

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *FORCED KORTEWEG DE VRIES*
MENGUNAKAN METODE JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS**

SKRIPSI

**OLEH
AZIZATUL AMALIYA
NIM. 12610075**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *FORCED KORTEWEG DE VRIES*
MENGUNAKAN METODE JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Azizatul Amaliya
NIM. 12610075**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *FORCED KORTEWEG DE VRIES*
MENGUNAKAN METODE JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS**

SKRIPSI

Oleh
Azizatul Amaliya
NIM. 12610075

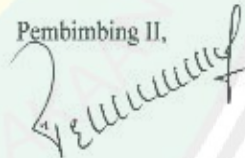
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 7 Februari 2017

Pembimbing I,



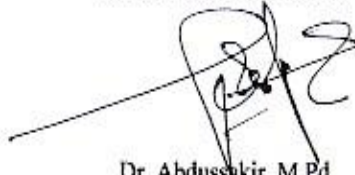
Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Pembimbing II,



Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussukir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *FORCED KORTEWEG DE VRIES*
MENGGUNAKAN METODE JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS**

SKRIPSI

Oleh
Azizatul Amaliya
NIM. 12610075

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 21 Februari 2017

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji : Evawati Alisah, M.Pd

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Azizatul Amaliya

NIM : 12610075

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan *Forced Korteweg De Vries*

Menggunakan Metode Jaringan Fungsi Radial Basis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Februari 2017

Yang membuat pernyataan,



Azizatul Amaliya
NIM. 12610075



MOTO

لَأَسْتَسْهِّلَنَّ الصَّعْبَ أَوْ أُدْرِكَ الْمُنَى

فَمَا انْقَادَتِ الْآمَلُ إِلَّا لِصَابِرٍ

“Sungguh-sungguh aku akan menganggap mudah kesulitan itu hingga diperoleh apa

yang kuinginkan dan kuharapkan

Tak kan tunduk harapan itu kecuali kepada orang yang sabar.”

(Syaiikh Muhammad Muhyidin Abdul Hamid Al-Misri)

Kitab: At-Tuhfah As-Saniyyah Syarh Muqaddimah Al-Ajurrumiyyah



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua penulis bapak Anshori dan ibu Sholikha yang tidak pernah berhenti memberikan doa, motivasi, dukungan baik moril atau materiil, dan kesabaran jiwa demi keberhasilan penulis.

Kakak-kakak dan adik-adik penulis (M. Nurul Yaqin, Noor Afifah, Zainudin, Nur Faizah, Lailatus Sholikha, Ach. Aliyudin Fanani, Nur Hamidi Azim, Habibul Mustofa Hamami) yang selalu menjadi motivasi yang berarti bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, hidayah serta inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan dengan baik penyusunan skripsi ini yang berjudul “Solusi Numerik Persamaan *Forced Korteweg De Vries* Menggunakan Metode Jaringan Fungsi Radial Basis”.

Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada nabi Muhammad Saw., yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap ke zaman yang terang benderang yakni agama Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penyusunannya tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi dalam melakukan penelitian, serta pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak, ibu, kakak-kakak serta adik-adik tercinta yang dengan sepenuh hati memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Segenap keluarga besar Pondok Pesantren Salafiyah Syafi'iyah Nurul Huda, terima kasih atas doa, semangat, serta motivasi kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012 khususnya Matematika C, terima kasih untuk kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
10. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis hanya dapat berharap, di balik skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Februari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص.....	xvi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	6
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan <i>Forced Korteweg de Vries (Forced KdV)</i>	8
2.2 Jaringan Fungsi Radial Basis	9
2.3 Turunan Hampiran dengan RBF	12
2.3.1 Metode Langsung	12
2.3.2 Metode Tidak Langsung	14
2.4 Analisis Galat	14
2.5 Penyelesaian Masalah dalam Al-Quran	15

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV dengan Menggunakan Metode Jaringan RBF	18
3.1.1 Linierisasi Persamaan <i>Forced</i> KdV	18
3.1.2 Aproksimasi Persamaan <i>Forced</i> KdV dan Kondisi Awal Menggunakan Jaringan RBF	19
3.1.3 Diskritisasi Persamaan <i>Forced</i> KdV dan Kondisi Awal ke dalam Persamaan Matriks	22
3.2 Simulasi dan Analisis Galat	25
3.2.1 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,001$ dan $0 \leq x \leq 1$..	33
3.2.2 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,03$ dan $0 \leq x \leq 2$..	34
3.2.3 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,05$ dan $0 \leq x \leq 3$..	36
3.2.4 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,1$ dan $0 \leq x \leq 4$	37
3.2.5 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,2$ dan $0 \leq x \leq 5$	39
3.2.6 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,3$ dan $0 \leq x \leq 6$	40
3.3 Kajian Gelombang dalam Islam	42

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	46
4.2 Saran	46

DAFTAR RUJUKAN	47
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN**RIWAYAT HIDUP**

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Nilai Δx dan x Persamaan <i>Forced</i> KdV yang Dipakai pada Simulasi	25
---	----



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 1$ dengan $\Delta x = 0,001$	33
Gambar 3.2	Grafik Galat Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 1$ dengan $\Delta x = 0,001$	34
Gambar 3.3	Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 2$ dengan $\Delta x = 0,03$	35
Gambar 3.4	Grafik Galat Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 2$ dengan $\Delta x = 0,03$	35
Gambar 3.5	Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 3$ dengan $\Delta x = 0,05$	36
Gambar 3.6	Grafik Galat Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 3$ dengan $\Delta x = 0,05$	37
Gambar 3.7	Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 4$ dengan $\Delta x = 0,1$	38
Gambar 3.8	Grafik Galat Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 4$ dengan $\Delta x = 0,1$	38
Gambar 3.9	Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 5$ dengan $\Delta x = 0,2$	39
Gambar 3.10	Grafik Galat Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 5$ dengan $\Delta x = 0,2$	40
Gambar 3.11	Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 6$ dengan $\Delta x = 0,3$	41
Gambar 3.12	Grafik Galat Solusi Numerik Persamaan <i>Forced</i> KdV untuk $0 \leq x \leq 6$ dengan $\Delta x = 0,3$	41

ABSTRAK

Amaliya, Azizatul. 2017. **Solusi Numerik Persamaan *Forced Korteweg de Vries* Menggunakan Metode Jaringan Fungsi Radial Basis**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata Kunci: metode jaringan fungsi radial basis, persamaan *forced Korteweg de Vries*.

Persamaan *Forced Korteweg de Vries* (KdV) adalah suatu model hampiran untuk gelombang yang merambat pada perairan dangkal yang dibangkitkan oleh gundukan yang berada pada dasar perairan, dengan *forced* adalah representasi dari gundukan pada dasar perairan.

Solusi numerik untuk menyelesaikan persamaan *forced* KdV adalah metode jaringan fungsi radial basis (RBF). Dengan metode ini, setiap fungsi dan turunannya dapat didekati secara langsung dengan sebuah fungsi basis jenis *multiquadrics*. Metode yang digunakan adalah metode langsung yaitu dengan menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya.

Ada beberapa langkah dalam penyelesaian persamaan KdV, di antaranya yaitu linierisasi suku nonlinier pada persamaan *forced* KdV, aproksimasi persamaan *forced* KdV dan kondisi awal menggunakan jaringan RBF, diskritisasi persamaan *forced* KdV menggunakan jaringan fungsi radial basis serta kondisi awalnya. Selanjutnya membuat simulasi dengan menghitung solusi numerik persamaan *forced* KdV dan menggambar grafik dengan bantuan program MATLAB R2013a. Terakhir adalah mencari galat untuk menunjukkan bahwa metode yang digunakan tersebut mempunyai solusi numerik yang dapat mendekati solusi analitiknya. Galat mutlak maksimum terkecil yang diperoleh dari simulasi pertama adalah 0,001145 dan untuk simulasi kedua adalah 0,002188. Begitu pula simulasi ketiga sampai keenam galat yang diperoleh sudah cukup kecil. Ini menunjukkan bahwa metode jaringan fungsi radial basis cukup efektif dalam mengaproksimasi solusi dari persamaan *forced* KdV.

ABSTRACT

Amaliya, Azizatul. 2017. **Numerical Solution of Forced Korteweg de Vries Equation Using Radial Basis Function Network Method**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: radial basis function network method, forced Korteweg de Vries Equation.

Forced Korteweg de Vries equation (KdV) is a approximation model for waves propagating in shallow waters generated by mounds at the bottom, with a forced is a representation of the bumps on the bottom of the water.

Numerical solutions to solve the forced KdV equation is the network of radial basis function (RBF). With this method, each function and its derivatives can be approached directly by a multiquadrics base function. The used method is the direct method namely to reduce the function of the base of the independent variables.

There are several steps in solving of KdV equation, among which linearizing nonlinear rate on forced KdV equation, approximation Forced KdV equation and the initial conditions using RBF network, discretization Forced KdV equation using radial basis function network as well as its initial value. Furthermore creating a simulation by calculating the numerical solution forced KdV equations and graphing it using MATLAB R2013a. And the last is error analysis to show that the used method has a numerical solution to approach the analytical solution. The smallest maximum absolute error obtained from the first simulation is 0,001145 and for the second simulation is 0,002188. Similarly, the third to sixth error simulation obtained is quite small. This shows that the radial basis function network method is quite effective in approximating solution of forced KdV equation.

ملخص

العملية، عزيزة. ٢٠١٧. الحلول العددية لمعادلة forced Korteweg de Vries باستخدام شبكة دالة Radial Basis. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) محمد جمهوري الماجستير. (٢) إيفاتوي أليسة الماجستير.

الكلمات الرئيسية: لمعادلة forced Korteweg de Vries، شبكة دالة Radial Basis.

لمعادلة forced Korteweg de Vries هو تقريب نموذجاً للموجات نشر في المياه الضحلة التي تم إنشاؤها بواسطة السواثر التي هي في الجزء السفلي، مع forced هو تمثيل من المطبات على الجزء السفلي من المياه.

الحلول العددية لمعادلة forced Korteweg de Vries باستخدام شبكة دالة Radial Basis بهذه الطريقة من نوع كل دالات يمكن تناولها مباشرة من خلال دالة قاعدة multiquadrics. الطريقة المستخدمة هي طريقة المباشر للحد من دالة قاعدة المتغيرات المستقلة. هناك العديد من الخطوات في إنجاز معادلة KDV، من بينها خطي معدل غير الخطية على أجبرت معادلة KDV، أجبر تقريب معادلة KDV والشروط الأولية باستخدام شبكة RBF، تفريد أجبر معادلة KDV باستخدام شبكة دالة Radial Basis، فضلاً عن قيمتها الأصلية. إنشاء وعلاوة على ذلك محاكاة عن طريق حساب حل مفروض المعادلات العددية KDV وبرنامج الرسوم البيانية بـ MATLAB R2013، وتحليل الأخطاء الماضي لإظهار أن الطريقة المستخدمة لديها الحل العددي للاقتراب من الحل التحليلي. أصغر أقصى الخطأ المطلق الحصول عليها من محاكاة الأولى هو ٠،٠٠١١٤٥ و محاكاة الثانية هو ٠،٠٠٢١٨٨،٠ و بالمثل، فإن المحكاة الثالثة حتى السادسة الخطأ التي تم الحصول عليها صغيرة جداً. هذا يدل على أن طريقة شبكة دالة Radial Basis، هو فعالة جداً في حل أجبر تقريب القسري معادلة KDV.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari. Seperti fenomena alam yang terjadi pada air laut yang terdiri dari lapisan-lapisan air yang memiliki rapat massa jenis yang berbeda. Akibat perbedaan rapat massa ini, sehingga terbentuklah suatu gelombang. Gelombang merupakan bentuk gerakan air laut yang mudah diamati. Gelombang laut adalah peristiwa naik turunnya permukaan laut secara vertikal yang membentuk kurva/grafik sinusoidal. Gelombang laut berbentuk gelombang tranfersal dengan membentuk lembah dan puncak yang berbeda dengan gelombang longitudinal yang mempunyai regangan dan rapatan (Taufik, 2001). Hal ini tidak lepas dari pengetahuan Allah Swt. seperti firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Furqan/25:2, yaitu:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ
وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۝

“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (QS. al-Furqan/25:2).

Pada ayat di atas dijelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya. Sebagaimana yang diketahui ilmuwan yang menemukan rumus dari hukum alam, sebenarnya mereka tidak sedikitpun membuat hukum alam tetapi mereka hanya menemukan hukum alam kemudian mereka rumuskan dalam suatu rumus atau

persamaan. Seperti *Albert Einstein* yang menemukan rumus hukum energi, sebenarnya ilmuwan tersebut tidak sedikitpun membuat hukum energi tetapi menemukan hukum tersebut lalu membuat rumus $e = mc^2$, dia hanya menemukan dan menyimbolkannya. Hukum alam yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007).

Dalam Tafsir Ibnu Katsir dikatakan bahwa segala sesuatu selain Allah Swt. adalah makhluk (yang diciptakan) dan marbub (yang berada di bawah kekuasaan-Nya). Allah Swt. adalah pencipta segala sesuatu, Rabb, Raja dan Ilah-Nya. Sedangkan segala sesuatu berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan dan takdir-Nya. Maksudnya Allah Swt. telah menciptakan segala sesuatu sesuai dengan iradat (kehendak)-Nya, yang mengandung hikmah yang mendalam. Allah Swt. juga telah menyiapkan segala sesuatu untuk apa yang Allah Swt. kehendaki, salah satunya yakni berupa hukum alam yang telah Allah sediakan di muka bumi ini kemudian ada seorang ilmuwan menyimbolkannya dalam bentuk matematika.

Pada masa-masa mutakhir ini, pemodelan-pemodelan matematika yang dilakukan manusia sebenarnya bukan membuat sesuatu yang baru. Pada hakikatnya, mereka hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena alam. Sebagaimana dalam skripsi ini menyangkut fenomena alam yang terkait dengan gelombang permukaan yang dihasilkan oleh aliran melalui suatu gundukan yang menghasilkan model matematika dalam bentuk persamaan *forced Korteweg de Vries (forced KdV)*.

Persamaan *forced KdV* merupakan model hampiran untuk gelombang yang merambat pada permukaan perairan dangkal, yang dibangkitkan oleh

gundukan yang berada pada dasar perairan. Wiryanto (2010) memodelkan gelombang permukaan yang muncul akibat gangguan yang terjadi pada dasar saluran. Model yang dihasilkan adalah persamaan *Bousinessq* dengan dasar saluran tak rata sebagai pembangkit gelombangnya. Solusi dari persamaan tersebut berupa gelombang soliter yang berjalan dalam dua arah. Gelombang soliter adalah gelombang yang memiliki satu puncak, dimana perambatannya mempertahankan bentuk dan kecepatannya (Hakim, 2009).

Grimshaw, dkk (2007) menyelesaikan model persamaan *forced KdV steady* menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*). Wiryanto & Akbar (2008) juga menyelesaikan persamaan tersebut menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS (*Forward Time Central Space*), akan tetapi mereka belum menemukan solusi analitik dari persamaan tersebut. Seiring dengan berkembangnya zaman (Wiryanto & Jamhuri, 2015) telah mengetahui solusi analitik dari persamaan *forced KdV unsteady* dengan syarat solusi yang dihasilkan berupa fungsi secant hiperbolik.

Salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah *forced KdV* adalah jaringan fungsi radial basis (*radial basis function networks*). Dengan metode ini, setiap fungsi dan turunannya dapat didekati secara langsung dengan sebuah fungsi basis. Jaringan fungsi radial basis telah lama dikenal dalam bidang rekayasa dan teknik sebagai jaringan syaraf tiruan yang menggunakan fungsi basis sebagai fungsi pengaktif. Gagasan jaringan fungsi radial basis diperoleh dari teori aproksimasi fungsi. Mengaproksimasi suatu fungsi adalah menghampiri fungsi tersebut dengan fungsi lainnya (Hajek, 2005). Selanjutnya *radial basis function networks* akan disebut sebagai jaringan RBF.

Jaringan RBF merupakan salah satu desain jaringan syaraf tiruan yang sederhana dengan satu lapisan tersembunyi dan satu lapisan *output*. Jaringan RBF dapat digunakan untuk mengaproksimasi fungsi dan *training* dengan cepat. Untuk mengaproksimasi satu fungsi, jaringan RBF hanya membutuhkan *input* data yang tidak terstruktur yang diperoleh dengan mendiskritisasi domain. Sehingga jaringan RBF juga dapat digunakan sebagai salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Untuk melihat cara dan keefektifan jaringan fungsi radial basis sebagai salah satu metode numerik dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier maka, penulis mengambil judul “Solusi Numerik Persamaan *Forced* KdV Menggunakan Metode Jaringan Fungsi Radial Basis”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana solusi numerik persamaan *forced* KdV dengan menggunakan jaringan RBF?
2. Bagaimana galat yang diperoleh dari persamaan *forced* KdV dengan menggunakan jaringan RBF?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, penelitian ini mempunyai tujuan sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui solusi numerik persamaan *forced* KdV dengan menggunakan metode jaringan RBF.
2. Untuk mengetahui galat dari persamaan *forced* KdV dengan menggunakan metode jaringan RBF.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian adalah sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian persamaan *forced* KdV dengan menggunakan jaringan RBF, serta dapat dijadikan literatur penunjang dan bahan perbandingan dengan metode yang lain.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Persamaan diferensial biasa yang dicari penyelesaiannya adalah persamaan *forced* KdV *unsteady*.
2. Fungsi basis yang digunakan pada jaringan RBF adalah fungsi *Multiquadrics*, karena fungsi *Multiquadrics* dianggap dapat memberikan hasil yang lebih akurat, yakni *error* yang dihasilkan untuk turunan hampiran pada fungsi basis tersebut lebih kecil dibandingkan dengan fungsi *Gaussians* dan fungsi *Invers Multiquadrics* (Mai-Duy & Tran-Cong, 2003).
3. Fungsi basis diselesaikan dengan cara metode langsung, yaitu dengan cara menurunkan secara langsung fungsi basis terhadap variabel bebasnya.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*), yaitu melakukan penulurusan dan penelaahan terhadap literatur yang berhubungan dengan objek yang dibahas. Adapun Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Linierisasi suku nonlinier pada persamaan *forced* KdV.
2. Aproksimasi persamaan *forced* KdV dan kondisi awal menggunakan jaringan RBF.
3. Diskritisasi persamaan *forced* KdV dan kondisi awal ke dalam persamaan matriks.
4. Simulasi dan analisis galat.

1.7 Sistematika penulisan

Sistematika yang digunakan dalam skripsi ini di antaranya:

Bab 1 Pendahuluan

Bab ini meliputi beberapa subbab yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan masalah, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan tentang persamaan *forced* KdV, jaringan RBF, aproksimasi jaringan RBF yang dibagi menjadi dua yaitu metode langsung dan metode tidak langsung, analisis galat.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penulisan yang menjabarkan tentang gambaran objek penelitian dan hasil dari penelitian yaitu penyelesaian persamaan *forced* KdV dengan menggunakan jaringan RBF.

Bab IV Penutup

Bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan *forced* Korteweg de Vries (*forced* KdV)

Wiryanto & Jamhuri (2015) telah menurunkan model gelombang permukaan yang menghasilkan suatu persamaan *forced* KdV. Persamaan *forced* KdV adalah suatu model hampiran untuk gelombang yang merambat pada perairan dangkal yang dibangkitkan oleh gundukan yang berada pada dasar perairan. Dimana *forced* adalah representasi dari gundukan pada dasar perairan. Persamaan *forced* KdV *unsteady* berbentuk

$$\frac{1}{3} \frac{d^3}{dx^3} \eta(x) - 2F \frac{d}{dx} \eta(x) + 2\eta(x) \frac{d}{dx} \eta(x) + \frac{d}{dx} h(x) = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) memiliki satu variabel bebas, yaitu x dan satu variabel terikat yaitu η yang merupakan ketinggian permukaan fluida, $h(x)$ merupakan representasi gundukan pada dasar perairan, sedangkan $F = u_0 / \sqrt{gH}$ adalah bilangan *Froude* yang menunjukkan tipe perilaku aliran yang mempunyai tiga kemungkinan yaitu:

1. Jika $F < 0$ disebut aliran subkritis (*subcritical flow*).
2. Jika $F > 0$ disebut aliran superkritis (*supercritical flow*).
3. Jika $F = 0$ maka disebut aliran kritis (*critical flow*).

dengan u_0 adalah kecepatan aliran, g adalah percepatan gravitasi, dan H adalah kedalaman aliran.

$h(x)$ pada persamaan (2.1) adalah

$$h(x) = G \operatorname{sech}^2(hx) \quad (2.2)$$

dengan G dan b adalah konstanta, dimana G adalah tinggi gundukan dan b adalah lebar gundukan, adapun solusi yang dimaksud pada persamaan (2.1) adalah

$$\eta(x) = a \operatorname{sech}^2(bx) \quad (2.3)$$

Gelombang yang ditimbulkan oleh sebuah gundukan digunakan untuk mengganggu aliran dengan ketinggian G dan lebar b , gelombang tersebut dapat diperoleh dari bilangan *froude*

$$F = \frac{2}{3}b^2 + \frac{G}{4b^2} \quad (2.4)$$

dimana gelombang pada tinggi $a = 2b^2$. Diberikan bilangan *froude* $F = 0,6$ dan tinggi gundukan $G = 0,5$, maka akan diperoleh $b = 0,7566204380$ dan $a = 1,144948974$ dari hasil substitusi F dan G yang diketahui ke dalam persamaan (2.4). Sehingga persamaan (2.2) menjadi

$$h(x) = 0,5 \operatorname{sech}^2(0,7566204380x) \quad (2.5)$$

dengan solusi analitik yang berbentuk

$$\eta(x) = 1,144948974 \operatorname{sech}^2(0,7566204380x) \quad (2.6)$$

2.2 Jaringan Fungsi Radial Basis

Jaringan fungsi radial basis mulai dikenal pertama kali sejak D.S. Broomhead dan David Lowe menyampaikan makalahnya yang berjudul *Radial Basis Function, Multi-variable functional interpolation and adaptive networks* pada tahun 1988. Metode ini merupakan salah satu dari metode jaringan syaraf tiruan yang menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi basis. Jaringan syaraf

tiruan yang menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi basis. Jaringan syaraf tiruan itu sendiri dikembangkan pertama kali oleh *neurophysiologist* Waren McCulloch dan *logician* Walter Pitts pada tahun 1943 sebagai algoritma pemrosesan informasi yang terinspirasi oleh sistem kerja jaringan syaraf biologis pada otak manusia (Hajek, 2005).

Diberikan sebuah himpunan yang anggotanya berisi pasangan variabel bebas (x) dan variabel terikat (y). Himpunan tersebut dilambangkan dengan $\{x_j, y_j\}_{j=1}^n$ dengan n adalah banyaknya input. Jaringan fungsi radial basis mempresentasikan sebuah pemetaan dari vektor *input* dengan p -dimensi ke vektor *output* yang hanya 1-dimensi. Secara matematis jaringan fungsi radial basis ditulis dengan $f: R^p \rightarrow R^1$ (Mai-Duy & Tran-Cong, 2003).

Sarra & Kansa (2009) mengatakan bahwa fungsi f pada $f: R^p \rightarrow R^1$ terdiri dari himpunan bobot $\{w_j\}_{j=1}^m$ dan himpunan fungsi basis $\{\phi(x, c_j)\}_{j=1}^m$. Secara umum, fungsi basis dapat ditulis dengan $\phi(x, c_j) = \sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2}$, $\alpha = \frac{1}{\text{var}(c_j)}$, c_j adalah himpunan titik *center* dari x ke j .

Jenis fungsi basis *multiquadrics* yang umum digunakan pada jaringan fungsi radial basis adalah

$$\phi(x, c_j) = \sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2} \quad (2.7)$$

dimana α adalah seper varian dari c , dengan $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Penulis menggunakan fungsi basis *multiquadrics*, karena jenis fungsi basis tersebut memiliki keakuratan lebih baik, yakni *error* yang dihasilkan untuk

turunan hampiran pada fungsi basis tersebut lebih kecil. Hardy pada tahun 1971 mengembangkan pertama kali fungsi basis *multiquadrics* dalam karya penelitiannya yang berjudul *Multiquadrics Equations of Topography and Other Irregular Surfaces*. Fungsi *multiquadrics* ini kemudian dikembangkan oleh matematikawan, Richard Franke pada tahun 1979 dan selanjutnya mengalami perkembangan yang signifikan dengan digunakannya fungsi *multiquadrics* dalam penyelesaian masalah persamaan diferensial, melalui penelitian yang dilakukan oleh Edward Kansa pada tahun 1990 (Sarraf & Kansa, 2009).

Berikut ini merupakan bentuk umum fungsi basis yang sering digunakan dalam jaringan fungsi radial basis yaitu fungsi *multiquadrics*, untuk fungsi 1 variabel berbentuk sebagaimana berikut

$$\phi(x, c_j) = \sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2}, \quad \forall \alpha > \frac{1}{\text{var}(c_j)} \quad (2.8)$$

dan aproksimasinya yaitu:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n w_j \phi(x, c_j) \quad (2.9)$$

Aminataei & Mazarei (2008) menyatakan bahwa pembahasan yang penting dalam jaringan fungsi radial basis adalah menghitung nilai bobot w_j yang belum diketahui. Langkah-langkah dalam mengaproksimasi suatu fungsi menggunakan jaringan RBF setelah dipilih sebuah himpunan fungsi basis ϕ , adalah menghitung nilai bobot w_j . Langkah selanjutnya, jika telah didapatkan himpunan nilai-nilai bobot w_j , maka jaringan RBF dapat dibentuk. Jaringan RBF dibentuk oleh himpunan nilai bobot w_j dan himpunan fungsi basis ϕ . Aproksimasi fungsi tersebut dapat dihitung dengan,

$$f(x) = \sum_{j=1}^n w_j \phi(x, c_j) \quad (2.10)$$

Mai-Duy & Tran-Cong (2003) menyatakan bahwa hubungan antara koefisien W , solusi pendekatan G dan fungsi basis A adalah

$$AW = G \quad (2.11)$$

$$(A^{-1}A)W = A^{-1}G \quad (2.12)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1(x_1, c_1) & A_2(x_1, c_2) & \cdots & A_m(x_m, c_n) \\ A_1(x_2, c_1) & A_2(x_2, c_2) & \cdots & A_m(x_m, c_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1(x_m, c_1) & A_2(x_m, c_2) & \cdots & A_m(x_m, c_n) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T \quad (2.14)$$

$$G = [G_1, G_2, \dots, G_m] \quad (2.15)$$

dengan A adalah fungsi basis, W adalah koefisien bobot dan G adalah solusi pendekatannya.

2.3 Turunan Hampiran dengan RBF

Dalam RBF terdapat dua metode untuk memperoleh turunan hampiran antara lain:

2.3.1 Metode Langsung

Dalam metode langsung, aproksimasi turunan fungsi diperoleh dengan cara menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya (Sarra & Kansa, 2009).

Misalkan untuk fungsi basis *multiquadrics*:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n w_j \sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2} \quad (2.16)$$

Untuk memperoleh aproksimasi turunan pertama, maka fungsi basis (2.8) diturunkan satu kali terhadap x .

a) Turunan Pertama

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{df}{dx} \approx \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n w_j \sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n w_j \frac{d}{dx} \sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2} \\
 &= \sum_{j=1}^n w_j \frac{d}{dx} \left(1 + (x - c_j)^2 \alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{j=1}^n w_j \frac{1}{2} \left(1 + (x - c_j)^2 \alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2x - 2c_j) \alpha^2 \\
 &= \sum_{j=1}^n w_j \frac{(2x - 2c_j)}{2} \alpha^2 \left(1 + (x - c_j)^2 \alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{j=1}^n w_j \frac{(x - c_j) \alpha^2}{\sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2}}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Untuk memperoleh aproksimasi turunan kedua, maka fungsi basis persamaan (2.8) diturunkan satu kali terhadap x .

b) Turunan Kedua

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{df}{dx} \approx \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n w_j \frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n w_j \frac{d}{dx} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n w_j \frac{d}{dx} (x-c_j)\alpha^2 \left(1+(x-c_j)^2\alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{j=1}^n w_j \alpha^2 \left(1+(x-c_j)^2\alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} + (x-c_j)\alpha^2 \frac{1}{2} \left(1+(x-c_j)^2\alpha^2 \right)^{-\frac{3}{2}} (2x-2c_j)\alpha^2 \\
&= \sum_{j=1}^n w_j \alpha^2 \left(1+(x-c_j)^2\alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} + (x-c_j)\alpha^2 - \frac{1}{2} (2x-2c_j)\alpha^2 \left(1+(x-c_j)^2\alpha^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \sum_{j=1}^n w_j \alpha^2 \left(1+(x-c_j)^2\alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} - (x-c_j)^2\alpha^4 \left(1+(x-c_j)^2\alpha^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \sum_{j=1}^n w_j \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} - \frac{(x-c_j)^2\alpha^4}{\left(1+(x-c_j)^2\alpha^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.18}
\end{aligned}$$

2.3.2 Metode Tidak Langsung

Dalam metode tidak langsung, aproksimasi dimulai dari fungsi turunan yang menggunakan jaringan fungsi radial basis. Fungsi basis asli diperoleh dari proses integral. Perhitungan ini terdiri dari dua tahap, tahap pertama $f(x)$ sama dengan fungsi asli dan $f'(x)$ sama dengan fungsi turunan, sedangkan tahap kedua $f'(x)$ diperoleh pada tahap pertama sama dengan fungsi asli $f(x)$ dan $f''(x)$ sama dengan fungsi turunan. Perhitungan tersebut disebut sebagai metode tidak langsung (May-Dui dan Tran-Cong, 2002).

2.4 Analisis Galat

Dalam sub-bab ini akan dijelaskan analisis galat, yaitu membandingkan selisih antara solusi numerik dengan solusi analitiknya. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi numerik terhadap solusi analitiknya. Semakin kecil

galatnya, maka semakin teliti solusi numerik yang diperoleh, sebaliknya semakin besar galatnya maka solusi numerik yang diperoleh semakin tidak teliti. Misalkan $\hat{f}(x)$ adalah fungsi aproksimasi jaringan RBF dan $f(x)$ adalah fungsi aslinya, maka diperoleh

$$e = f(x) - \hat{f}(x) \quad (2.19)$$

Sehingga galat mutlak diperoleh dengan cara memutlakkan e tanpa memperhitungkan galat negatif maupun positif atau dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$|e| = |f(x) - \hat{f}(x)| \quad (2.20)$$

2.5 Penyelesaian Masalah dalam Al-Quran

Gelombang adalah lapisan-lapisan air yang memiliki rapat massa jenis yang berbeda. Salah satu fenomena alam dapat dilihat pada gelombang air laut. Banyak sekali ayat al-Quran yang menjelaskan tentang gelombang, di antaranya adalah surat Yunus/10:22, yaitu

هُوَ الَّذِي يُسِيرُكُمْ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ حَتَّىٰ إِذَا كُنْتُمْ فِي الْفُلِّ وَجَرْنَ بِيَمٍ بِرِيحٍ طَيِّبَةٍ وَفَرِحُوا بِهَا جَاءَتْهَا رِيحٌ عَاصِفٌ وَجَاءَهُمُ الْمَوْجُ مِنْ كُلِّ مَكَانٍ وَظَنُّوا أَنَّهُمْ أُحِيطَ بِهِمْ دَعَوُا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ لَئِنْ أَجَبْنَاهُمْ مِنْ هَٰذِهِ لَنَكُونَنَّ مِنَ الشَّاكِرِينَ



“Dialah Tuhan yang menjadikan kamu dapat berjalan di daratan, (berlayar) di lautan. Sehingga apabila kamu berada di dalam bahtera, dan meluncurlah bahtera itu membawa orang-orang yang ada di dalamnya dengan tiupan angin yang baik, dan mereka bergembira karenanya, datanglah angin badai, dan (apabila) gelombang dari segenap penjuru menimpanya, dan mereka yakin bahwa mereka telah terkepung (bahaya), maka mereka berdoa kepada Allah Swt. dengan mengikhlaskan ketaatan kepada-Nya semata-mata. (Mereka berkata):

"Sesungguhnya jika Engkau menyelamatkan kami dari bahaya ini, pastilah kami akan termasuk orang-orang yang bersyukur" (QS. Yunus/10:22)

Ayat di atas menjelaskan tentang balasan bagi orang yang ingkar terhadap kekuasaan Allah Swt. dimana kata “ريح” yang artinya “angin” sebagai penggerak dari gelombang tersebut. kata “ريح طيبة” disandingkan dengan kata “ريح عاصف”, yaitu untuk membandingkan antara angin yang baik dan angin yang jahat. Angin yang baik maksudnya adalah angin yang tidak mendatangkan bencana sedangkan yang dimaksud dengan angin jahat adalah angin yang mendatangkan bencana misalnya badai, topan, puting beliung, dan lain-lain. Dalam hal ini gelombang terjadi karena adanya angin dan ketinggian (besar gelombang) juga dipengaruhi oleh besarnya angin, semakin besar angin yang datang atau yang disebut dengan “ريح عاصف” tadi, maka akan semakin besar pula gelombangnya. Ketika Allah Swt. membuktikan kekuasaannya tidak akan ada yang selamat bagi mereka yang ingkar terhadapNya (Shihab, 2002).

Dengan adanya angin yang dapat mendatangkan kebaikan tadi sehingga disebutkan juga dalam surat al-Furqaan/25:48, yaitu

وَهُوَ الَّذِي أَرْسَلَ الرِّيحَ بُشْرًا بَيْنَ يَدَيْ رَحْمَتِهِ ۖ وَأَنْزَلْنَا مِنَ السَّمَاءِ مَاءً طَهُورًا

“Dialah yang meniupkan angin (sebagai) pembawa kabar gembira dekat sebelum kedatangan rahmat-Nya (hujan); dan Kami turunkan dari langit air yang amat bersih” (QS. al-Furqaan/25:48).

Pada ayat sebelumnya diketahui bahwa gelombang terjadi karena adanya angin. Kata “أَرْسَلَ” dimaknai dengan pendorong atau penggerak angin, dalam hal ini penggerak angin yang dimaksudkan adalah Allah Swt. Dengan demikian ayat di atas mengandung pengertian bahwa:

1. Angin bergerak tidak dengan sendirinya melainkan adanya dorongan dari Allah **“هُوَ الَّذِي أَرْسَلَ الرِّيحَ”**.
2. Adanya dorongan melalui angin itulah, maka akan terjadi gelombang.
3. Adanya angin pula dapat mendatangkan rahmat atau manfaat bagi umat serta dapat pula mendatangkan musibah atau bencana.

Dalam kalimat **“أَرْسَلَ الرِّيحَ”** dijelaskan bahwa yang mendatangkan atau yang meniupkan angin-angin tersebut adalah Allah Swt. Dimana kata **“رِّيحَ”** disini adalah jama' dari kata **“رِيحٌ”** yang artinya angin-angin. Maksud dari kata **“رِّيحَ”** ini adalah angin yang dapat mendatangkan rahmat atau manfaat bagi umat. Dalam istilah matematika disebut dengan gelombang stabil, sedangkan maksud dari kata **“رِيحٌ”** adalah angin yang dapat mendatangkan bencana atau dalam istilah matematika disebut gelombang tidak stabil. Sehingga jelaslah bahwa kalimat **“أَرْسَلَ الرِّيحَ”** ini Allah Swt. telah mendatangkan rahmat berupa hujan dan air yang sangat bersih yang dapat memberikan manfaat bagi kemaslahatan umat (Shihab, 2002).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Solusi Numerik Persamaan *Forced* KdV dengan Menggunakan Metode Jaringan RBF

Pada pembahasan ini akan dijelaskan penyelesaian secara numerik persamaan *forced* KdV menggunakan jaringan RBF yang persamaannya telah ditunjukkan pada bab sebelumnya, yaitu:

$$\frac{1}{3} \frac{d^3}{dx^3} \eta(x) - \frac{6}{5} \frac{d}{dx} \eta(x) + 2\eta(x) \frac{d}{dx} \eta(x) + \frac{d}{dx} h(x) = 0 \quad (3.1)$$

dengan domain $0 \leq x \leq p$ dan tinggi gundukan $h(x) = 0,5 \text{sech}^2(0,7566204380x)$ serta kondisi awal

$$\begin{aligned} \eta(0) &= 1,144948974 \\ \frac{d}{dx} \eta(0) &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \eta(0) &= -1,310908153 \end{aligned} \quad (3.2)$$

berikut langkah-langkah penyelesaian secara numerik persamaan *forced* KdV menggunakan jaringan RBF.

3.1.1 Linierisasi Persamaan *forced* KdV

Pada subbab ini akan diselesaikan persamaan (3.1) menggunakan jaringan RBF. Persamaan ini mengandung suku nonlinier, untuk melinierisasi suku nonlinier tersebut diberikan *superscripts* untuk mewakili bilangan iterasi (Sarraf & Kansa, 2009), sehingga persamaan (3.1) menjadi linier, sebagaimana berikut:

$$\frac{1}{3} \frac{d^3}{dx^3} \eta(x)^{(k+1)} - \frac{6}{5} \frac{d}{dx} \eta(x)^{(k+1)} + 2\eta(x)^{(k)} \frac{d}{dx} \eta(x)^{(k+1)} = -\frac{d}{dx} h(x) \quad (3.3)$$

dimana nilai $\eta(x)^{(k)}$ dianggap sudah diketahui sedangkan nilai $\eta(x)^{(k+1)}$ yang akan dicari.

3.1.2 Aproksimasi Persamaan *forced* KdV dan Kondisi Awal Menggunakan Jaringan RBF

Metode jaringan RBF yang digunakan untuk mengaproksimasi persamaan *forced* KdV adalah metode langsung, yaitu dengan menurunkan fungsi radial basis terhadap variabel bebasnya, sehingga diperoleh fungsi-fungsi radial basis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta(x)^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi(x, c_j) \\ \frac{d}{dx} \eta(x)^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi_x(x, c_j) \\ \frac{d^3}{dx^3} \eta(x)^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi_{xxx}(x, c_j) \end{aligned} \quad (3.4)$$

dengan ϕ_x dan ϕ_{xxx} secara berturut-turut adalah turunan pertama dan ketiga fungsi basis ϕ terhadap x . serta $\phi(x, c_j)$ adalah fungsi basis *multiquadrics* yang telah didefinisikan pada bab 2.

Persamaan (3.4) disubstitusikan pada persamaan (3.3) menjadi,

$$\frac{1}{3} \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi_{xxx}(x, c_j) - \frac{6}{5} \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi_x(x, c_j) + 2\eta(x)^{(k)} \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi_x(x, c_j) = -\frac{d}{dx} h(x) \quad (3.5)$$

untuk indeks $k = 1, 2, \dots$ akan digunakan untuk mencari nilai bobot $w^{(k+1)}$ yang optimal, karena $\eta(x)^{(k)}$ dianggap sudah diketahui nilainya maka tidak perlu

diubah ke dalam bentuk fungsi radial basis dan hanya ditulis $\eta(x)^{(k)}$, kemudian persamaan (3.5) dapat disederhanakan ke dalam bentuk

$$\sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \left(\frac{1}{3} \phi_{xxx}(x, c_j) - \frac{6}{5} \phi_x(x, c_j) + 2\eta(x)^{(k)} \phi_x(x, c_j) \right) = -\frac{d}{dx} h(x) \quad (3.6)$$

Persamaan (3.6) dapat dibentuk jika dicari terlebih dahulu $\phi_x(x, c_j)$ dan $\phi_{xxx}(x, c_j)$. Berikut turunan pertama sampai turunan ketiga fungsi basis $\phi(x, c_j)$ terhadap x .

$$\begin{aligned} \phi(x, c_j) &= \sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2} \\ \phi_x(x, c_j) &= \frac{d}{dx} \sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2} \\ &= \frac{(x - c_j) \alpha^2}{\sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2}} \\ \phi_{xx}(x, c_j) &= \frac{d}{dx} \frac{(x - c_j) \alpha^2}{\sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2}} \\ &= \frac{\alpha^2}{\sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2}} - \frac{(x - c_j)^2 \alpha^4}{\left(1 + (x - c_j)^2 \alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \phi_{xxx}(x, c_j) &= \frac{d}{dx} \frac{\alpha^2}{\sqrt{1 + (x - c_j)^2 \alpha^2}} - \frac{(x - c_j)^2 \alpha^4}{\left(1 + (x - c_j)^2 \alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3(x - c_j) \alpha^4}{\left(1 + (x - c_j)^2 \alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x - c_j)^3 \alpha^6}{\left(1 + (x - c_j)^2 \alpha^2\right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dengan $j = 1, 2, \dots, n$ dan $\alpha = \frac{1}{\text{var}(c_j)}$. Kemudian persamaan (3.7) disubstitusi

ke persamaan (3.6) menjadi

$$\sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{3(x-c_j)\alpha^4}{\left(1+(x-c_j)^2\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x-c_j)^3\alpha^6}{\left(1+(x-c_j)^2\alpha^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} \right) + 2\eta(x)^{(k)} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} \right) \right] = -\frac{d}{dx} h(x) \quad (3.8)$$

Untuk menyederhanakan penulisan persamaan (3.8) dibuat pemisalan sebagai berikut

$$A(x, c_j) = \frac{1}{3} \left(-\frac{3(x-c_j)\alpha^4}{\left(1+(x-c_j)^2\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x-c_j)^3\alpha^6}{\left(1+(x-c_j)^2\alpha^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} \right) + 2\eta(x)^{(k)} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} \right) \quad (3.9)$$

sehingga persamaan (3.9) menjadi

$$\sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} A(x, c_j) = -\frac{d}{dx} h(x) \quad (3.10)$$

Begitu juga pada kondisi awal (3.2), persamaan tersebut diaproksimasi menggunakan jaringan RBF menjadi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi(0, c_j) &= 1,144948974 \\ \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi_x(0, c_j) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi_{xx}(0, c_j) &= -1,310908153 \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.1.3 Diskritisasi Persamaan forced KdV dan Kondisi Awal ke dalam Persamaan Matriks

Subbab ini menjelaskan diskritisasi persamaan (3.8) menggunakan jaringan RBF. Persamaan tersebut dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks dengan memasukkan nilai-nilai *input* x kedalam bentuk diskritnya. Misalkan diberikan $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, x sudah diskritkan maka dengan memasukkan nilai-nilai x pada persamaan (3.10) diperoleh sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} w_1^{(k+1)} A(x_1, c_1) + w_2^{(k+1)} A(x_1, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} A(x_1, c_n) &= -\frac{d}{dx} h(x_1) \\ w_1^{(k+1)} A(x_2, c_1) + w_2^{(k+1)} A(x_2, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} A(x_2, c_n) &= -\frac{d}{dx} h(x_2) \\ w_1^{(k+1)} A(x_3, c_1) + w_2^{(k+1)} A(x_3, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} A(x_3, c_n) &= -\frac{d}{dx} h(x_3) \\ &\vdots \\ w_1^{(k+1)} A(x_m, c_1) + w_2^{(k+1)} A(x_m, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} A(x_m, c_n) &= -\frac{d}{dx} h(x_m) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Perlu diketahui bahwa nilai untuk $A(x_i, c_j)$ akan selalu tetap pada setiap perulangan oleh $k = 1, 2, \dots$ dikarenakan fungsi-fungsinya mengandung kondisi awal yang sudah diberikan sebelumnya. Oleh karenanya $A(x_i, c_j)$ akan diganti dengan kondisi awal (3.11), sehingga persamaan (3.12) menjadi

$$\begin{aligned} w_1^{(k+1)} \phi(0, c_1) + w_2^{(k+1)} \phi(0, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} \phi(0, c_n) &= 1,144948974 \\ w_1^{(k+1)} \phi_x(0, c_1) + w_2^{(k+1)} \phi_x(0, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} \phi_x(0, c_n) &= 0 \\ w_1^{(k+1)} \phi_{xx}(0, c_1) + w_2^{(k+1)} \phi_{xx}(0, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} \phi_{xx}(0, c_n) &= -1,310908153 \\ w_1^{(k+1)} A(x_2, c_1) + w_2^{(k+1)} A(x_2, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} A(x_2, c_n) &= -\frac{d}{dx} h(x_2) \\ w_1^{(k+1)} A(x_3, c_1) + w_2^{(k+1)} A(x_3, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} A(x_3, c_n) &= -\frac{d}{dx} h(x_3) \\ &\vdots \\ w_1^{(k+1)} A(x_m, c_1) + w_2^{(k+1)} A(x_m, c_2) + \dots + w_n^{(k+1)} A(x_m, c_n) &= -\frac{d}{dx} h(x_m) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Persamaan (3.13) kemudian diubah menjadi persamaan matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \phi(0, c_1) & \phi(0, c_2) & \cdots & \phi(0, c_n) \\ \phi_x(0, c_1) & \phi_x(0, c_2) & \cdots & \phi_x(0, c_n) \\ \phi_{xx}(0, c_1) & \phi_{xx}(0, c_2) & \cdots & \phi_{xx}(0, c_n) \\ A(x_2, c_1) & A(x_2, c_2) & \cdots & A(x_2, c_n) \\ A(x_3, c_1) & A(x_3, c_2) & \cdots & A(x_3, c_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(x_m, c_1) & A(x_m, c_2) & \cdots & A(x_m, c_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(k+1)} \\ w_2^{(k+1)} \\ w_3^{(k+1)} \\ w_4^{(k+1)} \\ w_5^{(k+1)} \\ \vdots \\ w_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,144948974 \\ 0 \\ -1,310908153 \\ -\frac{d}{dx}h(x_2) \\ -\frac{d}{dx}h(x_3) \\ \vdots \\ -\frac{d}{dx}h(x_m) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) membentuk persamaan matriks dengan variabel yang tidak diketahui berupa $w^{(k+1)}$. Oleh karena itu, untuk menentukan koefisien bobot $w^{(k+1)}$ pada persamaan (3.14) dapat diperoleh:

$$AW = G \quad (3.15)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} \phi(0, c_1) & \phi(0, c_2) & \cdots & \phi(0, c_n) \\ \phi_x(0, c_1) & \phi_x(0, c_2) & \cdots & \phi_x(0, c_n) \\ \phi_{xx}(0, c_1) & \phi_{xx}(0, c_2) & \cdots & \phi_{xx}(0, c_n) \\ A(x_2, c_1) & A(x_2, c_2) & \cdots & A(x_2, c_n) \\ A(x_3, c_1) & A(x_3, c_2) & \cdots & A(x_3, c_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(x_m, c_1) & A(x_m, c_2) & \cdots & A(x_m, c_n) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1,144948974 \\ 0 \\ -1,310908153 \\ -\frac{d}{dx}h(x_2) \\ -\frac{d}{dx}h(x_3) \\ \vdots \\ -\frac{d}{dx}h(x_m) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$W^{(k+1)} = \begin{bmatrix} w_1^{(k+1)} \\ w_2^{(k+1)} \\ w_3^{(k+1)} \\ w_4^{(k+1)} \\ w_5^{(k+1)} \\ \vdots \\ w_n^{(k+1)} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Karena nilai yang akan dicari nilai bobot $w^{(k+1)}$, maka kedua ruas dikalikan dengan A^{-1} sehingga persamaan (3.15) menjadi:

$$(A^{-1}A)W^{(k+1)} = A^{-1}G \quad (3.19)$$

Diketahui bahwa $A^{-1}A = I$, maka

$$W^{(k+1)} = A^{-1}G \quad (3.20)$$

Pencarian nilai-nilai bobot untuk persamaan linier dapat dicari dengan satu kali penginversan, akan tetapi pada persamaan nonlinier perlu diulang-ulang hingga mendapat nilai bobot yang optimal. Pencarian nilai bobotnya dimulai dengan nilai awal yang berbentuk $\sin(x) + \eta(0)^{(1)}$ dimana $\eta(0)^{(1)}$ sudah diketahui nilainya, sehingga nilai bobot $w^{(2)}$ dapat dicari kemudian $\eta(x)^{(2)}$ bisa dihitung dengan mengalikan nilai bobot $w^{(2)}$ dengan fungsi basis. Setelah itu nilai

$\eta(x)^{(2)}$ dimasukkan pada persamaan (3.8) sehingga didapat nilai bobot baru yaitu $w^{(3)}$ melalui langkah-langkah yang telah dijelaskan tadi. Kemudian nilai bobot baru digunakan untuk menghitung $\eta(x)^{(3)}$ yang kemudian dimasukkan pada persamaan (3.8) sehingga didapat nilai bobot baru yaitu $w^{(3)}$ dan demikian seterusnya sampai mendapatkan *error* yang kecil.

Setelah mendapatkan koefisien bobot $w^{(k+1)}$ yang optimal, selanjutnya adalah menghitung solusi dari persamaan *forced* KdV dengan cara mengalikan koefisien bobot dengan fungsi radial basis yang tidak diturunkan sebagai berikut

$$\eta(x)^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n w_j^{(k+1)} \phi(x, c_j) \quad (3.21)$$

3.2 Simulasi dan Analisis Galat (*error*)

Simulasi untuk solusi numerik persamaan *forced* KdV menggunakan jaringan RBF akan dibahas pada subbab berikut serta analisis galatnya.

Simulasi dilakukan dengan memilih nilai Δx dan x tertentu, dikarenakan pencarian solusi akan konvergen dengan nilai tertentu. Berikut pemilihan nilai Δx dan x yang dipakai pada simulasi:

Tabel 3.1. Nilai Δx dan x yang Dipakai pada Simulasi

No.	Δx	x	Iterasi ke-
1.	0,001	$0 \leq x \leq 1$	3
2.	0,03	$0 \leq x \leq 2$	4
3.	0,05	$0 \leq x \leq 3$	5
4.	0,1	$0 \leq x \leq 4$	8
5.	0,2	$0 \leq x \leq 5$	67
6.	0,3	$0 \leq x \leq 6$	481

Kemudian diberikan grafik galat yang diperoleh dari perbandingan solusi numerik (3.21) dan solusi analitik (2.6).

Simulasi pertama yang akan diselesaikan adalah persamaan *forced* KdV (3.1) beserta nilai awalnya (3.2) dengan domain $0 \leq x \leq 1$. Domain pada persamaan (3.1) dipartisi menjadi beberapa data diskrit dengan $\Delta x = 0,001$ sehingga diperoleh $x = (0, 0,001, 0,002, 0,003, \dots, 1)$ dengan jumlah dari x adalah $1001(n = 1001)$. Titik-titik *center* (c_j) adalah himpunan bilangan sebarang yang menyesuaikan banyaknya persamaan. Kemudian persamaan (3.1) dilinierkan menjadi persamaan (3.3), selanjutnya mengubah persamaan *forced* KdV yang telah dilinierkan (3.3) menjadi persamaan dalam bentuk jaringan RBF seperti berikut:

$$\sum_{j=1}^{1003} w_j^{(k+1)} \left(\frac{1}{3} \left(-\frac{3(x-c_j)\alpha^4}{(1+(x-c_j)^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x-c_j)^3\alpha^6}{(1+(x-c_j)^2\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)\alpha^2}} \right) + 2\eta(x)^{(k)} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} \right) \right) = -\frac{d}{dx} h(x) \quad (3.22)$$

Kemudian penulisan persamaan (3.22) disederhanakan dengan dibuat pemisalan sebagai berikut

$$A(x, c_j) = \frac{1}{3} \left(-\frac{3(x-c_j)\alpha^4}{(1+(x-c_j)^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x-c_j)^3\alpha^6}{(1+(x-c_j)^2\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)\alpha^2}} \right) + 2\eta(x)^{(k)} \left(\frac{(x-c_j)\alpha^2}{\sqrt{1+(x-c_j)^2\alpha^2}} \right) \quad (3.23)$$

sehingga persamaan (3.23) menjadi

$$\sum_{j=1}^{1003} w_j^{(k+1)} A(x, c_j) = -\frac{d}{dx} h(x) \quad (3.24)$$

Begitu juga pada kondisi awal (3.2), persamaan tersebut diaproksimasi menggunakan jaringan RBF menjadi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{1003} w_j^{(k+1)} \phi(0, c_j) &= 1,144948974 \\ \sum_{j=1}^{1003} w_j^{(k+1)} \phi_x(0, c_j) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{1003} w_j^{(k+1)} \phi_{xx}(0, c_j) &= -1,310908153\end{aligned}\quad (3.25)$$

Untuk $k = 1$, persamaan (3.24) dapat dibentuk kedalam sistem persamaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}w_1^{(2)} A(x_1, c_1) + w_2^{(2)} A(x_1, c_2) + \dots + w_{1001}^{(2)} A(x_1, c_{1001}) &= -\frac{d}{dx} h(x_1) \\ w_1^{(2)} A(x_2, c_1) + w_2^{(2)} A(x_2, c_2) + \dots + w_{1001}^{(2)} A(x_2, c_{1001}) &= -\frac{d}{dx} h(x_2) \\ w_1^{(2)} A(x_3, c_1) + w_2^{(2)} A(x_3, c_2) + \dots + w_{1001}^{(2)} A(x_3, c_{1001}) &= -\frac{d}{dx} h(x_3) \\ &\vdots \\ w_1^{(2)} A(x_{1001}, c_1) + w_2^{(2)} A(x_{1001}, c_2) + \dots + w_{1001}^{(2)} A(x_{1001}, c_{1001}) &= -\frac{d}{dx} h(x_{1001})\end{aligned}\quad (3.26)$$

Perlu diketahui bahwa nilai untuk $A(x_1, c_j)$ akan selalu tetap pada setiap perulangan dikarenakan fungsi-fungsinya mengandung kondisi awal yang sudah diberikan sebelumnya. Oleh karenanya $A(x_1, c_j)$ akan diganti dengan kondisi awal (3.25), sehingga persamaan (3.26) dengan ukuran matriks 1003×1003 menjadi,

$$\begin{aligned}
w_1^{(2)}\phi(0, c_1) + w_2^{(2)}\phi(0, c_2) + \dots + w_{1003}^{(2)}\phi(0, c_{1003}) &= 1,144948974 \\
w_1^{(2)}\phi_x(0, c_1) + w_2^{(2)}\phi_x(0, c_2) + \dots + w_{1003}^{(2)}\phi_x(0, c_{1003}) &= 0 \\
w_1^{(2)}\phi_{xx}(0, c_1) + w_2^{(2)}\phi_{xx}(0, c_2) + \dots + w_{1003}^{(2)}\phi_{xx}(0, c_{1003}) &= -1,310908153 \\
w_1^{(2)}A(x_2, c_1) + w_2^{(2)}A(x_2, c_2) + \dots + w_{1003}^{(2)}A(x_2, c_{1003}) &= -\frac{d}{dx}h(x_2) \\
w_1^{(2)}A(x_3, c_1) + w_2^{(2)}A(x_3, c_2) + \dots + w_{1003}^{(2)}A(x_3, c_{1003}) &= -\frac{d}{dx}h(x_3) \\
&\vdots \\
w_1^{(2)}A(x_{1001}, c_1) + w_2^{(2)}A(x_{1001}, c_2) + \dots + w_{1003}^{(2)}A(x_{1001}, c_{1003}) &= -\frac{d}{dx}h(x_{1001})
\end{aligned} \tag{3.27}$$

dimana $A(x, c_j)$ sebagaimana persamaan (3.23) dengan indeks $j = 1, 2, \dots, 1003$

dan $\alpha = \frac{1}{\text{var}(c_j)}$. Selanjutnya sistem persamaan (3.27) diubah menjadi

persamaan matriks berikut

$$\begin{bmatrix} \phi(0, c_1) & \phi(0, c_2) & \dots & \phi(0, c_{1003}) \\ \phi_x(0, c_1) & \phi_x(0, c_2) & \dots & \phi_x(0, c_{1003}) \\ \phi_{xx}(0, c_1) & \phi_{xx}(0, c_2) & \dots & \phi_{xx}(0, c_{1003}) \\ A(x_2, c_1) & A(x_2, c_2) & \dots & A(x_2, c_{1003}) \\ A(x_3, c_1) & A(x_3, c_2) & \dots & A(x_3, c_{1003}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(x_{1001}, c_1) & A(x_{1001}, c_2) & \dots & A(x_{1001}, c_{1003}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ w_4^{(2)} \\ w_5^{(2)} \\ \vdots \\ w_{1003}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,144948974 \\ 0 \\ -1,310908153 \\ -\frac{d}{dx}h(x_2) \\ -\frac{d}{dx}h(x_3) \\ \vdots \\ -\frac{d}{dx}h(x_{1001}) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Setelah mendapatkan persamaan matriks (3.28), nilai-nilai x dimasukkan pada persamaan tersebut, sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} \phi(0,0) & \phi(0, 0,001) & \cdots & \phi(0, 1) \\ \phi_x(0,0) & \phi_x(0, 0,001) & \cdots & \phi_x(0, 1) \\ \phi_{xx}(0,0) & \phi_{xx}(0, 0,001) & \cdots & \phi_{xx}(0, 1) \\ A(0,001, 0) & A(0,001, 0,001) & \cdots & A(0,001, 1) \\ A(0,002, 0) & A(0,002, 0,001) & \cdots & A(0,002, 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(1, 0) & A(1, 0,001) & \cdots & A(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ w_4^{(2)} \\ w_5^{(2)} \\ w_6^{(2)} \\ \vdots \\ w_{1003}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,144948974 \\ 0 \\ -1,310908153 \\ -\frac{d}{dx}h(0,001) \\ -\frac{d}{dx}h(0,002) \\ -\frac{d}{dx}h(0,003) \\ \vdots \\ -\frac{d}{dx}h(1) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Nilai-nilai solusi awal $\eta^{(1)}$ ditentukan dengan fungsi yang berhubungan dengan nilai awal, sebagaimana nilai-nilai solusi awal pada persamaan ini dipilih $\eta(x) = \sin(x) + 1,144948974$, setelah dilakukan perhitungan diperoleh persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1,0001 & \cdots & 12,0059 \\ 0 & -0,1428 & \cdots & -11,9226 \\ 143,1410 & 143,1104 & \cdots & 0,0827 \\ -20,3257 & -0,0406 & \cdots & -12,9357 \\ -40,6070 & -20,3660 & \cdots & -12,9591 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 32,9773 & 32,9767 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ w_4^{(2)} \\ w_5^{(2)} \\ \vdots \\ w_{1003}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1449 \\ 0 \\ -1,3109 \\ 0,0006 \\ 0,0011 \\ \vdots \\ 0,2861 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Persamaan matriks (3.30) berukuran 1003×1003 . Langkah selanjutnya yakni menghitung nilai bobot $w_j^{(2)}$ yang diperoleh dari persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ w_4^{(2)} \\ w_5^{(2)} \\ \vdots \\ w_{1003}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,0001 & \cdots & 12,0059 \\ 0 & -0,1428 & \cdots & -11,9226 \\ 143,1410 & 143,1104 & \cdots & 0,0827 \\ -20,3257 & -0,0406 & \cdots & -12,9357 \\ -40,6070 & -20,3660 & \cdots & -12,9591 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 32,9773 & 32,9767 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1,1449 \\ 0 \\ -1,3109 \\ 0,0006 \\ 0,0011 \\ \vdots \\ 0,2861 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1647 \\ -0,6201 \\ 0,2800 \\ 1,2860 \\ -0,8407 \\ \vdots \\ -0,0038 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Nilai bobot $w_j^{(2)}$ yang didapat dari persamaan matriks (3.31) adalah sebagai berikut:

$$w^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,1647 \\ -0,6201 \\ 0,2800 \\ 1,2860 \\ -0,8407 \\ \vdots \\ -0,0038 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Setelah nilai bobot $w^{(2)}$ diketahui, selanjutnya mencari solusi $\eta^{(2)}$ dapat dihitung dengan mengalikan fungsi basis dengan nilai bobot $w_j^{(2)}$ pada persamaan (3.32) yang diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \eta(x_1)^{(2)} \\ \eta(x_2)^{(2)} \\ \vdots \\ \eta(x_{1001})^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x_1, c_1) & \phi(x_1, c_2) & \cdots & \phi(x_1, c_{1003}) \\ \phi(x_2, c_1) & \phi(x_2, c_2) & \cdots & \phi(x_2, c_{1003}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(x_{1001}, c_1) & \phi(x_{1001}, c_2) & \cdots & \phi(x_{1001}, c_{1003}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ \vdots \\ w_{1003}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} 1,1452 \\ 1,1452 \\ \vdots \\ 0,7899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,0001 & \cdots & 12,0059 \\ 0 & -0,1428 & \cdots & -11,9226 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 32,9773 & 32,9767 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1647 \\ -0,6201 \\ \vdots \\ -0,0038 \end{bmatrix}$$

Perulangan dilanjutkan untuk $k = 2$. Nilai bobot $w^{(3)}$ dihitung dengan cara yang sama ketika $k = 1$, sehingga diperoleh sebagaimana berikut:

$$\begin{bmatrix} w_1^{(3)} \\ w_2^{(3)} \\ w_3^{(3)} \\ w_4^{(3)} \\ w_5^{(3)} \\ \vdots \\ w_{1003}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,0001 & \cdots & 12,0059 \\ 0 & -0,1428 & \cdots & -11,9226 \\ 143,1410 & 143,1104 & \cdots & 0,0827 \\ -20,3260 & -0,0406 & \cdots & -12,9168 \\ -40,6081 & -20,3665 & \cdots & -12,9163 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4,4452 & 4,4449 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1,1449 \\ 0 \\ -1,3109 \\ 0,0006 \\ 0,0011 \\ \vdots \\ 0,2861 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0,3005 \\ -0,3899 \\ -0,3166 \\ 1,0472 \\ \vdots \\ 0,0479 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Nilai bobot $w_j^{(3)}$ yang diperoleh dari persamaan matriks (3.34) sebagai berikut:

$$w^{(3)} = \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0,3005 \\ -0,3899 \\ -0,3166 \\ 1,0472 \\ \vdots \\ 0,0479 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Solusi $\eta^{(3)}$ dapat dihitung dengan mengalikan fungsi basis dengan nilai bobot $w_j^{(3)}$ sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \eta(x_1)^{(3)} \\ \eta(x_2)^{(3)} \\ \vdots \\ \eta(x_{1001})^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x_1, c_1) & \phi(x_1, c_1) & \cdots & \phi(x_1, c_{1003}) \\ \phi(x_2, c_1) & \phi(x_2, c_1) & \cdots & \phi(x_2, c_{1003}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(x_{1001}, c_1) & \phi(x_{1001}, c_1) & \cdots & \phi(x_{1001}, c_{1003}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(3)} \\ w_2^{(3)} \\ \vdots \\ w_{1003}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\begin{bmatrix} 1,1438 \\ 1,1438 \\ \vdots \\ 0,6779 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,0001 & \cdots & 12,0059 \\ 0 & -0,1428 & \cdots & -11,9226 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4,4452 & 4,4449 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0,3005 \\ \vdots \\ 0,0479 \end{bmatrix}$$

Perulangan terus dilanjutkan untuk $k=3,4,\dots$ sampai mendapatkan nilai bobot yang optimal. Pada simulasi pertama ini ditemukan nilai bobot yang optimal pada saat $k=3$ perulangan dihentikan.

Setelah diperoleh nilai bobot yang optimal, solusi numerik persamaan *forced* KdV (3.1) dengan kondisi awal (3.2) dapat dihitung dengan mengalikan fungsi basis dengan nilai bobotnya. Dari simulasi pertama yang dilakukan, diperoleh nilai bobot yang optimal sebagai berikut:

$$w = \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0,3005 \\ \vdots \\ 0,0479 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Selanjutnya solusi dari persamaan *forced* KdV (3.1) dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \eta(x_1) \\ \eta(x_2) \\ \vdots \\ \eta(x_{1001}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x_1, c_1) & \phi(x_1, c_1) & \cdots & \phi(x_1, c_{1003}) \\ \phi(x_2, c_1) & \phi(x_2, c_1) & \cdots & \phi(x_2, c_{1003}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(x_{1001}, c_1) & \phi(x_{1001}, c_1) & \cdots & \phi(x_{1001}, c_{1003}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{1003} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} 1,1438 \\ 1,1438 \\ \vdots \\ 0,6779 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,0001 & \cdots & 12,0059 \\ 0 & -0,1428 & \cdots & -11,9226 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 4,4452 & 4,4449 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0,3005 \\ \vdots \\ 0,0479 \end{bmatrix}$$

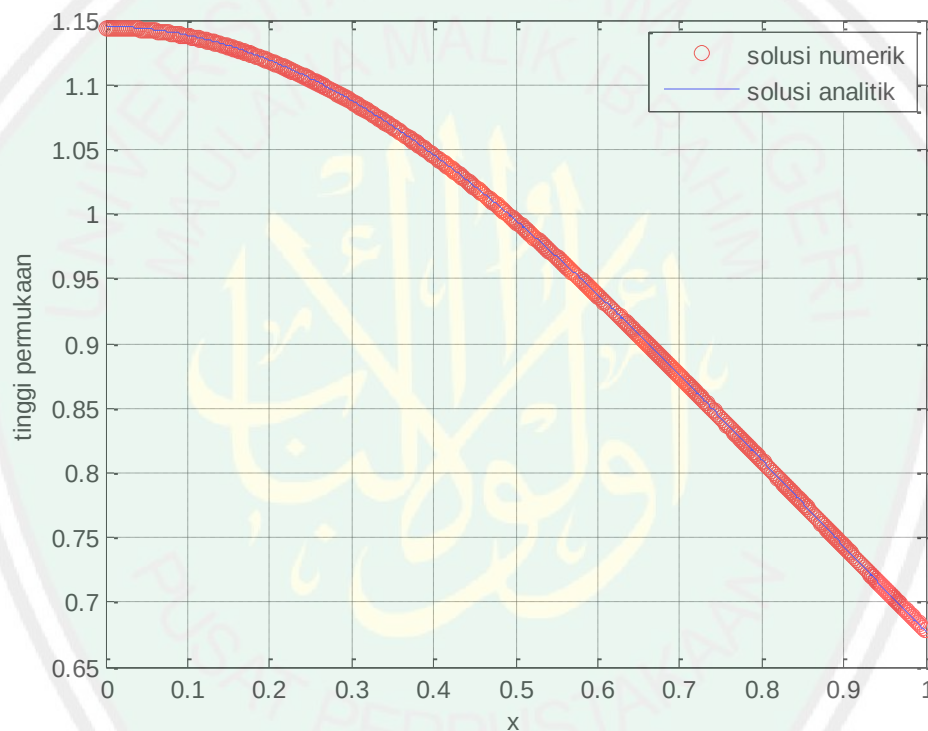
Persamaan dan kondisi awal untuk simulasi kedua dan simulasi selanjutnya, yang digunakan adalah persamaan yang sama dengan simulasi pertama, akan tetapi yang membedakan adalah memilih nilai Δx dan x (domain) sesuai dengan Tabel 3.1.

Setelah diketahui solusi numerik dari persamaan *forced* KdV, selanjutnya yaitu untuk mengetahui seberapa dekat solusi yang diperoleh dengan menggunakan jaringan RBF maka dilakukanlah analisis galat. Analisis galat dapat dilakukan dengan membandingkan selisih antara solusi numerik (3.21) dan solusi analitik (2.6)

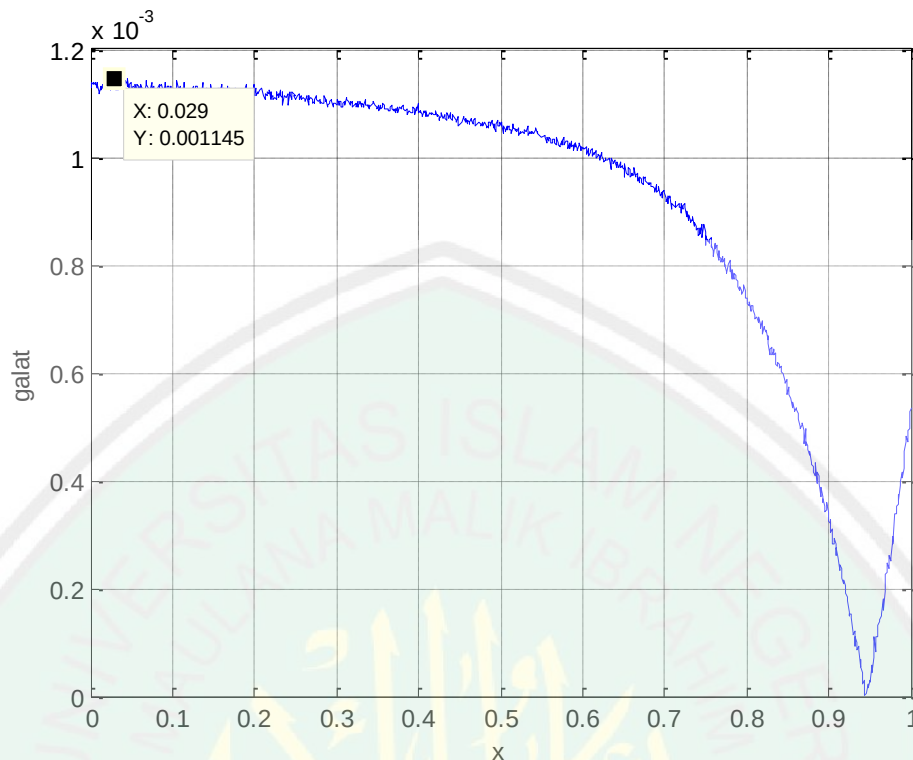
Berikut hasil simulasi numerik pada Tabel (3.1) yang membentuk grafik dengan menggunakan program MATLAB R2013a.

3.2.1 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,001$ dan $0 \leq x \leq 1$

Simulasi pertama dilakukan pada persamaan (3.1) dengan kondisi awal (3.2) ketika $\Delta x = 0,001$ dan $0 \leq x \leq 1$. Sehingga perbandingan solusi numerik dan solusi analitiknya dapat dilihat pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.1 Solusi Analitik (2.6) dan Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,001$ dengan $0 \leq x \leq 1$

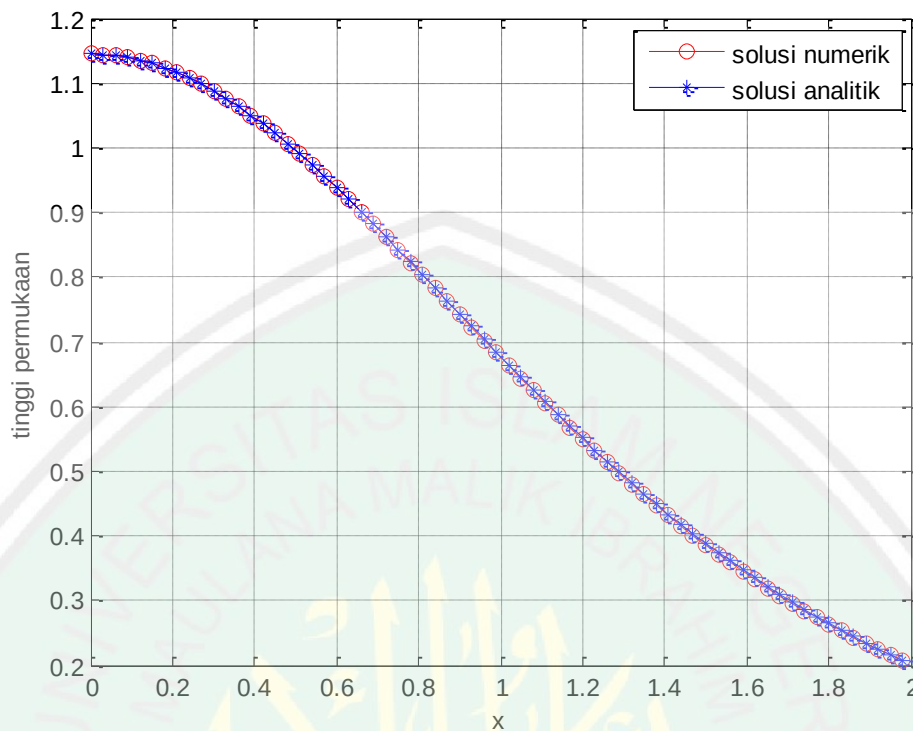


Gambar 3.2 Galat Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,001$ dengan $0 \leq x \leq 1$

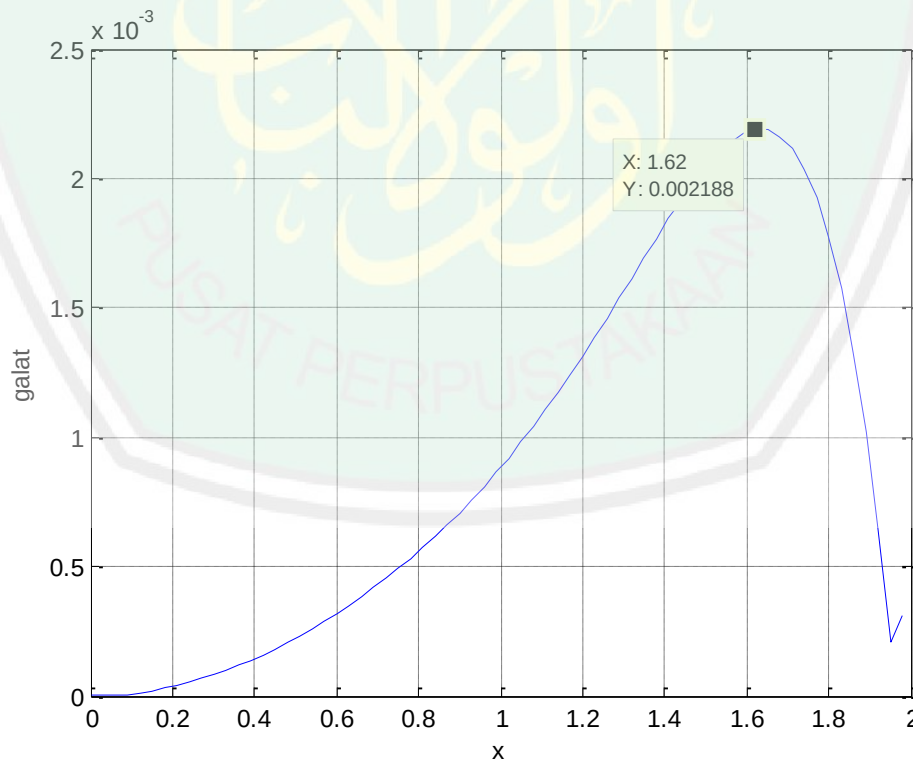
Gambar 3.1 menunjukkan grafik solusi numerik mendekati solusi analitiknya ketika domain $0 \leq x \leq 1$ dengan $\Delta x = 0,001$. Untuk mengetahui lebih jelas perbandingan solusi numerik dan analitik dapat dilihat pada Gambar 3.2. Hasil perbandingan solusi yang ditunjukkan pada Gambar 3.2 menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* yaitu pada $x = 0,029$ sebesar 0,001145. Sehingga dapat dikatakan galat pada Gambar 3.2 kecil atau mendekati nilai sebenarnya ketika x mendekati 0.

3.2.2 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,03$ dan $0 \leq x \leq 2$

Simulasi kedua dilakukan pada persamaan (3.1) dengan kondisi awal (3.2) beserta solusi analitiknya ketika $\Delta x = 0,03$ dan $0 \leq x \leq 2$. Sehingga perbandingan solusi numerik dan solusi analitiknya dapat dilihat pada Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.3 Solusi Analitik (2.6) dan Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,03$ dengan $0 \leq x \leq 2$



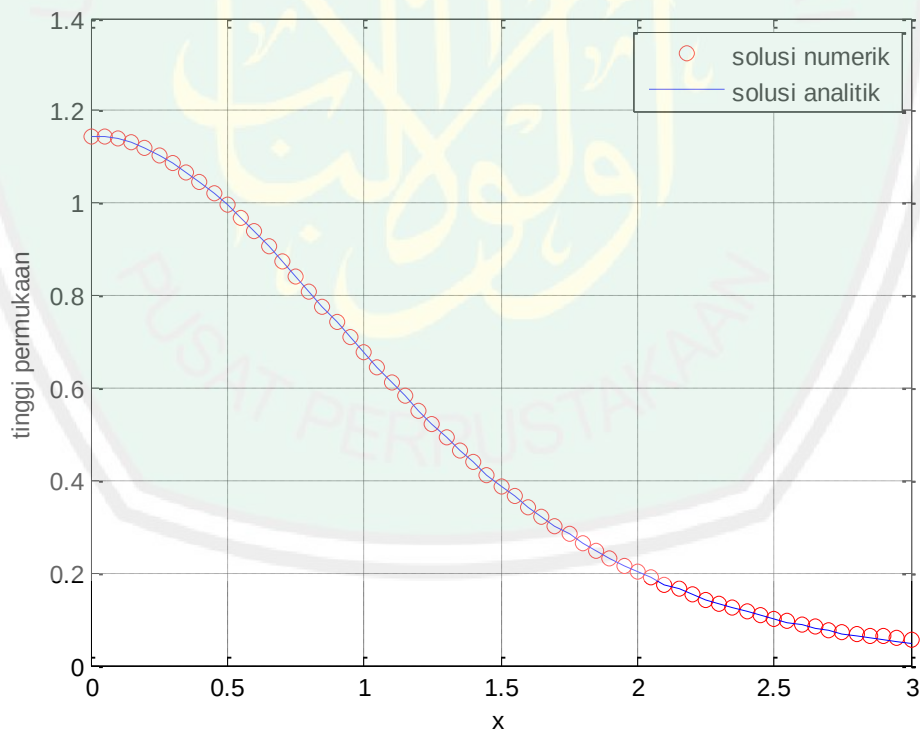
Gambar 3.4 Galat Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,03$ dengan $0 \leq x \leq 2$

Gambar 3.3 menunjukkan grafik solusi numerik mendekati solusi analitiknya ketika domain $0 \leq x \leq 2$ dengan $\Delta x = 0,03$. Untuk mengetahui lebih

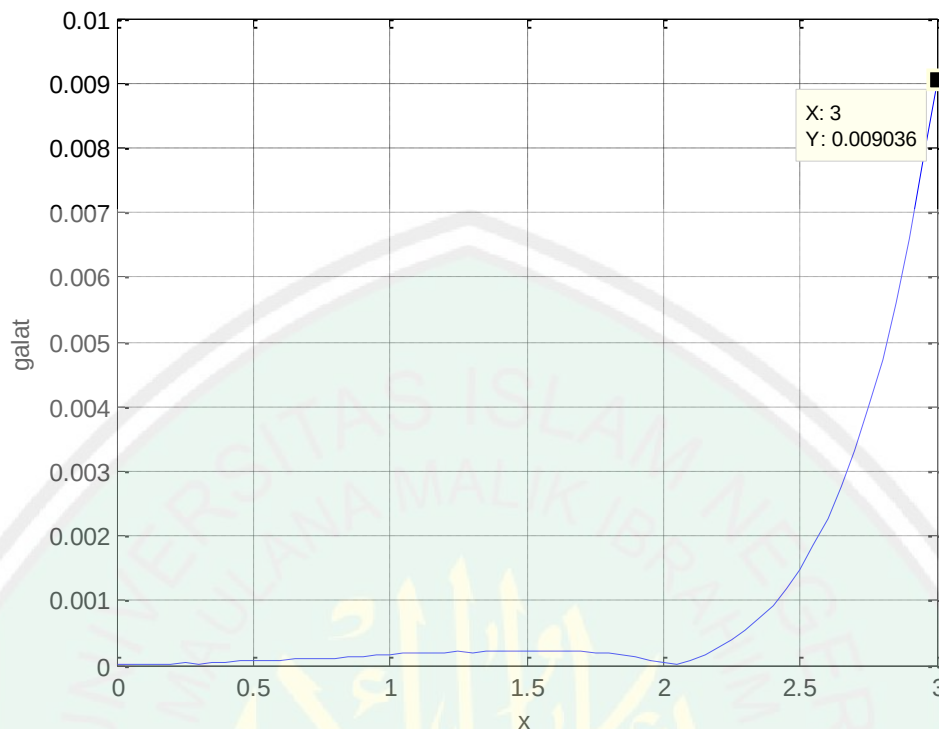
jelas perbandingan solusi numerik dan analitik dapat dilihat pada Gambar 3.4. Hasil perbandingan solusi yang ditunjukkan pada Gambar 3.4 menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* yaitu pada $x = 1,62$ sebesar 0,002188. Sehingga dapat dikatakan galat pada Gambar 3.4 kecil atau mendekati nilai sebenarnya ketika x mendekati 0.

3.2.3 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,05$ dan $0 \leq x \leq 3$

Simulasi ketiga dilakukan pada persamaan (3.1) dengan kondisi awal (3.2) beserta solusi analitiknya ketika $\Delta x = 0,05$ dan $0 \leq x \leq 3$. Sehingga perbandingan solusi numerik dan solusi analitiknya dapat dilihat pada Gambar 3.5 dan Gambar 3.6 berikut.



Gambar 3.5 Solusi Analitik (2.6) dan Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,05$ dengan $0 \leq x \leq 3$

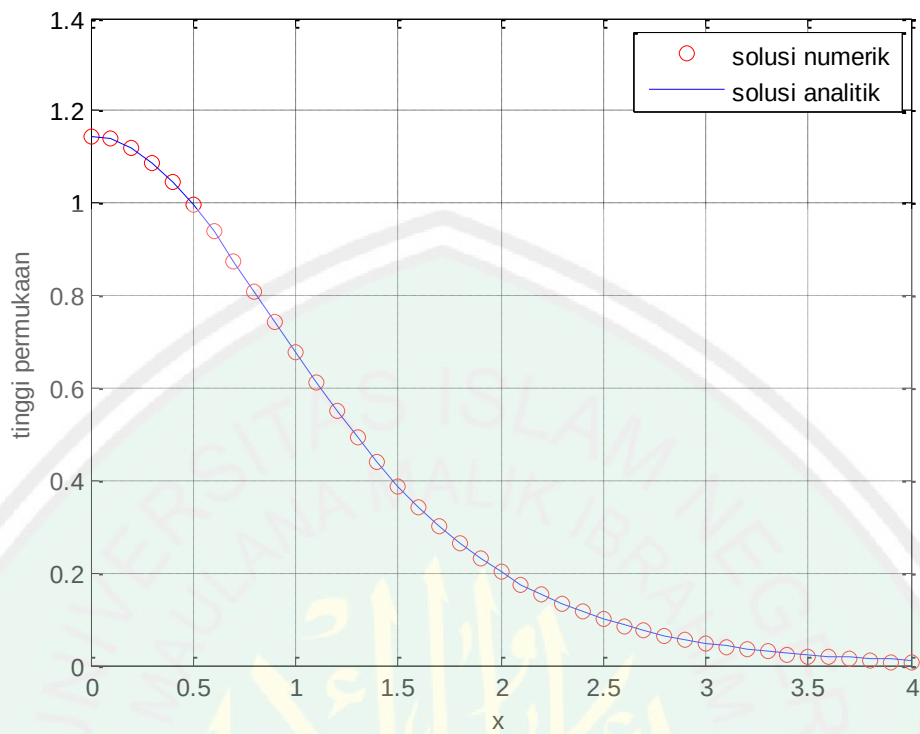


Gambar 3.6 Galat Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,05$ dengan $0 \leq x \leq 3$

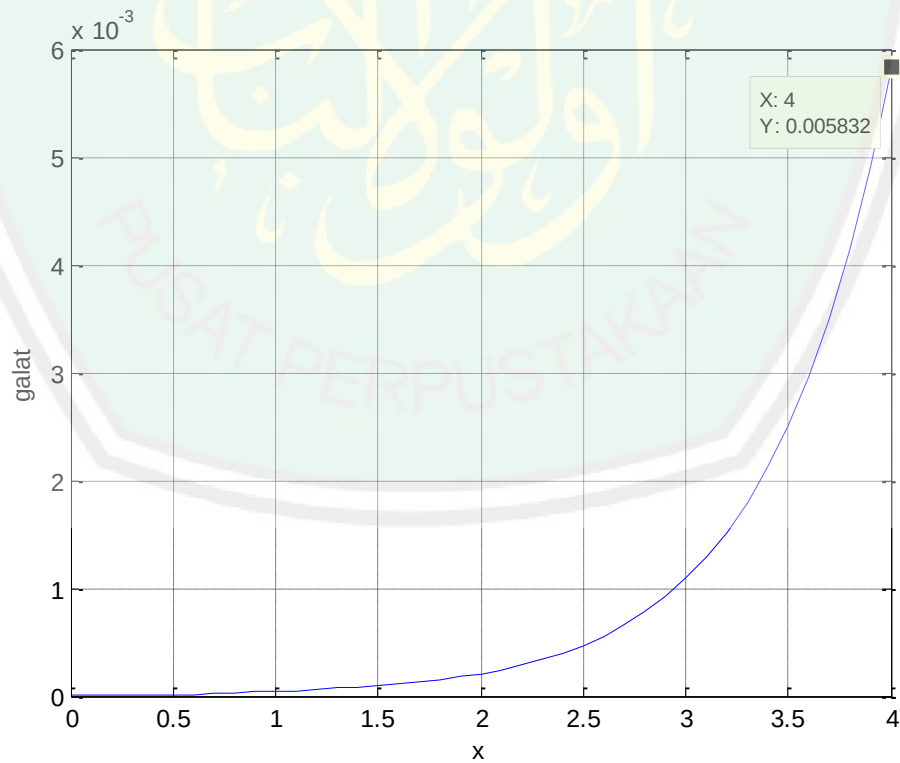
Gambar 3.5 menunjukkan grafik solusi numerik mendekati solusi analitiknya ketika domain $0 \leq x \leq 3$ dengan $\Delta x = 0,05$. Untuk mengetahui lebih jelas perbandingan solusi numerik dan analitik dapat dilihat pada Gambar 3.6. Hasil perbandingan solusi yang ditunjukkan pada Gambar 3.6 menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* yaitu pada $x = 3$ sebesar 0,009036. Sehingga dapat dikatakan galat pada Gambar 3.6 kecil atau mendekati nilai sebenarnya ketika x mendekati 0.

3.2.4 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,1$ dan $0 \leq x \leq 4$

Simulasi keempat dilakukan pada persamaan (3.1) dengan kondisi awal (3.2) beserta solusi analitiknya ketika $\Delta x = 0,1$ dan $0 \leq x \leq 4$. Sehingga perbandingan solusi numerik dan solusi analitiknya dapat dilihat pada Gambar 3.7 dan Gambar 3.8 berikut.



Gambar 3.7 Solusi Analitik (2.6) dan Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,1$ dengan $0 \leq x \leq 4$



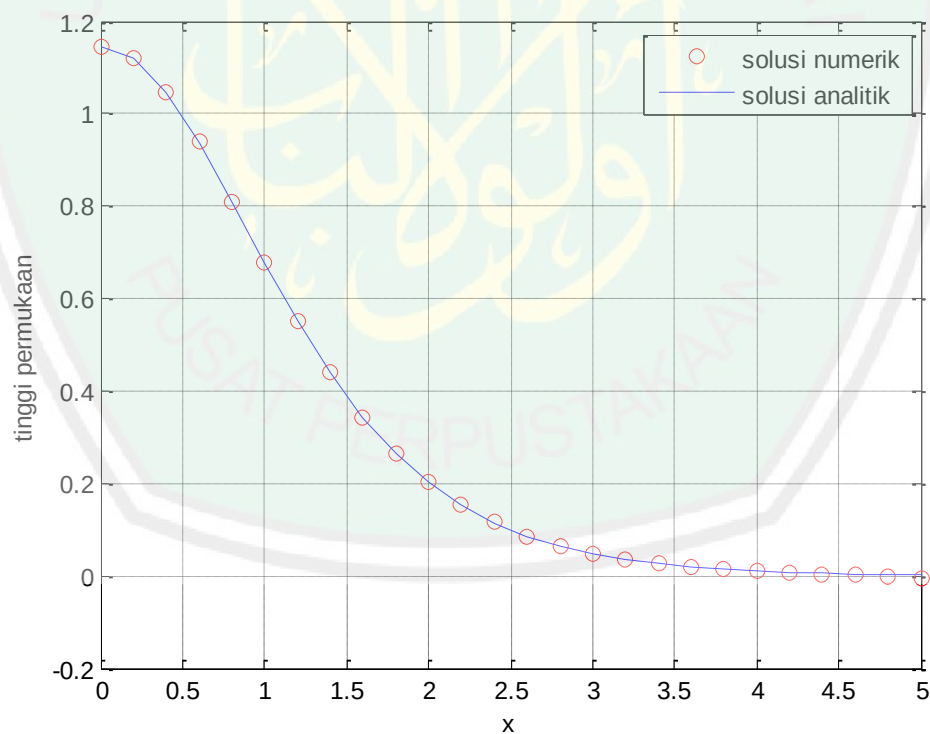
Gambar 3.8 Galat Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,1$ dengan $0 \leq x \leq 4$

Gambar 3.7 menunjukkan grafik solusi numerik mendekati solusi analitiknya ketika domain $0 \leq x \leq 4$ dengan $\Delta x = 0,1$. Untuk mengetahui lebih

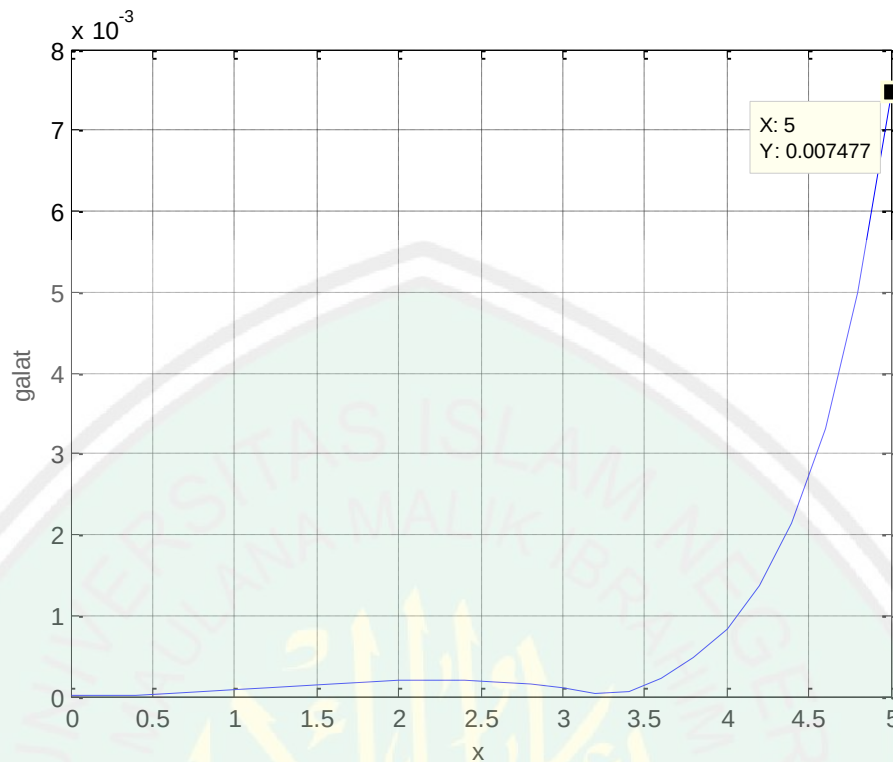
kelas perbandingan solusi numerik dan analitik dapat dilihat pada Gambar 3.8. Hasil perbandingan solusi yang ditunjukkan pada Gambar 3.8 menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* yaitu pada $x = 4$ sebesar 0,005832. Sehingga dapat dikatakan galat pada Gambar 3.8 kecil atau mendekati nilai sebenarnya ketika x mendekati 0.

3.2.5 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,2$ dan $0 \leq x \leq 5$

Simulasi kelima dilakukan pada persamaan (3.1) dengan kondisi awal (3.2) beserta solusi analitiknya ketika $\Delta x = 0,2$ dan $0 \leq x \leq 5$. Sehingga perbandingan solusi numerik dan solusi analitiknya dapat dilihat pada Gambar 3.9 dan Gambar 3.10 berikut.



Gambar 3.9 Solusi Analitik (2.6) dan Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,2$ dengan $0 \leq x \leq 5$

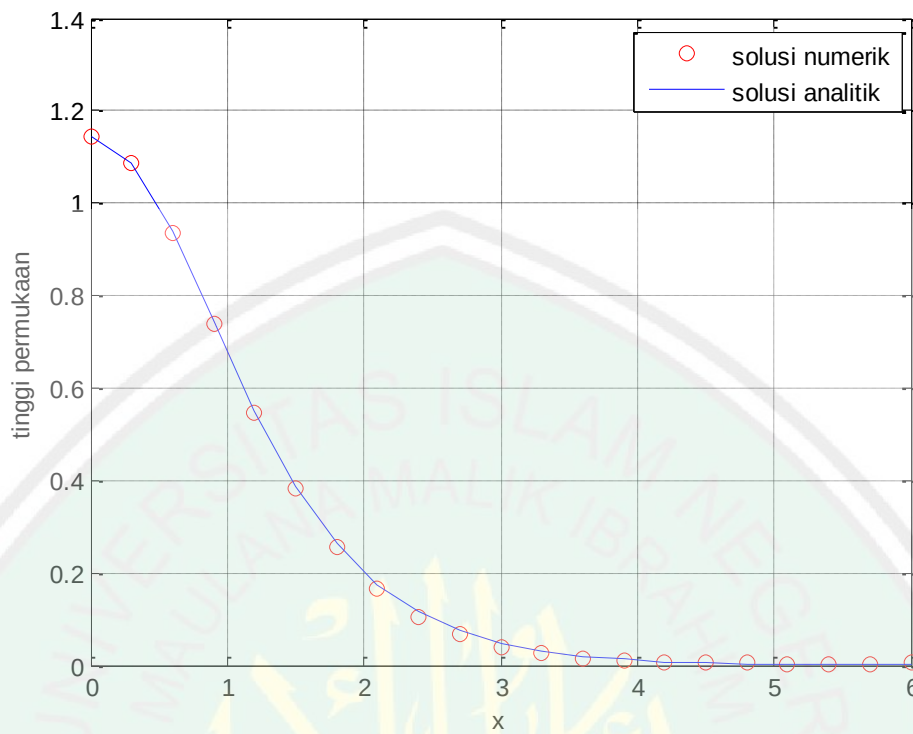


Gambar 3.10 Galat Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,2$ dengan $0 \leq x \leq 5$

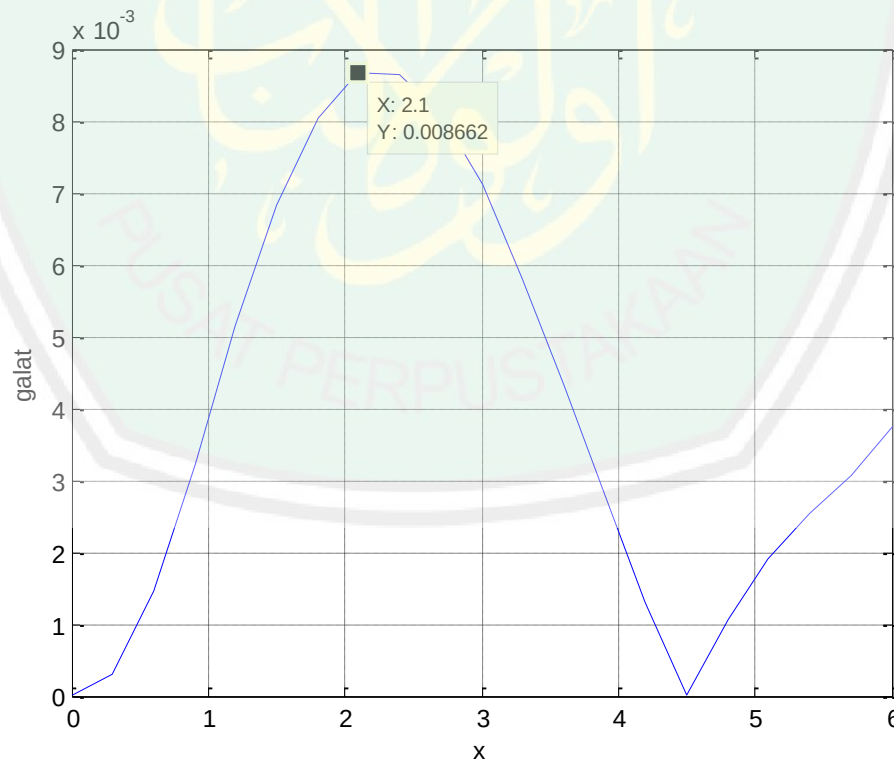
Gambar 3.9 menunjukkan grafik solusi numerik mendekati solusi analitiknya ketika domain $0 \leq x \leq 5$ dengan $\Delta x = 0,2$. Untuk mengetahui lebih jelas perbandingan solusi numerik dan analitik dapat dilihat pada Gambar 3.10. Hasil perbandingan solusi yang ditunjukkan pada Gambar 3.10 menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* yaitu pada $x = 5$ sebesar 0,007477. Sehingga dapat dikatakan galat pada Gambar 3.10 kecil atau mendekati nilai sebenarnya ketika x mendekati 0.

3.2.6 Simulasi dan Analisis Galat untuk $\Delta x = 0,3$ dan $0 \leq x \leq 6$

Simulasi keenam dilakukan pada persamaan (3.1) dengan kondisi awal (3.2) beserta solusi analitiknya ketika $\Delta x = 0,3$ dan $0 \leq x \leq 6$. Sehingga perbandingan solusi numerik dan solusi analitiknya dapat dilihat pada Gambar 3.11 dan Gambar 3.12 berikut.



Gambar 3.11 Solusi Analitik (2.6) dan Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,3$ dengan $0 \leq x \leq 6$



Gambar 3.12 Galat Solusi Numerik (3.21) Ketika $\Delta x = 0,3$ dengan $0 \leq x \leq 6$

Gambar 3.11 menunjukkan grafik solusi numerik mendekati solusi analitiknya ketika domain $0 \leq x \leq 6$ dengan $\Delta x = 0,3$. Untuk mengetahui lebih

kelas perbandingan solusi numerik dan analitik dapat dilihat pada Gambar 3.12. Hasil perbandingan solusi yang ditunjukkan pada Gambar 3.12 menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* yaitu pada $x = 2,1$ sebesar 0,008662. Sehingga dapat dikatakan galat pada Gambar 3.12 kecil atau mendekati nilai sebenarnya ketika x mendekati 0.

Hasil simulasi di atas menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh dari persamaan *forced* KdV menggunakan jaringan RBF metode langsung untuk Δx dan x tertentu memberikan hasil yang hampir menyamai solusi analitiknya.

3.3 Kajian Gelombang dalam Islam

Gelombang merupakan perubahan bentuk dari getaran yang merambat pada suatu medium. Dalam al-Quran telah disinggung tentang gelombang yaitu dalam surat Luqman/31:32, Allah Swt. berfirman

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوَّجٌ كَالظُّلَلِ دَعَوْا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ فَلَمَّا جَنَّهُمْ إِلَى الْبَرِّ فَمِنْهُمْ مُقْتَصِدٌ وَمَا يَجْحَدُ بِآيَاتِنَا إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ﴿٣٢﴾

“Dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya maka tatkala Allah Swt. menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap menempuh jalan yang lurus. Dan tidak ada yang mengingkari ayat-ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar” (QS. Luqman/31:32)

Pada ayat di atas gelombang diserupakan dengan gunung yakni kata “مَوَّجٌ = لظُّلَلِ”, karena gelombang datang sedikit demi sedikit dan saling menghantam satu sama lain (Al-Qurthubi, 2009:183-191). Firman Allah Swt. mengenai air dalam al-Quran surat an-Nahl/16:10-11, yaitu

هُوَ الَّذِي أَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً لَكُمْ مِنْهُ شَرَابٌ وَمِنْهُ شَجَرٌ فِيهِ تُسِيمُونَ ﴿١٠﴾
يُنْبِتُ لَكُمْ بِهِ الزَّرْعَ وَالزَّيْتُونَ وَالنَّخِيلَ وَالْأَعْنَابَ وَمِنْ كُلِّ الثَّمَرَاتِ إِنَّ فِي
ذَٰلِكَ لَآيَةً لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ﴿١١﴾

“Dialah, yang telah menurunkan air hujan dari langit untuk kamu, sebahagiannya menjadi minuman dan sebahagiannya (menyuburkan) tumbuh-tumbuhan, yang pada (tempat tumbuhnya) kamu menggembalakan ternakmu. Dia menumbuhkan bagi kamu dengan air hujan itu tanam-tanaman; zaitun, kurma, anggur dan segala macam buah-buahan. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar ada tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang memikirkan” (QS. an-Nahl/16:10-11).

Dalam ayat tersebut dijelaskan nikmat Allah Swt. bagi kehidupan manusia di bumi. Allah Swt. berfirman bahwa Allah-lah yang menurunkan air hujan untuk makhluk di bumi. Air inilah yang menjadi sumber kehidupan bagi makhluk hidup di bumi. Dari air hujan yang membasahi tanah dan masuk ke dalamnya, tumbuh segala macam jenis tanaman dan pohon, yang menghasilkan buah-buahan dan makanan untuk manusia dan binatang. Dari sini dapat direnungkan bahwa air adalah salah satu kebesaran dan keagungan serta rahmat Allah Swt. pelajaran yang dapat diambil antara lain.

1. Air hujan adalah sumber kehidupan. Air menumbuhkan tanaman yang menjadi makanan bagi manusia terdiri dari tumbuh-tumbuhan dan daging hewan. Keduanya sangat tergantung pada air yang turun dari langit. Kekeringan akan menyebabkan paceklik dan kekurangan pangan.
2. Manusia harus merenung dan memikirkan alam sehingga ia dapat menyaksikan bahwa di balik proses alamiah yang terjadi, ada tangan ghaib yang maha berkuasa. Tumbuhnya tanaman dan buah-buahan bukan pekerjaan petani.

Semua itu diciptakan untuk keridhaan Allah Swt. (Al-Qurthubi, 2009:201-204).

Firman Allah dalam surat Huud/11:41-43 berbunyi,

﴿ وَقَالَ ارْكَبُوا فِيهَا بِسْمِ اللَّهِ مَجْرَاهَا وَمُرْسَاهَا إِنَّ رَبِّي لَغَفُورٌ رَحِيمٌ ﴿٤١﴾ وَهِيَ تَجْرِي بِهِمْ فِي مَوْجٍ كَالْجِبَالِ وَنَادَى نُوحٌ ابْنَهُ وَكَانَ فِي مَعْزِلٍ يَبْنَىٰ أَرْكَبَ مَعَنَا وَلَا تَكُن مَعَ الْكَافِرِينَ ﴿٤٢﴾ قَالَ سَأُوۥى إِلَىٰ جَبَلٍ يَعْصِمُنِي مِنَ الْمَاءِ قَالَ لَا عَاصِمَ الْيَوْمَ مِنْ أَمْرِ اللَّهِ إِلَّا مَنْ رَحِمَ ۚ وَحَالَ بَيْنَهُمَا الْمَوْجُ فَكَانَ مِنَ الْمُغْرَقِينَ ﴿٤٣﴾ ﴾

“Dan Nuh berkata: "Naiklah kamu sekalian ke dalamnya dengan menyebut nama Allah di waktu berlayar dan berlabuhnya". Sesungguhnya Tuhanku benar-benar Maha Pengampun lagi Maha Penyayang. Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung. Dan Nuh memanggil anaknya, sedang anak itu berada di tempat yang jauh terpencil: "Hai anakku, naiklah (ke kapal) bersama kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir". Anaknya menjawab: "Aku akan mencari perlindungan ke gunung yang dapat memeliharaku dari air bah!" Nuh berkata: "Tidak ada yang melindungi hari ini dari azab Allah selain Allah (saja) Yang Maha Penyayang". Dan gelombang menjadi penghalang antara keduanya; maka jadilah anak itu termasuk orang-orang yang ditenggelamkan” (QS. Huud/11:41-43).

Pada ayat di atas telah jelas bahwa seseorang yang ingkar terhadap Allah Swt. tidak akan diselamatkan dari besarnya gelombang yang berada di lautan tersebut, yang tidak akan seorangpun mampu menghindari jika Allah Swt. telah menghendaki terjadi hal buruk yang tidak diinginkan. Oleh karena itu, manusia harus menyerahkan segala urusannya kepada Allah Swt.. Sepanjang berlayar dan berlabuh, bahtera itu dalam pemeliharaan dan perlindunganNya, karena tidak ada seorangpun mengetahui apa yang akan terjadi di tengah gelombang dahsyat bahkan topan air yang menggunung tersebut, dan tidak akan ada yang mampu

menghadapi angin, ombak, dan gelombang yang begitu besar kecuali atas rahmat yang diberikan oleh Allah Swt. Demikianlah, *iradah* Allah Swt. sudah menetapkan segala sesuatunya telah berjalan menurut prosesnya (Shihab, 2002:249-253).



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka kesimpulan dari penelitian ini adalah:

1. Solusi numerik persamaan *forced* KdV menggunakan jaringan RBF yang diperoleh dalam penelitian ini menunjukkan hasil yang cukup dekat dengan solusi analitiknya yang dibuktikan dengan besar galat yang diperoleh dari hasil simulasi.
2. Galat yang diperoleh dalam penelitian ini menunjukkan bahwa besarnya galat mutlak maksimum dari masing-masing simulasi dipengaruhi oleh pemilihan nilai Δx dan x tertentu. Semakin kecil nilai Δx belum tentu menghasilkan galat yang lebih kecil. Galat mutlak maksimum terkecil yang diperoleh dari simulasi pertama adalah 0,001145 dan untuk simulasi kedua adalah 0,002188. Begitu pula simulasi ketiga sampai keenam galat yang diperoleh sudah cukup kecil. Ini menunjukkan bahwa metode jaringan RBF cukup efektif dalam mengaproksimasi solusi dari persamaan *forced* KdV.

4.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah meneliti tentang kekonvergenan solusi numerik persamaan *forced* KdV menggunakan jaringan fungsi radial basis dengan pemilihan domain yang tetap dan Δx yang berubah-ubah.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Aminataei, A. dan Mazarei, M.M.. 2008. Numerical Solution of Poisson's Equation Using Radial Basis Function Networks on the Polar Coordinate. *Computers and Mathematics with Applications*, 56: 2887-2895.
- Al Maragi, A.M. 1974. *Tafsir Al Maragi*. Terjemah Bahrn Abubakar, Lc, K. Anshori Umar Sitanggal dan Drs. Henry Noer Aly. 1993. Semarang: Cv. Toha Putra Semarang.
- Al-Qurthubi, S.I. 2009. *Tafsir Al Qurthubi*. Terjemah Fatchurrohman, Ahmad Hotih, dan Dudi Rasyati. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Chapra, C.S. & Canale P.R. *Numerical methods for engineers 6th ed*. New York: McGraw-Hill Company, Inc.
- Grimshaw, R.H.J, Zhang, D.H, & Chow, K.W.. 2007. Generation of Solitary Wave by Transcritical Flow Over a Step. *J. Fluid Mech*. 587 (1): 235-234.
- Hajek, M.. 2005. *Neural Networks*. Modul Kuliah Tidak Diterbitkan. California: University of California.
- Hakim, A.. 2009. *Prediksi Kecepatan Phase Gelombang Soliter Terganggu*. Thesis. Tidak diterbitkan. Bogor: Sekolah Pascasarjana Institut Pertanian Bogor.
- May-Duy, N dan Tran-Cong, T.. 2003. Approximation of function and its Derivatives Using Radial Basis Function Networks. *Applied Mathematical Modelling*, Australia: University of Southern Queensland.
- Taufik, R.R.. 2011. *Gelombang dan Optik*. Bandung: Jurusan Pendidikan Fisika Fakultas MIPA UPI.
- Sarra, S.A. dan Kansa, E.. 2009. *Multiquadrics Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Modul Kuliah Tidak Diterbitkan. California: University of California.
- Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 8*. Jakarta: Lentera Hati.
- Wiryanto, L. 2010. A Solitary-like Wave Generated by Flow Passing a Bump. *Conference on Mathematics, Statistic and its Application* (pp. 1176-1183). Kuala Lumpur: ICMSA: Proceedings of the 6th IMT-GT.

- Wiryanto, L & Akbar, A.. 2008. *An implicit Finite Difference Method for a Forced KDV Equation*. 11 (1): 1-5
- Wiryanto, L.H. & Jamhuri, M. 2015. Supercritical Flow Generating a Solitary-Like Wave above a Bump. *IndoMS Journal on Industrial and Applied Mathematics*, 2 (1): 1-8.



LAMPIRAN-LAMPIRAN

Program MATLAB

Program fungsi asal dan fungsi turunan pertama sampai fungsi turunan ketiga untuk jaringan RBF metode langsung

1. Fungsi Asal

```
function f = mq(x,c)

m = length(x);
n = length(c);

a = 1/var(c);

f = zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        f(i,j) = sqrt(1+(x(i)-c(j))^2*a^2);
    end
end
```

2. Turunan Pertama

```
function f = mqx(x,c)

m = length(x);
n = length(c);

a = 1/var(c);

f = zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        f(i,j) = (x(i)-c(j))*a^2/sqrt(1+(x(i)-c(j))^2*a^2);
    end
end
```

3. Turunan kedua

```
function f = mqxx(x,c)

m = length(x);
n = length(c);
```

```

a = 1/var(c);

f = zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        f(i,j) = -(x(i)-c(j))^2*a^4/(1+(x(i)-
c(j))^2*a^2)^(3/2)+a^2/sqrt(1+(x(i)-c(j))^2*a^2);
    end
end

```

4. Turunan ketiga

```

function f = mqxxx(x,c)

m = length(x);
n = length(c);

a = 1/var(c);

f = zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        f(i,j) = 3*(x(i)-c(j))^3*a^6/(1+(x(i)-
c(j))^2*a^2)^(5/2)-(3*(x(i)-c(j)))*a^4/(1+(x(i)-
c(j))^2*a^2)^(3/2);
    end
end

```

5. Turunan pertama tinggi gundukan

```

function h = hx(x)

G = 0.5;
b = 0.7566204380;

m = length(x);

for i=1:m
    h(i) = -2*G*sech(b*x(i))^2*tanh(b*x(i))*b;
end

```

Program Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan *forced*

KdV ketika $\Delta x = 0.007$ dan $0 < x < 1$

```
clc,clear,clf

dx = 0.001;
x = 0:dx:1;
m = length(x);
c = linspace(0,x(end),m+2);

F = 0.6;

p = mq(x,c);
px = mqx(x,c);
pxx = mqxx(x,c);
pxxx = mqxxx(x,c);

f = @(x) 1.144948974*sech(.7566204380*x).^2;

e0 = 1.144948974;
ex0 = 0;
exx0 = -1.310908153;

e = sin(x) + e0;

gltr(1)=1
i=1;
while gltr > 0.01
    for j=1:m
        eex(j,:) = px(j,:)*e(j);
    end
    A1 = (1/3)*pxxx-2*F*px+2*eex;
    A = [p(1,:);px(1,:);pxx(1,:);A1(2:m,:)];
    G = [e0;ex0;exx0;-hx(x(2:m))'];
    w = A\G;
    e = p*w;

    figure(1)
    plot(x,e,'ro',x,f(x),'b-')
    legend('solusi numerik','solusi analitik')
    xlabel('x')
    ylabel('tinggi permukaan')
    grid on

    pause(0.2)

    galat=(abs(f(x)-e'))';
    gltr=max(galat);

    figure(2)
    plot(x,galat)
    grid on
```



```
xlabel('x')  
ylabel('galat')  
  
i=i+1;  
end  
disp('iterasi')  
disp(i)
```



Program Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan *forced*

KdV ketika $\Delta x = 0.031$ dan $0 < x < 2$

```
clc,clear,clf

dx = 0.03;
x = 0:dx:2;
m = length(x);
c = linspace(0,x(end),m+2);

F = 0.6;

p = mq(x,c);
px = mqx(x,c);
pxx = mqxx(x,c);
pxxx = mqxxx(x,c);

f = @(x) 1.144948974*sech(.7566204380*x).^2;

e0 = 1.144948974;
ex0 = 0;
exx0 = -1.310908153;

e = sin(x) + e0

gltr(1)=1
i=1;
while gltr > 0.01
    for j=1:m
        eex(j,:) = px(j,:)*e(j);
    end
    A1 = (1/3)*pxxx-2*F*px+2*eex;
    A = [p(1,:);px(1,:);pxx(1,:);A1(2:m,:)];
    G = [e0;ex0;exx0;-hx(x(2:m))'];
    w = A\G;
    e = p*w;

    figure (1)
    plot(x,e,'r-o',x,f(x),'b-')
    legend('solusi numerik','solusi analitik')
    xlabel('x')
    ylabel('tinggi permukaan')
    grid on

    pause(0.2)

    galat=(abs(f(x)-e'))';
    gltr=max(galat);

    figure(2)
    plot(x,galat)
    grid on
```

```
xlabel('x')  
ylabel('galat')  
  
i=i+1;  
end  
disp('iterasi')  
disp(i)
```



Program Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan *forced*

KdV ketika $\Delta x = 0.055$ dan $0 < x < 3$

```
clc,clear,clf

dx = 0.05;
x = 0:dx:3;
m = length(x);
c = linspace(0,x(end),m+2);

F = 0.6;

p = mq(x,c);
px = mqx(x,c);
pxx = mqxx(x,c);
pxxx = mqxxx(x,c);

f = @(x) 1.144948974*sech(.7566204380*x).^2;

e0 = 1.144948974;
ex0 = 0;
exx0 = -1.310908153;

e = sin(x) + e0;

gltr(1)=1
i=1;
while gltr > 0.01

    for j=1:m
        eex(j,:) = px(j,)*e(j);
    end
    A1 = (1/3)*pxxx-2*F*px+2*eex;
    A = [p(1,:);px(1,:);pxx(1,:);A1(2:m,:)];
    G = [e0;ex0;exx0;-hx(x(2:m))'];
    w = A\G;
    e = p*w;

    figure (1)
    plot(x,e,'ro',x,f(x),'b-')
    legend('solusi numerik','solusi analitik')
    xlabel('x')
    ylabel('tinggi permukaan')
    grid on

    pause(0.2)

    galat=(abs(f(x)-e'))';
    gltr=max(galat);

    figure(2)
    plot(x,galat)
```

```
grid on
xlabel('x')
ylabel('galat')

i=i+1;
end
disp('iterasi')
disp(i)
```



Program Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan *forced*

KdV ketika $\Delta x = 0.1$ dan $0 < x < 4$

```
clc,clear,clf

dx = 0.1;
x = 0:dx:4;
m = length(x);
c = linspace(0,x(end),m+2);

F = 0.6;

p = mq(x,c);
px = mqx(x,c);
pxx = mqxx(x,c);
pxxx = mqxxx(x,c);

f = @(x) 1.144948974*sech(.7566204380*x).^2;

e0 = 1.144948974;
ex0 = 0;
exx0 = -1.310908153;

e = sin(x) + e0;

gltr(1)=1
i=1;
while gltr > 0.01
    for j=1:m
        eex(j,:) = px(j,:)*e(j);
    end
    A1 = (1/3)*pxxx-2*F*px+2*eex;
    A = [p(1,:);px(1,:);pxx(1,:);A1(2:m,:)];
    G = [e0;ex0;exx0;-hx(x(2:m))'];
    w = A\G;
    e = p*w;

    figure (1)
    plot(x,e,'ro',x,f(x),'b-')
    legend('solusi numerik','solusi analitik')
    xlabel('x')
    ylabel('tinggi permukaan')
    grid on

    pause(0.2)

    galat=(abs(f(x)-e'))';
    gltr=max(galat);

    figure(2)
    plot(x,galat)
    grid on
```



```
xlabel('x')  
ylabel('galat')  
  
i=i+1;  
end  
disp('iterasi')  
disp(i)
```



Program Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan *forced*

KdV ketika $\Delta x = 0.21$ dan $0 < x < 5$

```
clc,clear,clf

dx = 0.21;
x = 0:dx:5;
m = length(x);
c = linspace(0,x(end),m+2);

F = 0.6;

p = mq(x,c);
px = mqx(x,c);
pxx = mqxx(x,c);
pxxx = mqxxx(x,c);

f = @(x) 1.144948974*sech(.7566204380*x).^2;

e0 = 1.144948974;
ex0 = 0;
exx0 = -1.310908153;

e = sin(x) + e0;

gltr(1)=1
i=1;
while gltr > 0.01
    for j=1:m
        eex(j,:) = px(j,:)*e(j);
    end
    A1 = (1/3)*pxxx-2*F*px+2*eex;
    A = [p(1,:);px(1,:);pxx(1,:);A1(2:m,:)];
    G = [e0;ex0;exx0;-hx(x(2:m))'];
    w = A\G;
    e = p*w;

    figure(1)
    plot(x,e,'ro',x,f(x),'b-')
    legend('solusi numerik','solusi analitik')
    xlabel('x')
    ylabel('tinggi permukaan')
    grid on

    pause(0.2)

    galat = (abs(f(x)-e'))';
    gltr = max(galat);

    figure(2)
    plot(x,galat)
    grid on
```

```
xlabel('x')  
ylabel('galat')  
  
i=i+1;  
end  
disp('iterasi')  
disp(i)
```



Program Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan *forced* KdV ketika $\Delta x = 0.3$ dan $0 < x < 6$

```

clc,clear,clf

dx = 0.3;
x = 0:dx:6;
m = length(x);
c = linspace(0,x(end),m+2);

F = 0.6;

p = mq(x,c);
px = mqx(x,c);
pxx = mqxx(x,c);
pxxx = mqxxx(x,c);

f = @(x) 1.144948974*sech(.7566204380*x).^2;

e0 = 1.144948974;
ex0 = 0;
exx0 = -1.310908153;

e = sin(x) + e0;

gltr(1)=1
i=1;
while gltr > 0.01
    for j=1:m
        eex(j,:) = px(j,:)*e(j);
    end
    A1 = (1/3)*pxxx-2*F*px+2*eex;
    A = [p(1,:);px(1,:);pxx(1,:);A1(2:m,:)];
    G = [e0;ex0;exx0;-hx(x(2:m))'];
    w = A\G;
    e = p*w;

    figure (1)
    plot(x,e,'ro',x,f(x),'b-')
    legend('solusi numerik','solusi analitik')
    xlabel('x')
    ylabel('tinggi permukaan')
    grid on

    pause(0.2)

    galat=(abs(f(x)-e'))';
    gltr=max(galat);

```

```
figure(2)
plot(x,galat)
grid on
xlabel('x')
ylabel('galat')

i=i+1;
end
disp('iterasi')
disp(i)
```



Program MAPLE

```
> restart;
```

```
F := 0.6
```

```
0.6
```

```
G := 0.5
```

```
0.5
```

$$r := F - \frac{2}{3} \cdot b^2 - \frac{G}{4 \cdot b^2}$$

$$0.6 - \frac{2}{3} b^2 - \frac{0.1250000000}{b^2}$$

```
s := solve(r)
```

```
0.5722984474, -0.5722984474, 0.7566204380, -0.7566204380
```

```
b1 := s
```

```
0.5722984474, -0.5722984474, 0.7566204380, -0.7566204380
```

$$a := 2 \cdot (s[3])^2$$

```
1.144948974
```

$$h := G \cdot \operatorname{sech}(s[3] \cdot x)^2$$

$$0.5 \operatorname{sech}(0.7566204380 x)^2$$

$$\eta := a \cdot \operatorname{sech}(s[3] \cdot x)^2$$

$$1.144948974 \operatorname{sech}(0.7566204380 x)^2$$

$$\frac{1}{3} \cdot \operatorname{diff}(\eta, x, x, x) - 2 \cdot F \cdot \operatorname{diff}(\eta, x) + 2 \cdot \eta \cdot \operatorname{diff}(\eta, x) + \operatorname{diff}(h, x)$$

$$\begin{aligned} & -1.322479868 \operatorname{sech}(0.7566204380 x)^2 \tanh(0.7566204380 x)^3 \\ & + 3.495755073 \operatorname{sech}(0.7566204380 x)^2 \tanh(0.7566204380 x) (0.7566204380 \\ & - 0.7566204380 \tanh(0.7566204380 x)^2) \\ & + 1.322479868 \operatorname{sech}(0.7566204380 x)^2 \tanh(0.7566204380 x) \\ & - 3.967439602 \operatorname{sech}(0.7566204380 x)^4 \tanh(0.7566204380 x) \end{aligned}$$

```
simplify(%)
```

```
0.
```


RIWAYAT HIDUP



Azizatul Amaliya yang biasa dipanggil Azizah, dilahirkan di kota Surabaya, 06 Maret 1994 oleh pasangan suami istri yakni ibu Sholikha dan bapak Anshori. Anak ketujuh dari sembilan bersaudara ini tinggal di jalan Bendungan Wonogiri nomor 35 Malang.

Pendidikan dasarnya ditempuh di RA Sunan Kalijogo selama satu tahun dan lulus pada tahun 2000, kemudian berlanjut ke Madrasah Ibtidaiyah (MI) Sunan Kalijogo Malang selama enam tahun dan lulus pada tahun 2006. Kemudian melanjutkan ke jenjang Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 13 Malang selama tiga tahun dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan ke jenjang Madrasah Aliyah Negeri (MAN) Rejoso Jombang selama tiga tahun dan lulus pada tahun 2012. Setelah lulus MAN melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
 Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Azizatul Amaliya
 NIM : 12610075
 Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
 Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan Forced Korteweg de Vries
 Menggunakan Metode Jaringan Fungsi Radial Basis
 Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
 Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 September 2016	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	10 September 2016	Konsultasi Bab I Keagamaan	2.
3.	18 September 2016	Revisi Bab II	3.
4.	10 Oktober 2016	Konsultasi Bab II Keagamaan	4.
5.	12 Oktober 2016	Revisi Bab III	5.
6.	28 Oktober 2016	Konsultasi Bab II dan III	6.
7.	9 November 2016	Revisi Bab II dan III	7.
8.	10 November 2016	Konsultasi Bab III Keagamaan	8.
9.	16 November 2016	ACC Bab III	9.
10.	12 Desember 2016	ACC Bab I Konsultasi Bab III dan IV	10.
11.	16 Desember 2016	konsultasi Keseluruhan	11.
12.	23 Desember 2016	ACC Bab III Keagamaan	12.
13.	10 Januari 2017	ACC Keseluruhan	13.
14.	13 Januari 2017	Konsultasi Bab III dan IV	14.

Malang, 7 Februari 2017
 Mengetahui,
 Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
 NIP. 19751004 200312 1 001