

**PENYELESAIAN PERSAMAAN VIBRASI DENGAN MENGGUNAKAN  
METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF 45)**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**LAILATUL MAGHFIRAH**  
NIM. 08610055



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2014**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN VIBRASI DENGAN MENGGUNAKAN  
METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF 45)**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada:  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:  
LAILATUL MAGHFIRAH  
NIM. 08610055**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2014**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN VIBRASI DENGAN MENGGUNAKAN  
METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF 45)**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**LAILATUL MAGHFIRAH**  
**NIM. 08610055**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal: 11 Juni 2014

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Ari Kusumastuti, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd  
NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN PERSAMAAN VIBRASI DENGAN MENGGUNAKAN  
METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF 45)**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**LAILATUL MAGHFIRAH**  
**NIM. 08610055**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 2 Juli 2014

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

Penguji Utama: Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 2 004

\_\_\_\_\_

Ketua Penguji: Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

\_\_\_\_\_

Sekretaris Penguji: Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004

\_\_\_\_\_

Anggota Penguji: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd  
NIP. 19710420 200003 1 003

\_\_\_\_\_

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lailatul Maghfirah

NIM : 08610055

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penyelesaian Persamaan Vibrasi dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa penelitian yang peneliti tulis ini benar-benar merupakan hasil karya peneliti sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang peneliti akui sebagai hasil tulisan atau pikiran peneliti sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan penelitian ini hasil jiplakan, maka peneliti bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Juni 2014  
Yang membuat pernyataan,

Lailatul Maghfirah  
NIM. 08610055

## *MOTTO*

*“Hidup adalah soal keberanian,  
menghadapi yang tanda tanya  
tanpa bisa kita mengerti, tanpa bisa kita menawar,  
terimalah dan hadapilah”*

*-Soe Hok Gie-*



## PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan kepada kedua orang tua tercinta, Ayahanda yang selalu bekerja keras dan tanpa lelah untuk selalu membimbing dan ibunda tersayang yang selalu memberi dukungan moril serta menjadi motivator yang hebat dalam hidup. Hanya kata sederhana yaitu “terima kasih” atas segala pengorbanan yang telah kalian berikan, kalian sangat berjasa dalam perjalanan ini serta tiada henti untuk mendoakan.

Tak lupa untuk adik, kakak, dan keponakan tersayang yang selalu memberi semangat dan dukungan.



## KATA PENGANTAR

*Assalamualikum Warahmatullahi Wabarokatuh*

Alhamdulillah, puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas segala rahmat, karunia, dan kenikmatan hidup sehingga penulisan skripsi ini yang berjudul “Penyelesaian Persamaan Vibrasi dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)” dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad Saw. nabi akhir jaman pembawa kebenaran dan kesempurnaan.

Karya ini dapat diselesaikan sesuai harapan tidak lepas dari pihak-pihak yang memberikan motivasi serta bimbingan dan bantuan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Bayyinatul Muchtaromah, drh, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd dan H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang dengan penuh kesabaran telah memberikan bimbingan dan dukungan sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
5. Fachrur Rozi, M. Si selaku dosen wali yang selalu memberi bimbingan dan dukungan selama menempuh perkuliahan.

6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang telah mencurahkan cinta dan kasih sayang teriring do'a dan selalu memberikan motivasi.
8. Sumber inspirasi penulis: Lukman Hakim, Angga Teguh dan Azwar Riza Habibi yang dengan rendah hati membagi ilmu dan pengalamannya.
9. Sahabat-sahabat penulis: Gilang Triyono, Nurfiyari, Uun Khoriantari, Eva Kusmiati, Nur Miftahul Hidayati, Farah Rahmah, Rendra Bagti Nugraha, Siti Jail Ghufiroh, Dini Tania Hanawati, dan Maslihatul Habibah. Terima kasih atas semangat dan kebersamaannya.
10. Saudara-saudara di KSR-PMI Unit Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang selalu memberikan warna kehidupan.
11. Serta teman-teman seperjuangan di Jurusan Matematika angkatan 2008 yang tidak kenal lelah untuk terus belajar.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Peneliti menyadari bahwa penelitian ini jauh dari sempurna, untuk itu peneliti mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi sempurnanya penelitian ini. Akhirnya, semoga tulisan sederhana ini dapat memberikan manfaat serta menjadi wacana baru bagi pembaca. Amin.

Malang, Maret 2014

Penulis

**DAFTAR ISI**

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xi
<b>ABSTRAK</b> .....	xii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiii
<b>مستخلص البحث</b> .....	xiv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan Penelitian.....	6
1.4 Batasan Masalah.....	7
1.5 Manfaat Penelitian .....	7
1.6 Metode Penelitian.....	7
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan Vibrasi.....	9
2.2 Persamaan Vibrasi sebagai Persamaan Diferensial Biasa .....	11
2.3 Metode Runge Kutta .....	13
2.4 Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) .....	16
2.5 Persamaan Linier Homogen dengan Koefisien Konstan.....	17
2.6 Kajian Agama.....	18
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Penyelesaian Persamaan Vibrasi .....	21
3.2 Kajian Agama.....	36
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan.....	39
4.2 Saran.....	40
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>	

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik Periode dan Amplitudo dari Vibrasi .....	9
Gambar 3.1 Kasus Persamaan Vibrasi .....	21
Gambar 3.2 Grafik Penyelesaian Persamaan Vibrasi dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) .....	31
Gambar 3.3 Grafik Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik pada Persamaan Vibrasi .....	34
Gambar 3.4 Grafik Perbandingan Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik pada Persamaan Vibrasi .....	35



## ABSTRAK

Maghfirah, Lailatul. 2014. **Penyelesaian Persamaan Vibrasi dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
(II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

**Kata kunci:** Persamaan Vibrasi, Runge Kutta Fehlberg (RKF 45).

Persamaan vibrasi merupakan persamaan diferensial biasa orde dua. Metode numerik merupakan alternatif dari metode analitik untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Dalam skripsi ini, persamaan vibrasi tersebut akan diselesaikan dengan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan dibandingkan dengan solusi analitiknya.

Langkah pertama yang dilakukan adalah mereduksi persamaan vibrasi yang merupakan persamaan diferensial biasa orde dua menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu. Selanjutnya akan didapatkan sistem persamaan vibrasi orde satu. Setelah mendapatkan sistem persamaan orde satu harus menentukan koefisien, nilai awal dan domain dari sistem persamaan tersebut. Langkah selanjutnya adalah menyelesaikannya dengan metode Runge Kutta Fehlberg. Untuk mengetahui besar *error* dari solusi tersebut maka sistem persamaan vibrasi juga diselesaikan dengan metode analitik. Selanjutnya dari kedua metode penyelesaian tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui efisiensi metode numeriknya. Setelah membandingkan kedua metode tersebut, diketahui nilai *error*-nya sangat kecil dan mendekati nol. Maka dapat disimpulkan bahwa metode Runge Kutta Fehlberg merupakan metode numerik yang efisien dan memiliki ketelitian tinggi dan dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan vibrasi.

## ABSTRACT

Maghfirah, Lailatul. 2014. **Solving Vibration Equation with Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) Method.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

(II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

**Keywords :** Vibration Equations, Runge Kutta Fehlberg (RKF 45).

Vibration equation is a second order ordinary differential equation. Numerical method is an alternative of the analytical method to solve the equation. In this thesis, the vibration equations will be solved numerically using Runge Kutta Fehlberg method.

The first step to solve this equation is the reduction of the second order ordinary differential equations into the ordinary differential equations system of first order. From that process the system of first order vibration equation is obtained. After obtaining the first order equation system, the we determine the coefficient, initial value, and the domain of the system. Next step is to solve the system with the Runge Kutta Fehlberg Method. To find the error of the solution, the system of equations will also be solved analytically. Then these two solutions are compared to determine the reliability of the numerical method used to solve the system of equation. After comparing these two methods, we obtain the fact that the error is very small and close to zero. Therefore it can be concluded that the Runge Kutta Fehlberg method is a reliable numerical method and has high accuracy and can be applied to solve a vibration equation.

## مستخلص البحث

مغفرة ، الليلة ، الساعة 2014. حل المعادلات اهتزازية باستخدام طريقة رونج كوتا فيهلبرغ .البحث. القسم الرياضيات الكلية العلمية والتكنولوجيا الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج .

المشرف: (١) آري كسوماستوتي الماجستير، (٢) الحاج وحيوهنغي إروان الماجستير ، الكلمات الرئيسية: المادلات الإحتزازية، رونج كوتا فيهلبرغ .

المعادلة الاهتزازية هي المعادلة التفاضلية العادية على رتبة الثانية. طريقة عددية هي طريقة بديلة لحل المعادلة تحليلية. في هذا البحث الورقة، سيتم حل المعادلة الاهتزازية من خلال طريقة رونج كوتا فيهلبرغ (RKF45) وبالمقارنة مع الحل التحليلي .

فإن الخطوة الأولى هي للحد المادلة الإهتزازية التي كانتى المادلة التفاضلية العادية على تبي الثانية الى نظام المعادلة التفاضلية المعادلة التفاضلية العادية على الرتبة تالولى . علاوة على ذلك، نحصل على نظام المعادلات الإهتزازية على تبية الأولى. بعد الحصول على نظام المعادلات على تبية الأولى يجب تحديد معاملات، قيمتها الأولى، مجال نظام المعادلة. الخطوة التالية هي الحل بطريقة رونج كوتافيهل . للعثور على خطأ هذه الطريقة، يتم حل نظام المعادلة الاهتزازية تحليلية. وعلاوة على ذلك، سيتم مقارنة طريقتين لتحديد كفاءة طريقة عددية.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Banyak masalah yang melibatkan konsep matematika yang muncul dalam bidang teknik dan ilmu pengetahuan alam. Masalah-masalah tersebut dapat dirumuskan dalam persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*). Sebagai contoh dalam bidang fisika terdapat persamaan vibrasi yang dimodelkan dalam persamaan diferensial biasa.

Persamaan vibrasi dikenal pula dengan sebutan persamaan getaran. Fenomena vibrasi bukan hal yang baru bagi masyarakat umum. Orang awam sekalipun dapat mengidentifikasi masalah vibrasi dengan mudah. Sikat gigi listrik, getaran dari kristal kuarsa pada jam tangan, ayunan pendulum jam kuno, senar gitar yang dipetik, gerakan maju mundur piston-piston pada mesin mobil, dan massa yang dikaitkan pada pegas merupakan beberapa fenomena vibrasi yang sering ditemui pada kehidupan sehari-hari (Young dan Freedman, 2002:389).

Vibrasi atau getaran merupakan gerakan bolak-balik yang ada di sekitar titik keseimbangan. Kuat lemah getaran vibrasi dipengaruhi oleh besar kecilnya energi yang diberikan. Salah satu contoh paling sederhana dari vibrasi tersebut adalah massa yang dikaitkan pada pegas. Pada sistem pegas tersebut, terdapat gaya pemulih pegas dan dipengaruhi oleh hukum Newton kedua yang menghasilkan persamaan  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$  (King, 2009:4). Jika sebuah benda bergetar maka benda tersebut lama kelamaan akan berhenti dan kembali ke posisi semula. Hal ini disebabkan karena adanya gaya lain yang menghambat laju benda, gaya

tersebut lazim disebut dengan redaman sehingga persamaan awal vibrasi menjadi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \text{ (King, 2009:35).}$$

Vibrasi menggambarkan salah satu jenis gerak yang ada dalam kehidupan. Gerak periodik, gerak lurus beraturan dan gerak lurus berubah beraturan merupakan macam-macam gerak yang dapat dengan mudah kita jumpai. Persamaan vibrasi terdiri dari fungsi-fungsi yang dikenai operasi bilangan, sehingga menghasilkan fungsi baru dan membentuk suatu persamaan. Fungsi tersebut berupa  $m \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $b \frac{dx}{dt}$ , dan  $kx$  serta operasi bilangannya adalah operasi penjumlahan, sedangkan fungsi baru yang dihasilkan adalah 0.

Jika diperhatikan secara lebih seksama semua benda di alam semesta ini juga mengalami perlakuan yang sama seperti yang terjadi pada persamaan vibrasi, yaitu semua benda di alam semesta ini bergeak dan beredar. Bagian terkecil dari benda seperti atom sampai seluruh benda yang ada di alam semesta mulai dari bumi, planet dan matahari semua bergerak dan beredar. Semua itu dilakukan benda-benda di alam semesta ini untuk menjaga keseimbangan dan sebagai bentuk untuk menyembah pada Allah (Mulyono dan Abtokhi, 2006:33-34). Allah berfirman dalam Al-Qur'an:

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ ﴿٣٣﴾

*“Dan Dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya.”* (QS. Al-Anbiya': 33).

Dari ayat di atas dapat diketahui bahwasannya Allah telah menjelaskan di dalam Al-Qur'an bahwa matahari dan bulan yang mewakili alam semesta memang bergerak dan beredar. Selain itu bila ayat di atas dikaji lebih mendalam lagi, dapat diketahui pula bahwa matahari dan bulan ibarat fungsi yang diciptakan

Allah. Fungsi tersebut dikenai operasi berupa peredaran pada garis edarnya. Hal tersebut dapat menghasilkan suatu fenomena yang diibaratkan fungsi baru yaitu siang dan malam yang sesuai dengan ayat tersebut. Allah menciptakan alam semesta ini dengan penuh pertimbangan untuk mempermudah setiap makhluk ciptaan-Nya. Pola ini diadopsi oleh manusia yang tak lain adalah makhluk ciptaan Allah untuk mengembangkan ilmu pengetahuan. Hal ini tertuang dalam persamaan vibrasi yang terdiri dari fungsi  $m \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $b \frac{dx}{dt}$ , dan  $kx$  fungsi tersebut dikenai operasi penjumlahan yang menghasilkan nilai 0.

Masalah persamaan vibrasi dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Kelebihan metode ini adalah dapat diterapkan pada masalah persamaan yang tidak linier serta kompleks. Metode numerik lebih akurat dalam menyelesaikan persamaan dengan kesalahan yang sekecil-kecilnya. Selain itu, metode numerik juga dapat menangani galat (*error*) suatu nilai hampiran dari masalah rekayasa yang merupakan bagian dari paket program yang bersekala besar. Mampu menangani sistem persamaan besar, ketaklinieran dan geometri yang rumit, metode numerik merupakan suatu teknik untuk menyelesaikan masalah matematika yang efektif dan efisien (Azhari, 2011).

Islam menegaskan bahwa terdapat masalah tertentu yang manusia tidak mampu melihat atau menafsiri dengan hasil yang “pasti”. Kepastian hanya Allah Yang Maha Tahu. Manusia hanya dituntut untuk berikhtiar atau berusaha sesuai dengan aturan yang ditetapkan dalam Islam (Machmud, 2005:26). Begitu juga dalam menyelesaikan permasalahan dalam matematika, dibutuhkan usaha yang bermacam-macam karena masalah dalam matematika memiliki karakteristik yang

berbeda-beda dan banyak metode yang dapat digunakan untuk mendapatkan hasil yang maksimal. Sebagaimana firman Allah Swt.:

وَاللَّيْلِ إِذَا يَغْشَىٰ ﴿١﴾ وَالنَّهَارِ إِذَا تَجَلَّىٰ ﴿٢﴾ وَمَا خَلَقَ الذَّكَرَ وَالْأُنثَىٰ ﴿٣﴾ إِنَّ سَعْيَكُمْ لَشَتَّىٰ ﴿٤﴾

*“Demi malam apabila menutupi (cahaya siang). Dan siang apabila terang benderang. Dan penciptaan laki-laki dan perempuan. Sesungguhnya usaha kamu memang berbeda-beda.”* (Qs. Al-Lail: 1-4).

Ayat di atas, menceritakan bahwa Allah menciptakan malam, siang, laki-laki, dan perempuan sebagai objek yang berbeda-beda. Objek-objek tersebut merupakan lambang dari macam-macam usaha yang harus dilakukan manusia untuk mengatasi masalah-masalah atau cobaan-cobaan yang diberikan Allah. Sama seperti metode numerik sebagai metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan vibrasi.

Sesuai dengan usaha yang harus dilakukan manusia, pada metode numerik terdapat beberapa variasi yang sering digunakan untuk menghitung solusi persamaan diferensial biasa yang meliputi metode Euler, metode Heun, metode deret Taylor, metode Runge Kutta, metode Runge Kutta Fehlberg. Keempat metode tersebut dianggap mampu menyelesaikan persamaan diferensial biasa, namun bila keempat metode tersebut dibandingkan dalam mengidentifikasi masalah persamaan vibrasi terutama dalam toleransi kesalahan dan ketepatan dalam mendapatkan penyelesaian analitik, maka metode Runge Kutta Fehlberg dinilai sebagai metode yang tepat.

Metode Runge Kutta Fehlberg termasuk metode Runge Kutta orde empat. Metode Runge Kutta sendiri memiliki beberapa tipe, yaitu metode Runge Kutta orde satu, orde dua, orde tiga, dan orde empat. Metode ini merupakan metode yang memiliki ketelitian hasil yang lebih baik dan tidak memerlukan turunan

fungsi. Semakin tinggi orde dari metode Runge Kutta maka tingkat ketelitian solusinya semakin tinggi pula. Meskipun metode Runge Kutta Fehlberg termasuk dalam metode Runge Kutta orde empat, akan tetapi metode ini memiliki ketelitian sampai orde lima. Ketelitian yang tinggi ini dimungkinkan karena metode Runge Kutta Fehlberg memiliki 6 buah konstanta perhitungan yang berperan untuk meng-*update* solusi sampai orde 5. Dengan kata lain, dapat dikatakan bahwa metode Runge Kutta Fehlberg merupakan metode Runge Kutta yang saat ini paling populer. Dengan menggunakan metode ini diharapkan dapat dihasilkan solusi dalam bentuk angka dan *error* yang kecil untuk penyelesaian persamaan vibrasi (Atkinson, 1989:429).

Berbagai persamaan diferensial termasuk persamaan vibrasi telah diselesaikan dalam berbagai penelitian sebelumnya. Pada tahun 2005 Rahayu Puji Utami mengkaji tentang penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode Runge Kutta. Siti Nur Urifah pada tahun 2008 juga meneliti tentang persamaan diferensial. Selain itu, pada tahun 2010 Syawaluddin mengkaji tentang persamaan vibrasi. Setelah mengkaji penelitian-penelitian terdahulu, pada penelitian ini dapat dikembangkan dengan memilih metode Runge Kutta Fehlberg sebagai metode numerik yang digunakan dan persamaan vibrasi sebagai persamaan yang akan diteliti.

Metode Runge Kutta Fehlberg adalah metode yang sangat populer karena kelebihan-kelebihan yang dimilikinya. Sedangkan dengan mengkaji dan menyelesaikan persamaan vibrasi diharapkan dapat memberikan kemudahan bagi peneliti-peneliti selanjutnya karena vibrasi adalah fenomena yang dapat ditemui dalam kehidupan sehari-hari dan dapat diketahui metode yang lebih akurat dalam

menyelesaikan persamaan vibrasi dibandingkan metode-metode yang telah digunakan sebelumnya.

Melihat karakteristik dari persamaan vibrasi dan beberapa metode numerik, diharapkan dapat menemukan solusi numerik yang mendekati kenyataan atau memiliki ketelitian yang lebih tinggi dan juga mudah dibuat programnya. Oleh karena itu, dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg yang merupakan metode Runge Kutta orde tinggi. Menggunakan orde yang lebih tinggi tentunya akan dihasilkan solusi yang lebih teliti. Penghitungan numerik merupakan penghitungan yang dilakukan dengan iterasi (pengulangan) yang banyak dan berulang-ulang. Oleh karena, itu diperlukan bantuan *software* untuk melaksanakan operasi hitungan tersebut.

Berdasarkan pemaparan di atas, penulis tertarik untuk menulis skripsi dengan judul “*Penyelesaian Persamaan Vibrasi dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)*”.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45).

#### 1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan penulis dalam penelitian ini adalah persamaan yang digunakan adalah persamaan vibrasi yang dipengaruhi oleh redaman pada pegas ideal yang berbentuk spin yang direntangkan pada bidang horizontal, secara matematika dirumuskan  $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$ . Dimana  $m = 20$  adalah massa,  $b = 11,5$  adalah tetapan redaman,  $k = 30$  adalah tetapan pegas. Nilai tersebut merujuk pada jurnal Syawaludin (2010:78). Sedangkan untuk penyelesaian numeriknya digunakan metode Runge Kutta Fehlberg.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah memahami metode Runge Kutta Fehlberg dalam penyelesaian masalah vibrasi baik secara numerik dan analitik.

#### 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Menyelesaikan persamaan vibrasi dengan metode Runge Kutta Fehlberg.
2. Menyelesaikan persamaan vibrasi dengan metode analitik.
3. Membandingkan penyelesaian persamaan vibrasi dengan metode Runge Kutta Fehlberg dengan penyelesaian analitik.
4. Interpretasi dan hasil.

#### 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

##### Bab I Pendahuluan

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, batasan masalah, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

## Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka terdiri dari persamaan vibrasi, persamaan vibrasi sebagai persamaan diferensial orde dua, metode Runge Kutta, metode Runge Kutta Fehlberg, dan persamaan linier homogen dengan koefisien konstan.

## Bab III Pembahasan

Pembahasan akan dibahas tentang penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg dan selanjutnya dibandingkan dengan solusi analitiknya.

## Bab IV Penutup

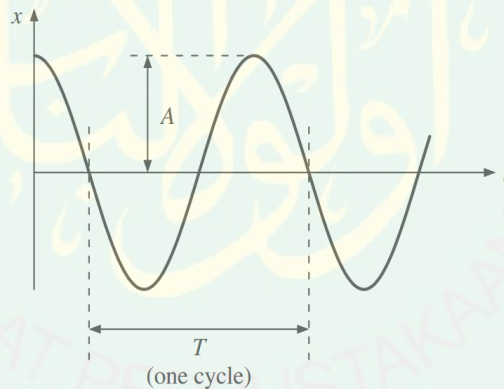
Berisi kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran-saran yang sesuai dengan hasil penelitian.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Vibrasi

Vibrasi adalah gerak bolak-balik secara berkala melalui titik seimbangnya. Beberapa istilah yang perlu diperhatikan dalam mempelajari vibrasi adalah periode dan frekuensi. Waktu yang dibutuhkan untuk menempuh satu lintasan bolak-balik disebut periode, sedangkan banyaknya getaran setiap satuan waktu disebut frekuensi (Silaban dan Sucipto, 1985:443). Apabila sebuah benda dengan massa tertentu diberikan gaya awal dengan simpangan tertentu, maka benda tersebut akan bergetar.



**Gambar 2.1:** Garfik Periode dan Amplitudo dari Vibrasi

Untuk lebih mudah memahami, pada gambar 2.1 ditunjukkan bahwa  $A$  merupakan amplitudo dan  $T$  adalah periode. Pada pegas ideal, getaran yang terjadi tidak dipengaruhi oleh gaya gravitasi. Jika massa ditarik untuk memperpanjang pegas kemudian dilepaskan, maka massa akan bergerak maju mundur secara periodik. Pergerakan ini sesuai dengan gaya awal yang diberikan pada benda.

Pada pegas ideal, gaya pemulih  $F$  selalu berbanding lurus dengan perpindahan dari posisi seimbang pegas  $x$ . Konstanta perbandingan antara  $F$  dan  $x$  adalah konstanta gaya  $k$ . Jika benda pada posisi seimbang maka pegas tidak melakukan gaya pada benda. Jika benda menyimpang ke kanan maka gaya yang dilakukan pegas berarah ke kiri. Jika benda menyimpang ke kiri maka gaya yang dilakukan pegas berarah ke kanan. Oleh karena itu dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = -kx \quad (2.1)$$

tanda negatif menunjukkan bahwa gaya selalu bertindak dalam arah yang berlawanan dengan perpindahan (Young and Freedman, 2002:391).

Sistem ini juga harus mematuhi hukum kedua Newton tentang gerak yang menyatakan bahwa gaya adalah sama dengan massa ( $m$ ) kali percepatan ( $a$ ), yaitu  $F = ma$ . Substitusikan persamaan (2.1) pada persamaan hukum kedua Newton, dengan demikian dapat diperoleh:

$$ma = -kx. \quad (2.2)$$

Mengingat bahwa kecepatan ( $v$ ) dan percepatan ( $a$ ) masing-masing adalah turunan pertama dan kedua dari perpindahan terhadap waktu, maka:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.3)$$

sehingga persamaan (2.3) dapat disubstitusikan pada persamaan (2.2), yaitu:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{atau} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.4)$$

persamaan di atas adalah persamaan getaran (vibrasi) sederhana (King, 2009:4).

Pada benda yang bergetar lama kelamaan benda tersebut akan berhenti dan kembali pada posisi semula. Hal ini disebabkan karena adanya gaya lain yang menghambat laju benda, gaya tersebut lazim disebut dengan gaya gesek atau

redaman. Redaman yang terjadi pada benda mengakibatkan terjadinya gaya tambahan pada benda, yaitu  $F = -bv$  dimana  $v$  merupakan kecepatan dan  $b$  adalah tetapan atau konstanta redaman. Tanda negatif menunjukkan arahnya yang selalu berlawanan dengan gerakan massa. Gaya total yang terjadi pada benda adalah:

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \text{ atau } m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.5)$$

persamaan di atas merupakan persamaan vibrasi dengan redaman, dengan  $m$  adalah massa pegas,  $k$  adalah tetapan pegas,  $b$  adalah tetapan redaman, dan  $x$  adalah perpindahan pegas (Young and Freedman, 2002:408).

Persamaan (2.5) mengandung  $x$  yang merupakan fungsi dari  $t$ , Persamaan (2.5) di atas mengandung fungsi yang tidak diketahui rumus eksplisitnya. Persamaan vibrasi di atas termasuk dalam persamaan diferensial biasa orde dua (Munir, 2006:361).

## 2.2 Persamaan Vibrasi sebagai Persamaan Diferensial Biasa

Menurut Ross (1984:3), persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dikelompokkan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa atau *ordinary differential equation* adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas, contoh dari persamaan diferensial biasa adalah persamaan vibrasi  $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$ . Persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap

lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial atau *partial differential equation*, contoh dari persamaan diferensial parsial adalah persamaan gelombang  $\frac{\partial u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ .

Persamaan difrensial juga dapat dikelompokkan menurut ordenya, berdasarkan turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaannya. Persamaan diferensial biasa orde satu merupakan persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya adalah turunan pertama contohnya adalah persamaan vibrasi yang direduksi menjadi persamaan diferensial biasa orde satu  $\frac{dx}{dt} = y(t)$  dan  $\frac{dy}{dt} = -\frac{b}{m}y(t) - \frac{k}{m}x(t)$ . Persamaan diferensial biasa orde dua merupakan persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya adalah turunan kedua contohnya adalah persamaan vibrasi  $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$ . Sedangkan persamaan diferensial orde tinggi merupakan persamaan diferensial biasa orde tiga ke atas (Munir, 2006:362).

Pada penelitian ini, yang akan dikaji adalah persamaan vibrasi yang berbentuk persamaan diferensial biasa orde dua. Tetapi untuk menyelesaikannya dengan metode Runge Kutta Fehlberg persamaan vibrasi tersebut harus direduksi menjadi persamaan diferensial biasa orde satu.

Selain dibedakan menurut variabel bebasnya, persamaan diferensial juga dapat dibedakan dari derajat fungsinya. Suatu persamaan diferensial dikatakan homogen jika persamaan tersebut berbentuk  $y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$  dimana fungsi  $g$  dan  $h$  adalah fungsi-fungsi homogen dengan derajat yang sama. Selain itu, persamaan diferensial dikatakan homogen jika pada persamaan fungsi tersebut harus sama dengan (0). Namun jika persamaan tersebut memiliki fungsi  $g$  dan  $h$  yang

memiliki derajat yang tidak sama dan tidak bernilai sama dengan nol (0) maka persamaan tersebut termasuk persamaan diferensial non homogen (Finizio dan Ladas, 1988:45).

Sebagai contoh persamaan vibrasi  $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$  merupakan persamaan diferensial homogen karena fungsi  $\frac{d^2x}{dt^2}$  dan  $\frac{dx}{dt}$  pada persamaan tersebut merupakan fungsi dengan derajat yang sama dan juga pada persamaan vibrasi persamaan fungsinya sama dengan nol (0).

### 2.3 Metode Runge Kutta

Menurut Triatmodjo (2002:182) metode Runge Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Melihat karakteristik yang dimiliki metode Runge Kutta, maka metode ini dapat digunakan sebagai penyelesaian numerik persamaan vibrasi.

Menurut Chapra (2006:493) bentuk umum metode Runge Kutta orde- $n$  adalah:

$$y_{i+1} = y_i + a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (2.6)$$

dengan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  adalah tetapan,

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

...

$$k_n = hf(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})$$

dengan nilai  $p$  dan  $q$  adalah konstanta. Nilai  $k$  menunjukkan hubungan yang berurutan, karena  $k_1$  muncul dalam persamaan untuk menghitung  $k_2$ , dan juga muncul dalam persamaan untuk menghitung  $k_3$  dan seterusnya.

Ada beberapa tipe metode Runge Kutta yang bergantung pada nilai  $n$  yang digunakan. Untuk  $n = 1$ , disebut metode Runge Kutta orde satu atau disebut juga metode Euler. Menurut Munir (2006:385) metode Runge Kutta orde satu berbentuk:

$$y_{i+1} = y_i + k_1 \quad (2.7)$$

dimana

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \quad (2.8)$$

Nilai  $k_1$  pada persamaan (2.8) tidak perlu diuraikan karena sudah dalam bentuk yang sederhana.

Sedangkan untuk  $n = 2$ , disebut metode Runge Kutta orde dua. Menurut Chapra (2006:495) metode Runge Kutta mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (2.9)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) \quad (2.10)$$

melihat dari bentuk umum persamaan Runge Kutta orde dua pada persamaan (2.9) dan (2.10). Sesungguhnya metode Runge Kutta orde dua tersebut sama dengan metode Heun tanpa iterasi *corrector*-nya.

Selain metode Runge Kutta orde dua, juga terdapat metode Runge Kutta orde tiga dengan  $n = 3$ . Menurut Butcher (2008:95) metode Runge Kutta mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right) \quad (2.11)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2) \quad (2.12)$$

Metode Runge Kutta orde tiga ini memiliki tingkat ketelitian lebih tinggi dibandingkan dengan metode sebelumnya.

Metode Runge Kutta orde empat dengan  $n = 4$  adalah metode Runge Kutta yang paling populer, karena metode ini sering digunakan dalam ilmu komputasi. Menurut Dukkupati (2010:290) berikut adalah rumus umum metode Runge Kutta orde empat:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) \quad (2.13)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \quad (2.14)$$

Semakin tinggi orde pada metode Runge Kutta maka akan mendapatkan nilai *error* yang semakin kecil sehingga solusi yang didapatkan juga akan semakin teliti. Tapi ketelitian itu didapatkan dengan jumlah komputasi yang semakin banyak pula.

#### 2.4 Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)

Metode Runge Kutta Fehlberg tergolong dalam keluarga metode Runge Kutta orde empat, akan tetapi memiliki ketelitian sampai orde lima. Ketelitian yang tinggi ini dimungkinkan karena metode Runge Kutta Fehlberg memiliki 6 buah konstanta perhitungan antara yang berperan untuk meng-*update* solusi sampai orde lima. Galat pemotongan pada metode ini dihitung dengan membandingkan hasil perhitungan  $y_{r+1}$  dengan hasil perhitungan  $y_{r+1}$  pada orde selanjutnya (Atkinson, 1989:429). Dengan kata lain, dapat dikatakan bahwa metode Runge Kutta Fehlberg merupakan metode Runge Kutta yang saat ini paling populer. Menurut Burden dan Faires (2011:296) metode ini menggunakan pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde lima:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_k + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

Untuk menaksir pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde empat, diberikan:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (2.15)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$\begin{aligned}
 k_4 &= hf(x_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 + \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3) \\
 k_5 &= hf(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4). \\
 k_6 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5) \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Dari penghitungan variabel-variabel di atas, dapat dikatakan bahwa dalam menyelesaikan masalah matematika dengan metode numerik, dibutuhkan ketelitian. Karena penghitungan dalam metode numerik dilakukan secara berulang-ulang (menggunakan beberapa iterasi) dan dalam metode numerik juga digunakan atau diperhitungkan bilangan mulai yang sangat kecil sampai yang paling besar.

Pada setiap perhitungan yang menggunakan metode numerik, sangat penting melakukan *control error* atau mengontrol galat. Karena perhitungan numerik selalu menggunakan hampiran atau pendekatan untuk memperoleh hasil yang diinginkan. Dalam memperhitungkan galat dibutuhkan ketelitian yang tinggi. Ketelitian ini menjadi sangat penting karena galat merupakan besarnya kesalahan suatu metode numerik.

## 2.5 Persamaan Linier Homogen dengan Koefisien Konstan.

Persamaan linier homogen dengan koefisien konstan berbentuk:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.17)$$

dengan  $m, b$ , dan  $k$  adalah konstanta riil dan  $a \neq 0$  maka untuk mendapatkan solusi umum dari persamaan (2.17) adalah dengan menentukan persamaan karakteristiknya. Persamaan karakteristik dari persamaan (2.17) adalah:

$$mx^2 + bx + k = 0 \quad (2.18)$$

selanjutnya, mencari nilai akar-akar dari persamaan karakteristiknya. Nilai akar-akarnya dapat diperoleh dengan:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ dan } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.19)$$

sehingga solusi untuk persamaan linier homogen dengan koefisien konstan adalah:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (2.20)$$

dengan nilai  $r_1$  dan  $r_2$  bergantung pada nilai  $b^2 - 4ac$ . Ketika  $b^2 - 4ac > 0$ , akar  $r_1$  dan  $r_2$  adalah riil dan nyata. Jika  $b^2 - 4ac = 0$ , maka akar-akarnya riil dan sama. Ketika  $b^2 - 4ac < 0$ , maka akar-akarnya adalah bilangan kompleks (Dawkins, 2007:109).

## 2.6 Kajian Agama

Telah dijelaskan pada uraian surat Al-Anbiya' ayat 33 bahwa persamaan vibrasi terdiri dari beberapa fungsi yang dikenai operasi bilangan penjumlahan. Setiap fungsi dalam persamaan vibrasi tersebut memiliki kedudukan yang tidak dapat digantikan oleh fungsi yang lain. Karena mereka memiliki tugas masing-masing yang telah dijelaskan dalam uraian di atas. Allah menciptakan setiap benda di bumi juga bukan tanpa tujuan, akan tetapi mereka memiliki manfaat bagi kehidupan manusia. Allah berfirman dalam Al-Qur'an:

لَا الشَّمْسُ يَنْبَغِي لَهَا أَنْ تُدْرِكَ الْقَمَرَ وَلَا اللَّيْلُ سَابِقُ النَّهَارِ ۚ وَكُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ ﴿٤٠﴾

“Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang. dan masing-masing beredar pada garis edarnya” (QS. Yasin: 40).

Gambaran tugas dan kedudukan dari fungsi-fungsi pada persamaan vibrasi dapat dijabarkan pada tugas matahari dan bulan seperti ayat di atas. Pada siang

hari, matahari yang berfungsi menerangi bumi, walaupun terkadang bulan juga muncul pada siang hari. Sedangkan pada malam hari yang menerangi bumi adalah bulan. Walaupun matahari dan bulan memiliki fungsi masing-masing, mereka tetap berada pada kedudukan mereka masing-masing dan beredar pada garis edarnya.

Metode Runge Kutta Fehlberg adalah salah satu dari sekian banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan vibrasi. Metode Runge Kutta Fehlberg merupakan metode alternatif yang dapat ditempuh untuk dapat menyelesaikan masalah-masalah dalam matematika yang terkendala dengan metode sebelumnya. Orang yang beriman akan selalu belajar. Orang yang beriman juga merupakan orang yang selalu berikhtiar untuk menyelesaikan masalah yang dihadapinya. Masalah-masalah dalam kehidupan manusia sangatlah beragam, mulai dari yang paling sederhana sampai yang paling rumit, tetapi orang yang beriman tidak akan mudah menyerah pada masalah yang dihadapi dan selalu berikhtiar mencari solusi untuk menyelesaikannya.

إِن فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang yang berakal” (QS. Ali Imron: 190).*

Firman Allah di atas menjelaskan bahwa penciptaan langit dan bumi serta bergantinya siang dan malam merupakan tanda-tanda kebesaran Allah Sang Pemilik Ilmu. Dalam ayat ini Allah memerintahkan manusia untuk terus belajar, karena hanya orang yang berfikir dan berakal yang dapat menyadari kebesaran Allah. Allah memberikan akal pada manusia dan memberikan tanda-tanda kebesaran Allah melalui fenomena alam yang terjadi untuk digunakan dan

dipelajari oleh manusia agar manusia selalu mengingat akan kebesaran Allah dan senantiasa bersujud pada-Nya. Metode Runge Kutta ini adalah salah satu dari sekian banyak hasil berfikir manusia yang hasilnya bermanfaat untuk kehidupan manusia itu sendiri dan juga memberikan kemudahan bagi manusia dalam menjalani kehidupan sehari-hari.



### BAB III

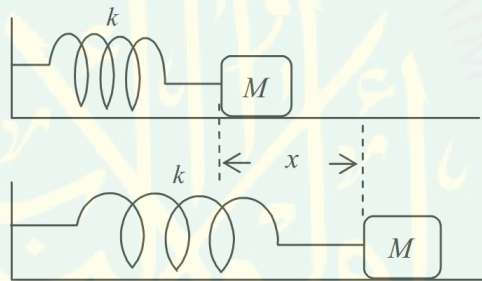
### PEMBAHASAN

#### 3.1. Penyelesaian Persamaan Vibrasi

Rumus umum persamaan vibrasi dengan redaman adalah:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3.1)$$

dengan  $m$  adalah massa pegas,  $k$  adalah tetapan pegas,  $b$  adalah tetapan redaman, dan  $x$  adalah perpindahan pegas.



**Gambar 3.1:** Kasus Persamaan Vibrasi

Persamaan vibrasi merupakan persamaan diferensial biasa orde dua karena turunan tertingginya adalah turunan kedua. Sedangkan metode Runge Kutta Fehlberg adalah metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu. Oleh karena itu, persamaan vibrasi harus direduksi ke dalam persamaan diferensial biasa orde satu. Untuk mengubah persamaan vibrasi (3.1) maka:

$$\text{dimisalkan } \frac{dx}{dt} = y. \quad (3.2)$$

Substitusikan persamaan (3.2) pada persamaan (3.1) maka persamaan (3.1) dapat ditulis:

$$m \frac{dy}{dt} + by + kx = 0. \quad (3.3)$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa orde satu dimana sistem persamaan tersebut bergantung terhadap waktu ( $t$ ), sistem tersebut dapat ditulis:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{b}{m}y - \frac{k}{m}x. \end{cases} \quad (3.4)$$

Selanjutnya sistem persamaan (3.4) akan diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg. Koefisien-koefisien yang terdapat dalam persamaan vibrasi dapat diperoleh sesuai dengan jurnal Syawaluddin (2010:78), massa ( $m$ ) = 20, koefisien redaman ( $b$ ) = 11,5 dan tetapan pegas ( $k$ ) = 30. Selanjutnya nilai awal  $x(0) = 15$  dan  $y(0) = 45$ , dimana  $x(0)$  merupakan simpangan awal atau jarak awal yang diberikan pada pegas dan  $y(0)$  merupakan kecepatan awal yang diberikan pada pegas dengan  $t = 0:20$  karena pada saat  $t = 20$  dirasa pergerakan pegas sudah stabil dengan besarnya  $h = 0,05$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{11,5}{20}y - \frac{30}{20}x. \end{cases} \quad (3.5)$$

Selanjutnya, sistem persamaan (3.5) dapat diselesaikan dengan metode Runge Kutta Fehlberg, rumus umum metode tersebut sesuai dengan persamaan (2.15) dan (2.16). Karena pada persamaan vibrasi yang dibahas dalam penelitian ini memiliki dua variabel tak bebas yaitu  $x$  dan  $y$  sehingga metode Runge Kutta Fehlberg pada persamaan (2.15) dan (2.16) menjadi:

a. Pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde lima:

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad (3.6)$$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}r_1 + \frac{6656}{12825}r_3 + \frac{28561}{56430}r_4 - \frac{9}{50}r_5 + \frac{2}{55}r_6 \quad (3.7)$$

b. Menaksir pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde empat:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (3.8)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}r_1 + \frac{1408}{2565}r_3 + \frac{2197}{4104}r_4 - \frac{1}{5}r_5 \quad (3.9)$$

dengan:

$$k_1 = hf(t_i, x_i, y_i)$$

$$r_1 = hg(t_i, x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1, y_i + \frac{1}{4}r_1\right)$$

$$r_2 = hg\left(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1, y_i + \frac{1}{4}r_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_i + \frac{3}{32}r_1 + \frac{9}{32}r_2\right)$$

$$r_3 = hg\left(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_i + \frac{3}{32}r_1 + \frac{9}{32}r_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_i + \frac{1932}{2197}r_1 - \frac{7200}{2197}r_2 + \frac{7296}{2197}r_3\right)$$

$$r_4 = hg\left(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_i + \frac{1932}{2197}r_1 - \frac{7200}{2197}r_2 + \frac{7296}{2197}r_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_i + \frac{439}{216}r_1 - 8r_2 + \frac{3680}{513}r_3 - \frac{845}{4104}r_4\right)$$

$$r_5 = hg\left(t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_i + \frac{439}{216}r_1 - 8r_2 + \frac{3680}{513}r_3 - \frac{845}{4104}r_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_i - \frac{8}{27}r_1 + 2r_2 - \frac{3544}{2565}r_3 + \frac{1859}{4104}r_4 - \frac{11}{40}r_5\right)$$

$$r_6 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_i - \frac{8}{27}r_1 + 2r_2 - \frac{3544}{2565}r_3 + \frac{1859}{4104}r_4 - \frac{11}{40}r_5\right)$$

Persamaan (3.5) dapat dinyatakan dalam bentuk yang analog sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases} \quad (3.10)$$

dengan

$$\begin{cases} f(t, x, y) = y \\ g(t, x, y) = -\frac{11,5}{20}y - \frac{30}{20}x \end{cases} \quad (3.11)$$

Langkah pertama adalah menghitung nilai  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ , dan  $r_6$  sehingga pada saat  $i = 0$  maka didapatkan:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, x_i, y_i) \\ &= (0,05)f(0,15, 45) \\ &= (0,05)(45) = 2,25 \\ r_1 &= hg(t_i, x_i, y_i) \\ &= (0,05)g(0,15, 45) \\ &= (0,05)\left(-\frac{11,5}{20}(45) - \frac{30}{20}(15)\right) \\ &= (0,05)(-25,875 - 22,5) \\ &= (0,05)(-48,375) = -2,4188 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf\left(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1, y_i + \frac{1}{4}r_1\right) \\ &= (0,05)f\left(0 + \frac{1}{4}(0,05), 15 + \frac{1}{4}(2,25), 45 + \frac{1}{4}(-2,4188)\right) \\ &= (0,05)f(0 + 0,125, 15 + 0,5625, 45 + 0,60467) \end{aligned}$$

$$= (0,05)f(0,0125, 15,5625, 44,3953)$$

$$= (0,05)(44,3953) = 2,2198$$

$$r_2 = hg\left(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1, y_i + \frac{1}{4}r_1\right)$$

$$= (0,05)g\left(0 + \frac{1}{4}(0,05), 15 + \frac{1}{4}(2,25), 45 + \frac{1}{4}(-2,4188)\right)$$

$$= (0,05)g(0 + 0,125, 15 + 0,5625, 45 + 0,60467)$$

$$= (0,05)g(0,0125, 15,5625, 44,3953)$$

$$= (0,05)\left(-\frac{11,5}{20}(44,3953) - \frac{30}{20}(15,5625)\right)$$

$$= (0,05)(-25,5273 - 23,3438)$$

$$= (0,05)(-48,8711) = -2,4436$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_i + \frac{3}{32}r_1 + \frac{9}{32}r_2\right)$$

$$= (0,05)f\left(0 + \frac{3}{8}(0,05), 15 + \frac{3}{32}(2,25) + \frac{9}{32}(2,2198),\right.$$

$$\left.45 + \frac{3}{32}(-2,4188) + \frac{9}{32}(-2,4436)\right)$$

$$= (0,05)f(0 + 0,0188, 15 + 0,2109 + 0,6243, 45 - 0,2268 - 0,6873)$$

$$= (0,05)f(0,0188, 15,8352, 44,0859)$$

$$= (0,05)(44,0859) = 2,2043$$

$$r_3 = hg\left(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_i + \frac{3}{32}r_1 + \frac{9}{32}r_2\right)$$

$$= (0,05)g\left(0 + \frac{3}{8}(0,05), 15 + \frac{3}{32}(2,25) + \frac{9}{32}(2,2198), 45 + \frac{3}{32}(-2,4188) + \frac{9}{32}(-2,4436)\right)$$

$$= (0,05)g(0 + 0,0188, 15 + 0,2109 + 0,6243, 45 - 0,2268 - 0,6873)$$

$$\begin{aligned}
&= (0,05)g(0,0188, 15,8352, 44,0859) \\
&= (0,05) \left( -\frac{11,5}{20} (44,0859) - \frac{30}{20} (15,8352) \right) \\
&= (0,05)(-25,3494 - 23,7528) \\
&= (0,05)(-49,1022) = -2,4551
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= hf \left( t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3 y_i + \frac{1932}{2197}r_1 - \frac{7200}{2197}r_2 + \frac{7296}{2197}r_3 \right) \\
&= (0,05)f \left( 0 + \frac{12}{13}(0,05), 15 + \frac{1932}{2197}(2,25) - \frac{7200}{2197}(2,2198) + \right. \\
&\quad \left. \frac{7296}{2197}(2,2043), 45 + \frac{1932}{2197}(-2,4188) - \frac{7200}{2197}(-2,4436) + \frac{7296}{2197}(-2,4551) \right) \\
&= (0,05)f(0 + 0,0462, 15 + 1,9786 - 7,2747 + 7,3202, 45 - 2,1270 + \\
&\quad 8,0082) - 8,1531) \\
&= (0,05)f(0,0462, 17,0241, 42,7281) \\
&= (0,05)(42,7281) = 2,1364
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_4 &= hg \left( t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3 y_i + \frac{1932}{2197}r_1 - \frac{7200}{2197}r_2 + \frac{7296}{2197}r_3 \right) \\
&= (0,05)g \left( 0 + \frac{12}{13}(0,05), 15 + \frac{1932}{2197}(2,25) - \frac{7200}{2197}(2,2198) + \right. \\
&\quad \left. \frac{7296}{2197}(2,2043), 45 + \frac{1932}{2197}(-2,4188) - \frac{7200}{2197}(-2,4436) + \frac{7296}{2197}(-2,4551) \right) \\
&= (0,05)g(0 + 0,0462, 15 + 1,9786 - 7,2747 + 7,3202, 45 - 2,1270 + \\
&\quad 8,0082 - 8,1531) \\
&= (0,05)g(0,0462, 17,0241, 42,7281) \\
&= (0,05) \left( -\frac{11,5}{20} (42,7281) - \frac{30}{20} (17,0241) \right) \\
&= (0,05)(-24,5687 - 25,5362) \\
&= (0,05)(-50,1049) = -2,5052
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_5 &= hf\left(t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_i + \frac{439}{216}r_1 - 8r_2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{3680}{513}r_3 - \frac{845}{4104}r_4\right) \\
&= (0,05)f\left(0 + (0,05), 15 + \frac{439}{216}(2,25) - 8(2,2198) + \frac{3680}{513}(2,2043) - \right. \\
&\quad \left. \frac{845}{4104}(2,1364), 45 + \frac{439}{216}(-2,4188) - 8(-2,4436) + \frac{3680}{513}(-2,4551) - \right. \\
&\quad \left. \frac{845}{4104}(-2,5052)\right) \\
&= (0,05)f(0 + 0,05, 15 + 4,5729 - 17,7584 + 15,8125 - 0,4399, 45 - \\
&\quad 4,9160 + 19,5488 - 17,6116 + 0,5158) \\
&= (0,05)f(0,05, 17,1871, 42,537) \\
&= (0,05)(42,537) = 2,1268 \\
r_5 &= hg\left(t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_i + \frac{439}{216}r_1 - 8r_2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{3680}{513}r_3 - \frac{845}{4104}r_4\right) \\
&= (0,05)g\left(0 + (0,05), 15 + \frac{439}{216}(2,25) - 8(2,2198) + \frac{3680}{513}(2,2043) - \right. \\
&\quad \left. \frac{845}{4104}(2,1364), 45 + \frac{439}{216}(-2,4188) - 8(-2,4436) + \frac{3680}{513}(-2,4551) - \right. \\
&\quad \left. \frac{845}{4104}(-2,5052)\right) \\
&= (0,05)g(0 + 0,05, 15 + 4,5729 - 17,7584 + 15,8125 - 0,4399, 45 - \\
&\quad 4,9160 + 19,5488 - 17,6116 + 0,5158) \\
&= (0,05)g(0,05, 17,1871, 42,537) \\
&= (0,05)\left(-\frac{11,5}{20}(42,537) - \frac{30}{20}(17,1871)\right) \\
&= (0,05)(-24,4588 - 25,7807) \\
&= (0,05)(-50,2395) = -2,5120
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_6 &= hf \left( t_i + \frac{1}{2}h, x_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_i - \frac{8}{27}r_1 + 2r_2 - \right. \\
&\quad \left. \frac{3544}{2565}r_3 + \frac{1859}{4104}r_4 - \frac{11}{40}r_5 \right) \\
&= (0,05)f \left( 0 + \frac{1}{2}(0,05), 15 - \frac{8}{27}(2,25) + 2(2,2198) - \frac{3544}{2565}(2,2043) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1859}{4104}(2,1364) - \frac{11}{40}(2,1268), 45 - \frac{8}{27}(-2,4188) + 2(-2,4436) - \right. \\
&\quad \left. \frac{3544}{2565}(-2,4551) + \frac{1859}{4104}(-2,5052) - \frac{11}{40}(-2,5120) \right) \\
&= (0,05)f(0 + 0,025, 15 - 0,6667 + 4,4396 - 3,0456 + 0,9677 - \\
&\quad 0,5849, 45 + 0,7167 - 4,8872 + 3,3922 - 1,1348 + 0,6908) \\
&= (0,05)f(0,025, 16,1101, 43,7777) \\
&= (0,05)(43,7777) = 2,1889 \\
r_6 &= hg \left( t_i + \frac{1}{2}h, x_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_i - \frac{8}{27}r_1 + 2r_2 - \right. \\
&\quad \left. \frac{3544}{2565}r_3 + \frac{1859}{4104}r_4 - \frac{11}{40}r_5 \right) \\
&= (0,05)g \left( 0 + \frac{1}{2}(0,05), 15 - \frac{8}{27}(2,25) + 2(2,2198) - \frac{3544}{2565}(2,2043) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1859}{4104}(2,1364) - \frac{11}{40}(2,1268), 45 - \frac{8}{27}(-2,4188) + 2(-2,4436) - \right. \\
&\quad \left. \frac{3544}{2565}(-2,4551) + \frac{1859}{4104}(-2,5052) - \frac{11}{40}(-2,5120) \right) \\
&= (0,05)g(0 + 0,025, 15 - 0,6667 + 4,4396 - 3,0456 + 0,9677 - \\
&\quad 0,5849, 45 + 0,7167 - 4,8872 + 3,3922 - 1,1348 + 0,6908) \\
&= (0,05)g(0,025, 16,1101, 43,7777) \\
&= (0,05) \left( -\frac{11,5}{20}(43,7777) - \frac{30}{20}(16,1101) \right) \\
&= (0,05)(-25,1722 - 24,1652) \\
&= (0,05)(-49,3374) = -2,4669
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai  $\hat{x}_{i+1}$  dan  $\hat{y}_{i+1}$  yang formulanya sebagai berikut:

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}r_1 + \frac{6656}{12825}r_3 + \frac{28561}{56430}r_4 - \frac{9}{50}r_5 + \frac{2}{55}r_6$$

Untuk  $i = 1$  dapat dihitung:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= 15 + 0,2667 + 1,1641 + 1,0813 - 0,3828 + 0,0796 \\ &= 17,2089\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 45 + (-0,2867) + (-1,2742) + (-1,9641) - (-0,4522) + (-0,0897) \\ &= 41,8375\end{aligned}$$

Sedangkan untuk menghitung nilai  $x_{i+1}$  dan  $y_{i+1}$  yang formulanya adalah sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}r_1 + \frac{1408}{2565}r_3 + \frac{2197}{4104}r_4 - \frac{1}{5}r_5$$

Untuk  $i = 1$  dapat dihitung:

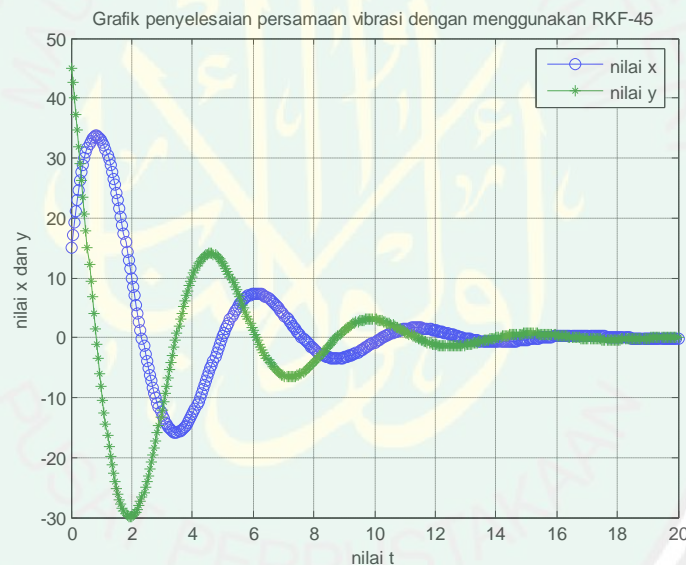
$$\begin{aligned}x_1 &= 15 + 0,2604 + 1,2100 + 1,1437 - 0,4254 \\ &= 17,1887\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= 45 - 0,280 - 1,3477 - 1,3411 + 0,5024 \\ &= 42,5336\end{aligned}$$

Nilai  $\hat{x}$  pada iterasi ke-401 adalah  $-0,11620051397970$  dan nilai  $\hat{y}$  pada iterasi ke-401 adalah  $0,12692814089903$ , sedangkan nilai  $x$  pada iterasi ke-401 adalah  $-0,11604149971734$  dan nilai  $y$  pada iterasi ke-401 adalah  $0,12705633052294$ .

Metode Runge Kutta Fehlberg di atas, berturut-turut merupakan pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde lima dan menaksir pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde empat. Untuk pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde lima terdiri dari enam konstanta perhitungan sedangkan untuk menaksir pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde empat terdiri dari lima konstanta perhitungan.

Dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg untuk menyelesaikan persamaan vibrasi, akan didapatkan ketelitian yang lebih tinggi tanpa memerlukan kalkulasi turunan yang lebih tinggi.



**Gambar 3.2:** Grafik Penyelesaian Persamaan Vibrasi dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF-45)

Penyelesaian persamaan vibrasi dengan metode Runge Kutta Fehlberg dapat digambarkan dengan grafik pada gambar 3.2. Pada awal iterasi nilai  $x = 15$  dan  $y = 45$  iterasi terus berlanjut dengan nilai  $t$  yang telah ditentukan. Solusi ini berhenti pada iterasi ke-401 dengan nilai  $t = 20$  untuk nilai  $\hat{x}_{401} = -0,11620051397970$  dan nilai  $\hat{y}_{401} = 0,12692814089903$ . Sedangkan

nilai  $x_{401} = -0,11604149971734$  dan nilai  $y_{401} = 0,12705633052294$ . Nilai solusi keduanya tetap konvergen menuju nilai nol (0).

Pada awal iterasi ketika nilai  $t = 0$  didefinisikan nilai  $x(0) = 15$  dan  $y(0) = 45$ , hal ini menggambarkan bahwa pada awalnya pegas ditarik dengan panjang simpangan 15 dan kecepatan awal yang timbul karena pegas bergetar adalah 45. Pegas akan terus bergetar dan lama kelamaan akan mendekati titik seimbangnya dan berhenti. Hal ini dikarenakan pada pergetaran pegas juga dipengaruhi oleh redaman. Sehingga pada akhir iterasi ketika  $t = 20$  pada pemotongan *error* lokal Runge Kutta orde lima nilai  $x_{401} = -0,11620051397970$  dan  $y_{401} = 0,12692814089903$  hal ini juga menggambarkan bahwa pada saat  $t = 20$  simpangan pegas sebesar 0,11620051397970 dan kecepatan pegas 0,12692814089903. Sedangkan untuk menaksir pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde empat nilai  $x_{401} = -0,11604149971734$  dan nilai  $y_{401} = 0,12705633052294$ , hal ini menggambarkan bahwa pada saat  $t = 20$  simpangan pegas sebesar 0,1160414997734 dan kecepatan pegas 0,12705633052294 sehingga dapat disimpulkan baik pada pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde lima ataupun menaksir pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde empat panjangnya simpangan pegas dan kecepatan pegas sudah mendekati titik seimbang, dimana titik seimbang dari pegas ini adalah nol (0). Maka dapat dikatakan bahwa solusi persamaan vibrasi ini konvergen menuju nol (0). Untuk nilai  $t$  dari 1 sampai 12 amplitudo pegas masih cukup besar dan ketika  $t$  dari 13 sampai 20 amplitudo pegas mengecil.

Untuk mendapatkan besarnya nilai *error* dilakukan perbandingan dengan menggunakan metode analitik. Penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode analitik disajikan sebagai berikut:

Persamaan vibrasi yang telah direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu pada persamaan (3.5) akan dicari penyelesaiannya dengan menggunakan metode analitik. Untuk mendapatkan solusi analitik digunakan bantuan program *maple* dan hasil yang didapatkan adalah:

$$x(t) = e^{-\frac{23}{80}t} \left( c_1 \sin\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right) \right) \quad (3.12)$$

$$y(t) = -\frac{1}{80}e^{-\frac{23}{80}t} \left( 23c_1 \sin\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right) - c_1 \cos\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right)\sqrt{9071} + 23c_2 \cos\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right)\sqrt{9071} \right) \quad (3.13)$$

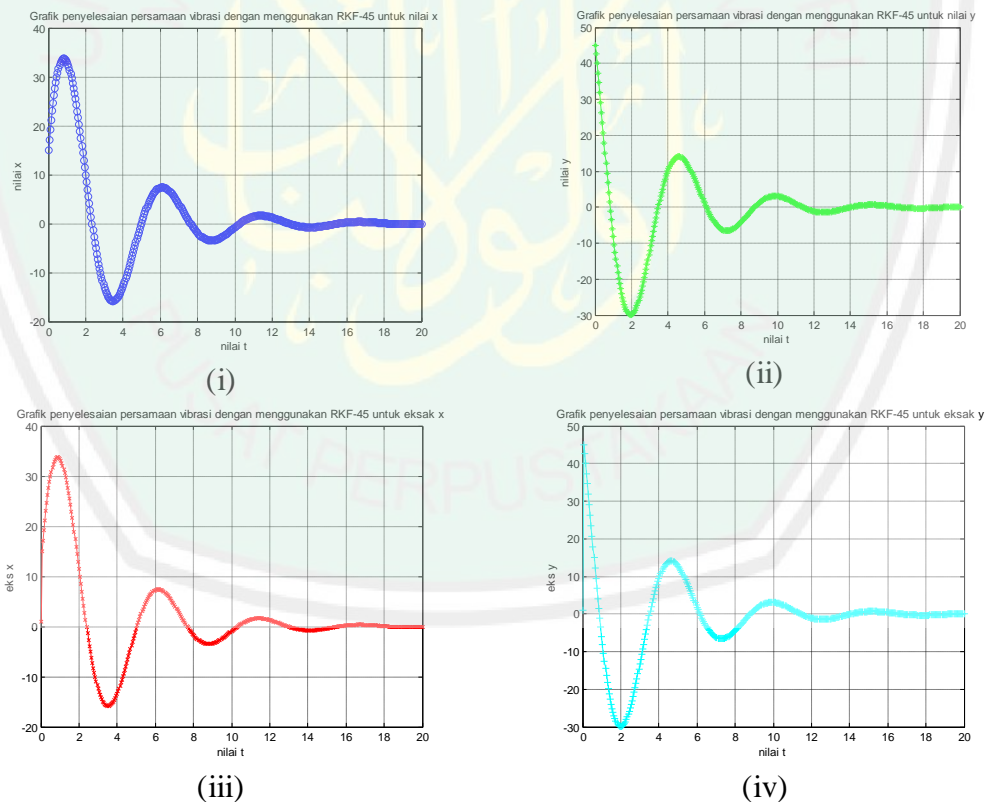
Setelah diketahui nilai  $x(t)$  dan  $y(t)$ , untuk menentukan nilai  $c_1$  dan  $c_2$  pada persamaan (3.12) dan (3.13) dibutuhkan nilai  $x(0)$  dan  $y(0)$ . Pada penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg diketahui  $x(0) = 15$  dan  $y(0) = 45$ , sehingga nilai tersebut dapat disubstitusikan pada persamaan (3.12) dan (3.13) sehingga didapatkan  $c_1 = \frac{3945}{9071}$  dan  $c_2 = 15$  dengan demikian diperoleh:

$$x(t) = e^{-\frac{23}{80}t} \left( \frac{3945}{9071} \sin\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right) + 15 \cos\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right) \right) \quad (3.14)$$

$$y(t) = -\frac{1}{80}e^{-\frac{23}{80}t} \left( 23\left(\frac{3945}{9071}\right) \sin\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right) - \left(\frac{3945}{9071}\right) \cos\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right)\sqrt{9071} + 23(15) \cos\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right) + (15) \sin\left(\frac{1}{80}\sqrt{9071}t\right)\sqrt{9071} \right) \quad (3.15)$$

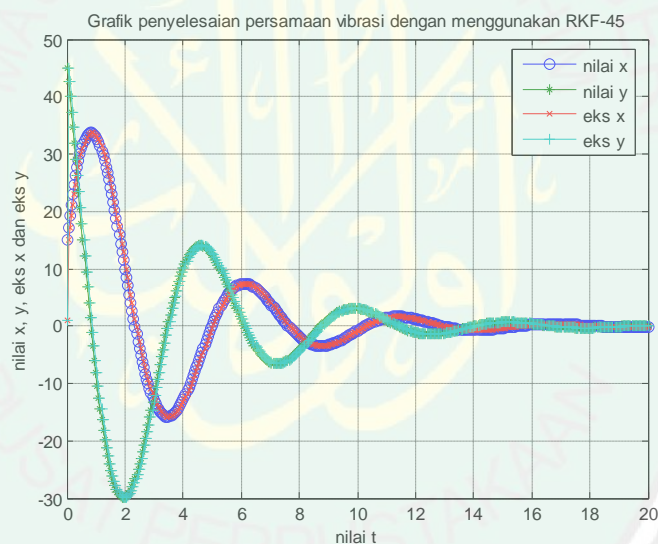
Persamaan (3.14) dan (3.15) merupakan solusi analitik dari sistem persamaan vibrasi orde satu.

Solusi analitik sistem persamaan vibrasi orde satu yang didapatkan pada persamaan (3.14) dan (3.15) berupa fungsi matematika yang masi harus dicari solusinya dalam bentuk angka. Untuk mencari solusi tersebut dilakukan dengan bantuan program. Tujuan didapatkannya solusi analitik adalah untuk dibandingkan dengan solusi numerik sehingga didapatkan *error* yang akan digunakan untuk menaksir kualitas dari metode Runge Kutta Fehlberg dalam menyelesaikan sistem persamaan vibrasi tersebut. Perbandingan solusi numerik dan solusi analitik disajikan pada grafik berikut ini:



**Gambar 3.3:** Grafik Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik pada Persamaan Vibrasi

Keempat grafik pada gambar 3.3 merupakan grafik solusi numerik dan analitik sistem persamaan vibrasi. Grafik (i) merupakan grafik nilai  $x$ , grafik (ii) merupakan grafik nilai  $y$ , grafik (iii) merupakan grafik eksak  $x$ , dan grafik (iv) merupakan grafik eksak  $y$ . Melihat grafik nilai  $x$  dan eksak  $x$  bentuk grafiknya serupa, begitu juga pada grafik nilai  $y$  dan eksak  $y$ . Grafik tersebut menggambarkan bahwa penyelesaian numerik dan analitik persamaan vibrasi berjalan beriringan dan menghasilkan *error* yang kecil, untuk lebih jelas dalam menganalisis keempat grafik pada gambar 3.3 maka keempat grafik tersebut dapat digabungkan dan disajikan sebagai berikut:



**Gambar 3.4:** Grafik Perbandingan Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik pada Persamaan Vibrasi

Grafik pada gambar 3.4 merupakan grafik gabungan antara penyelesaian numerik dan penyelesaian analitik pada persamaan vibrasi. Perhitungan untuk penyelesaian numerik dan analitik telah diuraikan sebelumnya. Perbandingan antara penyelesaian numerik dan analitik dilakukan bertujuan untuk mendapatkan nilai *error*.

Grafik pada gambar 3.4 menunjukkan grafik solusi persamaan vibrasi dengan metode numerik berada di sekitar grafik solusi metode analitiknya. Grafik solusi numerik berimpit dengan grafik solusi analitiknya, akan tetapi tidak tepat sama. Hal ini terjadi karena solusi numerik merupakan solusi pendekatan untuk solusi sejatinya, sehingga untuk solusi numerik tidak dapat tepat sama dengan solusi analitiknya. Selain itu, untuk solusi dengan menggunakan metode numerik hasil yang didapatkan selalu berbentuk angka sedangkan untuk metode analitik biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematika yang selanjutnya fungsi tersebut masih harus dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.

Melihat grafik pada gambar 3.4 dapat dilakukan perbandingan nilai antara solusi numerik dan solusi analitik. Hal ini dilakukan untuk mendapatkan nilai *error*, nilai *error* didapatkan dengan cara  $\varepsilon = |a - \hat{a}|$  dimana  $a$  adalah nilai sejati dan  $\hat{a}$  adalah nilai hampiran. Pada saat  $t = 15$ , untuk solusi numerik  $x(15) = -0,3552$  dan  $y(15) = 0,6637$  sedangkan untuk solusi analitik  $x(15) = -0,3546$  dan  $y(15) = 0,6638$ . Melihat nilai-nilai  $x(t)$  dan  $y(t)$  pada masing-masing solusi didapatkan nilai *error* untuk  $x(t)$  adalah  $\varepsilon = 0,0006$  dan nilai *error* untuk  $y(t)$  adalah  $\varepsilon = 0,0001$ . Namun *error* yang ditimbulkan pada analisis numerik tidaklah linier akan tetapi selalu berfluktuasi terhadap waktu.

Dari perhitungan *error* yang didapatkan, dapat dilihat bahwa *error* yang didapatkan bernilai kecil dan mendekati nol. Hal ini menandakan bahwa pada solusi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg memiliki ketelitian yang baik dalam penyelesaian persamaan vibrasi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode Runge Kutta Fehlberg merupakan metode numerik

yang memiliki ketelitian tinggi dan dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan vibrasi.

### 3.2. Kajian Agama

Penggunaan metode Runge Kutta Fehlberg untuk menyelesaikan persamaan vibrasi merupakan titik terang yang didapatkan manusia dari hasil berpikir. Telah dijelaskan sebelumnya bahwasannya matahari dan bulan yang diibaratkan sebagai fungsi dan peredaran sebagai operasi bilangan yang memunculkan fenomena pergantian siang dan malam yang diibaratkan sebagai persamaan vibrasi yang terdiri dari fungsi dan operasi bilangan tersebut. Konsep tersebut memunculkan pengetahuan baru yang dapat bermanfaat bagi kehidupan manusia itu sendiri. Pergantian siang dan malam merupakan salah satu fenomena alam yang sering dijumpai, tetapi banyak makna yang bisa didapatkan dan dari situlah Allah memerintahkan manusia untuk merenungi dan berpikir akan kebesaran Allah yang telah menciptakan fenomena alam yang beragam dan makhluk-makhluk ciptaan-Nya. Karena Allah memberikan akal pada manusia untuk berpikir, bersyukur dan senantiasa melaksanakan perintah-Nya. Hal ini tertuang dalam firman Allah:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفُلْكِ الَّتِي تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَّاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ وَتَصْرِيفِ الرِّيْحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿١٦٤﴾

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hidupan bumi sesudah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan” (QS. Al-Baqarah:164).*

Pada firman Allah di atas, telah dijelaskan bahwa Allah memang telah menciptakan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, serta penciptaan makhluk Allah memang untuk dicermati dan direnungkan bahwa terdapat ilmu pengetahuan dan memahami kebesaran Sang Maha Pencipta. Selain itu, di dalam fenomena pergantian siang dan malam terdapat sesuatu yang luar biasa yang berkaitan dengan sebuah kekuatan besar yang mengendalikan alam, yaitu Sang Maha Perkasa.

Jika tidak ada pergantian siang dan malam maka bumi ini tidak dapat dihuni oleh makhluk hidup. Matahari tidak bergeser ke barat dan siang hari terjadi terus-menerus, maka suhu di bumi akan terus meningkat dan seluruh air di bumi ini akan menguap serta darah akan mendidih. Matahari tidak lagi muncul dan malam hari terjadi terus-menerus, maka suhu di bumi akan terus menurun dan seluruh air di bumi akan membeku, begitu juga dengan cairan tubuh. Fenomena alam tersebut merupakan hal biasa bagi manusia jika tidak direnungkan secara mendalam akan tetapi fenomena tersebut memiliki rahasia dan makna yang mendalam. Rasa sayang Sang Maha Pencipta terhadap Makhluk-Nya ini tertuang dalam firman-Nya:

قُلْ أَرَأَيْتُمْ إِنْ جَعَلَ اللَّهُ عَلَيْكُمُ اللَّيْلَ سَرْمَدًا إِلَى يَوْمِ الْقِيَامَةِ مَنْ إِلَهُ غَيْرُ اللَّهِ يَأْتِيكُم بِضِيَاءٍ أَفَلَا تَسْمَعُونَ ﴿٧١﴾ قُلْ أَرَأَيْتُمْ إِنْ جَعَلَ اللَّهُ عَلَيْكُمُ النَّهَارَ سَرْمَدًا إِلَى يَوْمِ الْقِيَامَةِ مَنْ إِلَهُ غَيْرُ اللَّهِ يَأْتِيكُم بَلِيلٍ تَسْكُنُونَ فِيهِ أَفَلَا تُبْصِرُونَ ﴿٧٢﴾

*“Katakanlah: Terangkanlah kepadaKu, jika Allah menjadikan untukmu malam itu terus menerus sampai hari kiamat, siapakah Tuhan selain Allah yang akan mendatangkan sinar terang kepadamu? Maka Apakah kamu tidak mendengar? Katakanlah: "Terangkanlah kepadaKu, jika Allah menjadikan untukmu siang itu terus menerus sampai hari kiamat, siapakah Tuhan selain Allah yang akan mendatangkan malam kepadamu yang kamu beristirahat padanya? Maka Apakah kamu tidak memperhatikan?" (QS. Al-Qashas:71).*

Allah telah menghitung dan mempertimbangkan segala kebaikan untuk makhluk-Nya dan telah diataur sedemikian rupa dalam bentuk alam semesta sebagai tempat tinggal mereka. Allah menurunkan Al-Qur'an bukan hanya untuk orang muslim saja, akan tetapi untuk semua makhluk ciptaan Allah baik benda hidup maupun benda mati. Rotasi matahari dan bulan membentuk kestabilan di alam semesta, hal ini juga diadopsi dalam metode-metode numerik untuk menentukan kestabilan metode dan mendapatkan hasil yang pasti.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan langkah-langkah yang ditempuh untuk mendapatkan solusi numerik sistem persamaan vibrasi dengan metode Runge Kutta Fehlberg adalah:

- a. Mereduksi persamaan vibrasi menjadi sistem persamaan vibrasi orde satu.
- b. Menentukan besarnya koefisien-koefisien yang terdapat dalam sistem persamaan vibrasi  $m = 20$ ,  $b = 11,5$  dan  $k = 30$
- c. Menentukan besarnya dua variabel terikat pada saat waktu  $t = 0$ , yaitu variabel  $x(0) = 15$  dan  $y(0) = 45$
- d. Menentukan nilai waktu  $t$  yang akan ditentukan solusinya beserta besarnya  $h$  (ukuran langkah), ( $t = 1:20$  dan  $h = 0,05$ )
- e. Menuliskan formulasi rumus metode RKF 45 dengan dua variabel tak bebas.
- f. Menghitung variabel-variabel yang terdapat dalam formulasi rumus dengan menggunakan suatu formulasi yang telah ditentukan, yaitu variabel  $k_1$  sampai  $k_6$  dan  $r_1$  sampai  $r_6$ .
- g. Menghitung  $x_{i+1}$  dan  $y_{i+1}$  dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan pada langkah 5 ke dalam formulasi rumus metode RKF 45.

Hasil perhitungan penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg dimulai pada  $t = 0$  dengan nilai awal  $x = 15$  dan  $y = 45$  dan pada berhenti pada iterasi ke-401 saat  $t = 20$ . Ketika iterasi berhenti didapatkan.

- a. untuk pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde lima.

Nilai $x$	-0,11620051397970	$f(t, x, y)$	0,12692814089903
Nilai $y$	0,12692814089903	$g(t, x, y)$	0,10100317089953

- b. untuk menaksir pemotongan *error* lokal pada Runge Kutta orde empat.

Nilai $x$	-0,11604149971734	$f(t, x, y)$	0,12705633052294
Nilai $y$	0,12705633052294	$g(t, x, y)$	0,10100485952532

#### 4.2. Saran

Pada penulisan skripsi ini, hanya menyelesaikan persamaan vibrasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg. Saran untuk penulisan skripsi selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan-persamaan lain yang berbentuk persamaan diferensial dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg, melakukan upgrade metode Runge Kutta Fehlberg untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial dan melakukan perhitungan untuk nilai-nilai koefisien yang digunakan pada rumus umum Runge Kutta Fehlberg.

## DAFTAR PUSTAKA

- Atkinson, K.. 1989. *An Introduction to Numerical Analysis*. Second Edition. New York: John Wiley and Sons. Inc.
- Azhari, A.. 2011. *Manfaat Metode Numerik*. (Online) (<http://arieazhariblog.blogspot.com/2011/08/manfaat-metode-numerik.html>) diakses pada tanggal 11 September 2013.
- Burden, R.L. dan Faires, J.D.. 2011. *Numerical Analysis*. Boston: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Butcher, J.C.. 2008. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons. Inc.
- Chapra, S.C.. 2006. *Applied Numerical Methods whit Matlab*. Second Edition. London: McGraw-Hill. Inc.
- Dawkins, P.. 2007. *Differential Equations*. (Online) (<http://tutorial.math.lamar.edu/terms.aspx>) diakses pada tanggal 4 Maret 2014.
- Dukkipati, R.V.. 2010. *Numerical Methods*. New Delhi: New Age International Limited Publishers.
- Finizio dan Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- King, G.C.. 2009. *Vibrations and Waves*. New York: John Wiley and Sons. Inc.
- Machmud, S.. 2005. *Mutiara Juz 'Ammah*. Bandung: Mizan.
- Mulyono, A. dan Abtokhi, A.. 2006. *Fisika dan Al-Quran*. Malang: UIN Press.
- Munir, R.. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations. Third Edition*. New York: John Wiley and Sons. Inc.
- Silaban, S. dan Sucipto, E.. 1985. *Fisika*. Jakarta: Erlangga.
- Syawaluddin, H.. 2010. *Penyelesaian Persamaan Vibrasi dengan Integrasi Newton-Cote*. Vol. 17 Hal 73-79.
- Triatmojo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Betta Offest.

Urifah, S.N.. 2008. *Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Voltera dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)*. Skripsi. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Utami, R.P.. 2005. *Metode Runge Kutta untuk Solusi Persamaan Pendulum*. Skripsi. Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Young, H.D. dan Freedman, R.A.. 2002. *University Physics*. Penj. Ir. Endang Juliastuti, M.S. Jakarta: Erlangga.



## LAMPIRAN-LAMPIRAN

### Lampiran 1:

*Sourch code* penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg Orde 4

```
clc;clear;format short;
tic;
f=inline('y','t','x','y')
g=inline('-11.5*y/20-30*x/20','t','x','y')
x0=15;
y0=45;
h=0.05;
a=0;
b=20;
n=(b-a)/h;
x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

for i = 1:n
    k1 = h*f(t(i),x(i),y(i));
    m1 = h*g(t(i),x(i),y(i));

    k2 = h*f(t(i)+h/4,x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));
    m2 = h*g(t(i)+h/4,x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));

    k3 = h*f(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),y(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32));
    m3 = h*g(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),y(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32));

    k4 = h*f(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)-
    (7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),
    y(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));
    m4 = h*g(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)-
    (7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),
    y(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));

    k5 = h*f(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),
    y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104));
    m5 = h*g(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-
    (845*k4/4104),
    y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104));

    k6 = h*f(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-
    (11*k5/40),
```

```

        y(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40));
    m6 =      h*g(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-
(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-(11*k5/40),
        y(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40));

    x(i+1) = x(i)+(25*k1/216)+(1408*k3/2565)+(2197*k4/4104)-(1*k5/5);
    y(i+1) = y(i)+(25*m1/216)+(1408*m3/2565)+(2197*m4/4104)-(1*m5/5);

end
disp('-----')
disp('-----')
disp('hasil komputasi')
disp(' iterasi      t      x      y')
A=[[1:i+1]' t x y];
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f %8.1f %8.14f %8.14f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
plot(t,x,'-o',t,y,'-*')
grid on
title('Grafik penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan RKF-45 orde
4')
legend('x','y')
xlabel('nilai t')
ylabel('nilai x dan y')

```

### Lampiran 3:

*Sourch code* perbandingan penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode numerik dan analitik

```
clc;clear;format short;
tic;
f=inline('y','t','x','y')
g=inline('-11.5*y/20-30*x/20','t','x','y')
x0=15;
y0=45;
h=0.05;
a=0;
b=20;
n=(b-a)/h;
x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

u1_eks(1)=1;
u2_eks(1)=1;

for i = 1:n
    k1 = h*f(t(i),x(i),y(i));
    m1 = h*g(t(i),x(i),y(i));

    k2 = h*f(t(i)+(h/4),x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));
    m2 = h*g(t(i)+(h/4),x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));

    k3 = h*f(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*m2/32),y(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32));
    m3 = h*g(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*m2/32),y(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32));

    k4 = h*f(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)-
(7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),
y(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));
    m4 = h*g(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)-
(7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),
y(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));

    k5 = h*f(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),
y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104));
    m5 = h*g(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-
(845*k4/4104),
y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104));

    k6 = h*f(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-
(11*k5/40),
```

```

y(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40));
m6 = h*g(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-
(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-(11*k5/40),
y(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40));

```

```

x(i+1) = x(i)+(16*k1/135)+(6656*k3/12825)+(28561*k4/56437)-
(9*k5/50)+(2*k6/55);
y(i+1) = y(i)+(16*m1/135)+(6656*m3/12825)+(28561*m4/56437)-
(9*m5/50)+(2*m6/55);

```

```

end
disp('=====')
disp('=====')
disp('hasil komputasi')
disp(' iterasi      t          x          y')
A=[[1:i+1]' t x y];
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f %8.1f %8.14f %8.14f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
figure(1)
plot(t,x,'-o',t,y,'-*',t,u1_eks,'-x',t,u2_eks,'-+')
grid on
title('Grafik penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan RKF-45')
legend('nilai x','nilai y','eks x', 'eks y')
xlabel('nilai t')
ylabel('nilai x dan y')

figure(2)
plot(t,err1,'-o',t,err2,'-*')
grid on
title('Error pada runge kutta 45')
legend('error 1','error 2')

```

**Lampiran 4:**

Penyelesaian Analitik Sistem Persamaan Vibrasi Orde Satu dengan menggunakan Program Maple

$$> \text{sys\_ode} := \frac{d}{dt} x(t) = y(t), \frac{d}{dt} y(t) = -\frac{11.5}{20} y(t) - \frac{30}{20} x(t)$$

$$\text{sys\_ode} := \frac{d}{dt} x(t) = y(t), \frac{d}{dt} y(t) = -0.5750000000 y(t) - \frac{3}{2} x(t)$$

> dsolve([sys\_ode])

$$\left\{ x(t) = e^{-\frac{23}{80} t} \left( -C1 \sin\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \right. \right.$$

$$\left. + C2 \cos\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \right), y(t) =$$

$$-\frac{1}{80} e^{-\frac{23}{80} t} \left( 23 C1 \sin\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \right.$$

$$\left. - C1 \cos\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \sqrt{9071} \right.$$

$$\left. + 23 C2 \cos\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \right.$$

$$\left. + C2 \sin\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \sqrt{9071} \right\}$$

> ics := x(0) = 15, y(0) = 45

$$\text{ics} := x(0) = 15, y(0) = 45$$

> dsolve([sys\_ode, ics])

$$\left\{ x(t) = e^{-\frac{23}{80} t} \left( \frac{3945}{9071} \sin\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \sqrt{9071} \right. \right.$$

$$\left. + 15 \cos\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \right), y(t) =$$

$$-\frac{1}{80} e^{-\frac{23}{80} t} \left( \frac{226800}{9071} \sin\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \sqrt{9071} \right.$$

$$\left. - 3600 \cos\left(\frac{1}{80} \sqrt{9071} t\right) \right\}$$

**Lampiran 2:**

*Sourch code* penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan metode Runge  
Kutta Fehlberg Orde 5

```

clc;clear;format short;
tic;
f=inline('y','t','x','y')
g=inline('-11.5*y/20-30*x/20','t','x','y')
x0=15;
y0=45;
h=0.05;
a=0;
b=20;
n=(b-a)/h;
x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

for i = 1:n
    k1 =h*f(t(i),x(i),y(i));
    m1 =      h*g(t(i),x(i),y(i));

    k2=h*f(t(i)+(h/4),x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));
    m2 =      h*g(t(i)+(h/4),x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));

    k3=h*f(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),y(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32));
    m3 =
    h*g(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),y(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32));

    k4 =h*f(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)-
(7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),
    y(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));
    m4 =      h*g(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)-
(7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),
    y(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));

    k5 =h*f(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),
    y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104));
    m5 =      h*g(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-
(845*k4/4104),
    y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104));

    k6 =h*f(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-
(11*k5/40),
    y(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40));
    m6 =      h*g(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-
(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-(11*k5/40),
    y(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40));

```

```

x(i+1) = x(i)+(16*k1/135)+(6656*k3/12825)+(28561*k4/56437)-
(9*k5/50)+(2*k6/55);
y(i+1) = y(i)+(16*m1/135)+(6656*m3/12825)+(28561*m4/56437)-
(9*m5/50)+(2*m6/55);

```

```

end
disp('=====')
disp('hasil komputasi')
disp(' iterasi      t          x          y')
A=[[1:i+1]' t' x y];
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f %8.1f %8.14f %8.14f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
plot(t,x,'-o',t,y,'-*')
grid on
title('Grafik penyelesaian persamaan vibrasi dengan menggunakan RKF-45 orde
5')
legend('x','y')
xlabel('nilai t')
ylabel('nilai x dan y')

```