

**INDEKS WIENER PADA GRAF TERHUBUNG**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**NURUL WAHIDAH**  
**NIM. 08610076**



**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**  
**MALANG**  
**2014**

**INDEKS WIENER PADA GRAF TERHUBUNG**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**NURUL WAHIDAH**  
**NIM. 08610076**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**  
**MALANG**  
**2014**

**INDEKS WIENER PADA GRAF TERHUBUNG**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**NURUL WAHIDAH**  
**NIM. 08610076**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal: 20 Desember 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Evawati Alisah, M.Pd  
NIP. 19720604 199903 2 001

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP.19751006 200312 1 001

## INDEKS WIENER PADA GRAF TERHUBUNG

### SKRIPSI

Oleh:  
**NURUL WAHIDAH**  
**NIM. 08610076**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 09 Januari 2014

Penguji Utama	: <u>H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u> NIP. 19710420 200003 1 003	_____
Ketua Penguji	: <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	_____
Sekretaris Penguji	: <u>Evawati Alisah, M.Pd</u> NIP. 19720604 199903 2 001	_____
Anggota Penguji	: <u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u> NIP. 19770521 200501 2 004	_____

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nurul Wahidah

NIM : 08610076

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Januari 2014

Yang membuat pernyataan,

Nurul Wahidah  
NIM. 08610076

## MOTTO

*"Tidak ada masalah yang tidak bisa diselesaikan selama ada komitmen bersama untuk menyelesaikannya  
Berangkat dengan penuh keyakinan  
Berjalan dengan penuh keikhlasan  
Istiqomah dalam menghadapi cobaan"*



# PERSEMBAHAN

*Ayah (Alm) H. Ahmad Ansori dan Ibu Hj. Siti Romlah, Kakak Abdullah, S. T, Kakak Vera Fadillah Indah, S. Sos, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberikan dukungan, motivasi, dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.*

*Serta tak lupa pula untuk keponakan-keponakan dan semua keluarga serta para kerabat yang selalu memberikan doa dan motivasinya kepada penulis.*

*Seseorang yang selalu menjadi inspirasi dan penyemangat*  
*(Fery Anang)*

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Asslamu'alaikum Wr. Wb.*

Syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufik dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh sebab itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mujdia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.

5. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd sebagai dosen pembimbing agama yang telah banyak memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.
6. Segenap dosen pengajar, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
7. Seluruh keluarga penulis yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika, terutama angkatan 2008, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Semua pihak yang telah memberikan dukungan kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin. Wassalamu'alaikum Wr.Wb.*

Malang, Januari 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xiii</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>xiv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xv</b>
<b>ملخص</b> .....	<b>xvi</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan .....	5
1.4 Batasan Masalah .....	6
1.5 Manfaat Penelitian.....	6
1.6 Metode Penelitian .....	7
1.7 Sistematika Penulisan .....	8
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Pengertian Graf.....	10
2.2 Derajat Titik.....	11
2.3 Operasi Pada Graf.....	12
2.4 Graf Terhubung dan Tak Terhubung.....	14
2.5 Jarak.....	15
2.6 Pengertian Indeks Wiener.....	15
2.7 Jenis-jenis Graf .....	16
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Indeks Wiener pada Graf Sikel Berambut $hC_n$ .....	22
3.2 Indeks Wiener pada Graf Helm $H_n$ .....	31
3.3 Indeks Wiener pada Graf Helm Tertutup $cH_n$ .....	38
3.4 Indeks Wiener pada Graf Tangga $L_n$ .....	46
3.5 Teori Graf dalam Kajian Agama Islam .....	49

**BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	53
4.2 Saran .....	53

**DAFTAR PUSTAKA**



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Derajat suatu Titik pada Graf $G$ .....	11
Gambar 2.2 Gabungan Graf .....	13
Gambar 2.3 Penjumlahan dua Graf .....	13
Gambar 2.4 Perkalian Kartesius dua Graf.....	14
Gambar 2.5 Graf $G$ dengan 5 titik dan 7 sisi.....	14
Gambar 2.6 Graf Komplit $K_4$ .....	16
Gambar 2.7 Graf Sikel Berambut $hC_3, hC_4$ , dan $hC_5$ .....	17
Gambar 2.8 Graf Helm.....	18
Gambar 2.9 Graf Helm Tertutup .....	19
Gambar 2.10 Graf Lintasan $P_1$ , Graf Lintasan $P_2$ , Graf Tangga $L_4 = P_2 \times P_4$ ..	21
Gambar 3.1 a) Graf Sikel Berambut $hC_3$ .....	22
b) Graf Sikel Berambut $hC_4$ .....	23
c) Graf Sikel Berambut $hC_5$ .....	24
d) Graf Sikel Berambut $hC_6$ .....	25
Gambar 3.2 a) Graf Helm $H_3$ .....	31
b) Graf Helm $H_4$ .....	32
c) Graf Helm $H_5$ .....	33
d) Graf Helm $H_6$ .....	35
Gambar 3.3 a) Graf Helm Tertutup $cH_3$ .....	38
b) Graf Helm Tertutup $cH_4$ .....	39
c) Graf Helm Tertutup $cH_5$ .....	40
d) Graf Helm Tertutup $cH_6$ .....	42
Gambar 3.4 a) Graf Tangga $L_2$ .....	46
b) Graf Tangga $L_3$ .....	47

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. Pola Bilangan Graf Sikel Berambut $hC_n$ .....	27
Tabel 3.2. Pola Bilangan Graf Helm $H_n$ .....	36
Tabel 3.3. Pola Bilangan Graf Helm Tertutup $cH_n$ .....	43
Tabel 3.4. Pola Bilangan Graf Tangga $L_n$ .....	48



## ABSTRAK

Wahidah, Nurul. 2014. **Indeks Wiener pada Graf Terhubung**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

**Pembimbing:** (1) Evawati Alisah, M.Pd  
(2) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

**Kata Kunci:** Indeks Wiener, Graf Sikel Berambut  $hC_n$ , Graf Helm  $H_n$ , Graf Helm Tertutup  $cH_n$ , Graf Tangga  $L_n$ .

Pada penelitian ini dibahas tentang Indeks Wiener pada graf sikel berambut, graf helm, graf helm tertutup, graf tangga. Indeks Wiener adalah banyaknya jarak antara semua pasang titik di  $G$ .

Dengan menggambarkan grafnya, akan lebih mudah dicari Indeks Wiener dari graf tersebut. Setelah ditemukan pola dari Indeks Wiener, akan dilanjutkan dengan memformulasikannya dalam bentuk teorema dan juga membuktikannya.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh kesimpulan bahwa rumus umum untuk Indeks Wiener graf sikel berambut  $hC_n$  adalah

$w(hC_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 2) ; & n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 3) ; & n \text{ ganjil} \end{cases}$ . Rumus umum untuk Indeks Wiener graf

helm  $H_n$  adalah  $H_n = 6n(n - 1)$ . Rumus umum untuk Indeks Wiener graf helm tertutup

$cH_n$  adalah  $W(cH_n) = \begin{cases} 5n(n - 1) ; & 3 \leq n \leq 5 \\ 153 ; & n = 6 \\ 6n^2 - 11n ; & \text{untuk } n > 6 \end{cases}$ . Rumus umum untuk Indeks Wiener

graf tangga  $L_n$  adalah  $W(L_n) = \frac{1}{3}n(n + 2)(2n - 1)$ . Penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah Indeks Wiener terhadap graf yang lain.

## ABSTRACT

Wahidah, Nurul. 2014. **Index Wiener of Connected Graph**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

**Advisor:** (1) Evawati Alisah, M.Pd  
(2) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

**Keywords:** Wiener Index, Hairy Cycle Graph  $hC_n$ , Helm Graph  $H_n$ , Closed Helm Graph  $cH_n$ , Ladder Graph  $L_n$ .

This research discuss about Index Wiener in Hairy Cycle Graph, Helm Graph, Closed Helm Graph, Ladder Graph. The Index Wiener  $W(G)$  is the sum of the distances between all pairs of vertices of  $G$ .

By describing the graph, would be easier to search Index Wiener from graph. After the discovery of patterns from the Index Wiener, will be followed by formulate in the form of the theorem and also prove it.

Based on the result can be conclude that general from of Index Wiener Hairy Cycle Graph  $hC_n$  is

$$w(hC_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 2) ; & n \text{ even} \\ \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 3) ; & n \text{ odd} \end{cases} . \text{ General from of Index Wiener in Helm Graph}$$

$H_n$  is  $H_n = 6n(n - 1)$ . General from of Index Wiener in Closed Helm Graph  $cH_n$  is

$$W(cH_n) = \begin{cases} 5n(n - 1) ; & 3 \leq n \leq 5 \\ 153 ; & n = 6 \\ 6n^2 - 11n ; & \text{for } n > 6 \end{cases} . \text{ General from of Index Wiener in Ladder Graph}$$

$L_n$  is  $W(L_n) = \frac{1}{3}n(n + 2)(2n - 1)$ . The author suggests to the reader to examine the issue of the Index Wiener of a graph.

## المخلص

وحيدة، نورول. ، 2014. **مؤشر ينر على الرسوم البيانية المتصلة. الأطروحة.** البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.

المشرف: (1) افواتي ألى ساح، الماجستير  
(2) أري كوسومستوتي السرجان الماجستير

**اكلات البحث:** مؤشر ينر، غراف الشيكل ترأس  $hC_n$ ، الخوذة غراف  $H_n$ ، غراف الخوذة مغلق  $cH_n$  ، أجهزة غراف  $L_n$ .

في هذه الدراسة التي نوقشت مؤشر لينر الرسوم البيانية الشيكل الشعر، غراف، خوذة مغلق الرسم البياني، الرسم البياني الدرج. مؤشر ينر هو عدد المسافات بين كل زوج من النقاط في  $G$ . من خلال وصف الرسم البياني، سيكون من السهل العثور على مؤشر ينر من الرسم البياني. بعد أن تبين وجود نمط من مؤشر ينر، سيبتعه صياغتها في شكل نظريات واثبات ذلك. استنادا إلى المناقشة، فإنه يمكن الاستنتاج بأن الصيغة العامة لينر من الرسم البياني مؤشر الشيكل الشعر  $hC_n$

غير  $W(hC_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 2); n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 3); n \text{ ganjil} \end{cases}$  . الصيغة العامة للمؤشر وينر من الرسم البياني خوذة

هو  $W(H_n) = 6n(n - 1)$  الصيغة العامة للمؤشر ينر مغلق الرسم البياني خوذة  $cH_n$  هو

$W(cH_n) = \begin{cases} 5n(n - 1); 3 \leq n \leq 5 \\ 153; n = 6 \\ 6n^2 - 11n; \text{ untuk } n > 6 \end{cases}$  . الصيغة العامة للمؤشر ينر  $L_n$  سلم الرسم البياني

$W(L_n) = \frac{1}{3}n(n + 2)(2n - 1)$ . يقترح المؤلفان للقارئ لتقييم مؤشر ينر للمشكلة الرسم البياني لأخر.

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Sebagai umat muslim harus mempunyai keyakinan bahwa hukum-hukum keteraturan tersebut datang dari Allah. Allah menetapkan hukum sesuai dengan apa yang dikehendaki-Nya, sebagai firman-Nya dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

*Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".*

Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk hidup ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk bertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan

yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah diciptakan Allah SWT. Demikian juga Allah telah menetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

Dalam surat Al-Jin ayat 28, diterangkan bahwa Tuhan menafsirkan segala sesuatu (kejadian dan semua objek di alam semesta) dengan “hitungan yang teliti satu persatu” yaitu dari kata arab, ‘*adad*

لَيَعْلَمَ أَنْ قَدْ أَبْلَغُوا رَسُولَاتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا

Artinya: “Supaya Dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya Rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu”.

Esensi ayat ini adalah bahwa ilmu Tuhan meliputi segala sesuatu tidak ada yang tertinggal. Semua kejadian, objek alam, penciptaan di bumi dan di langit, dan struktur Al-Qur’an, tidak ada yang kebetulan. Semua ditetapkan dengan hitungan yang sangat teliti. Sebenarnya bila diketahui, (sebagian) ilmu tersebut meliputi risalah-risalah yang disampaikan dan ilmu yang ada pada para Rasul. Dalam kehidupan modern sekarang pun, “hitungan tersebut” mulai dari yang sederhana sampai yang paling rumit (Muftie, 2004:4).

Berhitung adalah cabang dari matematika. Tetapi sekalipun sebagai cabang, berhitung telah menjadi bagian seluruh tubuh matematika. Demikianlah berhitung ada di aljabar, berhitung ada di ilmu ukur (geometri), di teori kemungkinan (probabilitas), di statistika, analisis, teori fungsi, topologi. Apabila Morris Klein mencatat bahwa kini telah terdapat delapan puluh cabang besar

dalam matematika maka berhitung pun akan turut terdapat pada hampir semua cabang besar dari matematika itu (Naga, 1980:1).

Manusia telah membawa logika ke dalam berhitung untuk menjadikan berhitung itu suatu ilmu yang masuk akal tetapi manusia pun telah membawa berhitung ke dalam logika, paling tidak, untuk mengubah penilaian kualitatif dalam penilaian kuantitatif. Mereka memerlukan berhitung untuk mengambil suatu keputusan pada gejala dan peristiwa yang kebetulan terletak dua lingkungan yang berbeda (Naga, 1980:2).

Matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk dan lambang-lambang. Berkaitan dengan definisi tersebut, tiga cabang utama matematika adalah aljabar, analisis, dan geometri. Aljabar membahas tentang bilangan dan pengabstrakan, analisis membahas kekonvergenan dan limit, sedangkan geometri membahas tentang bentuk dan konsep-konsep yang berkaitan (Kerami, 2003:158).

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dari himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$ . Sedangkan banyaknya unsur di  $V$  disebut *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$  dan banyaknya unsur di  $E$  disebut *size* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $(G)$ . Jika graf yang dibicarakan hanya graf  $G$ , maka *order* dan *size* dari  $G$  tersebut cukup ditulis dengan  $G(p, q)$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Derajat titik  $v$  pada graf  $G$  ditulis dengan  $d_{e \mathcal{J}v}$ , adalah banyaknya sisi yang terhubung langsung pada titik  $v$ . Titik  $v$  dikatakan genap atau ganjil tergantung dari derajat titik  $v$  genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Indeks Wiener  $W$  awalnya disebut “nomor jalan” dan dinotasikan  $w$  dan juga dikenal sebagai jumlah wiener merupakan indeks yang ditetapkan untuk graf-graf pada  $n$  node. Indeks Wiener adalah jumlah jarak antara semua pasangan titik di  $G$  (Al-Hagri dkk, 2011).

Graf sikel berambut  $hC_n$  adalah graf yang didapatkan dari graf sikel  $C_n$  dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel (Bahri, 2012:16). Graf helm  $H_n$  merupakan graf yang didapatkan dari sebuah graf roda dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel. Misalnya graf helm  $H_3$  adalah graf helm yang menurut graf roda  $W_3$  dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel luar. Graf helm  $H_n$  mempunyai order  $2n + 1$  dan  $3n$  sisi (Mas’udah, 2010:3)

Graf helm tertutup merupakan graf yang diperoleh dari sebuah graf helm dengan menghubungkan setiap titik anting-anting untuk membentuk siklus. Misalnya graf helm tertutup  $cH_3$  adalah graf yang membuat graf helm  $H_3$  dengan menghubungkan setiap titik anting-anting luar sehingga membentuk sebuah siklus. Graf helm tertutup  $cH_n$  dengan tambahan maksimal satu titik anting yang membentuk siklus memiliki  $2n + 1$  titik dan  $4n$  sisi (Mas'udah, 2010:3). Graf tangga  $L_n$  yang merupakan hasil kali kartesius graf lintasan  $P_2 \times P_n$  (Ilmiah, 2011:19).

Di antara beberapa jenis graf, terdapat graf yang menarik untuk dicari Indeks Wienernya karena memiliki bentuk yang beraturan sehingga dapat ditentukan bentuk umumnya. Maka berdasarkan uraian di atas, penulis mengambil judul “**Indeks Wiener pada Graf Terhubung**”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana pola umum dari banyaknya titik dan sisi Indeks Wiener pada graf terhubung?

## 1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulis skripsi ini adalah untuk mengetahui pola umum dari banyaknya titik dan sisi dari Indeks Wiener pada graf terhubung.

#### 1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini jenis graf yang digunakan adalah graf sikel berambut  $hC_n$ , graf helm  $H_n$ , graf helm tertutup  $cH_n$ , graf tangga  $L_n$ . Graf yang digunakan adalah graf tidak berbobot.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi Peneliti

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

2. Bagi Lembaga

Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa Jurusan Matematika.

3. Bagi Pembaca

Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika tentang Indeks Wiener pada teori graf, dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

## 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*Library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang Indeks Wiener. Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Menggambar beberapa graf terhubung dari  $hC_3$  sampai  $hC_6$ ,  $H_3$  sampai  $H_6$ ,  $cH_3$  sampai  $cH_6$ ,  $L_2$  sampai  $L_3$  yang sudah ditentukan. Penulis menggambar beberapa macam graf yang menjadi objek penelitian dengan tujuan objek graf yang diteliti bisa dipahami terlebih dahulu oleh para pembaca.
- b. Mencari pasang titik dari graf terhubung. Penulis mencari ada berapa pasang titik pada graf terhubung tersebut. Pencarian ini dilakukan satu-persatu pada setiap graf yang menjadi objek penelitian.
- c. Menentukan Indeks Wiener pada graf terhubung. Setelah penulis menemukan pasang titik pada graf tersebut, maka kemudian penulis mencari Indeks Wienernya dari masing-masing pasangan titik pada setiap graf yang menjadi objek penelitian.
- d. Mencari pola dari masing-masing bilangan Indeks Wiener terhadap graf terhubung.
- e. Membuktikan pola rumus Indeks Wiener. Tahapan ini merupakan tahap akhir penelitian ini. Penulis melakukan pembuktian terhadap pola rumus yang

ditemukan pada langkah sebelumnya. Hal ini dimaksudkan untuk menguji kebenaran dari rumus Indeks Wiener.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut:

#### Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan.

#### Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini akan dikemukakan tentang teori-teori yang sesuai dengan masalah yang dibahas, di antaranya adalah definisi graf, derajat titik, operasi pada graf, graf terhubung dan tak terhubung, jarak, pengertian Indeks Wiener, jenis-jenis graf.

#### Bab III Pembahasan

Pada bab ketiga ini berisi analisis Indeks Wiener dari beberapa graf yang sudah ditentukan sebelumnya. Setelah itu dianalisis hasil dari pencarian Indeks Wiener tersebut pada tiap graf disertai dengan pembuktian konjektur yang diperoleh.

#### Bab IV Penutup

Pada bab penutup akan dikemukakan kesimpulan akhir yang merupakan jawaban dari rumusan masalah dan diberikan saran.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Pengertian Graf

Pada tahap awal, obyek yang dipelajari dalam graf adalah studi tentang himpunan titik beserta hubungan diantaranya. Seperti pada pendahuluan di atas titik bisa merepresentasikan suatu kota atau persimpangan jalan, sedangkan hubungan antar kota, yang dalam hal ini mungkin jalan, ditandai dengan adanya garis yang menghubungkan kedua kota. Garis tidak hanya merepresentasikan jalan dalam bentuk realitas, tetapi bisa juga menyatakan hubungan antar obyek. Misalnya jalur hubungan langsung dari rute penerbangan antar kota. Contoh lain adalah silsilah keluarga seseorang dapat juga dinyatakan dalam bentuk graf, dengan garis menyatakan hubungan keluarga atau keturunan.

##### **Definisi 1:**

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dari himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Banyaknya unsur di  $V$  disebut derajat *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$  dan banyaknya unsur di  $E$  disebut ukuran (*size*) dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dibicarakan hanya graf  $G$ , maka *order*

dan *size* dari  $G$  tersebut cukup ditulis dengan  $p$  dan  $q$  (Chartrand dan Lesniak,1986:4).

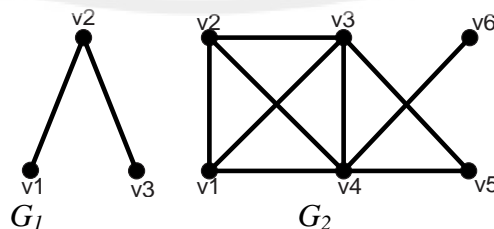
Jika  $u$  dan  $v$  titik-titik di  $G$  dan  $e = \{u, v\}$  suatu sisi di  $G$ , maka dikatakan sisi  $e$  menghubungkan  $u$  dan  $v$ ;  $u$  dan  $v$  berdekatan (*adjacent*);  $u$  terkait (*incident*) dengan  $e$ , demikian juga  $v$  dengan  $e$ ;  $e$  terkait dengan  $u$  dan  $v$ . Lebih lanjut jika  $e_1$  dan  $e_2$  adalah dua sisi yang berbeda dalam  $G$  yang terkait dengan sebuah titik sekutu, maka  $e_1$  dan  $e_2$  adalah sisi yang berkaitan. Adalah memudahkan untuk menyatakan sebuah sisi dalam bentuk  $uv$  atau  $vu$  daripada dalam bentuk  $\{u, v\}$ .

## 2.2 Derajat Titik

### Definisi 2:

Derajat titik  $v$  pada  $G$ , ditulis dengan  $\deg_G(v)$  adalah banyak sisi yang terkait langsung (*incident*) pada  $V$ . Dengan kata lain, banyak sisi yang memuat  $V$  sebagai titik ujung. Titik  $V$  dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah  $\deg_G(v)$  genap atau ganjil (Chartrand and Lesniak, 1996:2).

### Contoh 1:



Gambar 2.1 Derajat suatu Titik pada Graf  $G$

Dari gambar graf diatas maka diperoleh bahwa

Untuk  $G_1$ :  $deg_G(v_1) = 1$

$$deg_G(v_2) = 2$$

$$deg_G(v_3) = 1$$

Untuk  $G_2$ :  $deg_G(v_1) = 3$

$$deg_G(v_2) = 3$$

$$deg_G(v_3) = 4$$

$$deg_G(v_4) = 5$$

$$deg_G(v_5) = 2$$

$$deg_G(v_6) = 1$$

Titik yang tidak terkait langsung dengan sisi disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), dengan kata lain titik terisolasi adalah titik berderajat nol. Sedangkan titik dengan derajat satu disebut titik tergantung (*pendant vertex*) atau titik ujung (*end vertex*) (Vasudev, 2007:224).

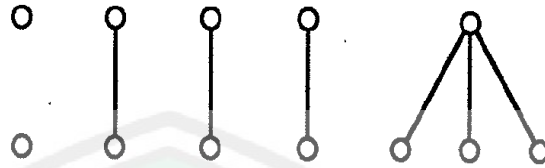
## 2.3 Operasi pada Graf

### 2.3.1 Operasi Gabungan (*Union*)

#### Definisi 3:

Gabungan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  yang dinotasikan dengan  $G = G_1 \cup G_2$  mempunyai himpunan titik  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan sisi  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ . Jika graf  $G$  memuat sebanyak  $n \geq 2$  graf  $H$ , maka dinotasikan dengan  $G = {}_nH$ . Graf  $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_{(1,3)}$  akan ditunjukkan pada gambar sebagai berikut (Chartrand and Lesniak, 1996:9).

**Contoh 2:**



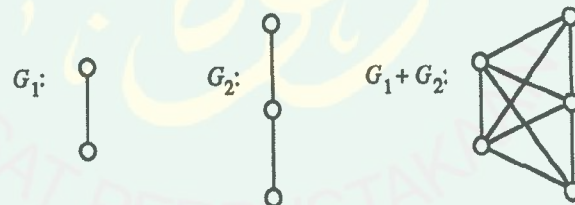
Gambar 2.2 Gabungan Graf

**2.3.2 Operasi Penjumlahan (*join*)**

**Definisi 4:**

Penjumlahan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  yang dinotasikan dengan  $G = G_1 + G_2$ , adalah graf dengan  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ . Dengan menggunakan operasi penjumlahan, maka jelas bahwa  $K_{m,n} \cong \bar{K}_m + \bar{K}_n$  (Chartrand and Lesniak, 1996:9).

**Contoh 3:**



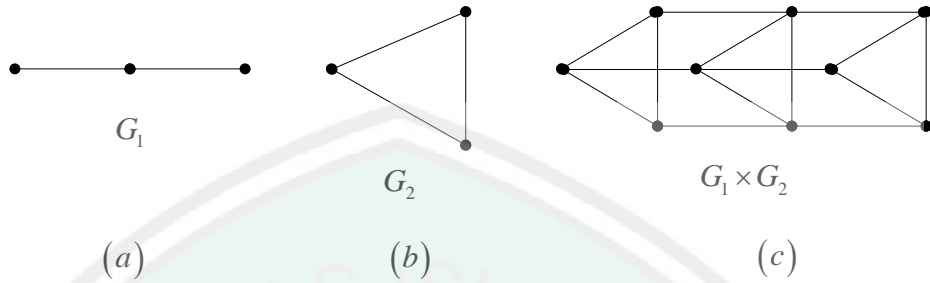
Gambar 2.3 Penjumlahan dua graf

**2.3.3 Operasi Perkalian Kartesius**

**Definisi 5:**

Hasil kali kartesius dari graf  $G_1$  dan  $G_2$  adalah graf yang dinotasikan  $G = G_1 \times G_2$  dan mempunyai himpunan titik  $V(G) = V(G_1) \times V(G_2) = \{u_1, u_2\} \times \{v_1, v_2, v_3\}$ , dan dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  dari graf  $G$  terhubung langsung jika dan hanya jika  $u_1 = v_1$  dan  $u_2 v_2 \in E(G_2)$  atau  $u_2 = v_2$  dan  $u_1 v_1 \in E(G_1)$  (Chartrand and Lesniak, 1996:9).

**Contoh 4:**



Gambar 2.4 Perkalian kartesius dua graf

**2.4 Graf Terhubung dan Tak Terhubung**

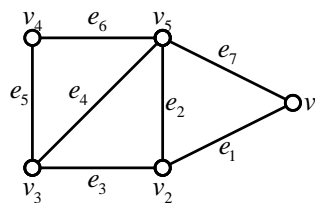
Suatu graf paling sedikit memiliki satu titik. Jika suatu graf memiliki titik dan sisi maka hubungan antara kedua sisi dan titik tersebut dapat dinyatakan dalam definisi berikut:

**Definisi 6:**

Sisi  $e = (u, v)$  dikatakan menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ . Jika  $e = (u, v)$  adalah sisi di graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  disebut terhubung langsung,  $u$  dan  $e$  serta  $v$  dan  $e$  disebut terkait langsung. Untuk selanjutnya, sisi  $e = (u, v)$  akan ditulis  $e = uv$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

**Contoh 5:**

Perhatikan gambar graf di bawah ini.



Gambar 2.5 Graf  $G$  dengan 5 Titik dan 7 Sisi

Dari gambar 2.5 titik yang terhubung langsung adalah  $v_1$  dan  $v_2$ ,  $v_2$  dan  $v_5$ ,  $v_2$  dan  $v_3$ ,  $v_3$  dan  $v_4$ ,  $v_3$  dan  $v_5$ ,  $v_4$  dan  $v_5$ ,  $v_5$  dan  $v_1$ . Sedangkan  $e_1$  terkait langsung dengan  $v_1$  dan  $v_2$ ,  $e_2$  terkait langsung dengan  $v_2$  dan  $v_5$ ,  $e_3$  terkait langsung dengan  $v_2$  dan  $v_3$ ,  $e_4$  terkait langsung dengan  $v_3$  dan  $v_5$ ,  $e_5$  terkait langsung dengan  $v_3$  dan  $v_4$ ,  $e_6$  terkait langsung dengan  $v_4$  dan  $v_5$ ,  $e_7$  terkait langsung dengan  $v_5$  dan  $v_1$ .

## 2.5 Jarak

Misalkan  $G$  graf terhubung dan misalkan  $u$  dan  $v$  titik di  $G$ . Jarak (*distance*) dari  $u$  dan  $v$  di  $G$ , dinotasikan dengan  $d(u,v)$ , adalah panjang lintasan terpendek  $u-v$  di  $G$ . Himpunan titik di  $G$  dengan fungsi jarak ini membentuk ruang metrik. Untuk setiap titik  $u,v$  dan  $w$  di  $G$ , maka

- $d(u,v) \geq 0$  dan  $d(u,v) = 0$  jika dan hanya jika  $u = v$ .
- $d(u,v) = d(v,u)$
- $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

(Abdussakir dkk, 2009:56).

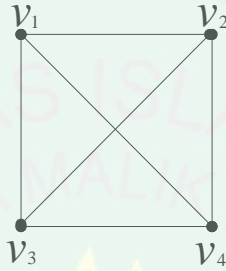
## 2.6 Pengertian Indeks Wiener

### Definisi 7:

Jumlah jarak antara semua pasangan titik pada graf terhubung dikenal sebagai Indeks Wiener (Al-Hagri dkk, 2011:64).

Indeks Wiener  $W$ , awalnya disebut “nomor jalan” dan dinotasikan  $w$  dan juga dikenal sebagai jumlah Wiener, merupakan indeks yang ditetapkan untuk graf pada  $n$ .

**Contoh 6:**



Gambar 2.6 Graf Komplit  $K_4$

Dari gambar di atas, graf komplit  $K_4$  terdapat 4 titik dan 8 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 3 \times 4 = 12.$$

Karena untuk setiap  $v, s \in V(K_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{12}{2} = 6$  maka Indeks

Wiener dari  $K_4$  adalah 6.

## 2.7 Jenis-jenis Graf

Ada banyak jenis graf dan juga terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut ini beberapa jenis graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini:

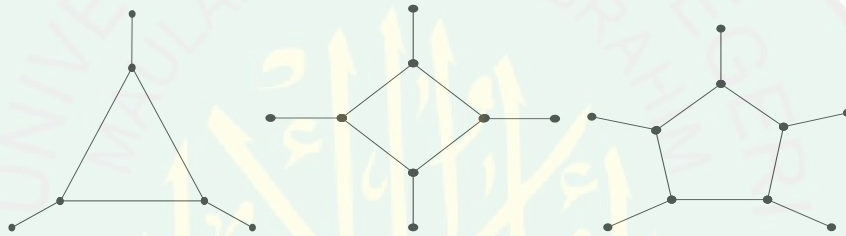
### 2.7.1 Graf sikel berambut

#### Definisi 8:

Graf sikel berambut ( $hC_n$ ) adalah graf yang didapatkan dari graf sikel ( $C_n$ ) dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel (Bahri, 2012:16).

Berikut adalah contoh dari graf sikel berambut  $hC_3$ ,  $hC_4$  dan  $hC_5$ :

#### Contoh 7:

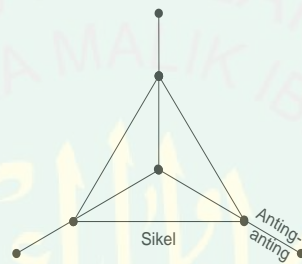
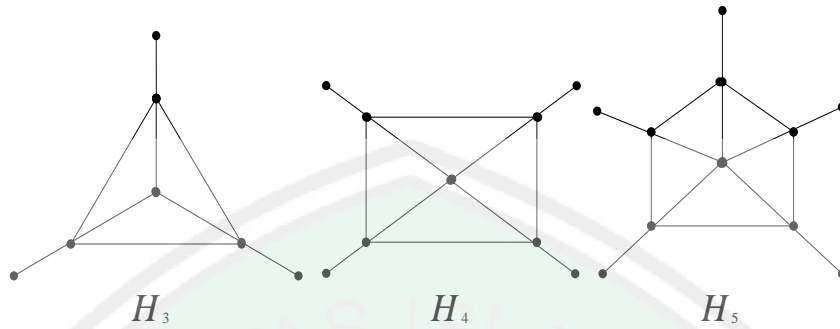


Gambar 2.7 Graf Sikel Berambut  $hC_3$ ,  $hC_4$  dan  $hC_5$

### 2.7.2 Graf Helm

#### Definisi 9:

Graf helm ( $H_n$ ) adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda ( $W_n$ ) dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel (Mas'udah, 2010:22).

**Contoh 8:**

Gambar 2.8 Graf Helm

$H_3$  adalah graf helm yang memuat graf roda  $W_3$  dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik disikel luar.

$H_4$  adalah graf helm yang memuat graf roda  $W_4$  dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik disikel luar.

$H_5$  adalah graf helm yang memuat graf roda  $W_5$  dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik disikel luar.

**Teorema 2.1**

Graf helm ( $H_n$ ) memiliki  $2n + 1$  titik dan  $3n$  sisi (Mas'udah, 2010:23).

**Bukti:**

Graf helm  $H_n$  memiliki  $n$  buah titik pada sikel luar dan  $n$  buah titik pada anting-anting serta satu buah titik pada titik pusat maka  $|V| = 2n + 1$ .

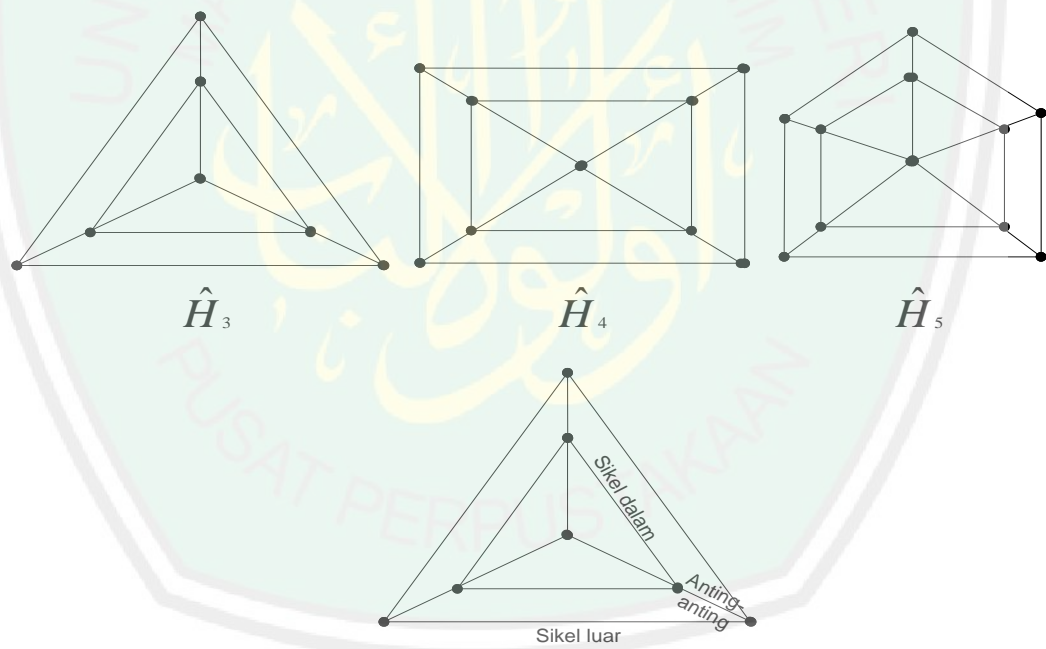
Karena graf helm  $H_n$  memuat graf roda  $W_n$  yang mempunyai  $2n$  sisi dan ada tambahan titik anting-anting yang terhubung langsung pada setiap titik di siklus luar maka akan ada  $n$  sisi lagi jadi  $|E| = 2n + n = 3n$ .

### 2.7.3 Graf Helm Tertutup

**Definisi 10:**

Graf Helm Tertutup  $cH_n$  adalah graf helm  $H_n$  dengan menghubungkan setiap titik anting-anting untuk membentuk siklus (Mas'udah, 2010:24).

**Contoh 9:**



Gambar 2.9 Graf Helm Tertutup

$cH_3$  adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm  $H_3$  dengan menghubungkan setiap titik anting-anting luar sehingga membentuk sebuah siklus.

$cH_4$  adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm  $H_4$  dengan menghubungkan setiap titik anting-anting luar sehingga membentuk sebuah siklus.

$cH_5$  adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm  $H_5$  dengan menghubungkan setiap titik anting-anting luar sehingga membentuk sebuah siklus.

### **Teorema 2.2**

Graf helm tertutup  $cH_n$  dengan tambahan maksimal satu titik anting yang membentuk siklus memiliki  $2n + 1$  titik dan  $4n$  sisi (Mas'udah, 2010:25).

#### **Bukti:**

Graf helm tertutup  $cH_n$  memiliki  $n$  buah titik pada siklus dalam dan  $n$  buah titik pada siklus luar serta satu buah titik pusat maka  $|V| = 2n + 1$ .

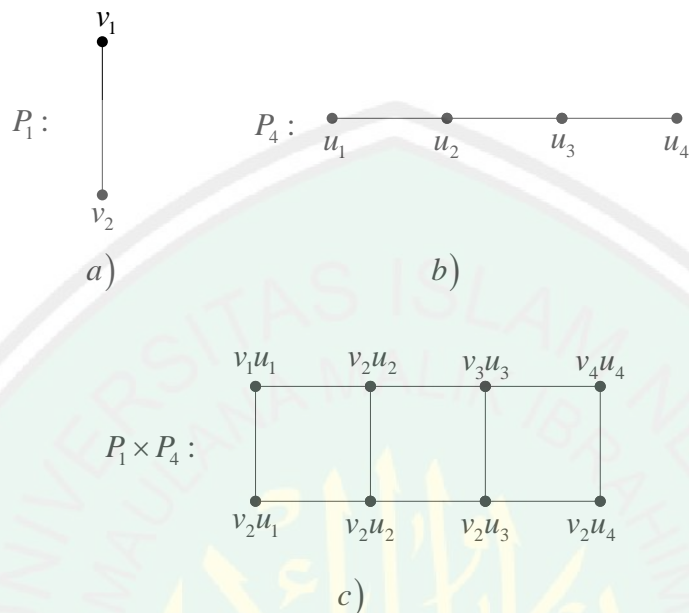
Karena graf helm tertutup  $cH_n$  memuat graf helm yang mempunyai  $3n$  sisi dan setiap anting-anting yang terhubung langsung sehingga membentuk sebuah siklus luar, maka akan ada  $n$  sisi lagi, jadi  $|E| = 3n + n = 4n$ .

#### 2.7.4 Graf Tangga

##### **Definisi 11:**

Graf tangga (*ladder*) adalah graf yang dibangun dari hasil kali kartesius graf lintasan  $P_2$  dan  $P_n$ , yaitu  $P_2 \times P_n$ . Graf tangga dinotasikan dengan  $L_n$  (Ilmiyah, 2011:19).

**Contoh 10:**



Gambar 2.10 a) Graf Lintasan  $P_1$  b) Graf Lintasan  $P_3$  c) Graf Tangga  $L_4 = P_2 \times P_4$

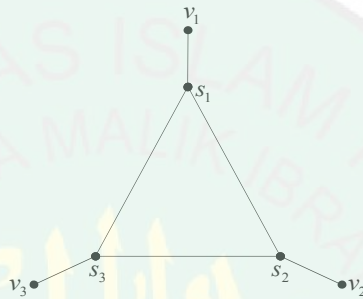
## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Indeks Wiener pada Graf Sikel Berambut

##### 3.1.1 Graf Sikel Berambut $hC_3$

Graf sikel berambut  $hC_3$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf Sikel Berambut  $hC_3$

Dari gambar di atas, graf sikel berambut  $hC_3$  terdapat 6 titik dan 6 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$1 \times 1 = 1 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 1 \times 3 = 3.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 4 \times 3 = 12.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$3 \times 2 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 6 \times 3 = 18.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 3 \times 3 = 9.$$

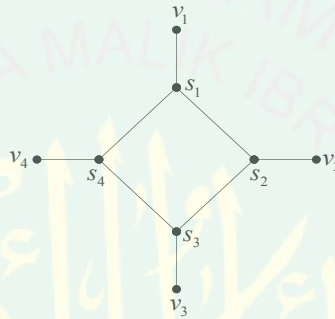
$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 4 \times 3 = 18.$$

Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $3 + 12 + 18 + 9 + 18 = 54$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(hC_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{54}{2} = 27$  maka Indeks Wiener dari  $hC_3$  adalah 27.

### 3.1.2 Graf Sikel Berambut $hC_4$

Graf sikel berambut  $hC_4$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.12 Graf Sikel Berambut  $hC_4$

Dari gambar di atas, graf sikel berambut  $hC_4$  terdapat 8 titik dan 8 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$1 \times 1 = 1 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 1 \times 4 = 4.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 4 \times 4 = 16.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$3 \times 3 = 9 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 9 \times 4 = 36.$$

$d(v_1) = 4$ , adalah yang berjarak 4 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$4 \times 1 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 4 \times 4 = 16.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 3 \times 4 = 12.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$2 \times 3 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 6 \times 4 = 24.$$

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 1 sehingga

$$3 \times 1 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 3 \times 4 = 12.$$

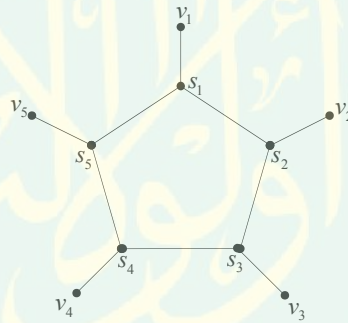
Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $4 + 16 + 36 + 16 + 12 + 24 + 12 =$

120. Karena untuk setiap  $v, s \in V(hC_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v, s) = 60$  maka

Indeks Wiener dari  $hC_4$  adalah 60.

### 3.1.3 Graf Sikel Berambut $hC_5$

Graf sikel berambut  $hC_5$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.13 Graf Sikel Berambut  $hC_5$

Dari gambar di atas, graf sikel berambut  $hC_5$  terdapat 10 titik dan 10 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$1 \times 1 = 1 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 1 \times 5 = 5.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 4 \times 5 = 20.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 4 sehingga

$$3 \times 4 = 12 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 12 \times 5 = 60.$$

$d(v_1) = 4$ , adalah yang berjarak 4 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$4 \times 2 = 8 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 8 \times 5 = 40.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 3 \times 5 = 15.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$2 \times 4 = 8 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 8 \times 5 = 40.$$

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 2 sehingga

$$3 \times 2 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 6 \times 5 = 30.$$

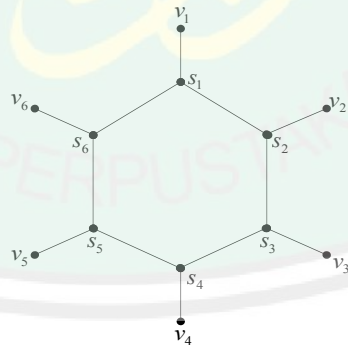
Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $5 + 20 + 60 + 40 + 15 + 40 + 30 =$

210. Karena untuk setiap  $v, s \in V(hC_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{2 \cdot 10}{2} = 105$  maka

Indeks Wiener dari  $hC_5$  adalah 105.

### 3.1.4 Graf Sikel Berambut $hC_6$

Graf sikel berambut  $hC_6$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.14 Graf Sikel Berambut  $hC_5$

Dari gambar di atas, graf sikel berambut  $hC_6$  terdapat 12 titik dan 12 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$1 \times 1 = 1 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 1 \times 6 = 6.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 4 \times 6 = 24.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 4 sehingga

$$3 \times 4 = 12 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 12 \times 6 = 72.$$

$d(v_1) = 4$ , adalah yang berjarak 4 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$4 \times 3 = 12 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 12 \times 6 = 72.$$

$d(v_1) = 5$ , adalah yang berjarak 5 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$5 \times 1 = 5 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 5 \times 6 = 30.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 3 \times 6 = 18.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$2 \times 4 = 8 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 8 \times 6 = 48.$$

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$3 \times 3 = 9 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 9 \times 6 = 54.$$

$d(s_1) = 4$ , adalah yang berjarak 4 dari titik  $s_1$  sebanyak 1 sehingga

$$4 \times 1 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 4 \times 6 = 24.$$

Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $6 + 24 + 72 + 72 + 30 + 18 + 48 +$

$54 + 24 = 348$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(hC_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi

$$\frac{348}{2} = 174 \text{ maka Indeks Wiener dari } hC_6 \text{ adalah } 174.$$

Berdasarkan perolehan Indeks Wiener dari graf sikel berambut di atas, maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1 Indeks Wiener pada Graf Sikel Berambut

No	Graf	Indeks Wiener
1	$hC_3$	27
2	$hC_4$	60
3	$hC_5$	105
4	$hC_6$	174
5	$hC_n$	$W(hC_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 2) ; & n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 3) ; & n \text{ ganjil} \end{cases}$

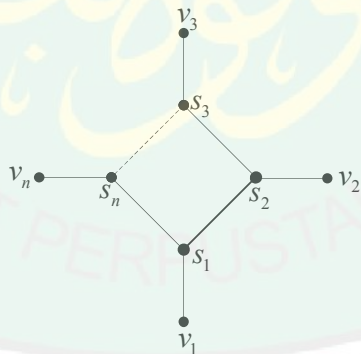
Hasil ini penulis tetapkan dalam teorema sebagai berikut:

**Teorema 1.**

Untuk setiap bilangan asli  $n > 2$ ,  $W(hC_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 2) ; & n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 3) ; & n \text{ ganjil} \end{cases}$

**Bukti :**

Untuk bukti pada Teorema ini, perhatikan graf  $hC_n$  berikut.



Gambar 3.15 Graf Sikel Berambut  $hC_n$

Misalkan untuk  $v \in V(hC_n)$ , notasi  $d_i(v)$  menyatakan banyaknya titik berbeda di  $hC_n$  yang berjarak  $i$  ke  $v$ . Dengan demikian, maka jumlah semua jarak  $i$  dari  $v$  dapat dituliskan sebagai  $d_i(v)i$ . Untuk berikutnya, pandang dua kasus untuk  $hC_n$ , yaitu untuk  $n$  ganjil dan  $n$  genap.

**Kasus 1.** Untuk  $n$  genap

Jelas bahwa untuk setiap  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $d_1(\psi) = 1 = d_{\frac{n}{2}+2}(\psi)$ , dimana  $\frac{n}{2} + 2$  adalah jarak terbesar pada  $hC_n$ ,  $d_2(\psi) = 2$ ,  $d_{\frac{n}{2}+1}(\psi) = 3$ , dan  $d_i(\psi) = 4$  untuk  $i = 3, 4, \dots, \frac{n}{2}$ . Sekarang, untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , jelas bahwa  $d_1(\phi) = 3 = d_{\frac{n}{2}}(\phi)$ ,  $d_{\frac{n}{2}+1}(\phi) = 1$ , dan  $d_i(\psi) = 4$  untuk  $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{n}{2} - 1$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(hC_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , maka Indeks Wiener dari  $hC_n$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W(hC_n) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}+2} \sum_{j=1}^n d_i(v_j) i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}+1} \sum_{j=1}^n d_i(s_j) i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(v_j) 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(v_j) 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^n d_i(v_j) i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_{\frac{n}{2}+1}(v_j) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_{\frac{n}{2}+2}(v_j) \left( \frac{n}{2} + 2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(s_j) 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=1}^n d_i(s_j) i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_{\frac{n}{2}}(s_j) \frac{n}{2} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_{\frac{n}{2}+1}(s_j) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

Karena  $d_1(\psi) = 1 = d_{\frac{n}{2}+2}(\psi)$ ,  $d_2(\psi) = 2$ ,  $d_{\frac{n}{2}+1}(\psi) = 3$ , dan  $d_i(\psi) = 4$  untuk  $i = 3, 4, \dots, \frac{n}{2}$ , serta  $d_1(\phi) = 3 = d_{\frac{n}{2}}(\phi)$ ,  $d_{\frac{n}{2}+1}(\phi) = 1$ , dan  $d_i(\psi) = 4$  untuk  $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{n}{2} - 1$  maka diperoleh

$$W(hC_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^n 4i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 3 \left( \frac{n}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 1 \left( \frac{n}{2} + 2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 3 \cdot 1 +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n 4i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 3 \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 1 \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{n}{2} + 2n + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} 4ni + \frac{3n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) + \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 2 \right) + \frac{3n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} 4ni + \\
& \frac{3}{4} n^2 + \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{3}{4} n^2 + 4n + 2n \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} i + 2n \left( \frac{n}{2} + 1 \right) + \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 2 \right) + 2n \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} i \\
&= 2n^2 + 7n + 2n \frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \left( \frac{n}{2} + 3 \right) + 2n \frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \left( \frac{n}{2} - 1 + 2 \right) \\
&= \frac{1}{2} n (n^2 + 4n - 2)
\end{aligned}$$

**Kasus 2.** Untuk  $n$  ganjil

Jelas bahwa untuk setiap  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $d_1(v_j) = 1$ ,  $d_2(v_j) = 2 = d_{\frac{n-1}{2}+2}(v_j)$ , dimana  $\frac{n-1}{2}+2$  adalah jarak terbesar pada  $hC_n$ , dan  $d_i(v_j) = 4$  untuk  $i = 3, 4, \dots, \frac{n-1}{2}+1$ . Selain itu, jelas bahwa  $d_1(s) = 3$ ,  $d_{\frac{n-1}{2}+1}(s) = 2$ , dan  $d_i(s) = 4$  untuk  $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{n-1}{2}$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(hC_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , maka Indeks Wiener dari  $hC_n$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W(hC_n) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{\frac{n+2}{2}} \sum_{j=1}^n d_i(v_j) i + \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} \sum_{j=1}^n d_i(s_j) i \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(v_j) 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(v_j) 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{\frac{n-1}{2}+1} \sum_{j=1}^n d_i(v_j) i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_{\frac{n-1}{2}+2}(v_j) \left( \frac{n-1}{2} + 2 \right) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(s_j)1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n d_i(s_j)i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_{\frac{n-1}{2}+1}(s_j) \left( \frac{n-1}{2} + 1 \right)$$

Karena  $d_1(\psi) = 1$ ,  $d_2(\psi) = 2 = d_{\frac{n}{2}}(\psi)$ , dan  $d_i(\psi) = 4$  untuk  $i = 3, 4, \dots, \frac{n}{2} + 1$ , serta  $d_1(\varphi) = 3$ ,  $d_{\frac{n}{2}+1}(\varphi) = 2$ , dan  $d_i(\varphi) = 4$  untuk  $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{n}{2}$ , maka diperoleh

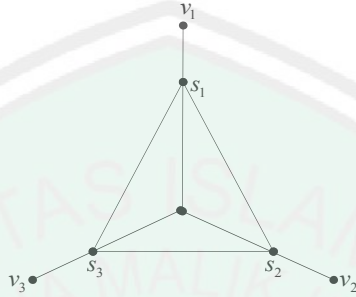
$$\begin{aligned} W(cH_n) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n 4i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2 \left( \frac{n-1}{2} + 2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 3 \cdot 1 + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n 4i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2 \left( \frac{n-1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{n}{2} + 2n + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{\frac{n-1}{2}} 4ni + n \left( \frac{n-1}{2} + 2 \right) + \frac{3n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} 4ni + n \left( \frac{n-1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} n(n^2 + 4n - 3) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $W(hC_n) = \begin{cases} \frac{1}{2} n(n^2 + 4n - 2) ; n \text{ genap} \\ \frac{1}{2} n(n^2 + 4n - 3) ; n \text{ ganjil} \end{cases}$  ■

### 3.2 Indeks Wiener pada Graf Helm

#### 3.2.1 Graf Helm $H_3$

Graf helm  $H_3$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.16 Graf Helm  $H_3$

Dari gambar di atas, graf helm  $H_3$  terdapat 7 titik dan 7 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$1 \times 1 = 1 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 1 \times 3 = 3.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$2 \times 3 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 6 \times 3 = 18.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$3 \times 2 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 6 \times 3 = 18.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$1 \times 4 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 4 \times 3 = 12.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 4 \times 3 = 12.$$

$d(s_0) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_0$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3.$$

$d(s_0) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_0$  sebanyak 3 sehingga

$$2 \times 3 = 6.$$

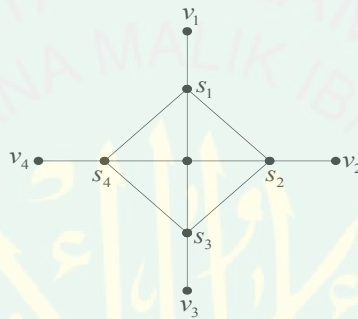
Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $3 + 18 + 18 + 12 + 12 + 3 + 6 = 72$ .

Karena untuk setiap  $v, s \in V(H_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{7^2}{2} = 36$  maka Indeks

Wiener dari  $H_3$  adalah 36.

### 3.2.2 Graf Helm $H_4$

Graf helm  $H_4$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.17 Graf Helm  $H_4$

Dari gambar di atas, graf helm  $H_4$  terdapat 9 titik dan 12 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$1 \times 1 = 1 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 1 \times 4 = 4.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$2 \times 3 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 6 \times 4 = 24.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$3 \times 3 = 9 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 9 \times 4 = 36.$$

$d(v_1) = 4$ , adalah yang berjarak 4 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$4 \times 1 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 4 \times 4 = 16.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$1 \times 4 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 4 \times 4 = 16.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$2 \times 3 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 6 \times 4 = 24.$$

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 1 sehingga

$$3 \times 1 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 3 \times 4 = 12.$$

$d(s_0) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_0$  sebanyak 4 sehingga

$$1 \times 4 = 4.$$

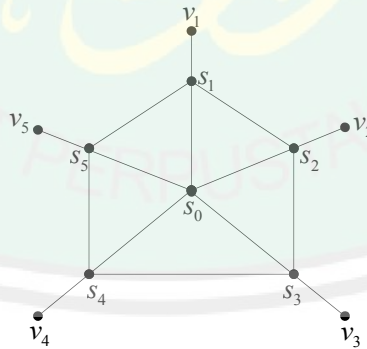
$d(s_0) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_0$  sebanyak 4 sehingga

$$2 \times 4 = 8.$$

Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $4 + 24 + 36 + 16 + 16 + 24 + 12 + 4 + 8 = 144$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(H_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{144}{2} = 72$  maka Indeks Wiener dari  $H_4$  adalah 72.

### 3.2.3 Graf Helm $H_5$

Graf helm  $H_5$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.18 Graf Helm  $H_5$

Dari gambar di atas, graf helm  $H_5$  terdapat 11 titik dan 15 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$1 \times 1 = 1$  dan dihitung sebanyak 5 kali maka  $1 \times 5 = 5$ .

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$2 \times 3 = 6$  dan dihitung sebanyak 5 kali maka  $6 \times 5 = 30$ .

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 4 sehingga

$3 \times 4 = 12$  dan dihitung sebanyak 5 kali maka  $12 \times 5 = 60$ .

$d(v_1) = 4$ , adalah yang berjarak 4 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$4 \times 2 = 8$  dan dihitung sebanyak 5 kali maka  $8 \times 5 = 40$ .

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$1 \times 4 = 4$  dan dihitung sebanyak 5 kali maka  $4 \times 5 = 20$ .

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$2 \times 4 = 8$  dan dihitung sebanyak 5 kali maka  $8 \times 5 = 40$ .

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 2 sehingga

$3 \times 2 = 6$  dan dihitung sebanyak 5 kali maka  $6 \times 5 = 30$ .

$d(s_0) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_0$  sebanyak 5 sehingga

$1 \times 5 = 5$ .

$d(s_0) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_0$  sebanyak 5 sehingga

$2 \times 5 = 10$ .

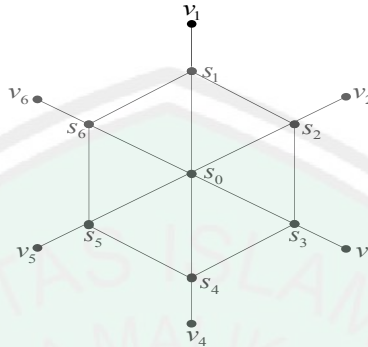
Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $5 + 30 + 60 + 40 + 20 + 40 + 30 +$

$5 + 10 = 240$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(H_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi

$\frac{240}{2} = 120$  maka Indeks Wiener dari  $H_5$  adalah 120.

### 3.2.4 Graf Helm $H_6$

Graf helm  $H_6$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.19 Graf Helm  $H_6$

Dari gambar di atas, graf helm  $H_6$  terdapat 13 titik dan 18 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$1 \times 1 = 1 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 1 \times 6 = 6.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$2 \times 3 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 6 \times 6 = 36.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 5 sehingga

$$3 \times 5 = 15 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 15 \times 6 = 90.$$

$d(v_1) = 4$ , adalah yang berjarak 4 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$4 \times 3 = 12 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 12 \times 6 = 72.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$1 \times 4 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 4 \times 6 = 24.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 5 sehingga

$$2 \times 5 = 10 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 10 \times 6 = 60.$$

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$3 \times 3 = 9 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 9 \times 6 = 54.$$

$d(s_0) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_0$  sebanyak 6 sehingga

$$1 \times 6 = 6.$$

$d(s_0) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_0$  sebanyak 6 sehingga

$$2 \times 6 = 12.$$

Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $6 + 36 + 90 + 72 + 24 + 60 + 54 + 6 + 12 = 360$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(H_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{360}{2} = 180$  maka Indeks Wiener dari  $H_6$  adalah 180.

Berdasarkan perolehan Indeks Wiener dari graf helm di atas, maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2 Indeks Wiener pada Graf Helm

No	Graf	Indeks Wiener
1	$H_3$	36
2	$H_4$	72
3	$H_5$	120
4	$H_6$	180
5	$H_n$	$W(H_n) = 6n(n - 1)$

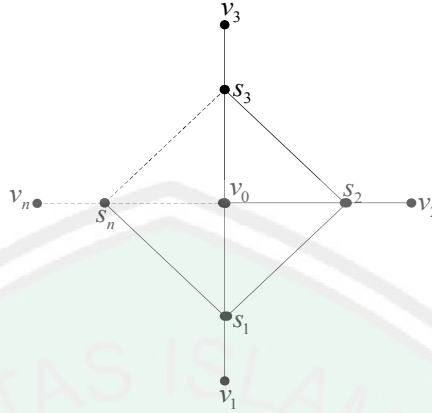
Hasil ini Penulis tetapkan dalam teorema sebagai berikut:

**Teorema 2.**

Untuk setiap bilangan asli  $n > 2$ ,  $W(H_n) = 6n(n - 1)$

**Bukti:**

Untuk bukti pada Teorema ini, perhatikan graf  $H_n$  berikut:



Gambar 3.20 Graf Helm  $H_n$

Serupa dengan pembuktian Teorema 1, misalkan untuk  $v \in V(H_n)$ , notasi  $d_i(v)$  menyatakan banyaknya titik berbeda di  $H_n$  yang berjarak  $i$  ke  $v$ . Dengan demikian, maka jumlah semua jarak  $i$  dari  $v$  dapat dituliskan sebagai  $d_i(v)i$ .

Selanjutnya, jelas bahwa,  $d_1(v_0) = 1 = d_2(v_0)$ , serta untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $d_1(v_j) = 1$ ,  $d_2(v_j) = 3$ ,  $d_3(v_j) = n - 1$ , dan  $d_4(v_j) = n - 3$ .

Selain itu, jelas bahwa  $d_1(s_j) = 4 = d_2(s_j)$ , dan  $d_3(s_j) = 4$ .

Selanjutnya, Karena untuk setiap  $v, s \in V(H_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , maka Indeks Wiener dari  $H_n$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W(H_n) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^2 d_i(v_0)i + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^n d_i(v_j)i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^n d_i(s_j)i \right) \\
 &= \frac{1}{2} d_1(v_0)1 + \frac{1}{2} d_2(v_0)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(v_j)1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(v_j)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_3(v_j)3 + \\
 &\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_4(v_0)4 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(s_j)1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(s_j)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_3(s_j)3 \\
 &= \frac{n}{2} + n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-1)3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-3)4 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 4 \cdot 1 +
 \end{aligned}$$

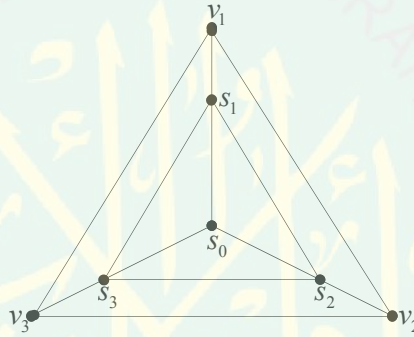
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-1)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-3)3 \\ & = 6n(n-1) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $W(H_n) = 6n(n-1)$  ■

### 3.3 Indeks Wiener pada Graf Helm Tertutup

#### 3.3.1 Graf Helm Tertutup $c H_3$

Graf helm tertutup  $c H_3$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.21 Graf Helm Tertutup  $c H_3$

Dari gambar di atas, graf helm tertutup  $c H_3$  terdapat 7 titik dan 12 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 3 \times 3 = 9.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$2 \times 3 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 6 \times 3 = 18.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$1 \times 4 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 4 \times 3 = 12.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 3 kali maka } 4 \times 3 = 12.$$

$d(s_0) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_0$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3.$$

$d(s_0) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_0$  sebanyak 3 sehingga

$$2 \times 3 = 6.$$

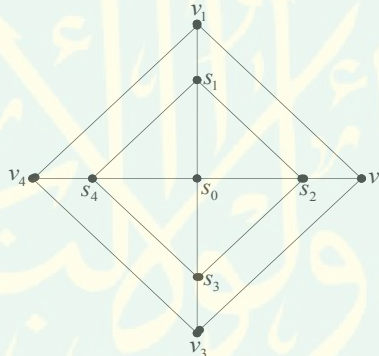
Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $9 + 18 + 12 + 12 + 3 + 6 = 60$ .

Karena untuk setiap  $v, s \in V(c H_3)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{60}{2} = 30$  maka Indeks

Wiener dari  $c H_3$  adalah 30.

### 3.3.2 Graf Helm Tertutup $c H_4$

Graf helm tertutup  $c H_4$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.22 Graf Helm Tertutup  $c H_4$

Dari gambar di atas, graf helm tertutup  $c H_4$  terdapat 9 titik dan 16 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 3 \times 4 = 12.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 4 sehingga

$$2 \times 4 = 8 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 8 \times 4 = 32.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$3 \times 1 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 3 \times 4 = 12.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$1 \times 4 = 4$  dan dihitung sebanyak 4 kali maka  $4 \times 4 = 16$ .

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$2 \times 3 = 6$  dan dihitung sebanyak 4 kali maka  $6 \times 4 = 24$ .

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 1 sehingga

$1 \times 3 = 3$  dan dihitung sebanyak 4 kali maka  $3 \times 4 = 12$ .

$d(s_0) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_0$  sebanyak 4 sehingga

$1 \times 4 = 4$ .

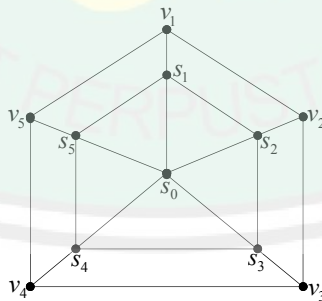
$d(s_0) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_0$  sebanyak 4 sehingga

$2 \times 4 = 8$ .

Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $12 + 32 + 12 + 16 + 24 + 12 + 4 + 8 = 120$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(c H_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{120}{2} = 60$  maka Indeks Wiener dari  $c H_4$  adalah 60.

### 3.3.3 Graf Helm Tertutup $c H_5$

Graf helm tertutup  $c H_5$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.23 Graf Helm Tertutup  $c H_5$

Dari gambar di atas, graf helm tertutup  $c H_5$  terdapat 11 titik dan 20 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$1 \times 3 = 3$  dan dihitung sebanyak 5 kali maka  $3 \times 5 = 15$ .

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 5 sehingga

$$2 \times 5 = 10 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 10 \times 5 = 50.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$3 \times 2 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 6 \times 5 = 30.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$1 \times 4 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 4 \times 5 = 20.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$2 \times 4 = 8 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 8 \times 5 = 40.$$

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 2 sehingga

$$3 \times 2 = 6 \text{ dan dihitung sebanyak 5 kali maka } 6 \times 5 = 30.$$

$d(s_0) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_0$  sebanyak 5 sehingga

$$1 \times 5 = 5.$$

$d(s_0) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_0$  sebanyak 5 sehingga

$$2 \times 5 = 10.$$

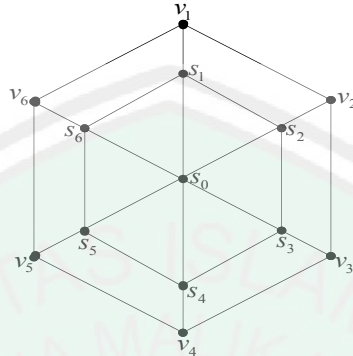
Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $15 + 50 + 30 + 20 + 40 + 30 + 5 +$

$10 = 200$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(c H_1)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{200}{2} = 100$

maka Indeks Wiener dari  $c H_1$  adalah 100.

### 3.3.4 Graf Helm Tertutup $c H_6$

Graf helm tertutup  $c H_6$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.24 Graf Helm Tertutup  $c H_6$

Dari gambar di atas, graf helm tertutup  $c H_6$  terdapat 13 titik dan 24 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 3 \times 6 = 18.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 5 sehingga

$$2 \times 5 = 10 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 10 \times 6 = 60.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 4 sehingga

$$3 \times 4 = 12 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 12 \times 6 = 72.$$

$d(s_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_1$  sebanyak 4 sehingga

$$1 \times 4 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 4 \times 6 = 24.$$

$d(s_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_1$  sebanyak 5 sehingga

$$2 \times 5 = 10 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 10 \times 6 = 60.$$

$d(s_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $s_1$  sebanyak 3 sehingga

$$3 \times 3 = 9 \text{ dan dihitung sebanyak 6 kali maka } 9 \times 6 = 54.$$

$d(s_0) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $s_0$  sebanyak 6 sehingga

$$1 \times 6 = 6.$$

$d(s_0) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $s_0$  sebanyak 6 sehingga

$$2 \times 6 = 12.$$

Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $18 + 60 + 72 + 24 + 60 + 54 + 6 + 12 = 306$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(cH_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{306}{2} = 153$  maka Indeks Wiener dari  $cH_n$  adalah 153.

Berdasarkan perolehan Indeks Wiener dari graf helm tertutup di atas, maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.3 Indeks Wiener pada Graf Helm Tertutup

No	Graf	Indeks Wiener
1	$cH_3$	30
2	$cH_4$	60
3	$cH_5$	100
4	$cH_6$	153
5	$cH_n$	$W(cH_n) = \begin{cases} 5n(n-1) ; 3 \leq n \leq 5 \\ 153 ; n = 6 \\ 6n^2 - 11n ; \text{untuk } n > 6 \end{cases}$

Hasil ini Penulis tetapkan dalam teorema sebagai berikut:

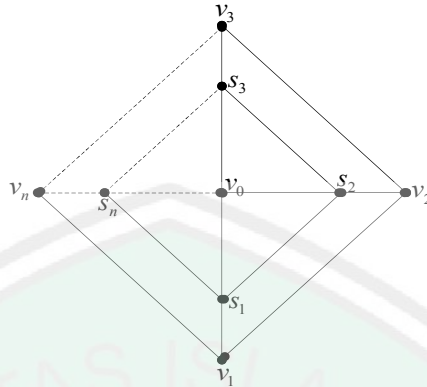
**Teorema 3.**

Untuk setiap bilangan asli  $n > 2$ , indeks Wiener graf  $cH_n$  diberikan oleh

$$W(cH_n) = \begin{cases} 5n(n-1) ; 3 \leq n \leq 5 \\ 153 ; n = 6 \\ 6n^2 - 11n ; \text{untuk } n > 6 \end{cases}$$

**Bukti :**

Untuk bukti Teorema ini, perhatikan graf  $cH_n$  berikut:



Gambar 3.25 Graf Helm Tertutup  $cH_n$

Serupa dengan pembuktian Teorema 1 dan Teorema 2, misalkan untuk  $v \in V(cH_n)$ , notasi  $d_i(v)$  menyatakan banyaknya titik berbeda di  $H_n$  yang berjarak  $i$  ke  $v$ . Dengan demikian, maka jumlah semua jarak  $i$  dari  $v$  dapat dinyatakan sebagai  $d_i(v)i$ .

**Kasus 1.** Untuk  $3 \leq n \leq 5$

Jelas bahwa,  $d_1(v_0) = n = d_2(v_0)$ , serta untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $d_1(v_j) = 3$ ,  $d_2(v_j) = n$ , dan  $d_3(v_j) = n - 3$ . Selain itu, jelas bahwa  $d_1(s_j) = 4$ ,  $d_2(s_j) = n - 1$ , dan  $d_3(s_j) = n - 3$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(cH_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , maka Indeks Wiener dari  $cH_n$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W(cH_n) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^2 d_i(v_0)i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^n d_i(v_j)i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^n d_i(s_j)i \right) \\
 &= \frac{1}{2} d_1(v_0)1 + \frac{1}{2} d_2(v_0)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(v_j)1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(v_j)2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_3(v_j)3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(s_j)1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(s_j)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_3(s_j)3
 \end{aligned}$$

Karena  $d_3(v_j) = d_3(s_j)$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
W(cH_n) &= \frac{n}{2} + n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(v_j)1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(v_j)2 + \sum_{j=1}^n d_3(v_j)3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(s_j)1 + \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(s_j)2 \\
&= \frac{3}{n}n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n n \cdot 2 + \sum_{j=1}^n (n-3)3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-1)2 \\
&= \frac{3}{n}n + \frac{3}{n}n + n^2 + 3n(n-3) + 2n + n(n-1) \\
&= 5n(n-1)
\end{aligned}$$

**Kasus 2.** Untuk  $n = 6$

Untuk kasus ini, jelas dari ilustrasi bahwa  $W(hC_n) = 153$ .

**Kasus 3.** Untuk  $n > 6$

Jelas bahwa,  $d_1(v_0) = n = d_2(v_0)$ , serta untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $d_1(v_j) = 3$ ,  $d_2(v_j) = 5$ ,  $d_3(v_j) = n - 1$ , dan  $d_4(v_j) = n - 7$ . Selain itu, jelas bahwa  $d_1(s_j) = 4$ ,  $d_2(s_j) = n - 1$ , dan  $d_3(s_j) = 4$ . Karena untuk setiap  $v, s \in V(cH_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , maka Indeks Wiener dari  $cH_n$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W(cH_n) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^2 d_i(v_0)i + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^n d_i(v_j)i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^n d_i(s_j)i \right) \\
&= \frac{1}{2} d_1(v_0)1 + \frac{1}{2} d_2(v_0)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(v_j)1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(v_j)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_3(v_j)3 + \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_4(v_j)4 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_1(s_j)1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_2(s_j)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_3(s_j)3 \\
&= \frac{n}{2} + n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-1)3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-7)4 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 4 \cdot 1 +
\end{aligned}$$

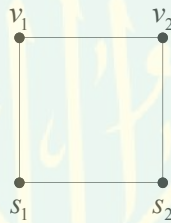
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-1)2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-3)3 \\ & = 6n^2 - 11n \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $W(c H_n) = \begin{cases} 5n(n-1); 3 \leq n \leq 5 \\ 153; n = 6 \\ 6n^2 - 11n; u n t u k > 6 \end{cases}$  ■

### 3.4 Indeks Wiener pada Graf Tangga

#### 3.4.1 Graf Tangga $L_2$

Graf tangga  $L_2$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.26 Graf Tangga  $L_2$

Dari gambar di atas, graf tangga  $L_2$  terdapat 4 titik dan 4 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$1 \times 2 = 2 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 2 \times 4 = 8.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

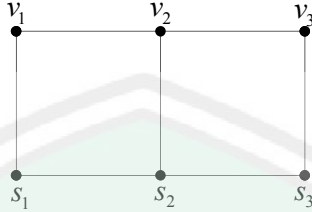
$$2 \times 1 = 2 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 2 \times 4 = 8.$$

Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $8 + 8 = 16$ . Karena untuk setiap

$v, s \in V(L_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{1}{2} \times 16 = 8$  maka Indeks Wiener dari  $L_2$  adalah 8.

### 3.4.2 Graf Tangga $L_3$

Graf tangga  $L_3$  dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.27 Graf Tangga  $L_3$

Dari gambar di atas, graf tangga  $L_3$  terdapat 6 titik dan 7 sisi.

Untuk  $d(v_1) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$1 \times 2 = 2 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 2 \times 4 = 8.$$

$d(v_1) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_1$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 4 \times 4 = 16.$$

$d(v_1) = 3$ , adalah yang berjarak 3 dari titik  $v_1$  sebanyak 1 sehingga

$$3 \times 1 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 4 kali maka } 3 \times 4 = 12.$$

$d(v_2) = 1$ , adalah yang berjarak 1 dari titik  $v_2$  sebanyak 3 sehingga

$$1 \times 3 = 3 \text{ dan dihitung sebanyak 2 kali maka } 3 \times 2 = 6.$$

$d(v_2) = 2$ , adalah yang berjarak 2 dari titik  $v_2$  sebanyak 2 sehingga

$$2 \times 2 = 4 \text{ dan dihitung sebanyak 2 kali maka } 4 \times 2 = 8.$$

Selanjutnya dari hasil di atas dijumlahkan  $8 + 16 + 12 + 6 + 8 = 50$ . Karena

untuk setiap  $v, s \in V(L_n)$ ,  $d(v, s) = d(s, v)$ , jadi  $\frac{50}{2} = 25$  maka Indeks Wiener

dari  $L_3$  adalah 25.

Berdasarkan perolehan Indeks Wiener dari graf tangga di atas, maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.4 Indeks Wiener pada Graf Tangga

No	Graf	Indeks Wiener
1	$L_2$	8
2	$L_3$	25
3	$L_n$	$W(L_n) = \frac{1}{3}n(n+2)(2n-1)$

Penulis menetapkan hasil ini dalam teorema sebagai berikut:

**Teorema 4.**

Untuk setiap bilangan asli  $n > 1$ ,  $W(L_n) = \frac{1}{3}n(n+2)(2n-1)$

**Bukti :**

Misalkan  $P_{i_t}$  adalah persegi ke- $t$  pada  $L_n$  yang berurutan sebanyak  $i$  dan  $\overline{P_{i_t}}$  adalah jumlah semua jarak antar titik-titik ujung pada  $P_{i_t}$ . Untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , jelas bahwa banyaknya  $P_{i_t}$  pada  $L_n$  adalah  $n-i$  dan  $\overline{P_{i_t}} = 2((1) + (i) + (i+1)) = 4(i+1)$ . Selain itu, Karena untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , jarak antar titik yang lintasan terpendeknya sisi tegak pada perhitungan  $\sum_{t=1}^n \overline{P_{i_t}}$  dihitung sebanyak  $2(n-i)$ , serta banyaknya jarak antar titik yang lintasan terpendeknya sisi tegak adalah  $n$  dan jarak tersebut adalah 1, maka

$$\begin{aligned}
 W(L_n) &= n + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \left( \sum_{t=1}^{n-i} \overline{P_{i_t}} \right) - 2(n-i) \right) \\
 &= n + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \left( \sum_{t=1}^{n-i} 4(i+1) \right) - 2(n-i) \right) \\
 &= n + \sum_{i=1}^{n-1} (4(n-i)(i+1) - 2(n-i)) \\
 &= n + \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i)(2i+1)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}n(n+2)(2n-1)$$

Jadi terbukti bahwa  $W(L_n) = \frac{1}{3}n(n+2)(2n-1)$  ■

### 3.5 Teori Graf dalam Kajian Agama Islam

Dari beberapa rumus di atas, jika direlevansikan dengan kajian agama adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT sesuai dengan kadar dan ukurannya dan ditata-Nya dengan sedemikian rapi. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”.

Juga dalam surat Al-Furqan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: “*Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya*”.

Maksud dari kata dapat direlevansikan antara konsep awal dari masalah jumlah titik dan pasangan setiap titik ke titik-titik yang lain dengan kajian agama Islam adalah bahwa berdasarkan ayat di atas yang menyebutkan masalah kadar dan ukuran dari segala yang ada di muka bumi, yang menurut penafsiran (Shihab,

2002:482) yakni *ketentuan dan sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu yang ada di muka bumi ini*. Sehingga dengan kekuasaan-Nya maka semua akan terlihat rapi dan sempurna. Sama halnya dengan masalah jumlah titik graf khususnya adalah graf sikel berambut, graf helm, graf helm tertutup, dan graf tangga yang mana banyak membutuhkan kadar dan ukuran yang berarti aturan-aturan dan rumus-rumus yang digunakan untuk mempermudah dalam menemukan Indeks Wiener pada pencarian jumlah titik dari graf terhubung tersebut.

Penemuan sekaligus pembuktian rumus-rumus yang digunakan dalam mencari semua lintasan dan pasangan titik ke titik-titik yang lain pada graf sikel berambut, graf helm, graf helm tertutup, dan graf tangga ini bertujuan untuk mempermudah dalam menemukan Indeks Wiener pada graf sikel berambut, graf helm, graf helm tertutup, dan graf tangga. Setelah mengetahui dengan jelas hasil dari pembahasan di atas yang intinya adalah menemukan rumus untuk Indeks Wiener pada graf terhubung pembuktian sekaligus penggambaran dari grafnya, ternyata semuanya telah benar terbukti.

Jika dikaitkan dengan kajian agama Islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al-Qur'an yang menyebutkan bahwa kebenaran sesuatu tidak cukup hanya dengan bentuk ucapan, dan tulisan saja, tetapi perlu dan harus dibuktikan. Hal ini sesuai dengan pada surat Al-Baqarah ayat 111:

وَقَالُوا لَنْ يَدْخُلَ الْجَنَّةَ إِلَّا مَنْ كَانَ هُودًا أَوْ نَصْرِيًّا تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْ قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِنْ كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya: "Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau

*Nasrani". demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar"*".

Allah SWT tidak memerlukan bukti dari mereka menyangkut kebohongan mereka, karena Allah Maha Mengetahui segala sesuatu. Tetapi manusia perlu. Karena itu, di sisi Allah memerintahkan Nabi Muhammad SAW: *katakanlah* wahai muhammad kepada mereka, "*Tunjukkanlah kami bukti kebenaran kamu jika kamu adalah orang yang benar*". Bukti yang maksud disini adalah berupa wahyu Illahi, karena surga dan neraka adalah wewenang Allah. Hanya Dia yang mengetahui siapa yang berhak memasukinya. Nabi Muhammad SAW pun tidak tahu. Itu sebabnya, maka bukti kebenaran yang dituntut adalah informasi-Nya, yakni wahyu-wahyu yang disampaikan kepada utusan-utusan-Nya (Shihab, 2002:297).

Sebagai akhir dari penulis tentang relevansi antar konsep salah satu cabang matematika yaitu teori graf khususnya masalah pencarian Indeks Wiener pada graf dengan kajian agama Islam, yang sekaligus merupakan hal yang utama yang dapat dijadikan sebagai refleksi dari semuanya yakni ternyata setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung-menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansikan dalam agama Islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku sang pencipta yang serta Maha, salah satunya adalah Maha Matematisi. Karena Dialah sang raja yang sangat cepat dan teliti dalam semua

masalah perhitungan (Abdusysykir, 2007:83). Hal ini sesuai dalam Al-Qur'an surat Al-Maryam ayat 94:

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

*Artinya: “Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti”.*

Dari sini terlihat dan dipahami oleh banyak ulama' sebagai “Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak. Seperti hembusan nafas, rincian perolehan rizki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang”. Betapa kuasanya Allah dalam melakukan perhitungan meskipun pada dzat yang terkecil yang tak akan mampu dihitung dengan kasat mata manusia. Hal ini terbukti, bahwa di dalam Al-Qur'an disiplin ilmu matematika tidak hanya membahas masalah perhitungan angka saja, tetapi juga membahas masalah himpunan, bilangan, pengukuran, statistika, estimasi, dan masih banyak lagi keajaiban-keajaiban matematika yang terdapat dalam Al-Qur'an.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Pada graf sikel berambut  $hC_n$  diperoleh rumus Indeks Wiener yaitu

$$w(hC_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 2) ; n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}n(n^2 + 4n - 3) ; n \text{ ganjil} \end{cases}$$

2. Pada graf helm  $H_n$  diperoleh rumus Indeks Wiener yaitu  $H_n = 6n(n - 1)$
3. Pada graf helm tertutup  $cH_n$  diperoleh rumus Indeks Wiener yaitu

$$W(cH_n) = \begin{cases} 5n(n - 1) ; 3 \leq n \leq 5 \\ 153 ; n = 6 \\ 6n^2 - 11n ; \text{ untuk } n > 6 \end{cases}$$

4. Pada graf tangga  $L_n$  diperoleh rumus Indeks Wiener yaitu

$$W(L_n) = \frac{1}{3}n(n+2)(2n-1).$$

#### 4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah menentukan bentuk umum Indeks Wiener dari graf sikel berambut, graf helm, graf helm tertutup, dan graf tangga. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah Indeks Wiener terhadap graf yang lain.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, Fifi, F.N., dan Nilna. N.A.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Press.
- Abdusysyagir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Press.
- Al-Hagri, G., Essalih, M., dan El-Maraki, M.. 2011. The Indeks Wiener of Some Particular Graph. *Journal of Computer Science and Network Security*. Vol. 11 No. 5.
- Bahri, M.R.N.. 2012. Boxicity pada Graf Roda ( $W_n$ ), Graf Helm ( $H_n$ ), Graf Helm Tertutup ( $CH_n$ ) dan Graf Sikel Berambut ( $hC_n$ ). *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Chatrand, G. and Lesniak, L.. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Chatrand, G. and Lesniak, L.. 1996. *Graphs and Digraphs Third Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Ilmiyah, N.N.. 2011. Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Tangga  $L_n$ , Graf Star  $S_n$ , dan Graf Double Star  $S_{n,n+1}$ . *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Kerami, D. dan Sitanggang. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.
- Mas'udah, L.. 2010. Graf Garis dari Graf Helm dan Graf Helm Tertutup. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Muftie, A.. 2004. *Matematika Alam Semesta: Kodifikasi Bilangan Prima dalam Al-Qur'an*. Bandung: PT Kiblat Buku Utama.
- Naga, D.S.. 1980. *Berhitung: Sejarah dan Perkembangannya*. Jakarta: PT Gramedia.
- Purwanto. 1998. *Teori Graf*. Malang: IKIP MALANG.
- Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir al-Misbah Pesan Kesandan Keserasian Al-Qur'an Volume 12*. Jakarta: Lentera Hati.
- Shihab, M.Q.. 2003. *Tafsir al-Misbah Pesan Kesandan Keserasian Al-Qur'an Volume 11*. Jakarta: Lentera Hati.

Vasudev, C.. 2007. *Combinatorics and Graph Theory*. New Delhi: New Age International.

