735	-0.000911639828016
10	1.553699086197438	0.002412035215645	1.553698689037333	0.002412198849195
20	1.874674056971292	0.006833049801603	1.874673709896722	0.006833357989619
30	2.168454940772898	0.018521203482919	2.168454718517543	0.018521666479834
40	2.439009734403678	0.032340081453719	2.439009678108435	0.032340613555824
50	2.689159008842732	0.045202700399429	2.689159128928212	0.045203203111199
100	3.6589341163039	0.0279996279115	3.6589343739821	0.0279991957637
200	4.5056408946702	0.0334895354227	4.5056410981475	0.0334899862275
400	5.0052090443000	0.0028541776665	5.0052091909530	0.0028536699019
1000	5.062996314114	-0.031485297776	5.062996065096	-0.031485706651
1200	5.017203904146	0.007902032622	5.017203862356	0.007902566067
1500	5.022617973274	0.023258557551	5.022618110702	0.023259051746
1800	5.032549819006	0.034134736904	5.032550109178	0.034135096647

Lampiran IV Hasil Numerik Menggunakan Program MATLAB untuk Sistem Persamaan (3.10)

<i>t</i>	<i>py</i>	<i>px</i>	<i>y</i>	<i>x</i>
0.4	13.684666743295598	-1.554547671973904	13.684663975962952	-1.554562367671650
0.5	13.511146569184616	-1.912902976738170	13.511142510370288	-1.912917286144703
1	12.167225570840348	-3.349107627961206	12.167215060181920	-3.349118147480854
2	8.370067402949260	-3.601091439816396	8.370052900457027	-3.601088250875230
3	6.101773812577512	-0.556220945881100	6.101768625118835	-0.556207102149634
4	7.422215626487240	2.967203434761413	7.422224406991282	2.967215162786411
5	11.455601001804220	3.610170864555975	11.455615396628662	3.610168320918505
10	6.796790351854225	2.069673659491519	6.796795340617432	2.069686984841368
20	11.494237346756659	-3.304101462042270	11.494226456910480	-3.304109482748239
30	10.513030502243879	3.401984141875120	10.513043372939920	3.401984888709496
40	7.828900587347470	-2.441256139405792	7.828889894051569	-2.441250074016071
50	13.001780179716700	0.818952574616195	13.001785604548450	0.818942215874731
100	12.085008615952589	1.230826367332996	12.085014807797151	1.230819683091499
2000	9.999937350222	0.000170730281	9.999937349546	-0.000170730184
3000	9.999998810886	0.000000305606	9.999998810884	-0.000000305602
6000	10.000000000000	0.0000000000000000	10.000000000000	0.0000000000000000

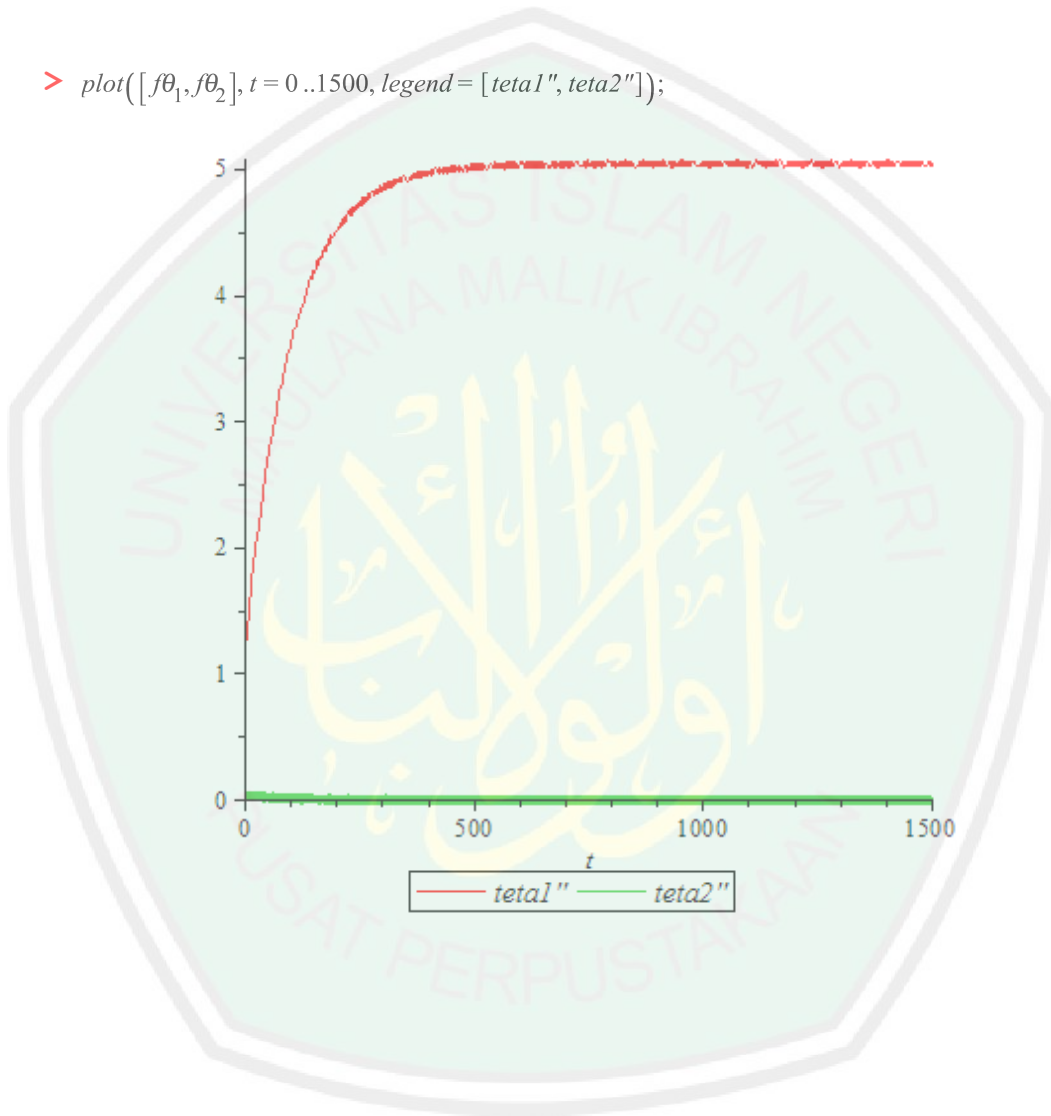
Lampiran V Program Maple untuk Sistem Persamaan $\dot{\theta}_1 = \theta_2$ dan $\dot{\theta}_2 = -\frac{3(0)}{6000} \sin 2\theta_1 - \delta_1 \theta_2 + 0.05 \sin 1.3t$

```

> restart; K := 0; m := 6000; delta := 0.01;
      K := 0
      m := 6000
      delta := 0.01
> f := diff(theta_1(t), t) = theta_2(t);
      f := d/dt theta_1(t) = theta_2(t)
> g := diff(theta_2(t), t) = -3*K/m * sin(2*theta_1(t)) - delta*theta_2(t) + 0.05
      *sin(1.3*t);
      g := d/dt theta_2(t) = -0.01*theta_2(t) + 0.05*sin(1.3*t)
> sol := dsolve([f, g, theta_2(0) = 0, theta_1(0) = 1.2]);
      sol := {theta_1(t) = -500/16901*sin(13/10*t) - 50/219713*cos(13/10*t)
      - 65000/16901*e^(-1/100*t) + 328/65, theta_2(t) = -650/16901*cos(13/10*t)
      + 5/16901*sin(13/10*t) + 650/16901*e^(-1/100*t)}
> ftheta_1 := subs(sol, theta_1(t));
      ftheta_1 := -500/16901*sin(13/10*t) - 50/219713*cos(13/10*t) - 65000/16901*e^(-1/100*t)
      + 328/65
> ftheta_2 := subs(sol, theta_2(t))
      ftheta_2 := -650/16901*cos(13/10*t) + 5/16901*sin(13/10*t) + 650/16901*e^(-1/100*t)
> h := 0.1;
      h := 0.1
> tn := 1; t0 := 0
      tn := 1
      t0 := 0
> n := (tn - t0)/h;
      n := 10.00000000

```

```
> for i from 0 to n do:  
   $\theta_2[i] := \text{evalf}(\text{subs}(t=i, fy)) :$   
   $\theta_1[i] := \text{evalf}(\text{subs}(t=i, fx)) :$   
end do;  
  
> plot([f $\theta_1$ , f $\theta_2$ ], t = 0 ..1500, legend = [teta1", teta2"]);
```

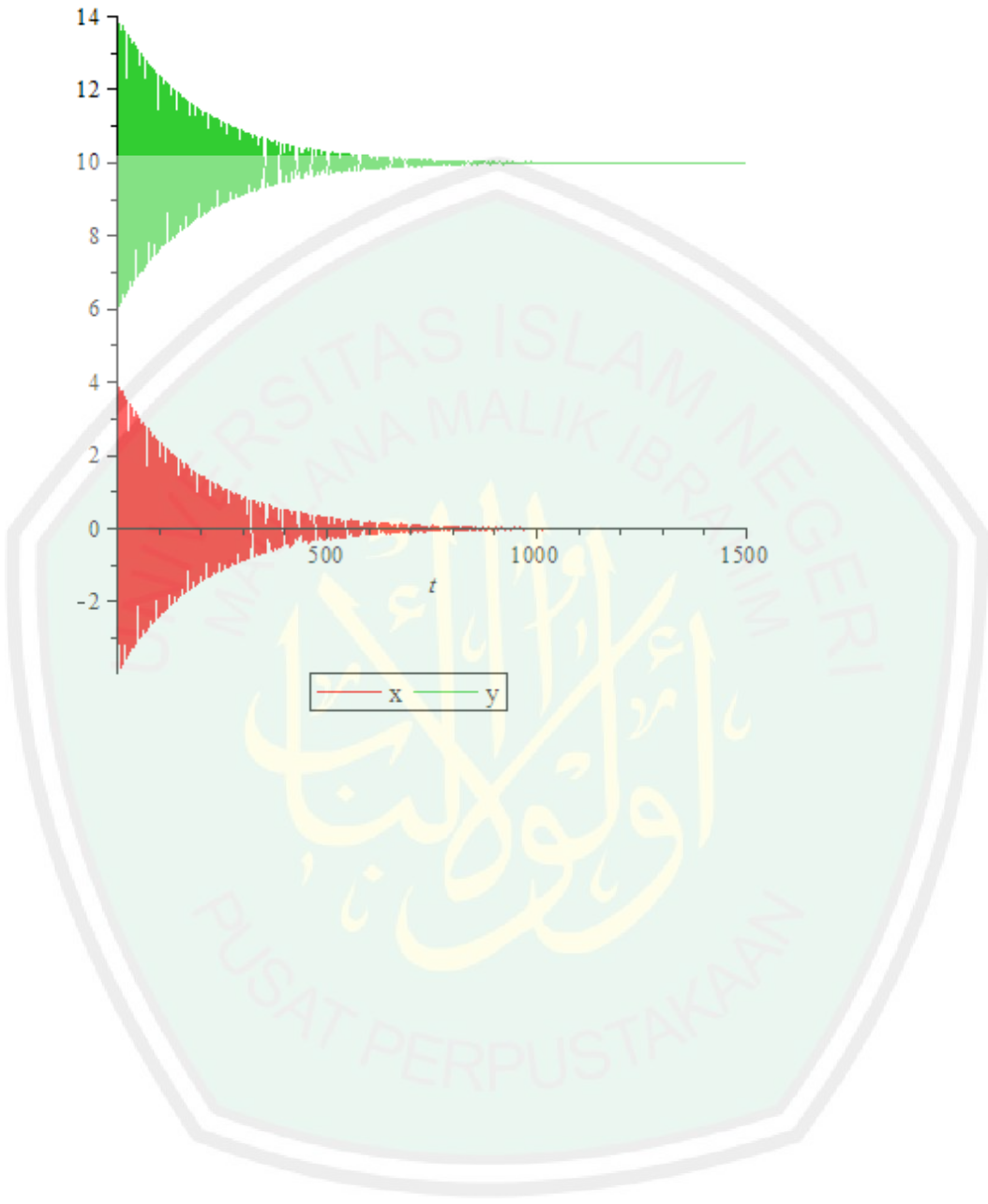


Lampiran VI Program Matlab untuk Sistem Persamaan $\dot{y} = x$ dan $\dot{x} = -\frac{2(3000)}{6000}y - 0.01x + 10$

```

> restart; K := 3000; m := 6000; delta := 0.01; g := 10;
      K := 3000
      m := 6000
      delta := 0.01
      g := 10
> f := diff(y(t), t) = x(t);
      f :=  $\frac{d}{dt} y(t) = x(t)$ 
> g := diff(x(t), t) = - $\frac{2 \cdot K}{m} \cdot y(t) - \text{delta} \cdot x(t) + g$ ;
      g :=  $\frac{d}{dt} x(t) = -y(t) - 0.01 x(t) + 10$ 
> sol := dsolve([f, g, y(0) = 14, x(0) = 0]);
      sol :=  $\left\{ x(t) = -\frac{800}{39999} e^{-\frac{1}{200} t} \sin\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \sqrt{39999}, y(t) = 10 + e^{-\frac{1}{200} t} \left( \frac{4}{39999} \sin\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \sqrt{39999} + 4 \cos\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \right) \right\}$ 
> fx := subs(sol, x(t));
      fx :=  $-\frac{800}{39999} e^{-\frac{1}{200} t} \sin\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \sqrt{39999}$ 
> fy := subs(sol, y(t));
      fy :=  $10 + e^{-\frac{1}{200} t} \left( \frac{4}{39999} \sin\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \sqrt{39999} + 4 \cos\left(\frac{1}{200} \sqrt{39999} t\right) \right)$ 
> h := 0.1;
      h := 0.1
> n :=  $\frac{600 - 0}{h}$ ;
      n := 6000.
> for i from 0 to n do:
      y[i] := evalf(subs(t = i, fy)) :
      x[i] := evalf(subs(t = i, fx)) :
      end do;
plot([fx, fy], t = 0 .. 1500, legend = ["x", "y"]);

```



Lampiran VII Galat untuk Persamaan $\theta_1 = \theta_2$

t	Solusi Analitik	Solusi numerik ($p\theta_1$)	Solusi numerik (θ_1)	Galat ($p\theta_1$)	Galat (θ_1)
0	1.199999999	1.2000000000000000	1.2000000000000000	$1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$
1	1.209928349	1.209928400828142	1.209928178265547	$5.18281 \cdot 10^{-8}$	$1.70734 \cdot 10^{-7}$
2	1.261326396	1.261326197346897	1.261326471039679	$1.98653 \cdot 10^{-7}$	$7.50397 \cdot 10^{-8}$
3	1.334403975	1.334404479538777	1.334404848526370	$5.04539 \cdot 10^{-7}$	$8.73526 \cdot 10^{-7}$
4	1.377058040	1.377059570084506	1.377059493799224	$1.53008 \cdot 10^{-6}$	$1.4538 \cdot 10^{-6}$
5	1.381209245	1.381211015599773	1.381210605799735	$1.7706 \cdot 10^{-6}$	$1.3608 \cdot 10^{-6}$
10	1.553579095	1.5535820583990	1.5535816507509	$2.9634 \cdot 10^{-6}$	$2.55575 \cdot 10^{-6}$
20	1.874668944	1.874674056971292	1.874673709896722	$5.11297 \cdot 10^{-6}$	$4.7659 \cdot 10^{-6}$
30	2.168447936	2.168454940772898	2.168454718517543	$7.00477 \cdot 10^{-6}$	$6.78252 \cdot 10^{-6}$
40	2.439001020	2.439009734403678	2.439009678108435	$8.7144 \cdot 10^{-6}$	$8.65811 \cdot 10^{-6}$
50	2.689148702	2.689159008842732	2.689159128928212	$1.03068 \cdot 10^{-5}$	$1.04269 \cdot 10^{-5}$
100	3.658916520	3.6589341163039	3.6589343739821	$1.75963 \cdot 10^{-5}$	$1.7854 \cdot 10^{-5}$
200	4.505617498	4.5056408946702	4.5056410981475	$2.33967 \cdot 10^{-5}$	$-2.36001 \cdot 10^{-5}$
400	5.005216970	5.0052090443000	5.0052091909530	$7.9257 \cdot 10^{-6}$	$7.77905 \cdot 10^{-6}$
1000	5.062967867	5.062996314114	5.062996065096	$2.84471 \cdot 10^{-5}$	$2.81981 \cdot 10^{-5}$
1200	5.017176507	5.017203904146	5.017203862356	$2.73971 \cdot 10^{-5}$	$2.73554 \cdot 10^{-5}$
1500	5.022590758	5.022617973274	5.022618110702	$2.72153 \cdot 10^{-5}$	$2.73527 \cdot 10^{-5}$
1800	5.032522673	5.032549819006	5.032550109178	$2.7146 \cdot 10^{-5}$	$2.74362 \cdot 10^{-5}$

Lampiran VIII Galat untuk Persamaan $\dot{\theta}_2 = -\frac{3(0)}{6000} \sin 2\theta_1 - \delta_1 \theta_2 + 0.05 \sin 1.3t$

t	Solusi Analitik	Solusi numerik ($p\theta_2$)	Solusi numerik (θ_2)	Galat ($p\theta_2$)	Galat (θ_2)
0	0	0	0	0	0
1	0.02807383849	0.028073549795644	0.028074012555719	$2.88694 \cdot 10^{-7}$	$1.74066 \cdot 10^{-7}$
2	0.07080553424	0.070805662126023	0.070806043058119	$1.27886 \cdot 10^{-7}$	$5.08818 \cdot 10^{-7}$
3	0.06503797195	0.065038729711650	0.065038470749354	$7.57762 \cdot 10^{-7}$	$4.98799 \cdot 10^{-7}$
4	0.01867108609	0.018671760277107	0.018671240800789	$6.74187 \cdot 10^{-7}$	$1.54711 \cdot 10^{-7}$
5	-0.00091161652	-0.000911620871699	-0.000911639828016	$4.3517 \cdot 10^{-9}$	$2.3308 \cdot 10^{-8}$
10	0.00002394822	0.0000238304669	0.0000239267984	$1.17753 \cdot 10^{-7}$	$2.14216 \cdot 10^{-8}$
20	0.00683333662	0.006833049801603	0.006833357989619	$2.86818 \cdot 10^{-7}$	$2.13696 \cdot 10^{-8}$
30	0.01852156170	0.018521203482919	0.018521666479834	$3.58217 \cdot 10^{-7}$	$1.0478 \cdot 10^{-7}$
40	0.03234040444	0.032340081453719	0.032340613555824	$3.22986 \cdot 10^{-7}$	$2.09116 \cdot 10^{-7}$
50	0.04520289188	0.045202700399429	0.045203203111199	$1.91481 \cdot 10^{-7}$	$3.11231 \cdot 10^{-7}$
100	0.02799896290	0.0279996279115	0.0279991957637	$6.65011 \cdot 10^{-7}$	$2.32864 \cdot 10^{-7}$
200	0.03783044104	0.0366241089599	0.0366245188072	0.001206332	0.001205922
400	-0.002143208709	-0.0021426724027	-0.0021431973962	$5.36306 \cdot 10^{-7}$	$1.13128 \cdot 10^{-8}$
1000	-0.03148548534	-0.031485297776	-0.031485706651	$1.87564 \cdot 10^{-7}$	$2.21311 \cdot 10^{-7}$
1200	0.007902533667	0.007902032622	0.007902566067	$5.01045 \cdot 10^{-7}$	$3.24 \cdot 10^{-8}$
1500	0.02325889860	0.023258557551	0.023259051746	$3.41049 \cdot 10^{-7}$	$1.53146 \cdot 10^{-7}$
1800	0.03413485225	0.034134736904	0.034135096647	$1.15346 \cdot 10^{-7}$	$2.44397 \cdot 10^{-7}$

Lampiran IX Galat untuk Persamaan $\dot{y} = x$

t	Solusi Analitik	Solusi numerik (py)	Solusi numerik (y)	Galat (py)	Galat (y)
0	14	14.000000000000000	14.000000000000000	0	0
1	12.16721757	12.167225570840348	12.167215060181920	$8.00084 \cdot 10^{-6}$	$2.50982 \cdot 10^{-6}$
2	8.370071027	8.370067402949260	8.370052900457027	$3.62405 \cdot 10^{-6}$	$1.81265 \cdot 10^{-5}$
3	6.101788288	6.101773812577512	6.101768625118835	$1.44754 \cdot 10^{-5}$	$1.96629 \cdot 10^{-5}$
4	7.422213319	7.422215626487240	7.422224406991282	$2.30749 \cdot 10^{-6}$	$1.1088 \cdot 10^{-5}$
5	11.08769480	11.455601001804220	11.455615396628662	0.367906202	0.367920597
6	13.72166589	13.721706225697123	13.721713206161953	$4.03357 \cdot 10^{-5}$	$4.73162 \cdot 10^{-5}$
7	12.92479711	12.924793803051426	12.924786876729391	$3.30695 \cdot 10^{-6}$	$1.02333 \cdot 10^{-5}$
8	9.460212461	9.460150689635322	9.460136331191903	$6.17714 \cdot 10^{-5}$	$7.61298 \cdot 10^{-5}$
9	6.523906115	6.523835400628372	6.523826819372413	$7.07144 \cdot 10^{-5}$	$7.92956 \cdot 10^{-5}$
10	6.796795258	6.796790351854225	6.796795340617432	$4.90615 \cdot 10^{-6}$	$8.26174 \cdot 10^{-8}$
20	11.49433740	11.494237346756659	11.494226456910480	0.000100053	0.000110943
30	10.51277682	10.513030502243879	10.513043372939920	0.000253682	0.000266553
40	7.829256114	7.828900587347470	7.828889894051569	0.000355527	0.00036622
50	13.00145756	13.001780179716700	13.001785604548450	0.00032262	0.000328045
100	12.08439840	12.085008615952589	12.085014807797151	0.000610216	0.000616408
2000	9.999938365	9.999937350222	9.999937349546	$1.01478 \cdot 10^{-6}$	$1.01545 \cdot 10^{-6}$
3000	9.999998818	9.99998810886	9.99998810884	$1.07091 \cdot 10^{-6}$	$1.07092 \cdot 10^{-6}$
6000	10.00000000	10.000000000000	10.000000000000	0	0

Lampiran X Galat untuk Persamaan $\dot{x} = -\frac{2(3000)}{6000}y - 0.01x + 10$

t	Solusi Analitik	Solusi numerik (px)	Solusi numerik (x)	Galat (px)	Galat (x)
0	0	0	0	0	0
1	-3.349111507	-3.349107627961206	-3.349118147480854	$3.87904 \cdot 10^{-6}$	$6.64048 \cdot 10^{-6}$
2	-3.601085279	-3.601091439816396	-3.601088250875230	$6.16082 \cdot 10^{-6}$	$2.97188 \cdot 10^{-6}$
3	-0.5562292601	-0.556220945881100	-0.556207102149634	$8.31422 \cdot 10^{-6}$	$2.2158 \cdot 10^{-5}$
4	2.967176153	2.967203434761413	2.967215162786411	$2.72818 \cdot 10^{-5}$	$3.90098 \cdot 10^{-5}$
5	3.741109321	3.610170864555975	3.610168320918505	0.130938456	0.130941
6	1.084923185	1.084895069250524	1.084882279796056	$2.81157 \cdot 10^{-5}$	$4.09052 \cdot 10^{-5}$
7	-2.537336189	-2.537395870882390	-2.537408537772994	$5.96819 \cdot 10^{-5}$	$7.23488 \cdot 10^{-5}$
8	-3.802363249	-3.802396785681170	-3.802397743311644	$3.35367 \cdot 10^{-5}$	$3.44943 \cdot 10^{-5}$
9	-1.576348598	-1.576308768027382	-1.576297256812547	$3.983 \cdot 10^{-5}$	$5.13412 \cdot 10^{-5}$
10	2.069582331	2.069673659491519	2.069686984841368	$9.13285 \cdot 10^{-5}$	0.000104654
20	-3.303940042	-3.304101462042270	-3.304109482748239	0.00016142	0.000169441
30	3.401868232	3.401984141875120	3.401984888709496	0.00011591	0.000116657
40	-2.441310532	-2.441256139405792	-2.441250074016071	$5.43926 \cdot 10^{-5}$	$6.0458 \cdot 10^{-5}$
50	0.8192398377	0.818952574616195	0.818942215874731	0.000287263	0.000297622
100	1.231134688	1.230826367332996	1.230819683091499	0.000308321	0.000315005
2000	-0.0001705123572	-0.000170730281	-0.000170730184	$2.17924 \cdot 10^{-7}$	$2.17827E-07$
3000	-0.0000003127773	-0.000000305606	-0.000000305602	$-7.1713 \cdot 10^{-9}$	$-7.1753 \cdot 10^{-9}$
6000	$1.850013733 \cdot 10^{-13}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0	0

Lampiran XI Perbandingan Galat untuk Sistem Persamaan (3.8)

Waktu	Solusi Numerik dengan RK4 (Ohene, 2011)	Solusi Analitik (Ohene, 2011)	Numerik dengan ABM	Galat RK4	Galat ABM
0.4	1.20068341	1.20068333	1.20068331	0.00000008	0.00000002
0.5	1.20132429	1.20132418	1.20132412	0.00000011	0.00000006
1	1.20992871	1.20992835	1.20992818	0.00000036	0.00000017
2	1.26132722	1.26132643	1.26132647	0.00000079	0.00000004
3	1.33440468	1.33440403	1.33440485	0.00000065	0.00000082
4	1.37705822	1.37705808	1.37705949	0.00000014	0.00000141
5	1.38120925	1.38120927	1.38121061	0.00000002	0.00000134
10	1.55357913	1.55357914	1.55369868	0.00000001	0.00011954
20	1.87466908	1.87466910	1.87467371	0.00000002	0.00000461
30	2.16844823	2.16844832	2.16845472	0.00000009	0.00000064
40	2.43900148	2.43900142	2.43900968	0.00000006	0.00000826
50	2.68914931	2.68914928	2.68915913	0.00000003	0.00000985
100	3.65891689	3.65891735	3.65590472	0.00000046	0.00301263
200	4.50561804	4.50561635	4.5056411	0.00000169	0.00002475
400	5.00521705	5.00521440	5.00520919	0.00000265	0.00000521
1000	5.06296764	5.06296848	5.06299606	0.00000084	0.00002758
1200	5.01717679	5.01717563	5.01720386	0.00000116	0.00002823
1500	5.02259121	5.02258948	5.02261811	0.00000173	0.00002863
1800	5.03252323	5.03252001	5.03255011	0.00000322	0.00000301

Lampiran XII Perbandingan Galat untuk Sistem Persamaan (3.10)

Waktu	Solusi Numerik dengan RK4 (Ohene, 2011)	Solusi Analitik (Ohene, 2011)	Numerik dengan ABM	Galat RK4	Galat ABM
0	14.00000000	14.00000000	14.00000000	0	0
0.1	13.98002332	13.98002282	13.98002333	0.0000005	0.00000051
0.2	13.92031940	13.92031742	13.92031949	0.00000198	0.00000207
0.3	13.82152421	13.82151978	13.82152444	0.00000443	0.00000446
0.4	13.68466343	13.68465566	13.68466398	0.00000777	0.00000832
0.5	13.51114191	13.51112995	13.51114251	0.00001196	0.00001256
1	12.16721756	12.16717563	12.16721506	0.00004193	0.00003943
2	8.37007107	8.36998057	8.37005290	0.0000905	0.00007233
3	6.10178894	6.10176667	6.10176862	0.00002227	0.00000195
4	7.42221424	7.42236122	7.422224406	0.00014698	0.000136814
5	11.08769484	11.08792920	11.45561539	0.00023436	0.36768619
10	6.79679825	6.79705211	6.79679534	0.00025386	0.00025677
20	11.49433323	11.49351302	11.49422645	0.00082021	0.00071343
30	10.51277827	10.51405368	10.51304337	0.00127541	0.00101031
40	7.82926076	7.82803014	7.82888989	0.00123062	0.00085975
50	13.00144605	13.00197844	13.00178560	0.00053239	0.00019284
100	12.08438405	12.08594881	12.08501481	0.00156476	0.000934
2000	9.99993837	9.99993411	9.99993735	0.00000426	0.00000324
3000	9.99999882	9.99999881	9.99999881	0.00000001	0
6000	10.00000000	10.00000000	10.00000000	0	0

Lampiran XIII Hasil Solusi Numerik untuk Sistem Persamaan (3.11)

t	$p\theta_1$	$p\theta_2$	θ_1	θ_2
0	0	0	1.2000000000000000	0
0.1	0	0	1.165273765681427	-0.702589688846738
0.2	0	0	1.056296457982396	-1.499106734286068
0.3	0	0	0.860459622875013	-2.439767526355710
0.4	0.561560726566616	-3.475415162323568	0.565287225045484	-3.423075599996315
0.5	0.175843408738091	-4.119238268089468	0.184404517065306	-4.102645748657742
1	-1.173142982553003	-0.542853437548802	-1.161478499593082	-0.563757209616831
2	1.112413300138765	1.176353265373992	1.108511479246729	1.087810804749419
5	-0.719642312983072	-2.773005764748137	-0.739376198003201	-2.748707375256425
20	1.003625913006027	0.819987885647517	1.000586231096890	0.741710324750851
200	-4.262958097182	-1.8185372679903	-4.249997558183	1.7872049854664
1800	3.03397275123	0.1938716596832	3.06697519108	0.1979395028283

Lampiran XIV Hasil Solusi Numerik untuk Sistem Persamaan (3.12)

t	py	px	y	x
0	0	0	1.0000000000000000	1.0000000000000000
0.1	0	0	1.114845359464123	1.283944372918543
0.2	0	0	1.253882823679171	1.481144964477964
0.3	0	0	1.407725547078278	1.578409649342866
0.4	1.565771045443461	1.569052290776240	1.566015020015900	1.569358740317620
0.5	1.717829293914474	1.454473177064339	1.718086567421640	1.454613772078892
1	2.077892689357530	-0.222591546162867	2.078014195194178	-0.223215514042373
2	0.918218080710044	-0.609563097783753	0.917991997050215	-0.609190660415284
5	1.219529738908791	1.404758781042095	1.219660386294275	1.405354366673651
20	1.914148845524367	0.894764711154890	1.914384424604873	0.894576616093817
200	1.2348456048684	-0.1223643120637	1.2347675382876	-0.1221678277631
1500	1.476419994894	-0.000701903653	1.476420049548	-0.000702647922