ANALISIS METODE BEDA HINGGA IMPLISIT, EKSPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Oleh:
WAHYUDI
NIM. 10610001

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

ANALISIS METODE BEDA HINGGA IMPLISIT, EKSPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
WAHYUDI
NIM. 10610001

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

ANALISIS METODE BEDA HINGGA IMPLISIT, EKSPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Oleh:
WAHYUDI
NIM. 10610001

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 13 Januari 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	**Achmad Nashichuddin, M.A**
NIP. 19760318 200604 1 002	**NIP. 19730705 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS METODE BEDA HINGGA IMPLISIT, EKSPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Oleh:
WAHYUDI
NIM. 10610001

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Maret 2014

Penguji Utama	:	Dr. Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002 ____________
Ketua Penguji	:	Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012 ____________
Sekretaris Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002 ____________
Anggota Penguji	:	Achmad Nashichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 002 ____________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Wahyudi

NIM : 10610001

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Analisis Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit, dan Crank-Nicholson pada Perhitungan Harga Opsi Asia

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil pikiran atau tulisan orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Maret 2014
Yang membuat pernyataan,

Wahyudi
NIM. 10610001

MOTTO

فَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٍ خَيۡرٗا يَرَهُۥ ۝٧ وَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٖ شَرّٗا يَرَهُۥ ۝٨

Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya.

dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya pula.

(Q.S. Al-Zalzalah Ayat 7-8)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Bapak tersayang Sarjo Sastro Utomo dan Ibu tersayang Samuti tercinta

Kakak Irianto, Kakak Sugiono, Kakak Rudi Santoso, Paman Sarmun, dan Bibi Suminah yang selalu memberikan motivasi, semangat, dan doa kepada penulis .

Dicha Zamilatin Nisa' yang selalu memberikan semangat untuk lebih giat bagi penulis, dan semua keluarga yang ada di Kota Magetan terima kasih atas doanya.

Binti Tsamrotul Fitria, Laila Fitriyah, Rista Umdah Masrifah dan Fatma Mufidah yang selalu meluangkan waktu untuk bertukar pikiran.

KATA PENGANTAR

Syukur *Alhamdulillah* penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **"Analisis Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit, dan Crank-Nicholson pada Perhitungan Harga Opsi Asia"** ini dengan baik dan benar. Sholawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW yang membawa manusia dalam kebenaran.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mengarahkan, membimbing, dan memberikan pemikirannya sehingga terselesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si, selaku Dosen Wali Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan arahan yang terbaik selama ini.

6. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bimbingan yang terbaik selama penulisan skripsi ini.
7. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan seluruh staf serta karyawan.
8. Ayah dan bunda tersayang, yang selama ini memberikan segalanya buat penulis yang tiada habisnya.
9. Kakak tercinta, yang selalu memberikan doa dengan tulus kepada penulis.
10. Dicha Zamilatin Nisa', yang selalu memberikan motivasi dan doa kepada penulis.
11. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010, khususnya Muchtar Latif Ansori, Rista Umdah Masrifah, Laila Fitriyah, Fatma Mufidah, Binti Tsamrotul Fitria, Istiqomah, dan Mahatva Cahyaningtyas.
12. Muhammad Sukron yang telah memberikan waktunya untuk diskusi tentang program komputasi.
13. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas bantuannya.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya bidang matematika. Amin.

Malang, Maret 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Wahyudi. 2014. **Analisis Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit, dan Crank-Nicholson pada Perhitungan Harga Opsi Asia.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Kontrak opsi, Implisit, Eksplisit, Crank-Nicholson

Kontrak opsi adalah suatu kontrak antara dua pihak, satu pihak memberikan hak kepada pihak lain untuk membeli atau menjual suatu aset dengan harga dan waktu yang telah disepakati sebelumya. Ada dua macam kontrak opsi yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah hak untuk membeli suatu aset dengan harga dan waktu tertentu sedangkan opsi *put* adalah hak untuk menjual suatu aset dengan harga dan waktu tertentu. Berdasarkan penggunaan waktu, ada dua macam opsi yaitu opsi Eropa dan opsi Amerika. Opsi Eropa adalah opsi yang digunakan hanya pada jatuh tempo. Sedangkan opsi Amerika adalah opsi yang digunakan hanya pada sebelum jatuh tempo. Gabungan dari opsi Eropa dan Opsi Amerika disebut Opsi Asia.

Metode beda hingga adalah metode yang digunakan untuk mengaproksimasi suatu persamaan diferensial. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah implisit, eksplisit dan Crank-Nicholson. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hasil analisis perbandingan metode beda hingga implisit, eksplisit dan Crank-Nicholson pada perhitungan harga opsi Asia.

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwa dalam kasus ini yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia adalah metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson. Dari kedua metode tersebut yang lebih efektif dalam menentukan harga opsi Asia adalah metode beda hingga Crank-Nicholson, karena metode ini memberikan hasil yang optimal dibanding dengan metode beda hingga implisit.

ABSTRACT

Wahyudi. 2014. **Analysis of Implicit Finite Different Methods, Explicit, and Crank-Nicholson on Asian Option Price Calculation**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology. State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Keywords: Option, Implicit, Explicit, Crank-Nicholson

Option is a contract between two parties, one party entitles the other party to buy or sell an asset at a price and time that has been agreed previously. There are two types of option, namely call option and put option. Call option is the right to buy an asset at a certain price and time while a put option is the right to sell an asset at a specific price and time. Based on the use of time, there are two kinds of options, these are European options and American options. European options are options exercised only at maturity. While the American option is an option that is exercised before maturity. Combination of European and American Options are called Asian options.

Finite difference methods are methods that are used to approximate a differential equation. The method used in this study is the implicit, explicit and Crank-Nicholson. This study aims to determine the results of a comparative analysis of implicit finite difference methods, explicit and Crank-Nicholson at the Asian option price calculation.

From the research that has been done, it can be seen that in this case the methods that can be used to determine the price of the Asian option are an implicit finite difference method and Crank-Nicholson. The more effective in determining the price of the Asean option is a finite difference method of Crank-Nicholson, because this method provides optimal results compared with the implicit finite difference method.

ملخص

وحيودي. ٢٠١٤. **تحليل الطريقة الفروق المحدودة الضمنية، والصريحية، وجرنك نيكلسون في حساب الأسعار الخيار آسيا**. بحث جامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف (١) عبد العزيز الماجستير (٢) أحمد نصح الدين الماجستير.

الكلمة المفتاحية: عقد الخيار، ضمني، صريح، جرنك نيكلسون

الخيار هو العقد بين طرفين، يعطي طرف واحد الى الطرف الآخر الحق لشراء أو بيع أحد الأصولب السعر والوقت وافقة مقدما. الخيار نوعان خيار الإستدعاء و خيار البيع. خيار الإستدعاء هو حق في شراء الأصول بسعر و وقت معين أما خيار البيع هو حق في بيع الأصول بسعر و وقت معين .باستناد الوقت، خيار نوعان خيار الأوروبية و خيار الأمريكية. خيار الأوروبية هو خيار يستخدم عند الاستحقاق . أما خيار الأمريكية هو خيار الذي يستخدم قبل الاستحقاق. مجموعة بين خيار الأوروبية و خيار الأمريكية هي خيار الآسيا.

طريقة الفروق المحدودة هي طريقة التي تستخدم لتقريب معادلة تفاضلية. طريقة التي تستخدم في هذا البحث هي الطريقة الضمنية والصريحية، وجرنك نيكلسون. يهدف هذا البحث لمعرفة نتائج تحليل مقارن بين طريقة الفروق المحدودة الضمنية والصريحية، وجرنك نيكلسونفي لحساب الأسعار الخيار آسيا.

وانتاج هذا البحث يعرف أن في هذه المسئلة يمكن استخدامها لتحديد أسعار الخيار هي طريقة الفروق المحدودة الضمنية وجرنك نيكلسون. من طريقتين التي اكثر فعالية في تحديد سعر الخيار الآسيا هي طريقة الفروق المحدودة جرنك نيكلسون، لأن هذه الطريقة تعطي النتائج المثلى بالمقارنة طريقة الفروق المحدودة الضمنية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan cabang ilmu pengetahuan yang eksak dan terorganisasi secara sistematik (Sujono, 1988). Dalam cabang ilmu matematika terdapat suatu metode numerik. Metode ini adalah metode yang digunakan untuk mengaproksimasi solusi analitik pada suatu persamaan diferensial. Ada beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Untuk persamaan deferensial biasa, metode yang biasa digunakan adalah metode deret Taylor, Euler, Heun, dan sebagainya. Sedangkan untuk persamaan diferensial parsial, metode yang sering digunakan adalah metode beda hingga implisit, eksplisit, Crank-Nicholson, dan sebagainya.

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban yang eksak, tetapi mengusahakan perumusan metode yang menghasilkan jawaban pendekatan yang berbeda dari jawaban yang eksak sebesar suatu nilai yang dapat diterima berdasarkan pertimbangan praktis, tetapi cukup dapat memberikan penghayatan persoalan yang dihadapi (Mutholi'ah, 2008).

Hull (2002) menyatakan bahwa derivatif adalah instrumen keuangan yang nilainya didasarkan atau diturunkan dari aset yang mendasarinya. Beberapa produk derivatif antara lain: kontrak berjangka (*future contract*), kontrak *forward*, dan kontrak opsi. Kontrak berjangka merupakan suatu kewajiban untuk membeli atau menjual suatu aset pada harga yang telah ditentukan pada saat jatuh tempo.

Kontrak *forward* merupakan perjanjian untuk melakukan penyerahan aset di masa mendatang pada harga yang disepakati.

Pada abad ke-21 *option* (opsi) menjadi instrumen keuangan yang sangat penting. Seorang investor yang ingin melindungi investasinya, harus mengadakan transaksi jual-beli opsi, disamping jual-beli saham. Oleh karena itu, harga yang akurat pada sebuah opsi sangat menentukan investor dalam membuat dan memutuskan strategi perdagangannya. Dia harus cermat dalam menentukan nilai atau harga sebuah opsi yang dapat digunakan dalam persaingan dan strategi pasar saham (Aziz, 2005).

Kontrak opsi (selanjutnya disebut opsi) adalah suatu jenis kontrak antara dua pihak, satu pihak memberi hak kepada pihak lain untuk menjual atau membeli aset tertentu pada harga dan periode waktu tertentu (Niwiga, 2005). Terdapat dua jenis kontrak opsi yang paling mendasar, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* memberikan hak kepada pembeli untuk membeli suatu aset tertentu dengan jumlah tertentu pada harga yang telah ditentukan selama periode waktu tertentu pula. Sedangkan opsi *put* memberikan hak kepada penjual untuk menjual suatu aset tertentu dengan jumlah tertentu pada harga yang telah ditentukan selama periode waktu tertentu pula. Penggunaan hak untuk menjual atau membeli aset dalam kontrak opsi dikatakan sebagai tindakan eksekusi. Berdasarkan waktu eksekusi terdapat beberapa tipe opsi, yaitu opsi Eropa, opsi Amerika, dan opsi Asia (Suritno, 2008).

Hull (2002) menyatakan bahwa pada tahun 1970-an, Fisher Black, Myron Sholes, dan Robert Merton menemukan solusi analitik untuk harga opsi saham.

Dari solusi analitik tersebut dikembangkan sehingga didapatkan suatu persamaan yang dikenal sebagai model persamaan Black-Scholes. Model persamaan Black-Scholes ini digunakan untuk menentukan harga opsi *call* dan *put* Eropa pada saham non-dividen.

Opsi Asia adalah opsi yang *payoff*-nya tergantung pada rata-rata harga aset dasar selama periode yang telah ditentukan terlebih dahulu (Seydel, 2002). Ada dua tipe dasar rata-rata harga saham, yaitu rata-rata aritmetika dan rata-rata geometrik. Rata-rata ini dapat dibentuk secara diskrit (Kangro, 2011). Pada opsi Asia tidak terdapat solusi analitik dalam perhitungan harga opsi. Akan tetapi, terdapat rumus pendekatan atau aproksimasi yang digunakan untuk mencari harga opsi ini (Wiklund, 2012).

Dengan adanya penciptaan dunia yang sangat sempurna dan setiap umat manusia dibekali berbagai ilmu pengetahuan, diharapkan dapat memikirkan dan mengkaji segala sesuatu yang ada di dunia ini. Dengan demikian segala permasalahan yang ada di dunia dapat dicari solusinya, namun dalam pencarian solusi ini diharapkan menghasilkan sesuatu yang dapat memudahkan segala bentuk permasalahan yang ada. Sebagaimana firman Allah dalam Al-Quran surat Al-Baqarah ayat 185 yang berbunyi:

... يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلۡيُسۡرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلۡعُسۡرَ ...

Artinya: "Allah menghendaki kemudahan bagimu dan tidak menghendaki kesukaran bagimu" (Q.S. Al-Baqarah: 185).

Pada ayat di atas diterangkan bahwa sesungguhnya Allah menghendaki suatu kemudahan bagi umat manusia. Hal ini menjelaskan bahwa dalam menyelesaikan suatu permasalahan yang tengah terjadi di dalam kehidupan, hendaklah menggunakan suatu solusi yang tidak menyulitkan, sehingga mudah untuk diterapkan. Begitu juga penggunaan solusi dalam menyelesaikan suatu model matematika. Jika solusi analitik dari suatu persamaan belum ditemukan penyelesaiannya maka dapat digunakan suatu metode numerik dengan pendekatan tertentu sehingga didapatkan suatu solusi numeriknya.

Harga opsi Eropa dapat ditentukan dengan menemukan solusi analitik dari model persamaan Black-Scholes. Sedangkan untuk opsi Asia hingga saat ini belum diketahui solusi analitiknya, sehingga dalam penyelesaiannya digunakan metode numerik untuk mendapatkan solusi numeriknya. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk mengkaji suatu penelitian yang berjudul *"Analisis Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit, dan Crank-Nicholson pada Perhitungan Harga Opsi Asia"*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana hasil analisis metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson pada perhitungan harga opsi Asia.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui hasil analisis metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson pada perhitungan harga opsi Asia.

1.4 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi kerancuan terhadap maksud dan isi dari penelitian ini, maka perlu adanya pembatasan masalah. Pada penelitian ini hanya membahas perhitungan harga opsi Asia tipe aritmetika yang mempertimbangkan faktor-faktor deterministik.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Bagi peneliti, penelitian ini merupakan kesempatan bagi peneliti untuk mengaplikasikan pengetahuan tentang perhitungan nilai opsi Asia dengan metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson.
2. Bagi ilmuan, penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan rujukan dan pengembangan pembelajaran komputasi keuangan.
3. Bagi praktisi keuangan, penelitian ini dapat memberikan metode alternatif untuk membuat prediksi atau perkiraan dalam penentuan harga opsi saham.
4. Bagi pihak Instansi, penelitian ini dapat meningkatkan pengembangan wawasan keilmuan matematika.

1.6 Metode Penelitian

Sehubungan dengan latar belakang dan permasalahan di atas, dalam penelitian ini akan dibahas penyelesaian dari permasalahan tersebut, yaitu dengan metode literatur, baik dari buku-buku pustaka maupun jurnal-jurnal yang di-*download* dari internet, guna mengetahui perkembangan dan perbaikan metode perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson.
2. Membuat simulasi komputasi metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson dengan mengambil suatu kasus tertentu. Dalam penelitian ini variabel yang diambil adalah harga saham untuk menentukan harga opsi saham. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mengkaji metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson dengan simulasi program Matlab R2010a sebagai berikut:
   a. Menentukan parameter rata-rata dan standar deviasi dari suatu harga saham tertentu.
   b. Membangkitkan harga saham pada masa tertentu.
   c. Menentukan harga opsi *call* dan *put* Asia pada langkah *b*, dengan model harga opsi Asia.
   d. Mengulangi langkah *b* dan *c* sebanyak *N* (misalkan *N* berulang untuk 8, 16, 32, 64, 128, dan 256).
   e. Menentukan interval nilai opsi.
3. Menganalisis hasil komputasi metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson pada perhitungan harga opsi Asia.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, peneliti membagi tulisan ini ke dalam empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka

Dalam bab ini dipaparkan tentang hal-hal yang mendasari dalam masalah yang dikaji oleh peneliti, di antaranya adalah tentang metode beda hingga, skema implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson, opsi Asia serta pengertian opsi itu sendiri.

Bab III Pembahasan

Dalam bab ini dipaparkan hasil kajian dan analisis dari simulasi yang sudah dilakukan oleh peneliti dalam mengkaji permasalahan yang telah diangkat, yaitu: mengkaji perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson, membuat simulasi komputasi metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson dengan mengambil suatu kasus tertentu serta menganalisis hasil simulasi tersebut.

Bab IV Penutup

Dalam bab ini dijelaskan tentang kesimpulan akhir dan saran dari pembahasan yang sudah dilakukan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Deret Taylor

Andaikan f dan semua turunannya, f', f'', f''', ..., kontinu di dalam selang $[a,b]$. Misalkan $x_0 \in [a,b]$, maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a,b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor berikut

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + \ldots \quad (2.1)$$

Munir (2010) menyatakan bahwa persamaan (2.1) merupakan penjumlahan dari suku-suku (*term*) yang disebut deret. Perhatikanlah bahwa deret Taylor ini panjangnya tidak berhingga sehingga untuk memudahkan penulisan suku-suku selanjutnya menggunakan tanda elipsis (...). Jika dimisalkan $(x-x_0) = h$, maka $f(x)$ dapat juga ditulis sebagai

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \ldots \quad (2.2)$$

Nugroho (2009) menyatakan bahwa suatu teori sederhana mengenai hampiran numerik untuk turunan dapat diperoleh melalui ekspansi deret Taylor dari $f(x+h)$ di sekitar x yaitu

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x) + \ldots. \quad (2.3)$$

Djojodiharjo (2000) menyatakan bahwa bila persamaan (2.3) dipangkas setelah suku turunan pertama, maka akan diperoleh bentuk

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+O(h). \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) dapat digunakan untuk meramalkan nilai turunan f di $x_0 \rightarrow f'(x_0)$

$$f'(x)=\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{pendekatan orde pertama}}+\underbrace{\frac{O(h^2)}{h}}_{\text{galat pemangkasan}}. \tag{2.5}$$

Dengan demikian turunan suatu fungsi $f(x)$ untuk beda maju pada $x=x_0$ didefinisikan sebagai

$$f'(x)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2.6}$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{2.7}$$

Djojodiharjo (2000) menyatakan bahwa deret Taylor dapat diekspansikan ke belakang untuk menghitung nilai turunan fungsi $f(x)$ berdasarkan nilainya pada titik yang diketahui.

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2}-.... \tag{2.8}$$

Bila persamaan (2.8) dipangkas setelah turunan yang pertama dan disusun kembali, maka diperoleh beda mundur

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}-O(h). \tag{2.9}$$

Djojodiharjo (2000) menyatakan bahwa cara ketiga untuk menghitung turunan pertama adalah dengan mengurangkan rumus beda ke belakang (2.8) dari rumus beda hingga ke depan berdasarkan ekspansi deret Taylor pada persamaan (2.3). Dengan demikian dihasilkan

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{f'''(x)h^3}{3}+\ldots \qquad (2.10)$$

Dari persamaan (2.10) diperoleh

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{f'''(x)h^2}{6}+\ldots \qquad (2.11)$$

atau

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-O(h^2) \qquad (2.12)$$

atau

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \qquad (2.13)$$

atau

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h/2)-f(x-h/2)}{h}. \qquad (2.14)$$

Untuk memperkirakan turunan kedua $f(x)$ pada $x=x_0$ adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan pertama, tetapi dengan menggunakan $f'(x)$ sebagai fungsi awal.

$$f''(x)\approx\frac{f'(x+h/2)-f'(x-h/2)}{h}. \qquad (2.15)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.13), maka diperoleh

$$f'(x+h/2) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2.16}$$

$$f'(x-h/2) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}. \tag{2.17}$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (2.16) dan (2.17) ke dalam persamaan (2.15) diperoleh

$$f''(x) \approx \frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h} \times \frac{1}{h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}. \tag{2.18}$$

Persamaan (2.18) merupakan persamaan turunan kedua aproksimasi dengan deret Taylor.

2.2 Metode Beda Hingga

Kwok (1998) menyatakan bahwa metode beda hingga adalah salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial. Salah satu contoh persamaan diferensial parsial, yaitu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\Delta S^2} = rf \tag{2.19}$$

2.2.1 Metode Beda Hingga Implisit

Hull (2002) menyatakan bahwa untuk mengaproksimasi turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial S}$ pada persamaan (2.19) dengan indeks (i, j) dapat menggunakan persamaan berikut

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S}. \tag{2.21}$$

Persamaan (2.20) merupakan aproksimasi beda maju dan persamaan (2.21) merupakan aproksimasi beda mundur. Untuk mengaproksimasi beda pusat menggunakan persamaan berikut

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S}. \tag{2.22}$$

Sedangkan untuk mengaproksimasi $\frac{\partial f}{\partial t}$ menggunakan aproksimasi beda maju, yaitu

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}. \tag{2.23}$$

Untuk mengaproksimasi persamaan $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ menggunakan persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2}. \tag{2.24}$$

Kemudian persamaan (2.22), (2.23), dan (2.24) disubstitusikan ke dalam persamaaan (2.19) serta untuk $S = j\Delta S$, sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+rj\Delta S\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta S^2\frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta S^2}=rf_{i,j} \quad (2.25)$$

untuk $j=1,2,\ldots,M-1$ dan $i=0,1,2,\ldots,N-1$. Persamaan (2.25) dapat disederhanakan menjadi

$$a_j f_{i,j-1}+b_j f_{i,j}+cf_{i,j+1}=f_{i+1,j} \quad (2.26)$$

dengan

$$a_j=\frac{1}{2}rj\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t, \qquad b_j=1+\sigma^2 j^2\Delta t+rj\Delta t, \qquad c_j=-\frac{1}{2}rj\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t,$$

Persamaan (2.26) merupakan solusi numerik dengan menggunakan metode beda hingga implisit.

2.2.2 Metode Beda Hingga Eksplisit

Hull (2002) menyatakan bahwa untuk mengaproksimasi turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial S}$ dan $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ dengan metode beda hingga eksplisit menggunakan langkah seperti metode beda hingga implisit. Perbedaannya hanya pada indeksnya yaitu $(i+1, j)$.

$$\frac{\partial f}{\partial S}\approx\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{\Delta S} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\approx\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta S^2}. \quad (2.28)$$

Dengan cara yang sama pada metode beda hingga implisit, maka diperoleh solusi numerik metode beda hingga eksplisit

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+rj\Delta S\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta S^2\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}=rf_{i,j} \quad (2.29)$$

atau

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{2.30}$$

dengan

$$a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right),\ b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-\sigma^2 j^2 \Delta t\right),\ c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

2.2.3 Metode Beda Hingga Crank-Nicholson

Hull (2002) menyatakan bahwa metode beda hingga Crank-Nicholson adalah rata-rata dari metode beda hingga eksplisit dan implisit. Untuk persamaan metode beda hingga implisit diberikan persamaan (2.26) dan untuk persamaan metode beda hingga eksplisit diberikan persamaan (2.30). Sehingga solusi numerik metode beda hingga Crank-Nicholson, yaitu

$$f_{i+1,j} + f_{i,j} = a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + cf_{i,j+1} + a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{2.31}$$

$$f_{i+1,j} - a_j^* f_{i+1,j-1} - b_j^* f_{i+1,j} - c_j^* f_{i+1,j+1} = a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + cf_{i,j+1} - f_{i,j} \tag{2.32}$$

2.3 Pengertian Opsi

Option (opsi) adalah sebuah hak, tetapi bukan obligasi atau surat berharga, untuk membeli atau menjual sebuah aset yang berisiko pada suatu harga tertentu yang ditentukan selama periode tertentu. Opsi merupakan sebuah instrumen keuangan yang di antaranya memungkinkan seseorang untuk melakukan spekulasi berkaitan dengan naik atau turunnya harga dari suatu aset yang mendasari (*underlying asset),* misalnya saham perusahaan, mata uang, komoditas pertanian, dan sebagainya. Opsi merupakan suatu perjanjian antara dua pihak yaitu *writer,* sebagai penyusun kontrak opsi yang seringkali adalah sebuah *bank*, dan *holder,* sebagai pembeli atau menjual opsi dengan harga pasar yang telah disepakati (*premium*). Karena nilai (harga) sebuah opsi tergantung pada nilai *underlying asset,* maka opsi-opsi dan lainnya yang berkaitan dengan instrumen keuangan dinamakan sebagai *derivatives* (Seydel, 2002).

Aziz (2005) menyatakan bahwa ada dua tipe dasar opsi yaitu *call* dan *put.* Opsi *call* adalah hak untuk membeli sejumlah tertentu suatu *underlying asset* dengan harga sebesar *strike* (*exercise*) *price*, pada waktu *expiration* (*maturity*) *date* atau sebelumnya. Sedangkan opsi *put* adalah hak untuk menjual sejumlah tertentu suatu *underlying asset* dengan harga sebesar *strike* (*exercise*) *price*, pada waktu *expiration* (*maturity*) *date* atau sebelumnya.

Seorang *holder* suatu opsi harus membuat suatu keputusan apa yang akan ia lakukan terhadap tanggungan kontrak hak opsi ini. Keputusannya akan ditentukan pada situasi pasar, dan tipe opsi ini. Misalkan pada opsi *call* Eropa*,* dia dapat mengabaikan opsi ini bila harga saham (*stock price*) di pasar pada waktu jatuh tempo (*maturity date*) lebih rendah daripada harga pada opsi *call* (*exercise* atau *strike price*), karena tidak dapat memberikan keuntungan. Ia lebih baik membeli saham serupa di pasar dengan harga yang lebih rendah daripada membelinya pada *writer* dengan harga *strike price.* Sebaliknya, *holder* tentu akan menjadikan kontrak (*exercise*) pada opsi *put* bila situasi harga pasar seperti di atas. Dengan menjual saham seharga *exercise price* yang lebih tinggi dari harga pasar, ia akan mendapatkan keuntungan dengan membeli saham di pasar kemudian menjualnya pada *writer*. *Writer* harus bersedia untuk membeli saham dari *holder* yang telah membeli opsi *put*-nya sebagai risiko transaksi (Aziz, 2005).

Aziz (2005) menyatakan bahwa opsi yang hanya dapat digagalkan (*expire*) atau dijadikan (*exercise*) kontraknya pada waktu jatuh tempo seperti di atas dinamakan sebagai opsi Eropa. Sedangkan opsi Amerika dapat digagalkan atau dijadikan kontraknya sebelum waktu jatuh tempo selama masih dalam periode opsi, yaitu sejak terjadinya transaksi kontrak hingga masa jatuh tempo kontrak. Jadi *holder* dapat meng-*exercise* opsi kapanpun selama periode tersebut pada saat harga pasar dirasa lebih menguntungkan daripada waktu lainnya. *Exercise* seperti ini dikenal sebagai *exercise* lebih awal (*early exercise*). Jika S_T adalah harga saham di pasar pada waktu T, dan K adalah *exercise price* maka keuntungan atau nilai *payoff* untuk kedua jenis *plain vanilla options* di atas diberikan sebagai berikut.

$$C(S_T,T)=S_T-K, \text{ jika } S_T \geq K \text{ (opsi di-}\textit{exercise}\text{), atau} \tag{2.33}$$

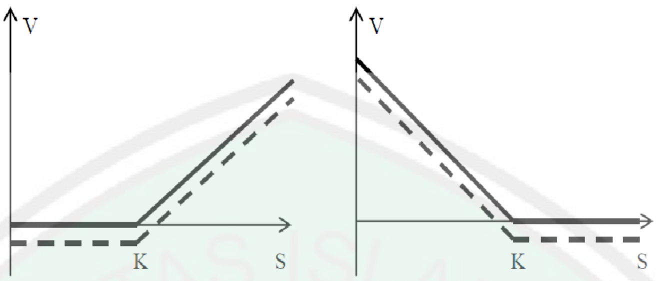
$$= 0, \text{ jika } S_T \leq K \text{ (opsi di-}\textit{exercise}\text{)} \tag{2.34}$$

untuk opsi *call*. Sedangkan untuk opsi *put* diberikan

$$P(S_T,T)=K-S_T, \text{ jika } S_T \leq K \text{ (opsi di-}\textit{exercise}\text{), atau} \tag{2.35}$$

$$= 0, \text{ jika } S_T \geq K \text{ (opsi di-}\textit{exercise}\text{)} \tag{2.36}$$

Berikut ini adalah gambar kurva fungsi *payoff* dan *profit* untuk opsi *call* dan *put*. *Profit* diperoleh dari pengurangan biaya transaksi pada saat membeli opsi terhadap nilai *payoff* yang diperoleh (Aziz, 2005).



Gambar 2.1 Kurva *Payoff* (Garis Tebal) dan *Profit* (Garis Putus-Putus) untuk Opsi *Call* dan *Put*

2.4 Macam-Macam Opsi

Halim (2003) menyatakan bahwa berdasarkan periode penggunaan waktu, opsi dibedakan menjadi dua, yaitu:

1. Opsi Eropa adalah opsi yang dapat digunakan hanya pada waktu jatuh tempo.
2. Opsi Amerika adalah opsi yang dapat digunakan sebelum waktu atau pada jatuh tempo.

Muniroh (2008) menyatakan bahwa opsi Asia merupakan gabungan dari opsi Amerika dan Eropa. Opsi Asia dapat berlaku seperti opsi Eropa atau opsi Amerika. Hal yang membedakan opsi Asia dengan opsi Eropa dan opsi Amerika adalah harga pada saat pelaksanaan opsi. Harga saham yang digunakan sebagai acuan dalam opsi Asia adalah rata-rata harga saham pada waktu *T*. Opsi Asia lebih cenderung pada opsi Eropa karena pelaksanaan opsi tersebut pada waktu *T*.

2.5 Model Opsi Asia

Seydel (2002) menyatakan bahwa ada beberapa cara untuk menentukan rata-rata nilai dari S_t. Jika harga S_t diamati pada waktu diskrit contoh t_i dengan interval waktu $h = \frac{T}{n}$, maka diperoleh $S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t_n}$. Sehingga rata-rata aritmetika (*mean aritmetic*), yaitu

$$\bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} = \frac{1}{T} h \sum_{i=1}^{n} S_{t_i} \tag{2.37}$$

Jika hasil observasi sampel dalam periode $0 \leq t \leq T$, maka rata-rata di atas berkorespondensi dengan

$$\bar{S} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} S_t \, dt \tag{2.38}$$

Rata-rata aritmetika ini paling banyak digunakan untuk suatu perhitungan, akan tetapi rata-rata geometrik terkadang juga dapat digunakan dalam perhitungan. Rata-rata geometrik, yaitu

$$\bar{S} = \left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln S_{t_i}\right) \tag{2.39}$$

2.6 Proses Stokastik

Proses stokastik $X = \{X(t); t \in T\}$ adalah himpunan variabel *random* $X(t)$ yang dapat diindeks dengan parameter *t*, dalam himpunan indeks T yang mempunyai urutan. Jika T diskrit, maka himpunan indeks T dapat ditulis $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Jika T kontinu, maka himpunan indeks T dapat ditulis $T = [0, \infty)$ (Khuriyanti, 2009).

Nilai yang mungkin dari *X(t)* disebut *state*. Himpunan nilai yang mungkin dari *X(t)* adalah *state space*. Berdasarkan *state space*-nya, proses stokastik dapat dibedakan menjadi *state space* diskrit dan *state space* kontinu. Karena harga saham adalah variabel *random* yang pergerakannya tidak diketahui secara pasti, maka dapat dikatakan bahwa pergerakan harga saham merupakan sebuah proses stokastik (Khuriyanti, 2009).

2.7 Gerak *Brown*

Khuriyanti (2009) menyatakan bahwa gerak *Brown* dengan variansi σ^2 merupakan proses stokastik $\{W(t);t\geq 0\}$ dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. Setiap kenaikan $W(s+t)-W(s)$ adalah berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi $\sigma^2 t$.
2. Untuk setiap pasang interval waktu yang saling lepas $(u,v],(w,y]$ dengan $0\leq u<v\leq w<y$, maka kenaikan $W(y)-W(w)$ dan $W(v)-W(u)$ adalah variabel *random* yang independen.
3. $W(t)$ kontinu sebagai fungsi dari t dan $W(0)=0$

2.8 *Itô Process*

Niwiga (2005) menyatakan proses stokastik $X=\{X(t);t\geq 0\}$ yang memiliki selesaian

$$X=X_0+\int_0^t a(X_s,t)\,ds+\int_0^t b(X_s,t)\,dW_s \tag{2.40}$$

disebut *Itô process*. Persamaan diferensial stokastik yang sesuai dengan *Itô process*, yaitu

$$dX_t = a\left(X_t, t\right)dt + b\left(X_t, t\right)dW_t \qquad (2.41)$$

dengan $a\left(X_t, t\right)$ adalah bentuk *drift,* $b\left(X_t, t\right)$ adalah bentuk difusi dan W_s adalah proses *Wiener.*

Khuriyanti (2009) menyatakan bahwa proses *Wiener* disebut juga proses gerak *Brown* standar, yaitu jika $\left\{W\left(t\right) | 0 \leq t \leq \infty\right\}$ dengan variansi σ^2, maka $\left\{B\left(t\right) = \frac{1}{\sigma} W\left(t\right); 0 \leq t \leq \infty\right\}$ adalah gerak *Brown* dengan variansi 1.

2.9 Tabel Perkalian *Itô Process*

Kwok (1998) menyatakan bahwa untuk $E\left(\left(dW\right)^2\right) = dt$, $\mathrm{var}\left(\left(dW\right)^2\right) = O\left(dt\right)$, $E\left(dtdW\right) = 0$, dan $\mathrm{var}\left(dtdW\right) = O\left(dt\right)$. Misalkan syarat-syarat order $O\left(dt\right)$ yang diperlakukan = 0, maka dapat diamati bahwa $\left(dW\right)^2$ dan $dtdW$ adalah bebas stokastik, karena variansi dari keduanya adalah 0.

Oleh karena itu $\left(dW\right)^2 = dt$ dan $dtdW = 0$ tidak hanya pada ekspektasi tetapi juga pada eksaknya. Untuk dt bernilai sangat kecil, maka $\lim\limits_{t \to 0} dt = 0$ (Wilmott, dkk., 1995). Lyuu (2012) menyatakan bahwa perkalian *Itô process* sebagaimana tabel berikut.

Tabel 2.1 Perkalian *Itô Process*

	dW	dt
dW	dt	0
dt	0	0

2.10 Proses Harga Saham

Brewer, dkk. (2012) menyatakan bahwa model harga saham didefinisikan sebagai berikut

$$dS_t = S_t\left[\mu dt + \sigma dW_t\right] \tag{2.42}$$

Untuk mencari solusi *S(t)* dengan menggunakan *Itô formula* untuk $G = \ln S(t)$, maka diperoleh persamaan

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S(t)^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dW \tag{2.43}$$

$$= \frac{1}{S(t)}\mu S(t)dt + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S(t)^2}\right)\sigma^2 S(t)^2\, dt + \frac{1}{S(t)}\sigma S(t)\, dW(t) \tag{2.44}$$

$$d\ln S(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{2.45}$$

$$\int d\ln S(t) = \int \mu\, dt + \int \sigma\, dW(t) - \int \frac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{2.46}$$

$$\ln S(t) - \ln S(0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t) + \sigma W(t) \tag{2.47}$$

$$\ln\frac{S(t)}{S(0)} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t) \tag{2.48}$$

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}\,. \tag{2.49}$$

Dengan proses *Wiener*, diperoleh $W(t) = \xi\sqrt{t}$ untuk ξ adalah bilangan acak dari distribusi normal baku. Sehingga persamaan (2.49) menjadi

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\xi\sqrt{t}} \tag{2.50}$$

2.11 Model Persamaan Black-Scholes

Hull (2002) menyatakan bahwa untuk proses harga saham diberikan sebagai berikut.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{2.51}$$

dengan μ adalah tingkat bunga, σ adalah volatilitas dan dW adalah proses *Winner*. Misalkan V adalah harga opsi *call* atau lainnya dengan saham S pada waktu t dengan menggunakan *Itô process*, maka diperoleh

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \, dW \tag{2.52}$$

Persamaan diskrit dari persamaan (2.51) dan (2.52) adalah

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \delta W \tag{2.53}$$

dan

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \, \delta W \tag{2.54}$$

Proses *Wiener* yang mendasari V dan S dapat dihilangkan dengan memilih portofolio yang sesuai dengan saham dan derivatif. Untuk portofolio dipilih

$$-1 : \text{derivatif}$$

$$+\frac{\partial V}{\partial S} : \text{saham}$$

Nilai portofolio π yang terdiri dari opsi V dengan perubahan saham pada jangka pendek, yaitu

$$\pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S \tag{2.55}$$

Perubahan nilai portofolio $\delta\pi$ pada interval waktu singkat *dt* diberikan

$$\delta\pi = -\delta V + \frac{\partial V}{\partial S}\delta S \tag{2.56}$$

Kemudian persamaan (2.53) dan (2.54) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.56), yaitu

$$\delta\pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\delta t \tag{2.57}$$

Portofolio merupakan gabungan dari aset-aset. Portofolio ini dikatakan tidak berisiko, karena tidak ada gerak *random Brown*. Gerak *Brown* menyebabkan terjadinya perubahan harga saham. Portofolio ini dikatakan konstan sehingga portofolio ini mempunyai pendapatan yang sama dengan saham jangka pendek lainnya yang bebas risiko. Portofolio bebas risiko dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\delta\pi = r\pi\,\delta t \tag{2.58}$$

dengan r adalah suku bunga bebas risiko. Dengan mensubstitusikan persamaan (2.55) dan (2.57) ke dalam persamaan (2.58), maka diperoleh persamaan

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\delta t = r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S}S\right)\delta t \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.60}$$

Persamaan (2.60) merupakan persamaan diferensial Black-Scholes yang digunakan untuk menentukan harga opsi saham tipe Eropa.

2.12 Jual Beli dalam Islam

2.12.1 Hukum Jual Beli menurut Islam

Jual beli merupakan aktifitas yang diperbolehkan dalam ajaran Islam. Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Al-Quran surat Al-Baqarah ayat 275:

ٱلَّذِينَ يَأۡكُلُونَ ٱلرِّبَوٰاْ لَا يَقُومُونَ إِلَّا كَمَا يَقُومُ ٱلَّذِي يَتَخَبَّطُهُ ٱلشَّيۡطَٰنُ مِنَ
ٱلۡمَسِّۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمۡ قَالُوٓاْ إِنَّمَا ٱلۡبَيۡعُ مِثۡلُ ٱلرِّبَوٰاْۗ وَأَحَلَّ ٱللَّهُ ٱلۡبَيۡعَ وَحَرَّمَ ٱلرِّبَوٰاْۚ فَمَن
جَآءَهُۥ مَوۡعِظَةٞ مِّن رَّبِّهِۦ فَٱنتَهَىٰ فَلَهُۥ مَا سَلَفَ وَأَمۡرُهُۥٓ إِلَى ٱللَّهِۖ وَمَنۡ عَادَ فَأُوْلَٰٓئِكَ
أَصۡحَٰبُ ٱلنَّارِۖ هُمۡ فِيهَا خَٰلِدُونَ ٢٧٥

Artinya: *"orang-orang yang Makan (mengambil) riba tidak dapat berdiri melainkan seperti berdirinya orang yang kemasukan syaitan lantaran (tekanan) penyakit gila. Keadaan mereka yang demikian itu, adalah disebabkan mereka berkata (berpendapat), Sesungguhnya jual beli itu sama dengan riba, Padahal Allah telah menghalalkan jual beli dan mengharamkan riba. orang-orang yang telah sampai kepadanya larangan dari Tuhannya, lalu terus berhenti (dari mengambil riba), Maka baginya apa yang telah diambilnya dahulu (sebelum datang larangan); dan urusannya (terserah) kepada Allah. orang yang kembali (mengambil riba), Maka orang itu adalah penghuni-penghuni neraka; mereka kekal di dalamnya" (Q.S. Al-Baqarah:275).*

Pada ayat di atas ditekankan bahwa dalam ajaran Islam jual beli dihalalkan dan *riba* diharamkan. Karena mengingat bahwa manusia adalah makhluk sosial yang tidak dapat hidup sendiri tanpa berinteraksi dan pertolongan orang lain.

2.12.2 Beberapa Rukun Jual Beli

Rasyid (1976) menyatakan bahwa ada beberapa rukun dalam jual beli, di antaranya yaitu:

1. Terdapat penjual dan pembeli
2. Uang dan benda yang dibeli
3. *Lafadz* (kalimat *ijab* dan *qabul*)

2.12.3 *Khiyar* dalam Jual Beli

Sahrani dan Abdullah (2011) menyatakan bahwa makna *khiyar* berarti boleh memilih antara dua, apakah akan meneruskan jual beli atau mau membatalkannya. Menurut ulama fiqih seperti dikutip oleh Rachmat Syafi'i, pengertian *khiyar* adalah suatu keadaan yang menyebabkan *aqid* memilih hak untuk memutuskan akadnya (menjadikan atau membatalkannya) jika *khiyar* tersebut berupa *khiyar syarat*, *aib*, atau hendaklah memilih di antara dua barang jika *khiyar ta'yin*.

Fungsi *khiyar* menurut *syara'* adalah agar kedua orang yang melakukan jual beli dapat memikirkan dampak positif negatif masing-masing dengan pandangan ke depan, supaya tidak terjadi kecocokan dalam membeli barang yang telah dipilih (Sahrani & Abdullah, 2011).

Huda (2011) menyatakan bahwa ada tujuh belas macam *khiyar*, namun di dalam kitabnya dia hanya menyebutkan enam macam *khiyar* yang *popular*, sebagaimana yang akan diterangkan sebagai berikut:

1. *Khiyar Majlis*

   Khiyar Majlis adalah setiap *'aqidain* mempunyai hak untuk memilih antara meneruskan akad atau mengurungkannya sepanjang keduanya belum berpisah. Artinya suatu akad belum bersifat *lazim* (pasti) sebelum berakhirnya *majlis* akad yang ditandai dengan berpisahnya *'aqdain* atau dengan timbulnya pilihan. Namun *khiyar majlis* ini tidak berlaku pada setiap akad, melainkan hanya berlaku pada akad *al-mu'awadhah al-maliyah*, seperti akad jual beli dan *ijarah*.

2. *Khiyar Ta'yin*

   Khiyar ta'yin adalah hak yang memilih oleh pembeli untuk memastikan pilihan atas sejumlah benda sejenis atau setara sifat atau harganya. *Khiyar* ini hanya berlaku pada akad *al-mu'awadhah al-maliyah* yang mengakibatkan perpindahan hak milik, seperti jual beli. Keabsahan *khiyar ta'yin* menurut madzhab Hanafi harus memenuhi tiga syarat sebagai berikut:

   a. Maksimal berlaku pada tiga pilihan obyek akad.
   b. Sifat dan nilai benda yang menjadi obyek pilihan harus setara dan harganya harus jelas. Jika nilai dan sifat masing-masing benda berbeda jauh, maka *khiyar ta'yin* ini menjadi tidak berarti.
   c. Tengggang waktu *khiyar* ini tidak lebih dari tiga hari.

3. *Khiyar Syarat*

   Khiyar syarat adalah hak *'aqidain* untuk melangsungkan atau membatalkan akad selama batas waktu tertentu yang dipersyaratkan ketika akad berlangsung.

4. *Khiyar 'Aib*

   Khiyar 'aib adalah hak yang dimiliki oleh salah seorang dari *'aqidain* untuk membatalkan atau tetap melangsungkan akad ketika dia menemukan cacat pada obyek akad yang mana pihak lain tidak memberitahukannya pada saat akad.

5. *Khiyar ru'yah*

   Khiyar ru'yah adalah hak pembeli untuk membatalkan atau tetap melangsungkan akad ketika dia melihat obyek akad. Dengan syarat dia belum melihatnya ketika berlangsung akad atau sebelumnya dia pernah melihatnya dalam batas waktu yang memungkinkan telah terjadi perubahan atasnya.

6. *Khiyar Naqd*

Khiyar naqd tersebut terjadi apabila dua pihak melakukan jual beli dengan ketentuan jika pihak pembeli tidak melunasi pembayaran, atau pihak penjual tidak menyerahkan barang dalam batas waktu tertentu, maka pihak yang dirugikan mempunyai hak untuk membatalkan atau tetap melangsungkan akad.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan mengaproksimasi turunan-turunan persamaan tersebut menjadi sistem persamaan linier.

3.2 Aproksimasi Metode Beda Hingga

Gagasan yang mendasari metode beda hingga adalah menggantikan turunan parsial yang didapatkan dari ekspansi deret Taylor. Diasumsikan bahwa $V(t,S)$ dinyatakan oleh $V_{i,j}$, ekspansi deret Taylor untuk $V(t,S+\Delta S)$ dan $V(t,S-\Delta S)$ adalah sebagai berikut

$$V(t,S+\Delta S)=V(t,S)+\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta S^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\Delta S^3+O\left(\Delta S^4\right) \quad (3.1)$$

$$V(t,S-\Delta S)=V(t,S)-\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta S^2-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\Delta S^3+O\left(\Delta S^4\right) \quad (3.2)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1) diperoleh persamaan beda maju, yaitu

$$V(t,S+\Delta S)=V(t,S)+\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S+O\left(\Delta S^2\right)$$

$$V(t,S+\Delta S)-V(t,S)=\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S+O\left(\Delta S^2\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S\approx V(t,S+\Delta S)-V(t,S)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(t,S+1)-V(t,S)}{\Delta S} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(i,j+1)-V(i,j)}{\Delta S} \tag{3.4}$$

Sedangkan dengan menggunakan persamaan (3.2) diperoleh persamaan beda mundur, yaitu

$$V(t,S-\Delta S) = V(t,S) - \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + O\left(\Delta S^2\right)$$

$$V(t,S) - V(t,S-\Delta S) = \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + O\left(\Delta S^2\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S \approx V(t,S) - V(t,S-\Delta S)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(t,S)-V(t,S-\Delta S)}{\Delta S} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(i,j)-V(i,j-1)}{\Delta S} \tag{3.6}$$

Hasil pengurangan persamaan (3.3) dari (3.5) diperoleh persamaan beda pusat, yaitu

$$V(t,S+\Delta S) - V(t,S-\Delta S) = V(t,S) + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S - \left(V(t,S) - \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S\right) + O(\Delta S^2)$$

$$V(t,S+\Delta S) - V(t,S-\Delta S) = V(t,S) + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S - V(t,S) + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + O\left(\Delta S^2\right)$$

$$V(t,S+\Delta S) - V(t,S-\Delta S) = \frac{\partial V}{\partial S}2\Delta S + O\left(\Delta S^2\right)$$

$$V(t,S+\Delta S) - V(t,S-\Delta S) \approx \frac{\partial V}{\partial S}2\Delta S$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(t,S+\Delta S)-V(t,S-\Delta S)}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(i,j+1)-V(i,j-1)}{2\Delta S} \qquad (3.7)$$

Untuk memperoleh turunan kedua $V(t,S)$ yaitu dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan pertama, tetapi dengan menggunakan $\frac{\partial V}{\partial S}$ sebagai fungsi awal, yaitu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V'(t+\Delta S/2)-V'(t-\Delta S/2)}{\Delta S}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3) dan (3.5), maka diperoleh

$$\frac{\partial V(t+\Delta S/2)}{\partial S} \approx \frac{V(t,S+1)-V(t,S)}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial V(t-\Delta S/2)}{\partial S} \approx \frac{V(t,S)-V(t,S-\Delta S)}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{\frac{V(t,S+\Delta S)-V(t,S)}{\Delta S} - \left(\frac{V(t,S)-V(t,S-\Delta S)}{\Delta S}\right)}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \left(\frac{V(t,S+\Delta S)-2V(t,S)+V(t,S-\Delta S)}{\Delta S}\right) \times \frac{1}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V(t,S+\Delta S)-2V(t,S)+V(t,S-\Delta S)}{\Delta S^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V(i,j+1)-2V(i,j)+V(i,j-1)}{\Delta S^2} \qquad (3.8)$$

Ekspansi deret Taylor untuk $V(t+\Delta t,S)$ dan $V(t-\Delta t,S)$ adalah sebagai berikut

$$V(t+\Delta t,S)=V(t,S)+\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\Delta t^2+O(\Delta t^3) \tag{3.9}$$

$$V(t-\Delta t,S)=V(t,S)-\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\Delta t^2-O(\Delta t^3) \tag{3.10}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.9) diperoleh persamaan beda maju, yaitu

$$V(t+\Delta t,S)=V(t,S)+\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$V(t+\Delta t,S)-V(t,S)=\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$V(t+\Delta t,S)-V(t,S)\approx\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\approx\frac{V(t+\Delta t,S)-V(t,S)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\approx\frac{V(i+1,j)-V(i,j)}{\Delta t} \tag{3.11}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.10) diperoleh persamaan beda mundur, yaitu

$$V(t-\Delta t,S)=V(t,S)-\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$V(t+\Delta t,S)-V(t,S)=-\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$V(t+\Delta t,S)-V(t,S)\approx-\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\approx\frac{V(t,S)-V(t+\Delta t,S)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\approx\frac{V(i,j)-V(i+1,j)}{\Delta t} \tag{3.12}$$

3.1.1 Skema Beda Hingga Implisit

Untuk menentukan harga opsi dengan menggunakan metode beda hingga implisit yaitu dengan mendiskritisasi persamaan Black-Scholes dengan turunan parsial $\frac{\partial V}{\partial t}$ diaproksimasi menggunakan beda maju, sedangkan aproksimasi beda pusat digunakan untuk mengaproksimasi turunan parsial $\frac{\partial V}{\partial S}$ dan $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} \qquad \text{(beda maju)} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} \qquad \text{(beda pusat)} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta S^2} \qquad \text{(beda pusat)} \tag{3.15}$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.13), (3.14), dan (3.15) ke dalam persamaan (2.60), maka diperoleh

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(\frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta S^2} \right) + rS\left(\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} \right) + \left(\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} \right) - rV_{i,j} = 0 \tag{3.16}$$

$$\left[\frac{\sigma^2 S^2}{2\Delta S^2} V_{i,j+1} - \frac{\sigma^2 S^2}{\Delta S^2} V_{i,j} + \frac{\sigma^2 S^2}{2\Delta S^2} V_{i,j-1} \right] + \left[\frac{rS}{2\Delta S} V_{i,j+1} - \frac{rS}{2\Delta S} V_{i,j-1} \right] + \left[\frac{V_{i+1,j}}{\Delta t} - \frac{V_{i,j}}{\Delta t} \right] - rV_{i,j} = 0 \tag{3.17}$$

Substitusikan $S = j\Delta S$ ke dalam persamaan (3.17), maka diperoleh

$$\left[\frac{\sigma^2 j^2 \Delta S^2}{2\Delta S^2} V_{i,j+1} - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta S^2}{\Delta S^2} V_{i,j} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta S^2}{2\Delta S^2} V_{i,j-1} \right] + \left[\frac{r\sigma j S}{2\Delta S} V_{i,j+1} - \frac{r\sigma j S}{2\Delta S} V_{i,j-1} \right] + \left[\frac{V_{i+1,j}}{\Delta t} - \frac{V_{i,j}}{\Delta t} \right] - rV_{i,j} = 0 \tag{3.18}$$

$$\left[\frac{\sigma^2 j^2}{2} V_{i,j+1} - \sigma^2 j^2 V_{i,j} + \frac{\sigma^2 j^2}{2} V_{i,j-1} \right] + \left[\frac{rj}{2} V_{i,j+1} - \frac{rj}{2} V_{i,j-1} \right] + \left[\frac{V_{i+1,j}}{\Delta t} - \frac{V_{i,j}}{\Delta t} \right] - rV_{i,j} = 0 \tag{3.19}$$

$$\left[\frac{rj}{2}-\frac{\sigma^2 j^2}{2}\right]V_{i,j-1}+\left[\frac{1}{\Delta t}+\sigma^2 j^2+r\right]V_{i,j}+\left[-\frac{rj}{2}-\frac{\sigma^2 j^2}{2}\right]V_{i,j+1}=\frac{V_{i+1,j}}{\Delta t}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan Δt, maka diperoleh

$$\left[\frac{rj\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}\right]V_{i,j-1}+\left[1+\sigma^2 j^2\Delta t+r\Delta t\right]V_{i,j}+\left[-\frac{rj\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}\right]V_{i,j+1}=V_{i+1,j}$$

Sehingga persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

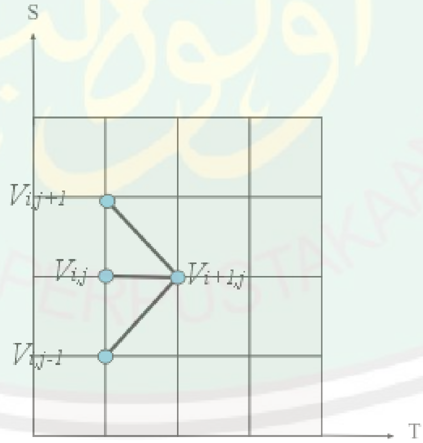
$$V_{i+1,j}=a_j\,V_{i,j-1}+b_j V_{i,j}+c_j V_{i,j+1} \tag{3.20}$$

untuk $i = N$-1, ..., 1, 0 dan j = 1, 2, ..., M-1

dengan

$$a_j=\frac{r\,j\,\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2},\; b_j=1+\sigma^2 j^2\,\Delta t+r\Delta t,\; c_j=-\frac{r\,j\,\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2} \tag{3.21}$$

Skema beda hingga implisit dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3.1 Beda Hingga Implisit

Misalkan M = N = 5, maka pada persamaan (3.20) akan diperoleh suatu sistem persamaan linier, yaitu

$$V_{5,1} = b_1V_{4,1} + c_1V_{4,2}$$
$$V_{5,2} = a_2V_{4,1} + b_2V_{4,2} + c_2V_{4,3}$$
$$V_{5,3} = a_3V_{4,2} + b_3V_{4,3} + c_3V_{4,4}$$
$$V_{5,4} = a_4V_{4,3} + b_4V_{4,4} + c_4V_{4,5}$$

$$V_{4,1} = b_1V_{3,1} + c_1V_{3,2}$$
$$V_{4,3} = a_2V_{3,2} + b_2V_{3,3} + c_2V_{3,4}$$
$$V_{4,2} = a_3V_{3,1} + b_3V_{3,2} + c_3V_{3,3}$$
$$V_{4,4} = a_4V_{3,3} + b_4V_{3,4} + c_4V_{3,5}$$

$$V_{3,1} = b_1V_{2,1} + c_1V_{2,2}$$
$$V_{3,2} = a_2V_{2,1} + b_2V_{2,2} + c_2V_{2,3}$$
$$V_{3,3} = a_3V_{2,2} + b_3V_{2,3} + c_3V_{2,4}$$
$$V_{3,4} = a_4V_{2,3} + b_4V_{2,4} + c_4V_{2,5}$$

$$V_{2,1} = b_1V_{1,1} + c_1V_{1,2}$$
$$V_{2,2} = a_2V_{1,1} + b_2V_{1,2} + c_2V_{1,3}$$
$$V_{2,3} = a_3V_{1,2} + b_3V_{1,3} + c_3V_{1,4}$$
$$V_{2,4} = a_4V_{1,3} + b_4V_{1,4} + c_4V_{1,5}$$

$$V_{1,1} = b_1V_{0,1} + c_1V_{0,2}$$
$$V_{1,2} = a_2V_{0,1} + b_2V_{0,2} + c_2V_{0,3}$$
$$V_{1,3} = a_3V_{0,2} + b_3V_{0,3} + c_3V_{0,4}$$
$$V_{1,4} = a_4V_{0,3} + b_4V_{0,4} + c_4V_{0,5}$$

Misalkan untuk opsi *call,* maka diperoleh

- Nilai *payoff* pada akhir periode, $V_{5,j} = \max\left(S_j - K, 0\right)$ yang digunakan sebagai nilai awal.
- Nilai *payoff* tertinggi pada setiap periode, yaitu

$$V_{5,5} = \max\left(S_5 - K, 0\right) = S_5 - K$$

$$V_{4,5} = V_{5,5} \times e^{-r\partial t}$$

$$V_{3,5} = V_{4,5} \times e^{-r\partial t}$$

$$= V_{5,5} \times e^{-r\partial t} \times e^{-r\partial t}$$

$$= V_{5,5} \times e^{-2r\partial t}$$

$$V_{2,5} = V_{3,5} \times e^{-r\partial t}$$

$$= V_{5,5} \times e^{-2r\partial t} \times e^{-r\partial t}$$

$$= V_{5,5} \times e^{-3r\partial t}$$

$$V_{1,5} = V_{2,5} \times e^{-r\partial t}$$
$$= V_{5,5} \times e^{-3r\partial t} \times e^{-r\partial t}$$
$$= V_{5,5} \times e^{-4r\partial t}$$

$$V_{0,5} = V_{1,5} \times e^{-r\partial t}$$
$$= V_{5,5} \times e^{-4r\partial t} \times e^{-r\partial t}$$
$$= V_{5,5} \times e^{-5r\partial t}$$

yang dikatakan sebagai batas atas.

- Nilai *payoff* terendah pada setiap periode, yaitu

$$V_{5,0} = \max\left(S_{\min} - K, 0\right) = 0$$

$$V_{4,0} = \max\left(S_{\min} - K, 0\right) = 0$$

$$V_{3,0} = \max\left(S_{\min} - K, 0\right) = 0$$

$$V_{2,0} = \max\left(S_{\min} - K, 0\right) = 0$$

$$V_{1,0} = \max\left(S_{\min} - K, 0\right) = 0$$

$$V_{0,0} = \max\left(S_{\min} - K, 0\right) = 0$$

yang dikatakan sebagai batas bawah.

Dengan adanya nilai awal, nilai batas atas, dan batas bawah, maka sistem persamaan linier di atas menjadi lebih sederhana, yaitu

$$
\begin{aligned}
S_1 - K &= b_1 V_{4,1} + c_1 V_{4,2} \\
S_2 - K &= a_2 V_{4,1} + b_2 V_{4,2} + c_2 V_{4,3} \\
S_3 - K &= a_3 V_{4,2} + b_3 V_{4,3} + c_3 V_{4,4} \\
(S_4 - K) - c_4 (S_5 - K) e^{-r\partial t} &= a_4 V_{4,3} + b_4 V_{4,4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{4,1} &= b_1 V_{3,1} + c_1 V_{3,2} \\
V_{4,3} &= a_2 V_{3,2} + b_2 V_{3,3} + c_2 V_{3,4} \\
V_{4,2} &= a_3 V_{3,1} + b_3 V_{3,2} + c_3 V_{3,3} \\
V_{4,4} - c_4 (S_5 - K) e^{-2r\partial t} &= a_4 V_{3,3} + b_4 V_{3,4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{3,1} &= b_1 V_{2,1} + c_1 V_{2,2} \\
V_{3,3} &= a_2 V_{2,2} + b_2 V_{2,3} + c_2 V_{2,4} \\
V_{3,2} &= a_3 V_{2,1} + b_3 V_{2,2} + c_3 V_{2,3} \\
V_{3,4} - c_4 (S_5 - K) e^{-3r\partial t} &= a_4 V_{2,3} + b_4 V_{2,4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{2,1} &= b_1 V_{1,1} + c_1 V_{1,2} \\
V_{2,2} &= a_2 V_{1,1} + b_2 V_{1,2} + c_2 V_{1,3} \\
V_{2,3} &= a_3 V_{1,2} + b_3 V_{1,3} + c_3 V_{1,4} \\
V_{2,4} - c_4 (S_5 - K) e^{-4r\partial t} &= a_4 V_{1,3} + b_4 V_{1,4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{1,1} &= b_1 V_{0,1} + c_1 V_{0,2} \\
V_{1,2} &= a_2 V_{0,1} + b_2 V_{0,2} + c_2 V_{0,3} \\
V_{1,3} &= a_3 V_{0,2} + b_3 V_{0,3} + c_3 V_{0,4} \\
V_{1,4} - c_4 (S_5 - K) e^{-5r\partial t} &= a_4 V_{0,3} + b_4 V_{0,4}
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan linier tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{bmatrix} S_1-K \\ S_2-K \\ S_3-K \\ (S_4-K)-c_4(S_5-K)e^{-r\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{4,1} \\ V_{4,2} \\ V_{4,3} \\ V_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{4,1} \\ V_{4,2} \\ V_{4,3} \\ V_{4,4}-c_4(S_5-K)e^{-2r\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{3,1} \\ V_{3,2} \\ V_{3,3} \\ V_{3,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{3,1} \\ V_{3,2} \\ V_{3,3} \\ V_{3,4}-c_4(S_5-K)e^{-3r\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2,1} \\ V_{2,2} \\ V_{2,3} \\ V_{2,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{2,1} \\ V_{2,2} \\ V_{2,3} \\ V_{2,4}-c_4(S_5-K)e^{-4r\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{1,3} \\ V_{1,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{1,3} \\ V_{1,4}-c_4(S_5-K)e^{-5r\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0,1} \\ V_{0,2} \\ V_{0,3} \\ V_{0,4} \end{bmatrix}$$

Sehingga secara umum matriksnya adalah

$$\begin{bmatrix} V_{i+1,1} \\ V_{i+1,2} \\ \vdots \\ V_{i+1,M-2} \\ V_{i+1,M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i,1} \\ V_{i,2} \\ \vdots \\ V_{i,M-2} \\ V_{i,M-1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Untuk i = N-1,...,1,0 dan j = 1,2,..., M-1, maka matriksnya dapat dinyatakan dengan $V_{i+1,j} = AV_{i,j}$ dimana A adalah matriks tridiagonal dengan ukuran $(M-1)\times(M-1)$ dan selesaiannya adalah $V_{i,j} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T V_{i+1,j}$ yang berukuran $(M-1)\times 1$.

3.1.2 Skema Beda Hingga Eksplisit

Untuk mendiskritisasi model persamaan Black-Scholes dengan metode beda hingga eksplisit yaitu menggunakan aproksimasi beda maju dan beda pusat.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} \qquad \text{(beda maju)} \qquad (3.23)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \qquad \text{(beda pusat)} \qquad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j-1}}{\Delta S^2} \qquad \text{(beda pusat)} \qquad (3.25)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.23), (3.24), dan (3.25) ke dalam persamaan (2.60), maka diperoleh

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j-1}}{\Delta S^2}\right) + rS\left(\frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S}\right) + \left(\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t}\right) - rV_{i,j} = 0 \qquad (3.26)$$

$$\left[\frac{\sigma^2 S^2}{2\Delta S^2}V_{i+1,j+1} - \frac{\sigma^2 S^2}{\Delta S^2}V_{i+1,j} + \frac{\sigma^2 S^2}{2\Delta S^2}V_{i+1,j-1}\right] + \left[\frac{rS}{2\Delta S}V_{i+1,j+1} - \frac{rS}{2\Delta S}V_{i+1,j-1}\right] + \left[\frac{V_{i+1,j}}{\Delta t} - \frac{V_{i,j}}{\Delta t}\right] - rV_{i,j} = 0 \qquad (3.27)$$

Substitusikan $S = j\Delta S$ ke dalam persamaan (3.27), maka diperoleh

$$\left[\frac{\sigma^2 j^2 \Delta S^2}{2\Delta S^2}V_{i+1,j+1} - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta S^2}{\Delta S^2}V_{i+1,j} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta S^2}{2\Delta S^2}V_{i+1,j-1}\right] + \left[\frac{rj\Delta S}{2\Delta S}V_{i+1,j+1} - \frac{rj\Delta S}{2\Delta S}V_{i+1,j-1}\right] + \left[\frac{V_{i+1,j}}{\Delta t} - \frac{V_{i,j}}{\Delta t}\right] - rV_{i,j} = 0 \qquad (3.28)$$

$$\left[\frac{\sigma^2 j^2}{2}V_{i+1,j+1} - \sigma^2 j^2 V_{i+1,j} + \frac{\sigma^2 j^2}{2}V_{i+1,j-1}\right] + \left[\frac{rj}{2}V_{i+1,j+1} - \frac{rj}{2}V_{i+1,j-1}\right] + \left[\frac{V_{i+1,j}}{\Delta t} - \frac{V_{i,j}}{\Delta t}\right] - rV_{i,j} = 0 \qquad (3.29)$$

$$\left[\frac{\sigma^2 j^2}{2}+\frac{rj}{2}\right]V_{i+1,j+1}+\left[\frac{1}{\Delta t}-\sigma^2 j^2\right]V_{i+1,j}+\left[\frac{\sigma^2 j^2}{2}-\frac{rj}{2}\right]V_{i+1,j-1}=\left[\frac{1+r\Delta t}{\Delta t}\right]V_{i,j} \qquad (3.30)$$

Kedua ruas dikalikan dengan Δt, maka diperoleh

$$\left[\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}+\frac{rj\Delta t}{2}\right]V_{i+1,j+1}+\left[1-\sigma^2 j^2\Delta t\right]V_{i+1,j}+\left[\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}-\frac{rj\Delta t}{2}\right]V_{i+1,j-1}=\left(1+r\Delta t\right)V_{i,j} \qquad (3.31)$$

$$\frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}-\frac{rj\Delta t}{2}\right]V_{i+1,j-1}+\frac{1}{1+r\Delta t}\left[1-\sigma^2 j^2\Delta t\right]V_{i+1,j}+\frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}+\frac{rj\Delta t}{2}\right]V_{i+1,j+1}=V_{i,j} \qquad (3.32)$$

Sehingga persamaan (3.32) dapat diperoleh

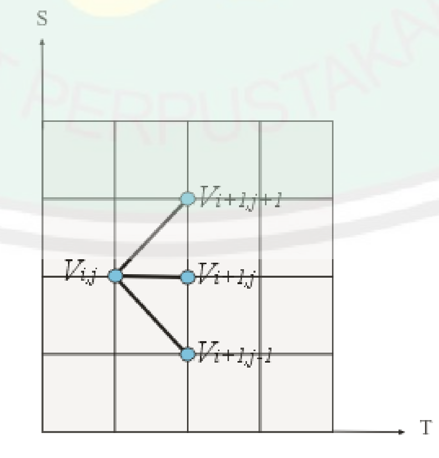
$$V_{i,j}=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(a_j V_{i+1,j-1}+b_j V_{i+1,j}+c_j V_{i+1,j+1}\right) \qquad (3.33)$$

untuk $i = N\text{-}1$, ..., 1, 0 dan j = 1, 2, ..., $M\text{-}1$

dengan

$$a_j=\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}-\frac{r\,j\,\Delta t}{2},\ b_j=1-\sigma^2 j^2\,\Delta t,\ \text{dan}\ c_j=\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}+\frac{r\,j\,\Delta t}{2} \qquad (3.34)$$

Skema metode beda hingga eksplisit dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3.2 Beda Hingga Eksplisit

Pada persamaan (3.33) untuk $i = 0, 1, 2, ..., N\text{-}1$ dan $j = 1, 2, ..., M\text{-}1$, dimana $M = N = 5$, dengan cara yang sama pada metode beda hingga implisit, maka diperoleh suatu sistem persamaan linier yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{bmatrix} V_{4,1} \\ V_{4,2} \\ V_{4,3} \\ V_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{5,1} \\ V_{5,2} \\ V_{5,3} \\ V_{5,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{3,1} \\ V_{3,2} \\ V_{3,3} \\ V_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{4,1} \\ V_{4,2} \\ V_{4,3} \\ V_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{2,1} \\ V_{2,2} \\ V_{2,3} \\ V_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{3,1} \\ V_{3,2} \\ V_{3,3} \\ V_{3,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{1,3} \\ V_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2,1} \\ V_{2,2} \\ V_{2,3} \\ V_{2,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{0,1} \\ V_{0,2} \\ V_{0,3} \\ V_{0,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{1,3} \\ V_{1,4} \end{bmatrix}$$

Secara umum matriks tridiagonalnya adalah

$$\begin{bmatrix} V_{i,0} \\ V_{i,1} \\ \vdots \\ V_{i,M\text{-}1} \\ V_{i,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i+1,1} \\ V_{i+1,2} \\ \vdots \\ V_{i+1,M-2} \\ V_{i+1,M-1} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Untuk i =N-1,...,1,0 dan j = 1,2,..., M-1, maka matriksnya dapat dinyatakan dengan $V_{i,j} = BV_{i+1,j}$ dimana B adalah matriks tridiagonal dengan ukuran $(M-1)\times(M-1)$ yang unsur-unsur $V_{i+1,j}$ telah diketahui dan selesaiannya adalah $V_{i,j} = BV_{i+1,j}$ yang berukuran $(M-1)\times 1$.

3.1.3 Skema Beda Hingga Crank-Nicholson

Metode beda hingga Crank-Nicholson adalah rata-rata dari metode beda hingga implisit dan eksplisit. Sehingga rata-rata dari kedua persamaan tersebut, yaitu

$$\frac{\partial V_{i/2,j}}{\partial t} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + O\left(\Delta t^2\right) \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial V_{i/2,j}}{\partial t} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial V_{i/2,j}}{\partial S} = \frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j}}{\Delta S} + \frac{V_{i+1,j}}{\Delta S}\right] + O(\Delta S)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S}\right] + O(\Delta S) \tag{3.38}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S}\right] \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial^2 V_{i/2,j}}{\partial S^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\Delta S^2} + \frac{\partial^2 V_{i+1,j}}{\Delta S^2}\right] + O\left(\Delta S^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{\Delta S^2} + \frac{V_{i+1,j-1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j+1}}{\Delta S^2}\right] + O\left(\Delta S^2\right) \quad (3.40)$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{\Delta S^2} + \frac{V_{i+1,j-1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j+1}}{\Delta S^2}\right] \quad (3.41)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.37), (3.39), dan (3.41) ke dalam persamaan (2.60), maka diperoleh

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left[\frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{\Delta S^2} + \frac{V_{i+1,j-1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j+1}}{\Delta S^2}\right]\right]$$
$$+ rS\left[\frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S}\right]\right] = \frac{1}{2}r\left(V_{i+1,j} + V_{i,j}\right)$$

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S^2}{4}\left[\frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{\Delta S^2} + \frac{V_{i+1,j-1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j+1}}{\Delta S^2}\right]$$
$$+ \frac{rS}{2}\left[\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S}\right] = \frac{r}{2}\left(V_{i+1,j} + V_{i,j}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[V_{i+1,j} - V_{i,j}\right] + \frac{\sigma^2 S^2}{4\Delta S^2}\left[V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1} + V_{i+1,j-1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j+1}\right]$$
$$+ \frac{rS}{4\Delta S}\left[V_{i,j+1} - V_{i,j-1} + V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}\right] = \frac{r}{2}\left(V_{i+1,j} + V_{i,j}\right) \quad (3.42)$$

Sehingga persamaan (3.42) menjadi

$$\left(\frac{\sigma^2 S^2}{4\Delta S^2} - \frac{rS}{4\Delta S}\right)V_{i+1,j-1} + \left(\frac{1}{\partial \tau} - \frac{r}{2} - \frac{\sigma^2 S^2}{2\Delta S^2}\right)V_{i+1,j} + \left(\frac{\sigma^2 S^2}{4\Delta S^2} + \frac{rS}{4\Delta S}\right)V_{i+1,j+1} =$$
$$\left(-\frac{\sigma^2 S^2}{4\Delta S^2} + \frac{rS}{4\Delta S}\right)V_{i,j-1} + \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2 S^2}{2\Delta S^2}\right)V_{i,j} + \left(-\frac{\sigma^2 S^2}{4\Delta S^2} - \frac{rS}{4\Delta S}\right)V_{i,j+1} \quad (3.43)$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan Δt, maka diperoleh

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sigma^2 S^2\Delta t}{4\Delta S^2}-\frac{rS\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{i+1,j-1}+\left(1-\frac{r\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 S^2\Delta t}{2\Delta S^2}\right)V_{i+1,j}+\left(\frac{\sigma^2 S^2\Delta t}{4\Delta S^2}+\frac{rS\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{i+1,j+1}=\\&\left(-\frac{\sigma^2 S^2\Delta t}{4\Delta S^2}+\frac{rS\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{i,j-1}+\left(1+\frac{r\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2 S^2\Delta t}{2\Delta S^2}\right)V_{i,j}+\left(-\frac{\sigma^2 S^2\Delta t}{4\Delta S^2}-\frac{rS\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{i,j+1}\end{aligned} \tag{3.44}$$

Substitusikan $S = j\Delta S$, maka persamaan (3.44) menjadi

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t}{4\Delta S^2}+\frac{rj\Delta S\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{i,j-1}+\left(1+\frac{r\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t}{2\Delta S^2}\right)V_{i,j}+\left(-\frac{\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t}{4\Delta S^2}-\frac{\Delta t}{4\Delta S}rj\Delta S\right)V_{i,j+1}=\\&\left(\frac{\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t}{4\Delta S^2}-\frac{\Delta t}{4\Delta S}rj\Delta S\right)V_{i+1,j-1}+\left(1-\frac{r\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t}{2\Delta S^2}\right)V_{i+1,j}+\left(\frac{\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t}{4\Delta S^2}+\frac{\Delta t}{4\Delta S}rj\Delta S\right)V_{i+1,j+1}\end{aligned} \tag{3.45}$$

Sehingga persamaan (3.45) menjadi

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{4}+\frac{rj\Delta t}{4}\right)V_{i,j-1}+\left(1+\frac{r\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}\right)V_{i,j}+\left(-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{4}-\frac{rj\Delta t}{4}\right)V_{i,j+1}=\\&\left(\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{4}-\frac{rj\Delta t}{4}\right)V_{i+1,j-1}+\left(1-\frac{r\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}\right)V_{i+1,j}+\left(\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{4}+\frac{rj\Delta t}{4}\right)V_{i+1,j+1}\end{aligned} \tag{3.46}$$

Persamaan (3.46) dapat disederhanakan menjadi

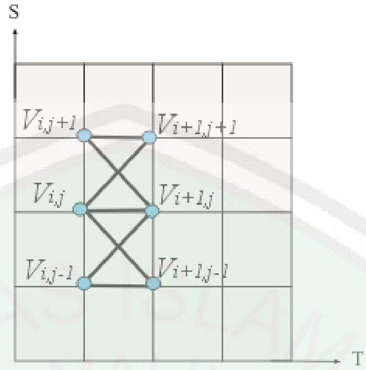
$$a_j V_{i,j-1}+b_j V_{i,j}+c_j V_{i,j+1}=\bar{a}_j V_{i+1,j-1}+\bar{b}_j V_{i+1,j}+\bar{c}_j V_{i+1,j+1} \tag{3.47}$$

untuk $i = 0, 1, ..., N\text{-}1$ dan $j = 1, 2, ..., M\text{-}1$

dengan

$$\begin{aligned}a_j&=-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{4}+\frac{rj\Delta t}{4} & \bar{a}_j&=\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{4}-\frac{rj\Delta t}{4}\\ b_j&=1+\frac{r\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2} & \bar{b}_j&=1-\frac{r\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}\\ c_j&=-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{4}-\frac{rj\Delta t}{4} & \bar{c}_j&=\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{4}+\frac{rj\Delta t}{4}\end{aligned} \tag{3.48}$$

Skema metode beda hingga Crank-Nicholson dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3.3 Beda Hingga Crank-Nicholson

Pada persamaan (3.47) untuk $i = N$-1, ...,1,0 dan j = 1, 2, ..., M-1 dimana $M = N$ = 5, dengan cara yang sama pada kedua metode beda hingga implisit dan eksplisit, maka akan diperoleh suatu sistem persamaan linier yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks tridiagonal, yaitu

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{4,1} \\ V_{4,2} \\ V_{4,3} \\ V_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{c}_1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \\ 0 & 0 & \bar{a}_4 & \bar{b}_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{5,1} \\ V_{5,2} \\ V_{5,3} \\ V_{5,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{3,1} \\ V_{3,2} \\ V_{3,3} \\ V_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{c}_1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \\ 0 & 0 & \bar{a}_4 & \bar{b}_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{4,1} \\ V_{4,2} \\ V_{4,3} \\ V_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{2,1} \\ V_{2,2} \\ V_{2,3} \\ V_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{c}_1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \\ 0 & 0 & \bar{a}_4 & \bar{b}_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{3,1} \\ V_{3,2} \\ V_{3,3} \\ V_{3,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{1,3} \\ V_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{c}_1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \\ 0 & 0 & \bar{a}_4 & \bar{b}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2,1} \\ V_{2,2} \\ V_{2,3} \\ V_{2,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0,1} \\ V_{0,2} \\ V_{0,3} \\ V_{0,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{c}_1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \\ 0 & 0 & \bar{a}_4 & \bar{b}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{1,3} \\ V_{1,4} \end{bmatrix}$$

Secara umum matriks tridiagonalnya adalah

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^i \\ v_2^i \\ \vdots \\ v_{M-2}^i \\ v_{M-1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 & \bar{c}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{b}_1 & \bar{c}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{M-2} & \bar{b}_{M-2} & \bar{c}_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_{M-1} & \bar{b}_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{i+1} \\ v_2^{i+1} \\ \vdots \\ v_{M-2}^{i+1} \\ v_{M-1}^{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Untuk i = N-1,...,1,0 dan j = 1,2,..., M-1, maka matriksnya dapat dinyatakan dengan $Av_j^i = Bv_j^{i+1}$, dimana A dan B adalah matriks tridiagonal dengan ukuran $(M-1)\times(M-1)$, unsur-unsur $V_{i+1,j}$ diketahui dan selesaiannya adalah $v_j^i = \left(A^T A\right)^{-1} A^T Bv_j^{i+1}$ yang berukuran $(M-1)\times 1$.

3.2 Algoritma Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit dan Crank-Nicholson

Untuk perhitungan menggunakan komputasi, maka dibutuhkan suatu algoritma. Algoritma untuk ketiga metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson, yaitu:

1. *Input:* $S_0, r, \sigma, T, K,$ dan N.

2. Tentukan harga saham maksimal (Smax) dan minimal (Smin).

3. Hitung partisi harga saham, $dS = \dfrac{S\max}{M}$ dan partisi waktu, $dt = \dfrac{T}{N}$.

4. Hitung harga saham tiap waktu, $S_t = S_0 e^{\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t + \sigma\xi\sqrt{t}}$ untuk t = 1,2,3,...,N.

5. Hitung harga saham rata-rata dengan ketentuan, $\bar{S} = \dfrac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} S_t$.

6. Hitung elemen-elemen matriks B dan A, yaitu a, b dan c dengan mengunakan persamaan (3.20), (3.34), dan (3.48) untuk masing-masing metode beda hingga (implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson).

7. Buat matriks B dan A yang diperoleh dari langkah keenam dengan menggunakan persamaan (3.21), (3.35), dan (3.49) untuk masing-masing metode beda hingga (implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson).

8. Untuk *call* opsi, hitung nilai batas atas v_j^0 = Smax, nilai batas bawah v_j^{N-1} = Smin, untuk semua j = 1,2,..,M-1, dan nilai awal $v_{M-1}^i = \max\left(\bar{S} - K, 0\right)$ untuk semua i = N-1,...,2,1,0.

   Untuk *put* opsi, hitung nilai batas atas v_j^0 = Smin, nilai batas bawah v_j^{N-1} = Smax, untuk semua j = 1,2,..,M-1, dan nilai awal $v_{M-1}^i = \max\left(K - \bar{S}, 0\right)$ untuk semua i = N-1,...,2,1,0.

9. Hitung nilai opsi untuk setiap vektor

   a. Untuk metode beda hingga implisit $v_j^i = \left(A^T A\right)^{-1} A^T v_j^{i+1}$ untuk suatu i = N-1, ..., 2, 1, 0 dan masing-masing j = 1, 2, ..., M-1

   b. Untuk metode beda hingga eksplisit $v_j^i = B v_j^{i+1}$ untuk suatu i = N-1, ..., 2, 1, 0 dan masing-masing j = 1, 2, ..., M-1, dan

c. Untuk metode beda hingga Crank-Nicholson $v_j^i = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B v_j^{i+1}$ untuk suatu $i = N$-1, ..., 2, 1, 0 dan masing-masing j = 1, 2, ..., M-1.

10. *Output*

a. Harga opsi *call* dan *put Asia*

b. Pergerakan harga opsi.

11. Ulangi langkah 1 sampai dengan 9 dengan N yang berbeda.

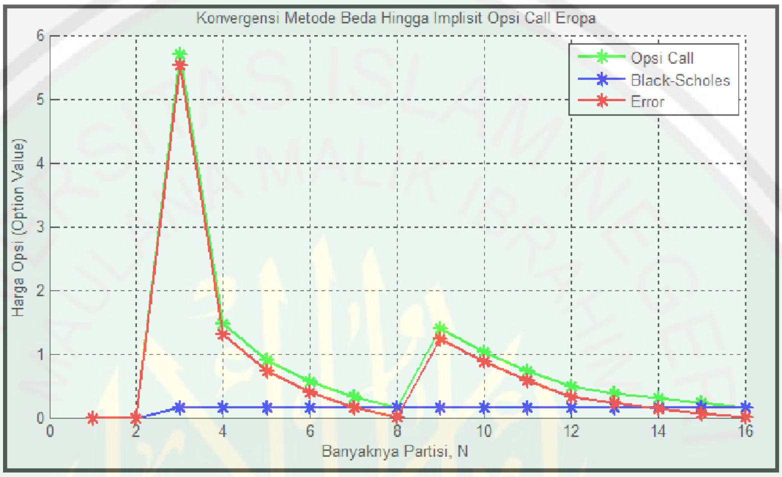
3.3 Simulasi Komputasi

Simulasi komputasi dengan menggunakan metode beda hingga implisit, eksplisit dan Crank-Nicholson mengambil beberapa contoh kasus tertentu. Sebelum ketiga metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson digunakan untuk menentukan perhitungan harga opsi Asia, terlebih dahulu diimplementasikan pada penentuan harga opsi Eropa. Karena pada opsi Eropa terdapat solusi analitik sedangkan pada opsi Asia tidak ada solusi analitiknya. Jika ketiga metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson hasil perhitungan harga opsi Eropa sesuai dengan solusi analitiknya, maka ketiga metode tersebut dapat digunakan pada opsi Asia.

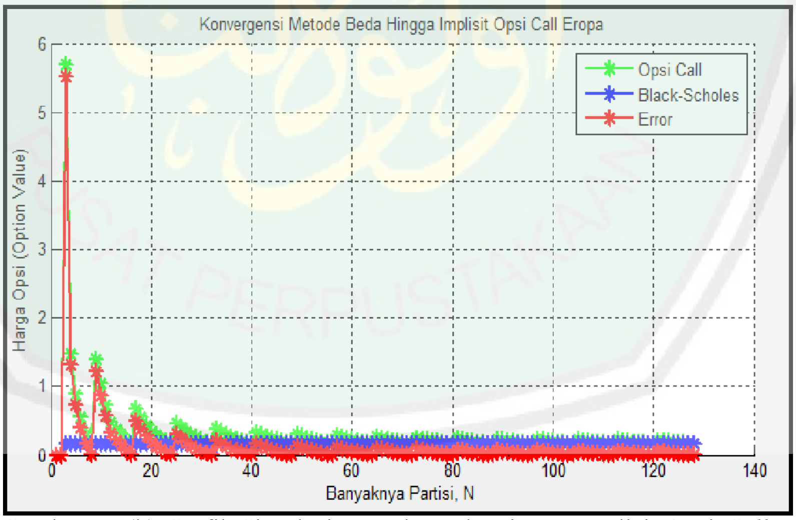
3.3.1 Perhitungan Harga Opsi Eropa

Sebagai ilustrasi, misalkan suatu kontrak opsi diberikan harga saham awal, S_0 = 5 (satuan mata uang) perlembar, harga saham ketentuan, K = 10 (satuan mata uang) perlembar, waktu jatuh tempo, T = 1 tahun, tingkat suku bunga bebas resiko, r = 6% pertahun dan standar deviasi saham tersebut sebesar , σ = 0,5.

Dalam hal ini akan ditampilkan grafik solusi numerik untuk opsi Eropa dengan menggunakan metode beda hingga implisit, eksplisit dan Crank-Nicholson berturut-turut sebagaimana yang terlihat pada gambar (3.4), gambar (3.5) dan gambar (3.6).

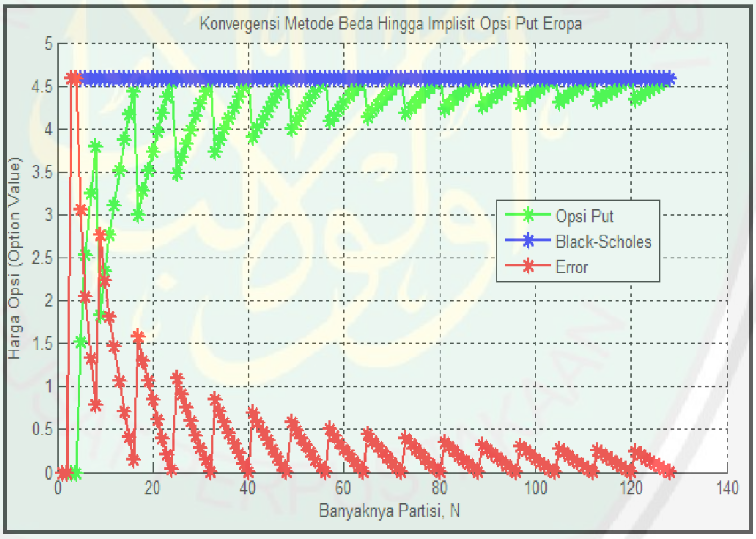


Gambar 3.4(a) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Call* Eropa dengan $N = 16$



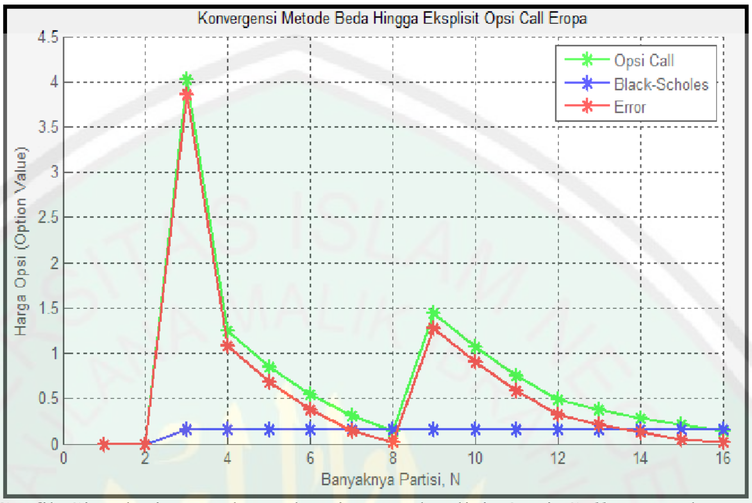
Gambar 3.4(b) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Call* Eropa dengan $N = 128$

Grafik pada gambar 3.4(a) menunjukkan bahwa pergerakan harga opsi *call* Eropa menggunakan metode beda hingga implisit dengan partisi waktu N = 16. Pergerakan harga opsi *call* tersebut akan mendekati (konvergen) pada harga opsi *call* model persamaan Black-Scholes. Tetapi galat yang dihasilkan masih terlalu besar. Untuk memperkecil galat yang dihasilkan, maka partisi waktu N akan diperbanyak. Pada gambar 3.4(b) harga opsi *call* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga implisit dengan partisi waktu N = 128 akan mendekati (konvergen) pada harga opsi *call* model persamaan Black-Scholes dan galat yang dihasilkan juga akan semakin kecil. Semakin partisi waktu N diperbanyak akan mendekati harga opsi *call* pada model persamaan Black-Scholes. Karena metode beda hingga implisit dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Eropa, maka metode implisit dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia.



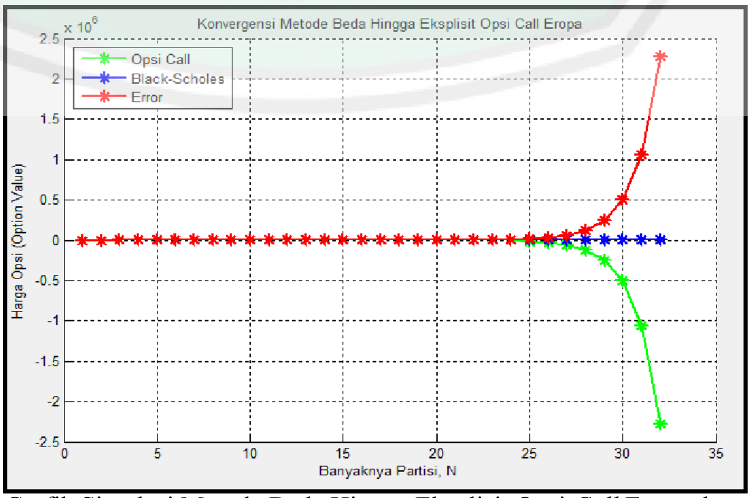
Gambar 3.4(c) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Put* Eropa dengan N = 128

Grafik pada gambar 3.4(c) menunjukkan bahwa pergerakan harga opsi *put* Eropa menggunakan metode beda hingga implisit dengan partisi waktu N = 128. Pergerakan harga opsi *put* Eropa tersebut akan mendekati (konvergen) pada harga opsi *put* model persamaan Black-Scholes. Seperti halnya pada perhitungan harga opsi *call*, semakin partisi waktu N diperbanyak akan mendekati solusi analitiknya yaitu model persamaan Black-Scholes. Karena metode beda hingga implisit dapat menentukan harga opsi *call* dan *put* Eropa, maka metode beda hingga implisit dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *call* dan *put* pada opsi Asia.

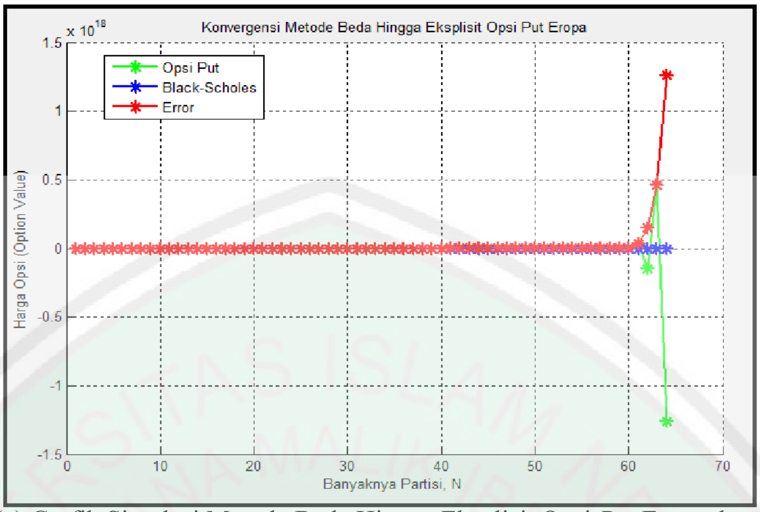


Gambar 3.5(a) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit Opsi *Call* Eropa dengan $N = 16$

Grafik pada gambar 3.5(a) menunjukkan bahwa pergerakan harga opsi *call* Eropa menggunakan metode beda hingga eksplisit dengan partisi waktu $N = 16$. Pergerakan harga opsi *call* Eropa tersebut akan mendekati (konvergen) terhadap pergerakan harga opsi *call* Eropa pada model persamaan Black-Scholes. Tetapi galat yang dihasilkan masih terlalu besar. Untuk memperkecil galat yang dihasilkan, maka partisi waktu N diperbanyak.

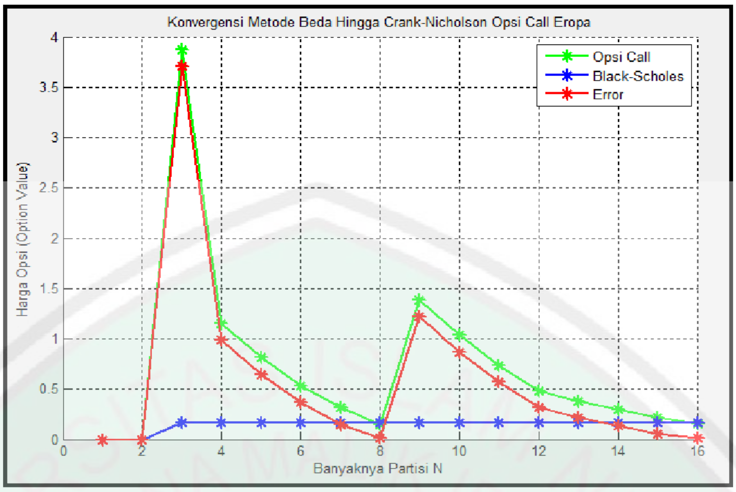


Gambar 3.5(b) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit Opsi *Call* Eropa dengan $N = 32$



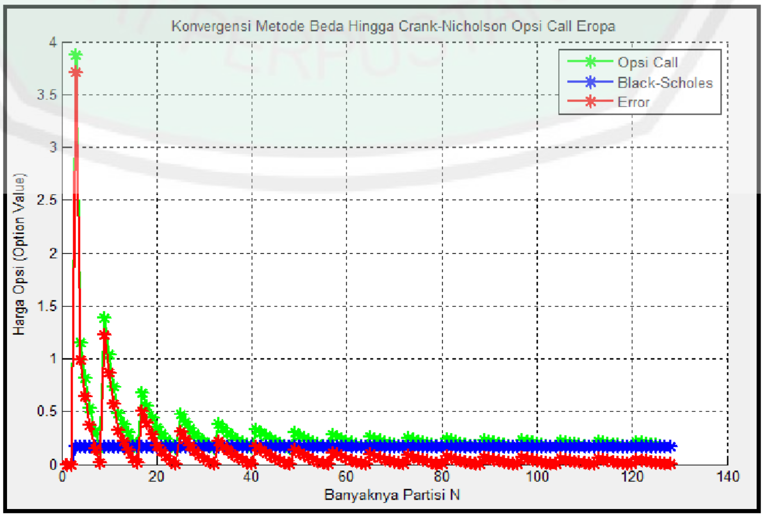
Gambar 3.5(c) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit Opsi *Put* Eropa dengan $N = 64$

Pada gambar 3.5(b) menunjukan pergerakan harga opsi *call* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit dengan partisi waktu $N = 32$. Semakin partisi waktu N diperbanyak, grafik pergerakan harga opsi *call* tersebut tidak mendekati (konvergen) terhadap pergerakan harga opsi *call* pada model persamaan Black-Scholes. Hal ini juga sama pada grafik gambar 3.5(c) bahwa pergerakan harga opsi *put* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit tidak mendekati (konvergen) terhadap pergerakan harga opsi *put* pada model persamaan Black-Scholes. Seharusnya ketika partisi waktu N diperbanyak, grafik yang dihasilkan akan selalu mendekati solusi analitiknya, dalam hal ini solusi analitiknya adalah model persamaan Black-Scholes. Pada kasus penelitian ini harga saham yang digunakan adalah harga saham (S). Dalam menentukan harga opsi saham dengan menggunakan metode beda hingga lebih efisien menggunakan $\ln(S)$. Karena ketika harga saham di-*log*-kan maka harga saham tersebut akan menjadi distribusi *lognormal*.



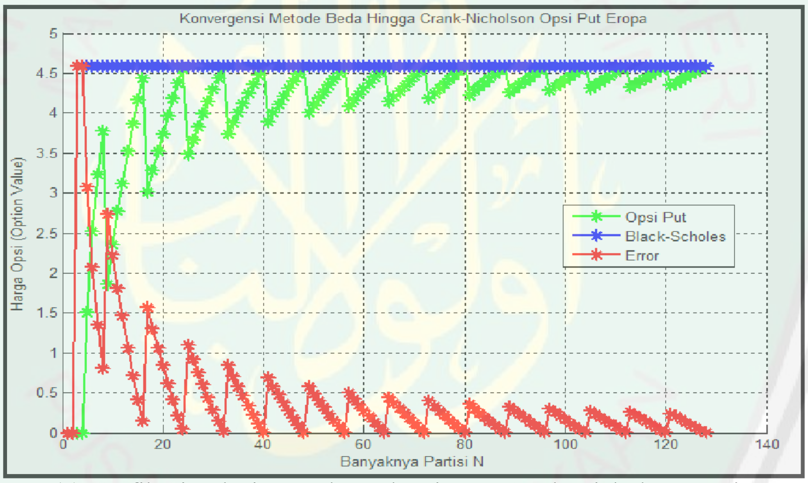
Gambar 3.6(a) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Call* Eropa dengan $N = 16$

Pada gambar 3.6(a) menunjukan pergerakan harga opsi *call* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi waktu $N = 16$. Meskipun pergerakan harga opsi *call* dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson akan mendekati (konvergen) terhadap pergerakan harga opsi *call* pada model persamaan Black-Scholes, namun galat yang dihasilkan masih terlalu besar. Sehingga untuk memperkecil galat, maka partisi waktu N diperbanyak.



Gambar 3.6(b) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Call* Eropa dengan $N = 128$

Pada gambar 3.6(b) harga opsi *call* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi waktu N = 128 akan mendekati (konvergen) pada harga opsi *call* model persamaan Black-Scholes dan galat yang dihasilkan juga akan semakin kecil. Semakin partisi waktu N diperbanyak akan mendekati harga opsi *call* pada model persamaan Black-Scholes. Karena metode beda hingga Crank-Nicholson dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Eropa, maka metode beda hingga Crank-Nicholson dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia.

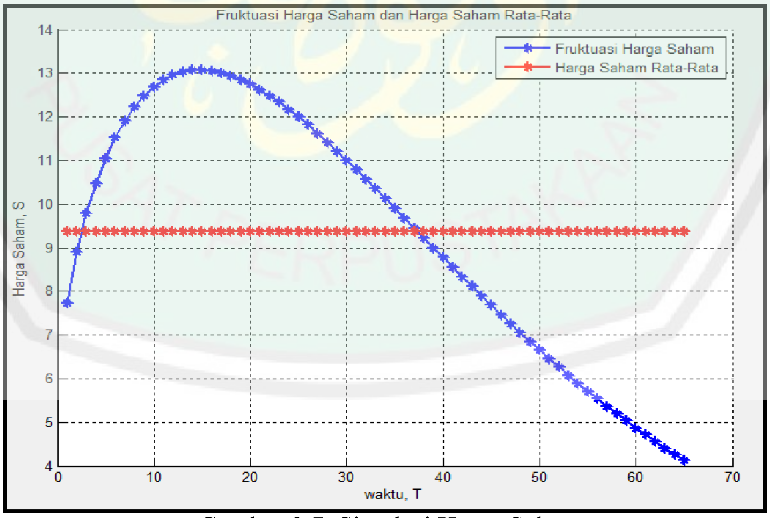


Gambar 3.6(c) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Put* Eropa dengan N = 128

Grafik pada gambar 3.6(c) menunjukkan bahwa pergerakan harga opsi *put* Eropa menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi waktu N = 128. Pergerakan harga opsi *put* Eropa tersebut akan mendekati (konvergen) pada harga opsi *put* model persamaan Black-Scholes. Seperti halnya pada perhitungan harga opsi *call*, semakin partisi waktu N diperbanyak akan mendekati solusi analitiknya yaitu model persamaan Black-Scholes. Karena metode beda hingga Crank-Nicholson dapat menentukan harga opsi *call* dan *put* Eropa, maka metode beda hingga dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *call* dan *put* pada opsi Asia.

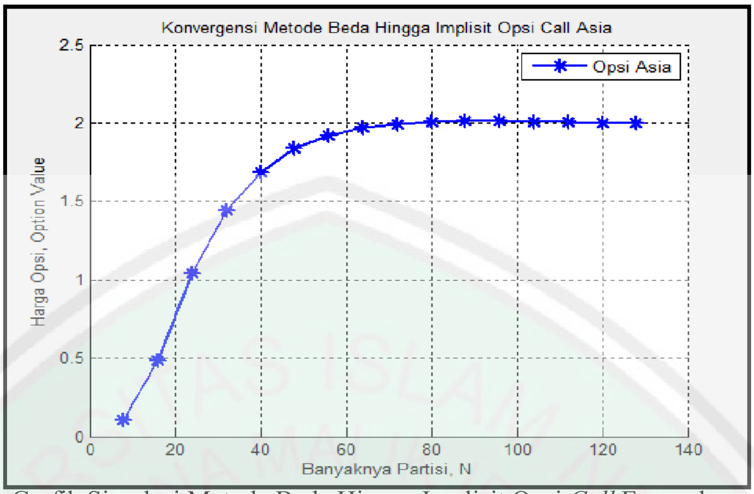
3.3.2 Perhitungan Harga Opsi Asia

Dari ketiga metode beda hingga implisit, eksplisit dan Crank-Nicholson, yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Eropa yang mendekati (konvergen) terhadap harga opsi Asia adalah metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson. Dengan kasus yang sama pada perhitungan harga opsi Eropa, akan ditampilkan grafik pergerakan harga saham dan solusi numerik untuk opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson berturut-turut sebagaimana yang terlihat pada gambar (3.7), gambar (3.8), dan gambar (3.9).



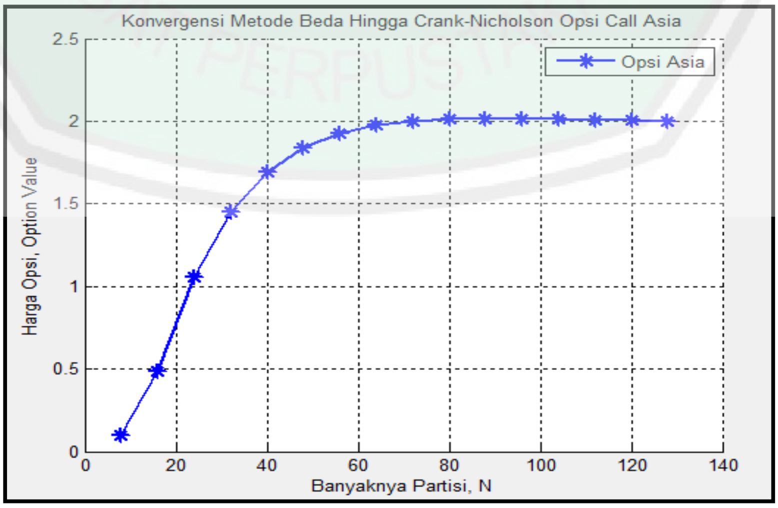
Gambar 3.7 Simulasi Harga Saham

Grafik pada gambar 3.7 menunjukkan bahwa pergerakan harga saham dengan partisi $N = 64$ bernilai berbeda-beda. Perbedaan harga saham ini terdapat pada setiap partisi dengan rata-rata harga saham yaitu 9.3718 (satuan mata uang).



Gambar 3.8 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Call* Eropa dengan $N = 128$

Grafik pada gambar 3.8 menunjukkan bahwa pergerakan harga opsi *call* Asia menggunakan metode beda hingga implisit dengan partisi waktu $N = 128$. Karena pada harga opsi Asia tidak memiliki solusi analitik, maka perhitungan harga opsi Asia jika partisi waktu N diperbanyak akan konvergen ke suatu titik dalam kasus ini yaitu 1.9963 (satuan mata uang). Metode beda hingga implisit ini juga dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Asia.



Gambar 3.9 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Call* Eropa dengan $N = 128$

Grafik pada gambar 3.9 menunjukkan pergerakan harga opsi *call* Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi waktu N = 128. Untuk mengetahui kebenaran suatu harga opsi Asia dapat dilihat dari kekonvergenan pergerakan harga opsi Asia itu sendiri. Semakin partisi waktu N diperbanyak maka harga opsi *call* Asia akan konvergen ke suatu titik dalam kasus ini yaitu 1,9988 (satuan mata uang). Metode beda hingga Crank-Nicholson ini juga dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Asia.

Pada gambar 3.8 dan gambar 3.9 jika dilihat sekilas akan terlihat sama. Tapi kenyataannya kedua gambar tersebut berbeda. Letak perbedaannya terdapat pada titik kekonvergenannya yaitu jika pada gambar 3.8 titik kekonvergenannya yaitu 1.9963 (satuan mata uang), sedangkan pada gambar 3.9 titik kekonvergenannya adalah 1.9988 (satuan mata uang). Jadi dapat disimpulkan bahwa dari kedua gambar tersebut yang lebih efektif menggunakan metode Crank-Nicholson karena metode ini memberikan hasil yang lebih optimal atau lebih akurat dibanding dengan metode beda hingga implisit.

3.4 Analisis Jual Beli Opsi Saham dalam Islam

Dalam penetapan hukum *syara'* tidak serta merta dalam mengambil keputusan. Segala sesuatu yang ditetapkan Allah SWT pasti ada hukumnya. Pada jaman sekarang banyak masalah yang muncul sehingga harus ada ketetapan hukum yang mendasarinya. Salah satunya cara dalam mengambil keputusan hukum *syara'* adalah *qiyas*. *Qiyas* adalah menyamakan hukum sesuatu dengan hukum sesuatu yang lain karena adanya kesamaan antara yang di-*qiyasi* dan yang di-*qiyas*-kan. Dalam hukum *syara'* yang melalui *qiyas* harus terdapat dalil yang mendasari masalah tersebut dalam *nash* (Al-Quran dan sunnah), adanya hukum masalah tersebut dalam *nash* (Al-Quran dan sunnah), adanya sifat dalam masalah yang akan disamakan dan masalah yang hendak di-*qiyas*-kan.

Kontrak opsi dilihat dari keterangan di atas merupakan salah satu instrumen derivatif dalam saham. Pengertian kontrak opsi pada sebuah saham merupakan sebuah perjanjian hak untuk memilih antara membeli atau menjual saham tersebut pada suatu hari tertentu. Dilihat dari pengertian suatu kontrak opsi terdapat kesamaan dengan hukum fiqih tentang *khiyar*. Lebih khususnya pada *khiyar majlis*. Antara kontrak opsi dan *khiyar majlis* sama-sama mempunyai pengertian yaitu hak yang dimiliki oleh dua pihak (*holder* dan *writer*) untuk memilih melanjutkan atau membatalkan suatu transaksi yang telah disepakati sebelumnya.

Dalam hukum Islam, *khiyar majlis* hukumnya diperbolehkan dengan dasar hukum hadits yang diriwayatkan oleh Al-Bukhari dan Muslim dari Ibnu umar:

عن ابن عمر رضي الله عنهما عن رسول الله صلى الله عليه وسلم قال: إذا تبايع الرجلان فكل واحد منهما بالخيار مالم يتفرقا وكان جميعا أويخير أحدهما الاخر أحدهما الاخر، فإن خير أحدهما الاخر فتبايعا على ذلك فقد وجب البيع، وإن تفرقا بعد ان تبابع ولم يترك واحد منهما البيع فقد وجب البيع (روه البخارى والمسلم عن إبن عمر)

Artinya: "Dari Umar dari Rasulullah SAW. beliau bersabda: "Apabila dua orang melakukan jual beli, maka masing-masing pihak berhak melakukan khiyar, baik kedua-duanya maupun salah satunya. Apabila salah satu dari keduanya melakukan jual beli atas dasar kesepakatan mereka, maka jual beli telah wajib dilaksanakan. Apabila mereka berpisah setelah melakukan jual beli dan salah satu pihak tidak meninggalkan jual beli, maka jual beli wajib dilaksanakan"(HR. Al-Bukhari dan Muslim dari Ibnu Umar).

Ulama fiqih sepakat bahwa *khiyar syarat* diperbolehkan dengan tujuan untuk kemaslahatan antara kedua pihak dalam melaksanakan transaksi. Karena *khiyar majlis* diperbolehkan, maka untuk kontrak opsi juga berlaku seperti *khiyar majlis* yaitu diperbolehkan dengan tujuan agar tidak ada hal-hal yang tidak diinginkan oleh kedua pihak (*holder* dan *writer*) terjadi seperti halnya penipuan.

Akan tetapi pada kontrak opsi waktu yang digunakan dalam transaksi atau perjanjian awal pada akhir waktu jatuh tempo, sedangkan pada *khiyar majlis* waktu masa berlakunya transaksi terdapat banyak pendapat dari ulama fiqih. Menurut madzhab Hanafiyah, Zafar dan Syafi'iyyah, *khiyar syarat* diperbolehkan dengan waktu transaksi yang pasti dan tidak boleh lebih dari tiga hari. Madzhab Hamabalah membolehkan *khiyar syarat* dengan waktu kesepakatan kurang atau lebih dari tiga hari. Sedangkan menurut madzhab Malikiyah memberikan kesepakatan waktu sesuai objek yang dijual belikan. Sehingga ada berbagai pendapat mengenai waktu kesepakatan dalam transaksi *khiyar majlis.* Akan tetapi akad dalam jual beli tidak sah jika ada ketidakpastian yang sangat jelas. Dengan demikian *khiyar majlis* dan kontrak opsi sama-sama hukumnya yaitu diperbolehkan dengan tujuan agar di antara dua pihak (*holder* dan *writer*) tidak ada penipuan dalam hal transaksi jual beli.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh suatu kesimpulan bahwa dari ketiga metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson yang dapat digunakan untuk memperkirakan harga opsi Asia adalah metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson. Hal ini dikarenakan kedua metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson semakin partisi waktu N diperbanyak, maka akan mendekati ke suatu titik kekonvergenan.

Dari kedua metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson, metode yang lebih efektif untuk memperkirakan harga opsi Asia adalah metode beda hingga Crank-Nicholson, karena metode beda hingga Crank-Nicholson memberikan hasil yang lebih optimal atau lebih akurat dibanding dengan metode beda hingga implisit.

4.2 Saran

Pada skripsi ini penulis hanya memfokuskan pada hasil perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson saja. Maka diharapkan pada skripsi selanjutnya untuk mengkaji tentang perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah, eksplisit dengan transformasi peubah dan Crank-Nicholson dengan transformasi peubah serta analisis kestabilannya.

DAFTAR PUSTAKA

Aziz, A.. 2005. Komputasi Numerik dengan Metode Kombinatorial untuk Barrier Options Pricing. *Tesis* tidak diterbitkan. Bandung: ITB.

Brewer, K.D., Feng, Y., dan Kwan, C.C.Y.. 2012. Geometric Brownian Motion, Option Pricing, and Simulation: Some Spreadsheet-Based Exercises in Financial Modeling. *Spreadsheets in Education (eJSiE)*, **5**, 1-13.

Djojodihardjo, H.. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Halim, A.. 2003. *Analisis Investasi*. Jakarta: Salemba Empat.

Huda, Q.. 2011. *Fiqih Muamalah*. Yogyakarta: Sukses *Offset*.

Hull, J.C.. 2002. *Option Future and Other Derivative*. Toronto: Prentice Hall.

Kangro, R.. 2011. *Compatational Finance.* Ulikool: European Union.

Khuriyanti. 2009. Penentuan Harga Saham Opsi Asia. *Skripsi* tidak diterbitkan. Depok: FMIPA Universitas Indonesia.

Kwok, Y.. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Hongkong: Springer.

Lyuu, Y.. 2012. *Itô Proses (Concluded).* Taiwan: National Taiwan University.

Munir, R.. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

Muniroh, W.S.. 2008. Simulasi Monte Carlo dalam Menentukan Nilai Opsi Saham. *Skripsi* tidak diterbitkan. Malang: UIN Malang.

Mutholi'ah, E.. 2008. Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial. *Skripsi* tidak diterbitkan. Malang: UIN Malang.

Niwiga, D.B.. 2005. Numerical Methods for The Valuation Of Financial Derivatives. *Tesis* tidak diterbitkan. Werstern Cape: University of Werstern Cape.

Nugroho, D.B.. 2009. *Metode Numerik*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.

Rasyid, H.S.. 1976. *Fiqih Islam.* Jakarta: Tahiriyah Jakarta.

Sahrani, S. dan Abdullah, R.. 2011. *Fiqih Muamalah*. Bogor: Ghalia Indonesia.

Seydel, R.. 2002. *Tools for Computational Finance*. Berlin: Springer.

Sujono. 1988. *Pengajaran Matematika untuk Sekolah Menengah*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Dikti Proyek Pengembangan Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan.

Suritno. 2008. Metode Beda Hingga Untuk Solusi Numerik dari Persamaan Black-Scholes Harga Opsi Put Amerika. *Tesis* tidak diterbitkan. Bogor: IPB.

Wiklund, E.. 2012. Asian Option Pricing and Volatility. *Tesis* tidak diterbitkan. Stockholm: Institute of Technology.

Wilmott, P., Howison, S., dan Dewynne, J.. 1995. *The Mathematics of Financial Derivatives*. New York: Cambridge University Press.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

1. Program Metode Beda Hingga Implisit dalam Perhitungan Harga Opsi Eropa

```
clc,clear all
format short
disp(' ');
disp(' PROGRAM METODE BEDA HINGGA IMPLISIT EROPA');
disp(' ');
x=input('inputkan faktor pengali Smax    x = ');
M=input('inputkan partisi grid           N = ');
disp(' ');
disp('                PILIHAN');
disp('          PEMEGANG HAK SAHAM');
disp(' ');
disp('         (1)Call option');
disp('         (2)Put option')
disp(' ');
Opsi=input('input pemengang hak yang inginkan = ');
disp('')
disp('             ')

tic;

SO=5;          % Harga saham awal
T=1;           % Waktu yang digunakan
K=10;          % harga saham ketentuan
sig=0.5;       % variansi
r=0.06;        % tingkat bunga

Smax=x*SO;     % Harga saham maksimum
Smin=0;


%nilai untuk BS
d1=(log(SO/K)+(r+0.5*sig^2)*T)/(sig*sqrt(T));
d2=d1-sig*sqrt(T);
N1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));

for N=3:M
    Ds = Smax/N; %partisi harga saham
    Dt = T/N;    %partisi waktu
    matsol=zeros(N+1,N+1);

   % Membangun S dan V vectors ()
    for i=1:N+1
        S(i)=Smin + (i-1)*Ds;
        if Opsi == 1
            V(i)=max(S(i)-K,0); % Call: Payoff that is initial
condition
        else
```

```
            V(i)=max(K-S(i),0); % Put: Payoff that is initial
condition
        end
    end

    %membangun elemen2 matrik A
    for j=1:N-1
        Alpha = 0.5*sig^2*(j^2)*Dt;
        Betha = 0.5*r*j*Dt;
        a=Betha-Alpha;
        b=1+2*Alpha+r*Dt;
        c=-Betha-Alpha;
        if j==1
            MI(j,j) = b;
            MI(j,j+1) = c;
        elseif j==N-1
            MI(N-1,N-2) = a;
            MI(N-1,N-1) = b;
        else
            MI(j,j-1) = a;
            MI(j,j) = b;
            MI(j,j+1) = c;
        end
    end

    %payoff
    matsol(:,N+1)=V;

    %batas
    if Opsi==1
        for j=N:-1:1 %call option
            matsol(1,j)=Smin; %batas bawah
            matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
        end
    else
        for j=N:-1:1 %put option
            matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
            matsol(N+1,j)=Smin; %batas bawah
        end
    end

    for i=1:N+1
        Alpha = 0.5*sig^2*(i^2)*Dt;
        Betha = 0.5*r*i*Dt;
        c=-Betha-Alpha;
    end
    for j=N:-1:1
        matsol(N,j+1)=matsol(N,j+1)-c*matsol(N+1,j)*exp((N+1-
j)*-r*Dt);
    end

    %matrik harga opsi
    matV=matsol(2:N,1:N+1);

    %Solusi matrik harga opsi
```

```
    for j=N:-1:1
        matV(:,j)=inv(MI'*MI)*MI'*matV(:,j+1);
    end

    %Perhitungan Black-Scholes
    C=SO*N1-K*exp(-r*T)*N2;
    P=C-SO+exp(-r*T)*K;
    if Opsi==1
        BC(N,1)=C;
    else
        BC(N,1)=P;
    end
%OUTPUT
p=ceil(N/x);
harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
BS=BC;
end
error=abs(BC-harga_opsi);
harga_opsii=matV(p,1)
B_S=BC(x,1)
eror=abs(B_S-harga_opsii)
disp('')
%disp(' Harga Opsi      BS      Eror')
%disp([harga_opsi BC error])
%disp('       ')
toc;
grid on
hold on
plot(harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2);
plot(BC,'-*b', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
hold on
plot(error,'-*r', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
if Opsi==1
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Implisit Opsi Call
Eropa')
else
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Implisit Opsi Put
Eropa')
end
xlabel('Banyaknya Partisi, N')
ylabel('Harga Opsi (Option Value)')
if Opsi==1
    q = legend ('Opsi Call','Black-Scholes','Error',1);
else
    q = legend ('Opsi Put', 'Black-Scholes','Error',1);
end
```

2. Program Metode Beda Hingga Eksplisit dalam Perhitungan Harga Opsi Eropa

```
clc,clear all
format short
disp(' ');
disp(' PROGRAM METODE BEDA HINGGA EKSPLISIT EROPA');
disp(' ');
x=input('inputkan faktor pengali Smax    x = ');
M=input('inputkan partisi grid           N = ');
disp(' ');
disp('                PILIHAN');
disp('          PEMEGANG HAK SAHAM');
disp(' ');
disp('         (1)Call option');
disp('         (2)Put option')
disp(' ');
Opsi=input('input pemengang hak yang inginkan = ');
disp('')
disp('            ')
tic;
SO=5;          % Harga saham awal
T=1;           % Waktu yang digunakan
K=10;          % harga saham ketentuan
sig=0.5;       % variansi
r=0.06;        % tingkat bunga
Smax=x*SO;     % Harga saham maksimum
Smin=0;
%nilai untuk BS
d1=(log(SO/K)+(r+0.5*sig^2)*T)/(sig*sqrt(T));
d2=d1-sig*sqrt(T);
N1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));
for N=3:M
    Ds = Smax/N; %partisi harga saham
    Dt = T/N;    %partisi waktu
    matsol=zeros(N+1,N+1);

   % Membangun S dan V vectors ()
    for i=1:N+1
        S(i)=Smin + (i-1)*Ds;
        if Opsi == 1
            V(i)=max(S(i)-K,0); % Call: Payoff that is initial
condition
        else
            V(i)=max(K-S(i),0); % Put: Payoff that is initial
condition
        end
    end

    %membangun elemen2 matrik A
    for j=1:N-1
        Alpha = 0.5*sig^2*(j^2)*Dt;
        Betha = 0.5*r*j*Dt;
        a=(1/(1+r*Dt))*(-Betha+Alpha);
```

```
        b=(1/(1+r*Dt))*(1-2*Alpha);
        c=(1/(1+r*Dt))*(Betha+Alpha);
        %a=1;b=2;c=3;
        if j==1
            MI(j,j) = b;
            MI(j,j+1) = c;
        elseif j==N-1
            MI(N-1,N-2) = a;
            MI(N-1,N-1) = b;
        else
            MI(j,j-1) = a;
            MI(j,j) = b;
            MI(j,j+1) = c;
        end
    end

    %payoff
    matsol(:,N+1)=V;

    %batas
    if Opsi==1
        for j=N:-1:1 %call option
            matsol(1,j)=Smin; %batas bawah
            matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
        end
    else
        for j=N:-1:1 %put option
            matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
            matsol(N+1,j)=Smin; %batas bawah
        end
    end

    %matrik harga opsi
    matV=matsol(2:N,1:N+1);

    %Solusi matrik harga opsi
    for j=N:-1:1
        matV(:,j)=MI*matV(:,j+1);
    end

    %Perhitungan Black-Scholes
    C=SO*N1-K*exp(-r*T)*N2;
    P=C-SO+exp(-r*T)*K;
    if Opsi==1
        BC(N,1)=C;
    else
        BC(N,1)=P;
    end

    %OUTPUT
    p=ceil(N/x);
    harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
    BS=BC;
end
```

```
error=abs(BC-harga_opsi);
harga_opsii=matV(p,1)
B_S=BC(x,1)
eror=abs(B_S-harga_opsii)
disp('')
disp(' Harga Opsi      BS      Eror')
disp([harga_opsi BC error])
disp('       ')
toc;
grid on
hold on
plot(harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2);
plot(BC,'-*b', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
hold on
plot(error,'-*r', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
if Opsi==1
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Eksplisit Opsi Call
Eropa')
else
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Eksplisit Opsi Put
Eropa')
end
xlabel('Banyaknya Partisi, N')
ylabel('Harga Opsi (Option Value)')
if Opsi==1
    q = legend ('Opsi Call', 'Black-Scholes','Error',1);
else
    q = legend ('Opsi Put', 'Black-Scholes','Error',1);
end
```

3. **Program Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dalam Perhitungan Harga Opsi Eropa**

```
clc,clear all
format short
disp(' ');
disp(' PROGRAM METODE BEDA HINGGA CRANK-NICHOLSON EROPA');
disp(' ');
x=input('inputkan faktor pengali Smax     x = ');
M=input('inputkan partisi grid            N = ');
disp(' ');
disp('                PILIHAN');
disp('          PEMEGANG HAK SAHAM');
disp(' ');
disp('         (1)Call option');
disp('         (2)Put option')
disp(' ');
Opsi=input('input pemengang hak yang inginkan = ');
disp('')
disp('            ')

tic;

SO=5;            % Harga saham awal
T=1;             % Waktu yang digunakan
K=10;            % harga saham ketentuan
sig=0.5;         % variansi
r=0.06;          % tingkat bunga

Smax=x*SO;       % Harga saham maksimum
Smin=0;


%nilai untuk BS
d1=(log(SO/K)+(r+0.5*sig^2)*T)/(sig*sqrt(T));
d2=d1-sig*sqrt(T);
N1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));

for N=3:M
    Ds = Smax/N; %partisi harga saham
    Dt = T/N;    %partisi waktu
    matsol=zeros(N+1,N+1);

   % Membangun Vektor S dan Vektor V
    for i=1:N+1
        S(i)=Smin + (i-1)*Ds;
        if Opsi == 1
            V(i)=max(S(i)-K,0); % Call: Payoff that is initial
condition
        else
            V(i)=max(K-S(i),0); % Put: Payoff that is initial
condition
        end
```

```
end

% Membangun matrik B
for j=1:N-1
    Alpha = 0.25*sig^2*(j^2)*Dt;
    Betha = 0.25*r*j*Dt;
    a=-Betha+Alpha;
    b=1-2*Alpha-0.5*r*Dt;
    c=Betha+Alpha;
    if j==1
        B(j,j) = b;
        B(j,j+1) = c;
    elseif j==N-1
        B(N-1,N-2) = a;
        B(N-1,N-1) = b;
    else
        B(j,j-1) = a;
        B(j,j) = b;
        B(j,j+1) = c;
    end
end

%membangun elemen2 matrik A
for j=1:N-1
    Alpha = 0.25*sig^2*(j^2)*Dt;
    Betha = 0.25*r*j*Dt;
    a=Betha-Alpha;
    b=1+2*Alpha+0.5*r*Dt;
    c=-Betha-Alpha;
    if j==1
        A(j,j) = b;
        A(j,j+1) = c;
    elseif j==N-1
        A(N-1,N-2) = a;
        A(N-1,N-1) = b;
    else
        A(j,j-1) = a;
        A(j,j) = b;
        A(j,j+1) = c;
    end
end

%payoff
matsol(:,N+1)=V;

%batas
if Opsi==1
    for j=N:-1:1 %call option
        matsol(1,j)=Smin; %batas bawah
        matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
    end
else
    for j=N:-1:1 %put option
        matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
        matsol(N+1,j)=Smin; %batas bawah
    end
```

```
    end

    %matrik harga opsi
    matV=matsol(2:N,1:N+1);
    %Solusi matrik harga opsi
    for j=N:-1:1
        matV(:,j)=inv(A'*A)*A'*B*matV(:,j+1);
    end
    %Perhitungan Black-Scholes
    C=SO*N1-K*exp(-r*T)*N2;
    P=C-SO+exp(-r*T)*K;
    if Opsi==1
        BC(N,1)=C;
    else
        BC(N,1)=P;
    end

    %Output untuk perulangan 3:N
    p=ceil(N/x);
    harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
    BS=BC;
end
%OUTPUT
error=abs(BC-harga_opsi);
harga_opsii=matV(p,1)
B_S=BC(N,1)
eror=abs(B_S-harga_opsii)
% Output Harga Opsi, Black-Scholes dan Eror
disp('')
disp(' Harga Opsi      BS      Eror')
disp([harga_opsi BC error])
disp('       ')
%perhitungan waktu kecepatan
toc;
% menggambar kurva Harga Opsi, Black-Scholes dan Eror
grid on
hold on
plot(harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2);
plot(BC,'-*b', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
hold on
plot(error,'-*r', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
if Opsi==1
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi
Call Eropa')
else
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi
Put Eropa')
end
xlabel('Banyaknya Partisi N')
ylabel('Harga Opsi (Option Value)')
if Opsi==1
    q = legend ('Opsi Call', 'Black-Scholes','Error',1);
else
    q = legend ('Opsi Put', 'Black-Scholes','Error',1);
end
```

4. **Program Metode Beda Hingga Implisit dalam Perhitungan Harga Opsi Asia**

```
clc,clear all
format short
disp(' ');
disp(' PROGRAM METODE BEDA HINGGA IMPLISIT ASIA');
disp(' ');
x=input('inputkan faktor pengali Smax    x = ');
M=input('inputkan partisi grid           N = ');
disp(' ');
disp('                PILIHAN');
disp('          PEMEGANG HAK SAHAM');
disp(' ');
disp('         (1)Call option');
disp('         (2)Put option')
disp(' ');
Opsi=input('input pemengang hak yang inginkan = ');
SO=5;           % Harga saham awal
T=1;            % Waktu yang digunakan
K=10;           % harga saham ketentuan
sig=0.5;        % variansi
r=0.06;         % tingkat bunga
Smax=x*SO;      % Harga saham maksimum
Smin=0;
for N=3:M
    Ds = Smax / N;
    Dt = T/N;
    matsol=zeros(N+1,N+1);

    for i=1:N+1;
        S(i)=SO*exp((r-0.5*sig^2)*i+sig*sqrt(Dt));
    end
    Sbar=mean(S);
    for j=1:N-1
        Alpha = 0.5*sig^2*(j^2)*Dt;
        Betha = 0.5*r*j*Dt;
        a=Betha-Alpha;
        b=1+2*Alpha+r*Dt;
        c=-Betha-Alpha;
        %a=1;b=2;c=3;
        if j==1
            A(j,j) = b;
            A(j,j+1) = c;
        elseif j==N-1
            A(N-1,N-2) = a;
            A(N-1,N-1) = b;
        else
            A(j,j-1) = a;
            A(j,j) = b;
            A(j,j+1) = c;
        end
    end

    for i=1:N+1;
```

```
        if Opsi ==1
            V(i)=max((i-1)*Sbar-K,0);
        else
            V(i)=max(K-(i-1)*Sbar,0);
        end
    end

    matsol(:,N+1)=V;

    if Opsi==1
        for j=N:-1:1 %call option
            matsol(1,j)=Smin; %batas bawah
            matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
        end
    else
        for j=N:-1:1 %put option
            matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
            matsol(N+1,j)=Smin; %batas bawah
        end
    end
        for i=1:N+1
        Alpha = 0.5*sig^2*(i^2)*Dt;
        Betha = 0.5*r*i*Dt;
        c=-Betha-Alpha;
    end
    for j=N:-1:1
          matsol(N,j)=matsol(N,j)-c*matsol(N+1,j)*exp((N+1-
   j)*-  r*Dt);
    end

    matV=matsol(2:N,1:N+1);
        for j=N:-1:1 % Generate solution matrix
        matV(:,j)=inv(A'*A)*A'*matV(:,j+1);
    end
        p=ceil(N/x);
    harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
end
harga_opsii(1,1)=matV(p,1)
grid on
hold on
%qq=x:x:N;
%harga_opsi=harga_opsi(x:x:length(harga_opsi));
plot(harga_opsi,'-*b', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
if Opsi==1
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Implisit Opsi Call
Asia')
else
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Implisit Opsi Put
Asia')
end
xlabel('Banyaknya Partisi, N')
ylabel('Harga Opsi, Option Value')
q = legend ('Opsi Asia',1);
```

5. **Program Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dalam Perhitungan Harga Opsi Asia**

```
clc,clear all
format short
disp(' ');
disp(' PROGRAM METODE BEDA HINGGA CRANK-NICHOLSON ASIA');
disp(' ');
x=input('inputkan faktor pengali Smax    x = ');
M=input('inputkan partisi grid           N = ');
disp(' ');
disp('                PILIHAN');
disp('          PEMEGANG HAK SAHAM');
disp(' ');
disp('         (1)Call option');
disp('         (2)Put option')
disp(' ');

Opsi=input('input pemengang hak yang inginkan = ');


SO=5;           % Harga saham awal
T=1;            % Waktu yang digunakan
K=10;           % harga saham ketentuan
sig=0.5;        % variansi
r=0.06;         % tingkat bunga

Smax=x*SO;      % Harga saham maksimum
Smin=0;

for N=3:M
    Ds = Smax / N;
    Dt = T/N;

    matsol=zeros(N+1,N+1); % solution matrix
%      B=zeros(N-1,N-1); % MI matrix11
%      A=zeros(N-1,N-1); % MI matrix11
%      S=zeros(N+1,1); % stock price vector
%      V=zeros(N+1,1); % option value vector


    for i=1:N+1;
        S(i)=SO*exp((r-0.5*sig^2)*i+sig*sqrt(Dt));
    end
    Sbar=mean(S);

    for j=1:N-1 % Build MI matrix
        % Set up coefficients
        Alpha = 0.25*sig^2*(j^2)*Dt;
        Betha = 0.25*r*j*Dt;
        a=-Betha+Alpha;
        b=1-2*Alpha-0.5*r*Dt;
        c=Betha+Alpha;
        % Fill MI matrix
```

```
    %8a=1;b=2;c=3;
    if j==1
        B(j,j) = b;
        B(j,j+1) = c;
    elseif j==N-1
        B(N-1,N-2) = a;
        B(N-1,N-1) = b;
    else
        B(j,j-1) = a;
        B(j,j) = b;
        B(j,j+1) = c;
    end
end

for j=1:N-1 % Build MI matrix
    % Set up coefficients
    Alpha = 0.25*sig^2*(j^2)*Dt;
    Betha = 0.25*r*j*Dt;
    a=Betha-Alpha;
    b=1+2*Alpha+0.5*r*Dt;
    c=-Betha-Alpha;
    if j==1
        A(j,j) = b;
        A(j,j+1) = c;
    elseif j==N-1
        A(N-1,N-2) = a;
        A(N-1,N-1) = b;
    else
        A(j,j-1) = a;
        A(j,j) = b;
        A(j,j+1) = c;
    end
end

for i=1:N+1;
    if Opsi ==1
        V(i)=max((i-1)*Sbar-K,0);
    else
        V(i)=max(K-(i-1)*Sbar,0);
    end
end
matsol(:,N+1)=V;

if Opsi==1
    for j=N:-1:1
        matsol(1,j)=Smin;
        matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt);
    end
else
    for j=N:-1:1
        matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt);
        matsol(N+1,j)=Smin;
    end
end

matV=matsol(2:N,1:N+1);
```

```
    for k=N:-1:1
        matV(:,k)=inv(A'*A)*A'*B*matV(:,k+1);
    end

    p=ceil(N/x);
    harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
end

% p=ceil(N/x);
harga_opsii=matV(p,1)
%plot(harga_opsi,'-*b', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
grid on
hold on
qq=x:x:N;
harga_opsi=harga_opsi(x:x:length(harga_opsi));
plot(qq,harga_opsi,'-*b', 'markerSize',10, 'LineWidth',2);
if Opsi==1
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi
Call Asia')
else
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi
Put Asia')
end
xlabel('Banyaknya Partisi, N')
ylabel('Harga Opsi, Option Value')
q = legend ('Opsi Asia',1);
```

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Wahyudi**
NIM : **10610001**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi : **Analisis Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit dan Crank-Nicholoson pada Perhitungan Harga Opsi Asia**
Pembimbing I : **Abdul Aziz, M.Si**
Pembimbing II : **Ach. Nashichuddin, M.A**

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1	09 September 2013	Konsultasi Masalah	1.	
2	16 September 2013	Konsultasi BAB I,II		2.
3	23 September 2013	Revisi BAB I, II	3.	
4	30 September 2013	Acc BAB I		4.
5	07 Oktober 2013	Revisi BAB II	5.	
6	14 Oktober 2013	Acc BAB II		6.
7	21 Oktober 2013	Konsultasi BAB III	7.	
8	04 November 2013	Revisi BAB III		8.
9	18 November 2013	Revisi BAB III	9.	
10	25 November 2013	Revisi BAB III		10.
11	09 Desember 2013	Revisi BAB III	11.	
12	09 Desember 2013	Konsultasi BAB I dan II agama		12.
13	11 Desember 2013	Acc BAB I agama	13.	
14	16 Desember 2013	Acc BAB III		14.
15	09 Januari 2014	Acc BAB II dan revisi BAB III	15	
16	10 Januari 2014	Acc BAB III Agama		16
17	13 Januari 2014	Acc keseluruhan Agama	17	
18	13 Januari 2014	Acc Keseluruhan		18

Malang, 13 Januari 2014
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001