

**METODE LAX FRIEDRICH  
DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN GELOMBANG TALI**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MOH. HALIK  
NIM. 08610031**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2014**

**METODE LAX FRIEDRICH  
DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN GELOMBANG TALI**

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**MOH. HALIK**  
**NIM. 08610031**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2014**

**METODE LAX FRIEDRICH  
DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN GELOMBANG TALI**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MOH. HALIK**  
**NIM. 08610031**

**Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal: 19 April 2014**

**Pembimbing I,**

**Pembimbing II,**

**Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd**  
**NIP. 19770521 200501 2004**

**Ach. Nashichuddin, M.A**  
**NIP. 19730705 200003 1 002**

**Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika**

**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
**NIP. 19751006 200312 1 001**

**METODE LAX FRIEDRICH  
DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN GELOMBANG TALU**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MOH. HALIK**  
**NIM. 08610031**

Teluh Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 23 Mei 2014

<b>Susunan Dosen Penguji</b>	<b>Tanda Tangan</b>
1. Penguji Utama : <b><u>Mohammad Jamhuri, M.Si</u></b> NIP. 19810502 200501 1 004	( )
2. Ketua Penguji : <b><u>Dr. Usman Pagalay, M.Si</u></b> NIP. 19650414 200312 1 001	( )
3. Sekretaris Penguji: <b><u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u></b> NIP. 19770521 200501 2 004	( )
4. Anggota Penguji : <b><u>Ach. Nashichuddin, M.A</u></b> NIP. 19730705 200003 1 002	( )

**Mengetahui dan Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika**

**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
NIP.19751006 200312 1 001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Moh. Halik  
NIM : 08610031  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul Penelitian : Metode *Lax Friedrich* dalam Menyelesaikan Persamaan Gelombang Tali

menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 19 April 2014

Yang membuat pernyataan,

MOH. HALIK  
NIM. 08610031

## MOTTO

**“Sesungguhnya Allah Tidak Akan Mengubah Nasib Suatu Kaum,  
Kecuali Kaum Itu Yang Mengubahnya Sendiri”**



## HALAMAN PERSEMBAHAN

Penulis Persembahkan Skripsi ini untuk:

Ayah dan Ibu tercinta:

*Bapak Juma'ie dan Ibu Mar'a*

Keluarga Penulis:

*Bapak Jailani, Bapak H. Marjedin, Bapak H. Ismail, Bapak Sukron, Bapak Hasan,  
Mas Junaidi, Mas Fahkri, Mas Ahmadi, Mas Hayyi, Mbak Rubaida, Mbak Sa'odah, dan  
juga istri tercinta Rukmawati, serta keluarga besar penulis.*

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Assalamu'alaikum Wr.Wb.*

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufik dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains dalam bidang matematika di Fakultas sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh sebab itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.

5. Ach. Nashichuddin, M.A sebagai dosen pembimbing agama yang telah banyak memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.
6. Segenap dosen pengajar, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
7. Seluruh keluarga penulis yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Tiga sahabat senasib seperjuangan, yaitu: Aris Ardiansyah, Mahfud Suyudi, Fuad Adi Saputra dan semua mahasiswa matematika terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Semua pihak yang telah memberikan dukungan kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

*Wassalamu'alaikum Wr.Wb.*

Malang, April 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR .....	viii
DAFTAR ISI .....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xii
DAFTAR TABEL .....	xiii
DAFTAR SIMBOL .....	xiv
ABSTRAK .....	xv
ABSTRACT .....	xvi
المخلص .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Batasan Masalah .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan Gelombang .....	8
2.1.1 Gelombang .....	8
2.1.2 Analisis Persamaan Gelombang .....	9

2.1.3 Tipe Persamaan Gelombang .....	16
2.1.4 Orde Persamaan Gelombang .....	17
2.1.5 Sifat Linier untuk Persamaan Gelombang .....	19
2.2 Kaidah Umum Penyelesaian Numerik Persamaan Differensial	
Parsial .....	20
2.3 Solusi Metode <i>Lax Friedrich</i> .....	28
2.3.1 Metode <i>Lax Friedrich</i> .....	28
2.3.2 Prosedur Metode <i>Lax Friedrich</i> .....	29
2.4 Kaidah Umum Penyelesaian Analitik Persamaan Differensial	
Parsial .....	32
2.5 Perhitungan Waktu dalam Al-Qur'an .....	39
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Analisis Metode <i>Lax Friedrich</i> pada Persamaan Gelombang Tali ....	48
3.2 Analisis Stabilitas pada Skema <i>Lax Friedrich</i> .....	55
3.3 Perhitungan Waktu dan Metode Pendekatan dalam Al-Qur'an .....	64
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	66
4.2 Saran .....	68
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	69
<b>LAMPIRAN</b> .....	70

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Jaring Kotak untuk Sumbu $x$ dan $t$ .....	21
Gambar 2.2	Metode Beda Maju dalam Turunan pada Ruang ( $x$ ) .....	22
Gambar 2.3	Metode Beda Maju dalam Turunan pada Waktu ( $t$ ) .....	23
Gambar 2.4	Metode Beda Mundur dalam Turunan pada Ruang ( $x$ ) .....	24
Gambar 2.5	Metode Beda Mundur dalam Turunan pada Waktu ( $t$ ) .....	25
Gambar 2.6	Metode Beda Tengah dalam Turunan pada Ruang ( $x$ ) .....	26
Gambar 2.7	Metode Beda Tengah dalam Turunan pada Waktu ( $t$ ) .....	27
Gambar 2.8	Apresiasi Skema <i>Lax Friedrich</i> .....	29
Gambar 3.1	Grafik 2D Solusi Metode <i>Lax Friedrich</i> pada Persamaan Gelombang Tali .....	53
Gambar 3.2	Grafik 3D Solusi Metode <i>Lax Friedrich</i> pada Persamaan Gelombang Tali .....	54
Gambar 3.3	Grafik 2D Solusi Metode <i>Lax Friedrich</i> dengan Kondisi Faktor Amplifikatif pada Persamaan Gelombang Tali .....	62
Gambar 3.4	Grafik 3D Solusi Metode <i>Lax Friedrich</i> dengan Kondisi Faktor Amplifikatif pada Persamaan Gelombang Tali .....	63
Gambar 4.1	Grafik 3D Solusi Metode <i>Lax Friedric</i> pada Persamaan Gelombang Tali .....	66
Gambar 4.2	Grafik 3D Solusi Metode <i>Lax Friedrich</i> dengan Kondisi Faktor Amplifikatif pada Persamaan Gelombang Tali .....	67

**DAFTAR TABEL**

Tabel 3.1 Tabel Galat dari Selesaian Numerik Persamaan  
 Gelombang Tali  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$  Menggunakan  
 Metode *Lax Friedrich* ..... 53



## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$u(x, t)$	: Perubahan gelombang yang dipengaruhi oleh ruang ( $x$ ) dan waktu ( $t$ )
$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$	: Turunan-turunan tinggi parsial untuk gelombang (turunan tingkat ke II terhadap $x$ )
$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$	: Turunan-turunan tinggi parsial untuk gelombang (turunan tingkat ke II terhadap $t$ )
$n$	: Indeks yang menyatakan waktu di $t$
$j$	: Indeks yang menyatakan ruang di $x$
$u_j^n$	: Perubahan gelombang yang dipengaruhi oleh ruang $j$ dan waktu $n$
$\Delta t$	: Perubahan waktu
$\Delta x$	: Perubahan ruang
$G_{k_{1,2}}$	: Nilai faktor amplifikasi
$\gamma$	: Nilai konstan pada gelombang tali

## ABSTRAK

Halik, M.. 2014. **Metode *Lax Friedrich* dalam Menyelesaikan Persamaan Gelombang Tali**. Skripsi. Program S1 Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing: (1) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
(2) Ach. Nashichuddin, M.A

**Kata Kunci :** Metode beda hingga maju, Metode beda hingga tengah, Metode *Lax Friedrich*, *Von Neumann*

Gelombang merupakan gangguan medium yang dapat berlanjut dengan sendirinya, yang bergerak dari suatu titik ke titik yang lainnya dengan membawa energi dan momentum. Seperti yang telah diketahui bahwa gelombang itu terjadi karena adanya suatu benturan antara partikel yang satu dengan partikel yang lain. Gelombang dapat dibentuk dalam persamaan matematika. Salah satu bentuk persamaan matematikanya yaitu persamaan gelombang tali yang diperoleh dari proses *Brownian Motion*. Dalam penelitian ini persamaan gelombang tersebut diselesaikan secara numerik yaitu dengan metode *Lax Friedrich* yang bentuk proses penyelesaiannya mengimplementasikan beda maju pada waktu, beda tengah pada ruang, dan mensubstitusikan kondisi rerata ruang terhadap suku yang mengandung bentuk  $u_j^n$  yang diakibatkan oleh turunan pada waktu ( $t$ ) sehingga dengan semua itu diperoleh bentuk solusi skema *Lax Friedrich*.

Kesempurnaan dalam metode ini yaitu jika skema yang diperoleh memenuhi kriteria stabil. Oleh karena itu untuk menganalisis kestabilan peneliti menggunakan kondisi *Von Neumann* khusus kasus persamaan 1D dengan syarat diperoleh faktor amplikatif  $|G_k| \leq 1$ . Penjelasan penyelesaian  $u$  dari waktu ke waktu yang dipilih dalam penelitian ini menggunakan bantuan MATLAB, serta memvisualisasikan amplitudo gelombang untuk  $t$  yang berjalan selanjutnya dalam bentuk grafik 2D.

## ABSTRACT

Halik, M.. 2014. **Solution of Rope Wave Equation Using Lax Friedrich Method**. Thesis. S1 Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Advisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, (II) Ach. Nashichuddin, M.A

**Key Words:** Forward finite difference method, Central finite difference method, *Lax Friedrich* method, *Von Neumann*

A wave is a disturbance of medium that can continue on its own, moving from one point to another by bringing the energy and momentum. As we know that the waves occur due to a collision of a particle to others. A wave can be represented as mathematical equation, one of those equations is a rope wave equation that derived from *Brownian Motion* process. Using *Lax Friedrich* method implimenting forward different, central different, and substituting the average condition of space respect to terms containing  $u(j, n)$  due to derivation at time  $t$ . From these processes we obtain the solution of *Lax Friedrich* scheme.

The reliability of this method is that if the scheme meets the stability criteria. Therefore, to analyze the stability, researcher use *Von Neumann* conditions especially from the special case of 1D equation with the terms of amplification factor  $|G_k| \leq 1$  is obtained. In this study, the solution of  $u$  from time to time is represented using MATLAB. The researcher also visualized the wave amplitude of varying  $t$  into 3D graphics.

## المخلص

خالق، محمد. ٢٠١٤. الحل لمعادلة الموجة لحبل بطريقة لاكش فريد ريش. (ش ١) قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الدولة الإسلامية مولنا مالك ابراهيم ما لانج. المشرفين: (١) اري كو سمستوتي الماجستر (٢) احمد ناصخ الدين الماجستر

الكلمة الرئيسية: طريقة الفرق المحدود الأمامي، طريقة الفرق المحدود الوسطي، طريقة لاكش فريد ريش، فون نيومان

الموجة هي اضطراب الوسائط الذي يمكن أن تستمر على نفسه، تتحرك من نقطة واحدة إلى نقطة أخرى بنقل الطاقة والزخم. وكما نعلم أن الأمواج وقعت لتصادم بين الجسيمات بعضها البعض. في الرياضيات تمثل الموجة على المعادلات، أحد منها هي معادلة الموجة لحبل التي حصلت عليها عميلة الحركة البرونية في هذا البحث المعادلات تحل عددياً باستخدام طريقة لاكش فريد ريش على تنفيذ الفرق الأمامي، الفرق الوسطي واستبدال الحالة المتوسطة من الأماكن فيما يتعلق بتعبير الذي يشتوي على شكل  $u_j^n$  لسبب إشتقاقها في الوقت  $(t)$ . من تلك العمليات نحصل على حل تخطط لاكش فريد ريش.

الموثوقية لهذه الطريقة هي أنها إن كان المخطط يفي بمعايير الإستقرار فلذا لك لتحليل تلك الإستقرار الباحث يستخدم أحوال فون نيومان خاصة من الحالة الخاصة لمعادلة 1D بشروط أن يتم الحصول على عا مل التضخيم  $|G_k| \leq 1$  في هذا البحث، الحل لـ  $u$  من الأوقات ممثل ببرنامج MATLAB. وكان البحث قد أبدى سعة الموجة لـ  $t$  المتباينة برسم 3D.

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an merupakan sumber ilmu pengetahuan. Al-Qur'an telah menjelaskan dimensi baru dan aktual terhadap studi mengenai fenomena jagad raya dan membantu manusia melakukan terobosan terhadap batas penghalang dari alam materi. Al-Qur'an membawa manusia kepada Allah SWT melalui ciptaan-Nya dan realitas konkret yang terdapat di bumi dan di langit (Rahman, 2000:1).

Mengingat Al-Qur'an adalah kitab suci serta mu'jizat yang paling besar, maka Al-Qur'an mengajarkan segala macam ilmu pengetahuan termasuk ilmu matematika. Matematika membawa peran yang sangat penting bagi manusia dalam menjalani kehidupan sehari-hari. Berbagai bentuk simbol, dan metode digunakan untuk membantu perhitungan, pengukuran, penilaian, dan peramalan atau perkiraan (estimasi) dalam menyelesaikan permasalahan. Seperti yang telah termaktub dalam Al-Qur'an surat Az-Zumar ayat 47 yaitu sebagai berikut:

وَلَوْ أَنَّ لِلَّذِينَ ظَلَمُوا مَا فِي الْأَرْضِ جَمِيعًا وَمِثْلَهُ مَعَهُ لَافْتَدَوْا بِهِ مِنْ سُوءِ  
 الْعَذَابِ يَوْمَ الْقِيَامَةِ وَبَدَا لَهُمْ مِنَ اللَّهِ مَا لَمْ يَكُونُوا يَحْتَسِبُونَ ﴿٤٧﴾

*Artinya: Dan Sekiranya orang-orang yang zalim mempunyai apa yang ada di bumi semuanya dan (ada pula) sebanyak itu besertanya, niscaya mereka akan menebus dirinya dengan itu dari siksa yang buruk pada hari kiamat. dan jelaslah bagi mereka azab dari Allah yang belum pernah mereka perkirakan. {Q.S. Az-Zumar: 47}.*

Berdasarkan ayat di atas dapat diketahui bahwa kaitan ayat tersebut dengan metode estimasi (perkiraan) adalah terletak pada lafadh " يَحْتَسِبُونَ ". Karena

pada ayat tersebut sudah tampak jelas bahwa adzab dan hukuman dari Allah SWT kepada mereka adalah sesuatu yang tidak pernah terlintas dalam pikiran serta perkiraan mereka, akan tetapi manusia dapat berfikir sehingga mampu memperkirakan apa yang harus dilakukan agar dirinya tidak mendapatkan hukuman dari Allah SWT. Ketika berbicara dalam konteks perhitungan dengan menggunakan suatu metode, sesungguhnya begitu banyak hal yang melalui sistem perhitungan pendekatan atau estimasi tersebut dalam kehidupan ini, seperti perhitungan penetapan awal bulan puasa serta jatuhnya akhir bulan puasa (hari raya). Dalam menyelesaikan permasalahan tersebut tentunya menggunakan metode-metode pendekatan yang ada dan mempunyai bentuk solusi estimasi yang sempurna. Mengingat ayat di atas membicarakan tentang perkiraan (estimasi) maka dalam ilmu matematika terapan kita kenal dengan ilmu numerik yang bentuk solusinya mampu mendekati kebenaran dalam menyelesaikan permasalahan (Munir, 2008:8). Misalnya metode numerik dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang berkaitan dengan gelombang, baik gelombang bunyi, radio bahkan gelombang elektromagnetik. Berbicara tentang gelombang, Allah SWT menjelaskan dalam Al-Qur'an surat Ar-Ruum ayat 46 yaitu sebagai berikut:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ يُرْسِلَ الرِّيحَ مُبَشِّرَاتٍ وَلِيُذِيقَكُمْ مِنْ رَحْمَتِهِ وَلِتَجْرِيَ الْفُلُكُ  
بِأَمْرِهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ وَلِعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٤٦﴾

*Artinya: Dan diantara tanda -tanda kekuasaanNya ialah bahwa Dia mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmatNya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintahNya dan*

*supaya kamu dapat mencari karuniaNya, mudah-mudahan kamu bersyukur. (Q.S. Ar-Ruum: 46).*

Secara umum “angin” di sini sebagai angin yang bertiup membawa awan untuk menurunkan air hujan dan angin yang meniup kapal layar agar dapat berlayar di lautan. Kita merasakan kedekatan makna “angin” dalam ayat ini adalah gelombang, bukan saja gelombang bunyi yang membawa berita tetapi juga gelombang radio atau gelombang elektromagnet yang mampu dipancarkan ke segala penjuru dunia bahkan seluruh jagad raya ini (Dadang, 2012:1).

Gelombang merupakan gangguan medium yang dapat berlanjut dengan sendirinya, yang bergerak dari suatu titik ke titik yang lainnya dengan membawa energi dan momentum (Tipler, 1998:471). Mengingat kata gelombang maka dalam kehidupan kita sehari-hari tidak lepas dari bentuk-bentuk gelombang yang terjadi pada beberapa hal, salah satunya suara musik, getaran bencana alam, pengiriman pesan dan lain-lain. Oleh karena itu bentuk penyelesaian metode numerik dalam kasus gelombang ini sangat dibutuhkan untuk mencapai suatu solusi yang sempurna dengan menggunakan salah satu metode dari bentuk perhitungan yang paling efisien dan cepat untuk menyelesaikan persamaan matematis yang bentuk solusinya merupakan angka (Munir, 2008:5). Misalnya yang telah dilakukan penelitian sebelumnya dengan menggunakan salah satu metode numerik yaitu metode *Thomas* yang bentuk penyelesaiannya lebih condong ke dalam bentuk matrik untuk mencari kestabilan. Akan tetapi dalam penelitian digunakan salah satu metode pendekatan numerik yaitu metode *Lax Friedrich* yang akan diimplementasikan terhadap persamaan gelombang yaitu persamaan gelombang tali yang mempunyai bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

dimana  $u$  merupakan pergeseran gelombang yang dipengaruhi oleh  $x$  dan  $t$ ,  $x$  adalah jarak,  $t$  adalah waktu dan  $\gamma$  adalah bilangan konstan pada gelombang (Djojodihardjo, 2000:312-313).

Metode *Lax Friedrich* merupakan salah satu metode pada pendekatan numerik dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial (Rezzolla, 2005:15). Oleh karena itu, tentunya metode *Lax Friedrich* ini mampu menyelesaikan persamaan gelombang tali yang memenuhi bentuk persamaan differensial parsial. Metode *Lax Friedrich* dalam menyelesaikan persamaan tersebut mengimplementasikan metode beda maju dan metode beda tengah serta mensubstitusikan bentuk rerata ruang yang mempunyai bentuk  $u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$  dengan indeks  $j$  menyatakan langkah ruang dan indeks  $n$  menyatakan langkah waktu (Rezzolla, 2005:15). Oleh karena itu dalam skripsi ini dikaji “Metode *Lax Friedrich* dalam Menyelesaikan Persamaan Gelombang Tali”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas penulis merumuskan masalah dalam skripsi ini yaitu sebagai berikut:

- 1) Bagaimana solusi numerik persamaan gelombang tali dengan menggunakan metode *Lax Friedrich*?
- 2) Bagaimana kestabilan skema *Lax Friedrich* dari persamaan gelombang tali?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan skripsi ini adalah:

- 1) Untuk mengetahui solusi numerik persamaan gelombang tali dengan menggunakan metode *Lax Friedrich*
- 2) Untuk mengetahui kestabilan skema *Lax Friedrich* dari persamaan gelombang tali

### 1.4 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini masalah dibatasi pada beberapa hal berikut:

- 1) Persamaan gelombang tali yang bersifat linier orde dua satu dimensi
- 2) Menggunakan metode beda tengah untuk turunan ruangnya
- 3) Menggunakan metode beda maju untuk turunan waktunya
- 4) Model persamaan gelombang bersifat deterministik dan bergantung waktu
- 5) Gelombang diimplementasikan pada dawai

### 1.5 Manfaat Penelitian

Dalam skripsi ini mempunyai beberapa manfaat diantaranya adalah sebagai berikut:

- 1) Mendapatkan paparan analisis metode *Lax Friedrich* dalam menyelesaikan persamaan gelombang tali
- 2) Mendapatkan paparan analisis stabilitas pada skema *Lax Friedrich*.

### 1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian menggunakan kajian kepustakaan dengan langkah-langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1) Menganalisis bentuk persamaan pendekatan turunan orde dua baik pada ruang  $(x)$  dan waktu  $(t)$
- 2) Menyelesaikan persamaan gelombang tali dengan metode *Lax Friedrich*
- 3) Menganalisis kestabilan pada skema *Lax Friedrich* dengan menggunakan analisa stabilitas *Von Neumann*

### 1.7 Sistematika Penulisan

Untuk lebih memahami perancangan penulisan skripsi ini, maka dalam penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam sub bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Pada bab I berisi pendahuluan, yang berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Pada bab II berisi tentang kajian pustaka, berisi hal-hal yang mendasar dalam teori yang dikaji, meliputi: Gelombang, analisis persamaan gelombang, tipe persamaan gelombang, orde persamaan gelombang, sifat linier dan tidak linier untuk persamaan gelombang, skema *Lax Friedrich*, prosedur skema *Lax-Friedrich*, analisis kestabilan, kaidah umum penyelesaian numerik persamaan differensial parsial, dan kaidah umum penyelesaian analitik persamaan differensial parsial dan kajian agama.

Pada bab III berisi tentang pembahasan, pembahasan pada bab ini berisi uraian yang meliputi tentang: Solusi metode *Lax Friedrich* dalam menyelesaikan persamaan gelombang tali, solusi kestabilan skema *Lax Friedrich* dengan deret

*Fourier* dan kajian agama. Pada bab IV yaitu penutup, berisi tentang kesimpulan ahir penelitian dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Gelombang

##### 2.1.1 Gelombang

Gelombang merupakan gangguan medium yang dapat berlanjut dengan sendirinya, yang bergerak dari suatu titik ke titik yang lainnya dengan membawa energi dan momentum. Gerak gelombang dapat dipandang sebagai perpindahan energi dan momentum tanpa perpindahan materi. Pada gelombang mekanik, energi dan momentum dirambatkan melalui gangguan dalam medium, gangguan tersebut merambat karena adanya interaksi di dalam medium yang muncul karena sifat elastis mediumnya. Sedangkan pada gelombang elektromagnetik, energi dan momentum dirambatkan melalui medan listrik dan medan magnet yang dapat merambat melalui medan (Tipler, 1998:471).

Pada gelombang sinus atau harmonik yang menggambarkan suatu simpangan mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$y(x) = A \sin kx \quad (2.1)$$

dengan  $A$  adalah amplitudo dan  $k$  merupakan konstanta yang disebut bilangan gelombang. Jika diasumsikan persamaan (2.1) sebagai gelombang yang sedang menjalar ke kanan searah sumbu  $x$  dengan laju  $v$ , maka variabel  $x$  -nya diganti dengan  $x - vt$ . Oleh karena itu bentuk umum persamaan (2.1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y(x, t) = A \sin k(x - vt)$$

$$y(x, t) = A \sin(kx - kv t)$$

atau

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t).$$

Dengan asumsi  $\omega = kv$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda = \frac{v}{f}$ ,  $v = \frac{\lambda}{T}$ ,  $f = \frac{1}{T}$  dan mensubstitusikannya ke dalam persamaan (2.1) sebagaimana  $\omega$  adalah panjang gelombang dan  $T$  yaitu periode maka diperoleh persamaan gelombang yang sedang menjalar ke kanan searah sumbu  $x$  dengan laju  $v$  yaitu sebagai berikut:

$$y(x, t) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) \quad (2.2)$$

(Tipler, 1998:479-480).

Sedangkan untuk gelombang yang sedang menjalar ke kiri maka variabel  $x$  pada persamaan (2.1) diganti dengan  $x + vt$ , oleh karena itu dianalogikan dengan persamaan (2.2) maka diperoleh persamaan gelombang yang sedang menjalar ke kiri searah sumbu  $x$  dengan laju  $v$  yaitu sebagai berikut:

$$y(x, t) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right). \quad (2.3)$$

Berdasarkan persamaan (2.2) dan (2.3) dapat dilihat bahwa jika  $t$  bergerak maju satu periode ( $T$ ) atau jika  $x$  bergerak maju satu panjang gelombang  $\lambda$ , argument fungsi sinus akan berubah sebesar  $2\pi$  dan  $y(x, t)$  memiliki nilai sama dengan sebelumnya (Tipler, 1998:480).

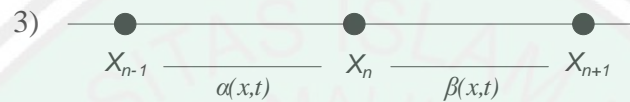
### 2.1.2 Analisis Persamaan Gelombang

Persamaan gelombang adalah persamaan yang menggambarkan bagaimana pergerakan suatu partikel yang pergerakannya acak dan bebas. Dalam

penelitian ini diasumsikan bahwa partikel memiliki peluang yang sama untuk bergerak ke kanan dan ke kiri dengan diasumsikan sebagai berikut:

$$1) E(x) \approx 0$$

$$2) V(x) = \frac{v^2}{\lambda} \Rightarrow D$$



dimana  $\alpha(x, t)$  merupakan distribusi peluang partikel mendesak partikel lain dari kiri dan  $\beta(x, t)$  merupakan distribusi peluang partikel mendesak partikel lain dari kanan. Dengan demikian mengakibatkan adanya tumbukan antara masing-masing partikel sehingga asumsi yang terjadi sebagai berikut:

$$\begin{cases} \alpha(x, t + \tau) = p\alpha(x - \delta, t) + q\beta(x - \delta, t) & (2.4) \\ \beta(x, t + \tau) = p\beta(x + \delta, t) + q\alpha(x + \delta, t) & (2.5) \end{cases}$$

(Zauderer, 2006:18).

Berdasarkan ekspansi deret *Taylor* maka persamaan (2.4) dan (2.5) dapat ditulis menjadi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x, t + \tau) = \alpha(x, t) + \tau\alpha_t(x, t) \\ \alpha(x - \delta, t) = \alpha(x, t) - \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \\ \alpha(x + \delta, t) = \alpha(x, t) + \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \\ \beta(x, t + \tau) = \beta(x, t) + \tau\beta_t(x, t) \\ \beta(x - \delta, t) = \beta(x, t) - \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \\ \beta(x + \delta, t) = \beta(x, t) + \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

(Zauderer, 2006:5).

Pandang persamaan (2.6), kemudian substitusikan pada persamaan (2.4) maka diperoleh persamaan berikut:

$$\alpha(x, t) + \tau \alpha_t(x, t) = p \left[ \alpha(x, t) - \delta \alpha_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 \alpha_{xx}(x, t) \right] + q \left[ \beta(x, t) - \delta \beta_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 \beta_{xx}(x, t) \right]. \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut:

$$\tau \alpha_t(x, t) = -\alpha(x, t) + p\alpha(x, t) + q\beta(x, t) + \delta[-p\alpha_x(x, t) - q\beta_x(x, t)] + \frac{1}{2} \delta^2 [p\alpha_{xx}(x, t) + q\beta_{xx}(x, t)]. \quad (2.8)$$

Jika diasumsikan bahwa turunan kedua dari  $\alpha$  dan  $\beta$  sangat kecil dan dalam hal ini hanya menggunakan kecepatan dan percepatan diabaikan, persamaan (2.8) menjadi sebagai berikut:

$$\tau \alpha_t(x, t) = -\alpha(x, t) + p\alpha(x, t) + q\beta(x, t) - \delta[p\alpha_x(x, t) + q\beta_x(x, t)]. \quad (2.9)$$

Ketika membagi persamaan (2.9) dengan  $\tau$  maka didapatkan bentuk  $\alpha_t(x, t)$  yaitu sebagai berikut:

$$\alpha_t(x, t) = -\frac{1}{\tau} \alpha(x, t) + \frac{p}{\tau} \alpha(x, t) + \frac{q}{\tau} \beta(x, t) - \frac{\delta}{\tau} [p\alpha_x(x, t) + q\beta_x(x, t)] \quad (2.10)$$

(Zauderer, 2006:18).

Pandang persamaan (2.10) jika dirubah ke dalam bentuk yang lebih sederhana maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\alpha_t(x, t) = \frac{1}{\tau} (-1 + p) \alpha(x, t) + \frac{q}{\tau} \beta(x, t) - \frac{\delta}{\tau} (p\alpha_x(x, t) + q\beta_x(x, t)) \quad (2.11)$$

pandang persamaan (2.11) karena  $\alpha$  di sini merupakan distribusi peluang partikel mendesak partikel lain dari kiri maka untuk distribusi peluang partikel yang mendesak partikel lain dari kanan yang dinotasikan dengan  $\beta$  diabaikan sehingga diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\alpha_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(-1 + p)\alpha(x, t) + \frac{q}{\tau}\beta(x, t) - \frac{\delta p}{\tau}\alpha_x(x, t). \quad (2.12)$$

Dengan mengasumsikan bahwa  $p + q = 1$  maka persamaan (2.12) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_t(x, t) &= \frac{1}{\tau}(p - (p + q))\alpha(x, t) + \frac{q}{\tau}\beta(x, t) - \frac{\delta p}{\tau}\alpha_x(x, t) \\ \alpha_t(x, t) &= -\frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{q}{\tau}\beta(x, t) - \frac{\delta p}{\tau}\alpha_x(x, t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dengan asumsi bahwa:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{\delta p}{\tau} &= \gamma, \gamma \text{ merupakan kecepatan per step perjalanan,} \\ \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{q}{\tau} &= \lambda, \forall \lambda \text{ adalah konstanta tak nol,} \end{aligned}$$

maka persamaan (2.13) diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\alpha_t(x, t) = -\lambda\alpha(x, t) + \lambda\beta(x, t) - \gamma\alpha_x(x, t). \quad (2.14)$$

Kemudian persamaan (2.14) dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu sebagai berikut:

$$\alpha_t(x, t) + \gamma\alpha_x(x, t) = -\lambda\alpha(x, t) + \lambda\beta(x, t). \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) dapat juga ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t) + \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) = -\lambda\alpha(x, t) + \lambda\beta(x, t) \quad (2.16)$$

(Zauderer, 2006:19).

Selanjutnya analog dengan proses perolehan bentuk persamaan (2.16) maka didapatkan penjabaran persamaan (2.5) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \beta(x, t) + \tau\beta_t(x, t) = p \left[ \beta(x, t) + \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \right] + \\ q \left[ \alpha(x, t) + \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Selanjutnya pandang persamaan (2.17) dapat disederhanakan menjadi berikut:

$$\begin{aligned} \tau\beta_t(x, t) = -\beta(x, t) + p\beta(x, t) + q\alpha(x, t) + \delta[p\beta_x(x, t) + q\alpha_x(x, t)] + \\ \frac{1}{2}\delta^2[p\beta_{xx}(x, t) + q\alpha_{xx}(x, t)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Jika diasumsikan bahwa turunan kedua dari  $\alpha$  dan  $\beta$  sangat kecil dan dalam hal ini hanya menggunakan kecepatan maka percepatan diabaikan sehingga persamaan (2.18) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau\beta_t(x, t) = -\beta(x, t) + p\beta(x, t) + q\alpha(x, t) + \delta[p\beta_x(x, t) + \\ q\alpha_x(x, t)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ketika membagi persamaan (2.19) dengan  $\tau$  maka didapatkan bentuk  $\beta_t(x, t)$  yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \beta_t(x, t) = -\frac{1}{\tau}\beta(x, t) + \frac{p}{\tau}\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \\ \frac{\delta}{\tau}[p\beta_x(x, t) + q\alpha_x(x, t)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

(Zauderer, 2006:18).

Pandang persamaan (2.20) jika dirubah ke dalam bentuk yang lebih sederhana maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \beta_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(p - 1)\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \\ \frac{\delta}{\tau}[p\beta_x(x, t) + q\alpha_x(x, t)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pandang persamaan (2.21) karena  $\beta$  di sini merupakan distribusi peluang partikel mendesak partikel lain dari kanan maka untuk distribusi peluang partikel yang mendesak partikel lain dari kiri yang dinotasikan dengan  $\alpha$  diabaikan sehingga diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\beta_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(p - 1)\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{\delta}{\tau} p\beta_x(x, t). \quad (2.22)$$

Dengan mengasumsikan bahwa  $p + q = 1$  maka persamaan (2.22) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \beta_t(x, t) &= \frac{1}{\tau}(p - (p + q))\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{\delta}{\tau} p\beta_x(x, t) \\ \beta_t(x, t) &= -\frac{q}{\tau}\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{\delta}{\tau} p\beta_x(x, t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dengan asumsi bahwa:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{\delta p}{\tau} &= \gamma, \gamma \text{ merupakan kecepatan per step perjalanan,} \\ \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{q}{\tau} &= \lambda, \forall \lambda \text{ adalah konstanta tak nol,} \end{aligned}$$

maka persamaan (2.23) diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\beta_t(x, t) = -\lambda\beta(x, t) + \lambda\alpha(x, t) + \gamma\beta_x(x, t). \quad (2.24)$$

Kemudian persamaan (2.24) dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu sebagai berikut:

$$\beta_t(x, t) - \gamma\beta_x(x, t) = -\lambda\beta(x, t) + \lambda\alpha(x, t). \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) dapat juga ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial \beta}{\partial x}(x, t) = -\lambda \beta(x, t) + \lambda \alpha(x, t) \quad (2.26)$$

(Zauderer, 2006:19).

Pandang persamaan (2.16) dan (2.26) yaitu ketika pada saat  $t = 0$  maka partikel berada pada  $x = 0$  dan kemungkinan besar partikel berpindah ke kanan atau ke kiri, peluang  $\alpha$  dan  $\beta$  habis untuk  $x \neq 0$  dan sama dengan  $\frac{1}{2}$  pada saat  $x = 0$ . Sehingga diperoleh kondisi awal yaitu sebagai berikut:  $\alpha(x, 0), \beta(x, 0) = \frac{1}{2} \delta(x)$ . Bentuk penjumlahan persamaan (2.16) dengan persamaan (2.26) diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t) &= -\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) - \lambda \alpha(x, t) + \lambda \beta(x, t) \\ \frac{\partial \beta}{\partial t}(x, t) &= \gamma \frac{\partial \beta}{\partial x}(x, t) + \lambda \alpha(x, t) - \lambda \beta(x, t) \\ \hline \frac{\partial(\alpha+\beta)}{\partial t}(x, t) &= \gamma \frac{\partial(\beta-\alpha)}{\partial x}(x, t). \end{aligned} \quad +$$

(2.27)

Bentuk turunan kedua persamaan (2.27) terhadap  $t$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2(\alpha+\beta)}{\partial t^2}(x, t) = \gamma \frac{\partial^2(\beta-\alpha)}{\partial t \partial x}(x, t)$$

(2.28)

(Zauderer, 2006:19).

Sedangkan pengurangan persamaan (2.16) dengan (2.26) diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t) &= -\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) - \lambda \alpha(x, t) + \lambda \beta(x, t) \\ \frac{\partial \beta}{\partial t}(x, t) &= \gamma \frac{\partial \beta}{\partial x}(x, t) + \lambda \alpha(x, t) - \lambda \beta(x, t) \\ \hline \frac{\partial(\alpha-\beta)}{\partial t}(x, t) &= -\gamma \frac{\partial(\alpha+\beta)}{\partial x}(x, t) - 2\lambda \alpha(x, t) + 2\lambda \beta(x, t). \end{aligned} \quad -$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi lebih sederhana yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial(\alpha-\beta)}{\partial t}(x, t) = -\gamma \frac{\partial(\alpha+\beta)}{\partial x}(x, t) - 2\lambda(\alpha - \beta)(x, t). \quad (2.29)$$

Bentuk turunan kedua persamaan (2.29) terhadap  $x$  serta mengalikannya dengan  $\gamma$  untuk turunan terhadap  $x$  maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\gamma \frac{\partial^2(\alpha-\beta)}{\partial x \partial t}(x, t) = -\gamma^2 \frac{\partial^2(\alpha+\beta)}{\partial x^2}(x, t) - \frac{2\lambda\gamma(\alpha-\beta)}{\partial x}(x, t) \quad (2.30)$$

(Zauderer, 2006:19).



Pandang persamaan (2.30), dengan mengalikan  $(-)$  pada tiap ruas dalam persamaan di atas maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\gamma \frac{\partial^2(\beta-\alpha)}{\partial x \partial t}(x, t) = \gamma^2 \frac{\partial^2(\alpha+\beta)}{\partial x^2}(x, t) + \frac{2\lambda\gamma(\alpha-\beta)}{\partial x}(x, t).$$

Pandang persamaan (2.28) dan (2.30). Oleh karena itu maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2(\alpha+\beta)}{\partial t^2}(x, t) = \gamma^2 \frac{\partial^2(\alpha+\beta)}{\partial x^2}(x, t) + \frac{2\lambda\gamma(\alpha-\beta)}{\partial x}(x, t), \quad \forall (\alpha + \beta), \gamma(\alpha - \beta) =$$

$u$ . Sehingga diperoleh bentuk yang lebih sederhana yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

(Zauderer, 2006:19).

Pada persamaan (2.31) di atas merupakan persamaan telegraf, akan tetapi untuk kasus  $\lambda = 0$  maka diperoleh bentuk persamaan gelombang sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.32)$$

(Zauderer, 2006:22).

### 2.1.3 Tipe Persamaan Gelombang

Bentuk umum persamaan differensial parsial (PDP) linier orde dua dengan dua variabel bebas adalah sebagai berikut:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0. \quad (2.33)$$

Dimana  $A, B, C, D, F$ , dan  $G$  diberikan oleh fungsi  $x$  dan  $y$ , dalam kasus tertentu fungsi tersebut merupakan fungsi konstan (Spiegel, 1994:276).

Dari bentuk umum persamaan differensial parsial (2.32), maka persamaan gelombang tersebut dapat bertipe hiperbolik, parabolik, atau eliptik. Jika  $\gamma > 0$ ,

maka persamaan (2.32) adalah hiperbolik, hal ini karena  $B^2 - 4AC = 4\gamma^2 > 0$ . Sedangkan jika  $\gamma = 0$  maka persamaan (2.32) adalah parabolik, hal ini karena  $B^2 - 4AC = 4\gamma^2 = 0$ . Akan tetapi persamaan (2.32) adalah eliptik jika  $B^2 - 4AC = -4\gamma^2 < 0$ , dengan catatan  $\gamma < 0$  (Zauderer, 2006:125).

#### 2.1.4 Orde Persamaan Gelombang

Orde suatu persamaan differensial adalah derajat tertinggi pada variabel turunannya yang muncul dalam persamaan tersebut. Persamaan differensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah berderajat satu. Bentuk umum persamaan differensial parsial linier dan non linier berorde satu adalah:

$$a(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = c(x, t)v(x, t) + d(x, t). \quad (2.35)$$

Dimana  $a, b, c$  dan  $d$  adalah fungsi dan disetiap titik  $(x, t)$  merupakan vektor  $[a(x, t), b(x, t)]$  yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.35) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$F(x, t, v(x, t), v_x(x, t), v_t(x, t)) = 0. \quad (2.36)$$

Dimana  $v_x(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$  dan  $v_t(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$  (Zauderer, 2006:63).

Demikian halnya dengan persamaan differensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga  $m$  jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah berderajat dua, tiga, empat, atau hingga  $m$ . bentuk umum persamaan differensial parsial linier dan tidak linier berorde dua, tiga, empat, atau  $m$  berturut-turut adalah sebagai berikut:

- a) Persamaan differensial parsial linier orde dua dengan variabel  $n$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0$$

b) Persamaan differensial parsial linier orde tiga dengan variabel  $n$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du + e = 0$$

c) Persamaan differensial parsial linier orde empat dengan variabel  $n$

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \partial x_{i_4}} + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n b_{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} \\ + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n c_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \sum_{i_1=1}^n d_{i_1} \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} + eu + f = 0 \end{aligned}$$

d) Persamaan differensial parsial linier orde  $n$  dengan variabel  $n$

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1 i_2 i_3, \dots, i_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} + \dots + = 0$$

(Zauderer, 2006:137).

Sedangkan bentuk persamaan gelombang orde dua berdasarkan teori di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u_{tt}(x, t) - \gamma^2 u_{xx}(x, t) = 0$$

atau juga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Berdasarkan persamaan di atas diketahui bahwa variabel terikatnya  $u(x, t)$ , dimana  $x$  dan  $t$  ini merupakan variable bebas dalam persamaan tersebut. Berdasarkan definisi orde pada persamaan differensial parsial maka persamaan gelombang tersebut dikatakan berorde dua karena turunan tertinggi pada variabel terikatnya adalah berderajat dua (Zauderer, 2006:22).

### 2.1.5 Sifat Linier untuk Persamaan Gelombang

Persamaan differensial parsial (PDP) diklasifikasikan menjadi persamaan differensial linier dan non linier. Pandang bentuk umum persamaan differensial parsial orde dua sebagai berikut:

$$A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y) = G(x, y). \quad (2.37)$$

Berdasarkan persamaan (2.37), linieritas dari PDP ditentukan oleh fungsional dari koefisien  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ ,  $D(x, y)$ ,  $E(x, y)$ ,  $F(x, y)$ , dan  $G(x, y)$  jika koefisien-koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas, [ $F(x, y) = 0$ ], maka persamaan differensial parsial tersebut adalah linier (Zauderer, 2006:66).

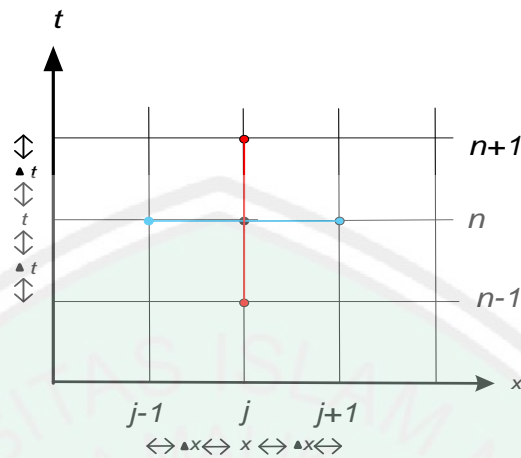
Akan tetapi jika koefisien-koefisien merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua [ $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$ ] maka persamaan differensial parsial tersebut tidak linier (Zauderer, 2006:102). Berdasarkan sifat linieritas dan non linieritas persamaan differensial parsial secara umum di atas, maka persamaan gelombang dikatakan PDP linier jika koefisien turunan pada waktu dan turunan pada ruang merupakan suatu konstanta, pandang persamaan (2.32) yaitu  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$ , dari persamaan tersebut diketahui bahwa koefisien pada turunan waktu adalah 1 dan  $-\gamma^2$  koefisien pada turunan ruang yang merupakan nilai konstan. Akan tetapi persamaan (3.32) dikatakan PDP tidak linier jika mempunyai kondisi yaitu  $u(x, t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$ , hal ini

karena koefisien pada turunan waktu merupakan suatu fungsi yaitu  $u(x, t)$  walaupun koefisien dari turunan ruang adalah  $-\gamma^2$  yang merupakan nilai konstan.

## 2.2 Kaidah Umum Penyelesaian Numerik Persamaan Differensial Parsial

Metode numerik merupakan teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformasikan secara matematis dengan cara operasi hitung (arithmetics) (Triatmojo, 2002:1). Solusi dengan menggunakan metode numerik ini selalu berbentuk angka dan metode numerik ini hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga dinamakan solusi hampiran namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti mungkin (Munir, 2008:5). Secara garis besar model matematis yang sering muncul adalah bentuk persamaan differensial yang mana salah satu konsep penyelesaiannya menggunakan metode beda hingga (*finite difference*) (Sasongko, 2010:61). Metode beda hingga adalah metode yang memanfaatkan deret *Taylor* yang dapat digunakan untuk memprediksi nilai pada suatu titik sebagai turunan dari titik yang lain. Pendekatan dengan deret *Taylor* ini dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan tengah yang digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang dikenal dengan beda maju, beda mundur, dan beda tengah (Sasongko, 2010:59-69).

Untuk lebih mudah memahami bentuk dari beda maju, beda mundur, dan beda tengah perhatikan gambar sebuah jaring kotak sebagai berikut:



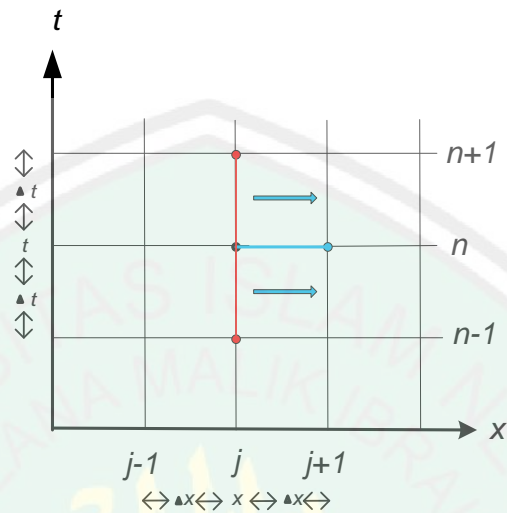
**Gambar 2.1** Jaringan Kotak pada Sumbu  $x$  dan  $t$

Untuk memberikan ilustrasi dan mempermudah pemahaman tentang masalah ini, sekarang marilah tinjau sebuah jaringan kotak yang menggambarkan dua variabel bebas yaitu variabel  $x$  dan  $t$  seperti yang mana telah terlihat pada gambar 2.1. Dari gambar di atas dinyatakan bahwa setiap kotak dalam variabel tersebut mempunyai lebar sebesar  $\Delta x$  dan  $\Delta t$ . Oleh karena itu panjang variabel bebas  $x$  setelah langkah ke  $j$  dinyatakan oleh  $x_j = j(\Delta x)$ , dimana  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, N_x$ . Sedangkan panjang pada variabel bebas  $t$  setelah langkah ke  $n$  dinyatakan oleh  $t_n = n(\Delta t)$ , dimana  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, N_t$  (Supardi, 2011:2).

1) Metode beda maju (*Forward*)

Untuk lebih mudah memahami tentang metode beda maju ini perhatikanlah gambar 2.1. Berdasarkan pada gambar 2.1 maka bentuk metode beda maju ini diperoleh dalam bentuk dua arah yaitu sebagai berikut:

a) Metode beda maju pada ruang ( $x$ )



**Gambar 2.2** Metode Beda Maju pada Ruang ( $x$ )

dari gambar 2.2 di atas dapat diilustrasikan turunan pertama dan kedua yaitu sebagai berikut:

i) Turunan pertama:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$$

bentuk di atas dapat dirubah juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1,n} - u_{j,n}}{\Delta x} \quad (2.38)$$

ii) Turunan kedua:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n = \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + u_j^n}{(\Delta x)^2}$$

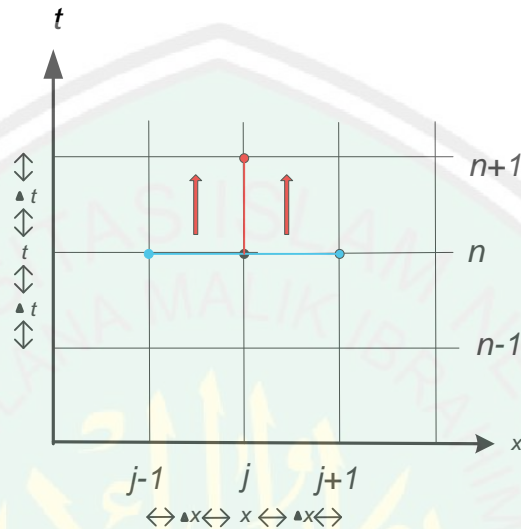
bentuk di atas ini dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n = \frac{u_{j+2,n} - 2u_{j+1,n} + u_{j,n}}{(\Delta x)^2} \quad (2.39)$$

(Sasongko,

2010:65).

b) Metode beda maju pada waktu ( $t$ )



Gambar 2.3 Metode Beda Maju pada Waktu ( $t$ )

dari gambar 2.3 di atas dapat diilustrasikan turunan pertama dan kedua yaitu sebagai berikut:

i) Turunan pertama:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

bentuk di atas dapat kita tulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\Delta t} \quad (2.40)$$

ii) Turunan kedua:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + u_j^n}{(\Delta t)^2}$$

bentuk di atas ini dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

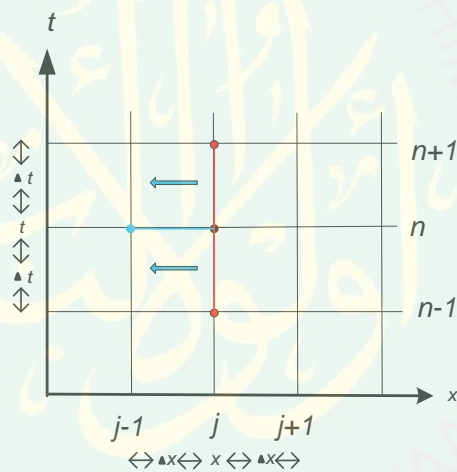
$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^n = \frac{u_{j,n+2} - 2u_{j,n+1} + u_{j,n}}{(\Delta t)^2} \quad (2.41)$$

(Sasongko,  
2010:65).

2) Metode beda mundur (*Backward*)

Dari gambar 2.1 dapat membantu untuk lebih mudah memahami tentang metode beda mundur ini. Berdasarkan gambar 2.1 dengan menggunakan kisi beda hingga maka metode beda mundur ini diperoleh dalam bentuk dua arah yaitu:

a) Metode beda mundur pada ruang ( $x$ )



**Gambar 2.4** Metode Beda Mundur pada Ruang ( $x$ )

dari gambar 2.4 di atas dapat diilustrasikan turunan pertama dan kedua yaitu sebagai berikut:

i) Turunan pertama:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

bentuk di atas ini dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{u_{j,n} - u_{j-1,n}}{\Delta x} \quad (2.42)$$

ii) Turunan kedua:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n = \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{(\Delta x)^2}$$

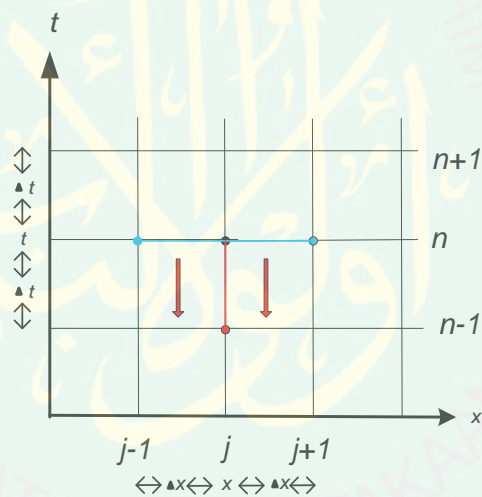
bentuk di atas ini dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n = \frac{u_{j,n} - 2u_{j-1,n} + u_{j-2,n}}{(\Delta x)^2} \quad (2.43)$$

(Sasongko,

2010:68).

b) Metode beda mundur pada waktu ( $t$ )



**Gambar 2.5** Metode Beda Mundur pada Waktu ( $t$ )

dari gambar 2.5 di atas dapat diilustrasikan turunan pertama dan kedua yaitu sebagai berikut:

i) Turunan pertama:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

bentuk di atas ini dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_{j,n} - u_{j,n-1}}{\Delta t} \quad (2.44)$$

ii) Turunan kedua:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^n = \frac{u_j^{n-2} - 2u_j^{n-1} + u_j^n}{(\Delta t)^2}$$



bentuk di atas ini dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n = \frac{u_{j,n} - 2u_{j,n-1} + u_{j,n-2}}{(\Delta t)^2} \quad (2.45)$$

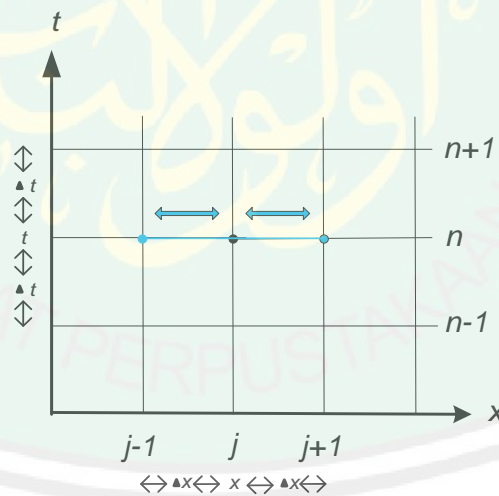
(Sasongko,

2010:68).

### 3) Metode beda tengah (*Center*)

Dari jaringan titik hitung pada gambar 2.1 melalui pendekatan  $(j, n)$  dalam bidang  $x$  dan  $t$  terbentuk dua arah dalam metode beda tengah yaitu pada ruang  $(x)$  dan pada waktu  $(t)$  (Sasongko, 2010:61). Keduanya ini akan dibahas sebagai berikut:

#### a) Metode beda tengah pada ruang $(x)$



**Gambar 2.6** Metode Beda Tengah pada Ruang  $(x)$

dari gambar 2.6 di atas dapat diilustrasikan turunan pertama dan kedua yaitu sebagai berikut:

#### i) Turunan pertama

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

bentuk di atas dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{1}{2} \frac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.46)$$

(Sasongko, 2010:69).

ii) Turunan kedua

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n = \frac{u_{j-1,n}^n - 2u_j^n + u_{j+1,n}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

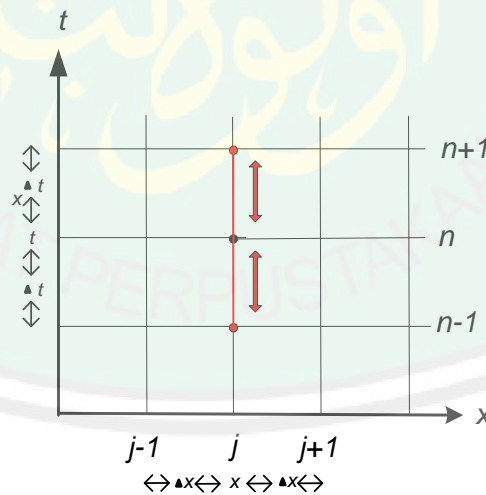
bentuk di atas dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n = \frac{u_{j-1,n} - 2u_j^n + u_{j+1,n}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (2.47)$$

(Sasongko,

2010:69).

b) Metode beda tengah pada waktu ( $t$ )



**Gambar 2.7** Metode Beda Tengah pada Waktu ( $t$ )

dengan cara yang sama maka dari gambar 2.7 di atas dapat diilustrasikan turunan pertama dan kedua yaitu sebagai berikut:

i) Turunan pertama

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{1}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

bentuk di atas dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{1}{2} \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2.48)$$

(Sasongko,

2010:69).

ii) Turunan kedua

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^n = \frac{u_j^{n-1} - 2u_j^n + u_j^{n+1}}{(\Delta t)^2} + \mathcal{O}(\Delta t)^2$$

bentuk di atas dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^n = \frac{u_{j,n-1} - 2u_{j,n} + u_{j,n+1}}{(\Delta t)^2} + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \quad (2.49)$$

(Sasongko,

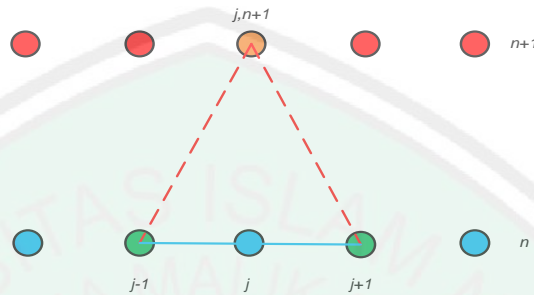
2010:69).

## 2.3 Solusi Metode *Lax-Friedrich*

### 2.3.1 Metode *Lax-Friedrich*

Metode *Lax Friedrich* ini merupakan salah satu metode pendekatan numerik dengan mengimplemintasikan metode beda hingga yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan gelombang hiperbolik (Shounan, 2006:1). Metode *Lax Friedrich* sangat sederhana berlandaskan dengan cara mengganti semua bentuk suku yang berbentuk  $u_j^n$  yang diakibatkan oleh turunan pada waktu dengan rerata ruangnya terhadap persamaan solusi terahir yang terapresiasi dalam bentuk  $u_j^{n+1}$  (Supardi, 2011:13). Jika diaplikasikan ke dalam

sebuah grafik maka bentuk dari  $u_j^{n+1}$  itu dapat dilihat lebih jelas yaitu sebagai berikut:



**Gambar 2.8** Apresiasi Skema *Lax Friedrich*

Gambar 2.8 di atas menerangkan bahwa bulatan hijau merupakan suatu nilai batas yang dapat memberikan informasi tentang nilai besaran yang akan terdapat pada bulatan orange. Dengan kata lain kuantitas  $u_j^{n+1}$  dapat diketahui setelah diperoleh informasi nilai di titik  $j - 1$  dan  $j + 1$  pada saat  $n$ . Sedangkan bentuk persamaan dari  $u_j^n$  dalam rata-rata ruangnya pada saat satu langkah yaitu sebagai berikut:

$$u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \quad (2.50)$$

(Supardi, 2011:13-14).

### 2.3.2 Prosedur Metode *Lax-Friedrich*

Prosedur dalam metode *Lax Friedrich* ini untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial mengimplementasikan metode beda tengah dan metode beda maju. Metode beda tengah untuk turunan ruangnya dan metode beda maju untuk turunan waktunya. Hal ini terjadi karena metode *Lax Friedrich* ini merupakan bentuk metode perkembangan dari metode *Forward Time Centered Space (FTCS)* yang dalam penyelesaian terhadap persamaan differensial parsial terkadang tidak mencapai kestabilan. Dalam metode *Lax Friedrich* ini yang membedakan dari

beberapa metode lain yang dapat juga menyelesaikan persamaan differensial parsial yaitu menggantikan suatu suku yang diakibatkan oleh turunan pada waktunya yang berbentuk  $u_j^n$  dengan mensubstitusikan rata-rata ruang yang terapresiasi pada persamaan (2.50) terhadap bentuk persamaan solusi terakhirnya atau yang disebut juga skema *Lax Friedrich*. Kesuksesan solusi metode *Lax Friedrich* diukur berdasarkan kriteria stabilitas. Prosedur yang digunakan untuk menentukan atau memeriksa kestabilan skema *Lax Friedrich* adalah analisis stabilitas *Von Neumann* atau yang dikenal juga dengan analisis stabilitas *Fourier* yang mempunyai kondisi sebagai berikut:

$$u_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} G_k^n e^{\frac{2\pi i j k}{J}}. \quad (2.51)$$

Ketika solusi pada permasalahan beda hingga itu adalah berkala di  $j$  dengan titik  $J$  maka solusi dari  $u_j^n$  dengan  $j = 0, 1, 2, \dots, J - 1$  adalah solusi pendekatan pada persamaan differensial parsial yang berkala di  $x$  dengan titik  $2\pi$  serta rentang jarak  $(\Delta x) = \frac{2\pi}{J}$  (Flaherty:12). Sedangkan  $G$  adalah bilangan kompleks yang bergantung pada  $k$ , sedangkan  $j$  menunjukkan posisi ruang dan  $n$  menunjukkan waktu (Supardi, 2011:11). Jika diperoleh faktor amplifikatif  $|G(k)| \leq 1$  maka solusi tersebut mencapai kestabilan, akan tetapi jika diperoleh faktor amplifikatif  $|G(k)| > 1$  maka solusi tersebut tidak mencapai kestabilan (Noye, 1930:32). Untuk mengetahui lebih jelas kriteria stabil atau tidak stabil maka perhatikan uji kestabilan pada persamaan difusi berikut ini.

Ketika kita ketahui bentuk persamaan difusi dan persamaan tersebut diselesaikan dengan pendekatan beda maju untuk turunan waktunya, dan

pendekatan beda tengah untuk turunan ruang, dengan  $s = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ . Maka bentuk solusi persamaan difusi tersebut yaitu sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = s u_{j-1}^n + (1 - 2s)u_j^n + s u_{j+1}^n \quad (2.52)$$

(Noye, 1930:18).

Pandang (2.51) dan substitusikan pada (2.52) maka diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$(G)^{n+1} e^{i\beta j} = s(G)^n e^{i\beta(j-1)} + (1 - 2s)(G)^n e^{i\beta j} + s(G)^n e^{i\beta(j+1)} \quad (2.53)$$

(Noye, 1930:32).

Jika persamaan (2.53) pada setiap ruasnya dibagi dengan  $(G)^n e^{i\beta j}$  serta menggunakan relasi  $e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$  dan  $\cos\beta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$  maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$G = s e^{-i\beta} + (1 - 2s) + s e^{i\beta}.$$

Dengan bentuk relasi tersebut maka diperoleh bentuk faktor amplifikatif sebagai berikut:

$$G = 1 - 4s \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Jelas, faktor penguat ( $G$ ) ini mempunyai nilai yang berbeda untuk setiap  $\beta$ , yakni untuk komponen *fourier* yang lain. Uji stabilitas ini pada persamaan difusi akan dikatakan stabil jika  $|G| \leq 1 \forall \beta$ , oleh karena itu maka  $-1 \leq 1 - 4s \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \leq 1$  untuk setiap  $\beta$ , pertidaksamaan pada ruas kanan memenuhi untuk setiap  $s$  dan  $\beta$ , sedangkan pertidaksamaan pada ruas kiri membutuhkan  $s \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$ , yang

benar untuk setiap  $\beta$  jika  $s \leq \frac{1}{2}$ . Sehingga terbukti bahwa  $|G| \leq 1$  untuk setiap  $\beta$ , jadi bentuk solusi dari persamaan difusi dengan menggunakan metode FTCS stabil (Noye, 1930:32).

#### 2.4 Kaidah Umum Penyelesaian Analitik Persamaan Differensial Parsial

Dalam penyelesaian persamaan differensial parsial dikenal istilah penyelesaian umum dan penyelesaian khusus. Penyelesaian umum adalah suatu penyelesaian yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas sembarang yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaannya. Sedangkan penyelesaian khusus adalah penyelesaian yang dapat didapatkan dari penyelesaian umumnya dengan pilihan khusus dari fungsi sembarang (Spiegel, 1994:2). Sebagai contoh  $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$  merupakan penyelesaian dari persamaan  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ . Penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian umum karena terdiri dari dua fungsi bebas sembarang yaitu  $F(x)$  dan  $G(y)$ .

Untuk mendapatkan penyelesaian analitik dari persamaan differensial parsial dengan nilai awal, maka harus menentukan terlebih dahulu adalah penyelesaian masalah nilai awal dengan menggunakan metode *d'Alembert's Solution*. Kemudian menentukan penyelesaian masalah nilai batas, jika diberikan syarat batas yang salah satu metode penyelesaiannya menggunakan metode permisahan variabel. Masalah nilai batas melibatkan persamaan differensial parsial dan semua penyelesaian yang memenuhi syarat yang dinamakan syarat batas (Spiegel, 1994:276). Misal persamaan differensial linier orde dua yaitu sebagai berikut:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.54)$$

Dimana koefisien-koefisien  $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$  dan fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam selang  $a \leq x \leq b$  dengan  $a_2(x) \neq 0$  di dalam selang ini. menentukan penyelesaian  $y(x)$  dari persamaan differensial (2.54) pada sebuah titik  $x = x_0$  di dalam selang  $a \leq x \leq b$  dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan yaitu sebagai berikut:

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1. \quad (2.55)$$

Dalam banyak masalah nilai awal variabel bebas  $x$  dari persamaan differensial pada umumnya menyatakan waktu,  $x_0$  menyatakan waktu awal dan  $y_0$  dan  $y_1$  menyatakan syarat awal. Bila variabel  $x$  bebas merupakan variabel yang menyatakan tempat (*space variabele*), maka mencari suatu penyelesaian  $y(x)$  dari persamaan differensial yang memenuhi syarat pada titik akhir pada selang  $a \leq x \leq b$  adalah sebagai berikut:

$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B. \quad (2.56)$$

Dengan A dan B dua buah konstanta, disebut syarat batas. Persamaan differensial (2.55), bersama-sama dengan syarat batas (2.56), merupakan suatu masalah nilai batas. Bentuk dari syarat batas pada titik akhir dapat sangat berbeda-beda (Finizio dan Ladas, 1988:244).

Beberapa bentuk khusus syarat batas yang digunakan dalam aplikasi yaitu sebagai berikut:

- a) Kondisi batas separated

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = c_1, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = c_2$$

- b) Kondisi batas dirichlet

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0,$$

dimana nilai eigennya  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ , dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$  dan fungsi eigennya adalah sebagai berikut:

$$\phi_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ketika  $a_n$  adalah konstanta tidak nol.

c) Kondisi batas Neumann

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = y'(L) = 0,$$

dimana nilai eigennya  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ , dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$  dan fungsi eigennya adalah sebagai berikut:

$$\phi_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ketika  $c_n$  adalah konstanta tidak nol.

d) Kondisi batas periodik

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(-\pi) = y(\pi); \quad y'(-\pi) = y'(\pi),$$

dimana nilai eigennya  $\lambda_n = n^2$ , dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$  dan fungsi eigennya adalah sebagai berikut:

$$\phi_n(x) = A_0,$$

$$\phi_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx, \text{ dengan } n \geq 1.$$

Ketika  $A_n$  dan  $B_n$  adalah konstanta tidak nol untuk keduanya.

Bentuk Dirichlet dan Neumann adalah syarat batas yang khusus digunakan pada nilai batas (Nagle dan Saff, 2003:612). Solusi nontrivial dalam masalah nilai batas, biasa disebut dengan nilai eigen. Nilai eigen sangat penting dalam mencari solusi persamaan differensial parsial dengan menggunakan metode pemisahan

variabel (Nagle dan Saff, 2003:615). Berikut ini diberikan ilustrasi penerapan prosedur analitik untuk persamaan Laplace dua dimensi yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \quad (2.57)$$

Dengan kondisi batas yaitu sebagai berikut:

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 < x < a \quad (2.58)$$

$$u(y, 0) = f(y); \quad 0 < y < b. \quad (2.59)$$

Misalkan  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ . Maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y). \quad (2.60)$$

Substitusikan persamaan (2.60) ke persamaan (2.59), sehingga diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0. \quad (2.61)$$

Pemisahan variabel dari persamaan (2.61) yaitu sebagai berikut:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K$$

atau

$$X''(x) - KX(x) = 0 \quad (2.62)$$

$$Y''(y) + KY(y) = 0, \quad (2.63)$$

dimana  $K$  adalah konstanta tidak nol.

Dengan mengkombinasikan kondisi batas (2.58) dan persamaan (2.62) maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$X''(x) - KX(x) = 0; \quad X(0) = X(a) = 0. \quad (2.64)$$

Dalam menyelesaikan persamaan (2.64) maka dibawa ke bentuk persamaan differensial biasa  $m^2 - K = 0$ . Untuk hal ini maka terdapat tiga kasus, yaitu sebagai berikut:

Kasus 1 : jika  $K > 0$  maka akar-akarnya adalah  $\pm\sqrt{K}$ . Maka solusi umum dari persamaan (2.64) adalah sebagai berikut:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{K}x} + c_2 e^{-\sqrt{K}x}. \quad (2.65)$$

Untuk menentukan  $c_1$  dan  $c_2$  maka dikombinasikan dengan syarat batasnya sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai  $c_1$  dan  $c_2$  yaitu sebagai berikut:

$$c_2 = -c_1. \quad (2.66)$$

Sedangkan untuk  $X(a)$ , adalah sebagai berikut:

$$X(a) = c_1 e^{\sqrt{K}a} + c_2 e^{-\sqrt{K}a} = 0. \quad (2.67)$$

Substitusikan persamaan (2.66) ke persamaan (2.67). Maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$X(a) = c_1 e^{\sqrt{K}a} - c_2 e^{-\sqrt{K}a} = 0$$

atau

$$X(a) = c_1 (e^{\sqrt{K}a} - e^{-\sqrt{K}a}) = 0. \quad (2.68)$$

Dari persamaan (2.68) diperoleh dua kesimpulan yaitu sebagai berikut:

$$c_1 = 0 \text{ atau } e^{\sqrt{K}a} - e^{-\sqrt{K}a} = 0.$$

Dalam kasus ini dipilih  $c_1 \neq 0$  dan  $e^{\sqrt{K}a} - e^{-\sqrt{K}a} = 0$  maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$e^{\sqrt{Ka}} = e^{-\sqrt{Ka}}.$$

Sehingga persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$e^{2\sqrt{Ka}} - 1 = 0.$$

Karena  $K > 0$  maka  $(e^{2\sqrt{Ka}} - 1) > 0$  sehingga  $c_1 = c_2 = 0$  sehingga tidak ada solusi *nontrivial* untuk  $K > 0$ .

Kasus 2 : jika kasus  $K = 0$  maka akar-akarnya adalah kembar,  $r = 0$ , sehingga solusi umum dari persamaan (2.64) adalah sebagai berikut:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{Ka}} + x c_2 e^{\sqrt{Ka}}. \quad (2.69)$$

Untuk menentukan  $c_1$  dan  $c_2$  maka dikombinasikan dengan kondisi batasnya  $0 \leq x \leq a$ , sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$X(0) = c_1 e^{\sqrt{K0}} + x c_2 e^{\sqrt{K0}}, c_1 e^0 = 0.$$

Maka didapatkan nilai  $c_1$  sebagai berikut:

$$c_1 = 0. \quad (2.70)$$

Sedangkan untuk  $X(a)$  adalah sebagai berikut:

$$X(a) = c_1 e^{\sqrt{Ka}} + (a)c_2 e^{\sqrt{Ka}} = 0. \quad (2.71)$$

Substitusikan persamaan (2.70) ke persamaan (2.71) maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$X(a) = (a)c_2 e^{\sqrt{Ka}} = 0.$$

Sehingga akibatnya diperoleh nilai  $c_2$  yaitu sebagai berikut:

$$c_2 = 0. \quad (2.72)$$

Karena  $c_1 = c_2 = 0$  maka tidak ada solusi *nontrivial* untuk  $K = 0$ .

Kasus 3 : jika  $K < 0$  maka akar-akarnya adalah  $\pm\sqrt{-K}$  maka solusi umum dari persamaan (2.64) adalah sebagai berikut:

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{-K}x + c_2 \sin\sqrt{-K}x. \quad (2.73)$$

Untuk menentukan  $c_1$  dan  $c_2$  maka dikombinasikan dengan kondisi batasnya  $0 \leq x \leq a$  sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$X(0) = c_1 \cos\sqrt{-K}0 + c_2 \sin\sqrt{-K}0.$$

Sehingga diperoleh nilai  $c_1$  yaitu sebagai berikut:

$$c_1 = 0. \quad (2.74)$$

Sedangkan untuk  $X(a)$  maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$X(a) = c_1 \cos\sqrt{-K}a + c_2 \sin\sqrt{-K}a = 0. \quad (2.75)$$

Substitusikan persamaan (2.74) ke persamaan (2.75) maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$X(a) = c_2 \sin\sqrt{-K}a = 0.$$

Berdasarkan persamaan di atas diperoleh dua kesimpulan, yaitu sebagai berikut:

$$c_2 = 0 \text{ tau } \sin\sqrt{-K}a = 0.$$

Untuk  $\sin\sqrt{-K}a = 0$  hanya berlaku ketika  $\sqrt{-K}a = n\pi$  atau  $K = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ ,

dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$  maka solusi *nontrivialnya* adalah sebagai berikut:

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Dimana  $a_n$  adalah konstan. Karena  $K = K_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$  maka penyelesaian untuk

$Y$  adalah sebagai berikut:

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y. \quad (2.76)$$

Sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$Y_n(y) = A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right); n = 1, 2, 3, \dots$$

Dimana (untuk fungsi trigonometri) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y, \quad Y_n(y) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}(y + D_n)\right) = 0, \quad (2.77)$$

untuk  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dimana  $C_n$  dan  $D_n$  adalah konstanta.

Untuk kondisi batas  $(x, b) = 0$ , apabila  $y = b$  maka persamaan (2.77) menjadi sebagai berikut:

$$A_0 + B_0 b = 0 \text{ dan } C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}(b + D_n)\right) = 0, \quad (2.78)$$

dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$

Dari persamaan (2.78) asumsikan  $A_0 = -B_0 b$  dan  $D_n = -b$ . Substitusikan asumsi tersebut ke persamaan (2.76) dan (2.77) maka diperoleh solusi sebagai berikut:

$$U_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y) = a_0 b_0 (y - b) = E_0 (y - b)$$

$$\begin{aligned} U_n(x, y) &= X_n(x)Y_n(y) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}(y - b)\right) \\ &= E_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}(y - b)\right); n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

dimana  $E_n$  adalah konstanta. Sehingga diperoleh solusi umumnya yaitu sebagai berikut:

$$U(x, y) = E_0 (y - b) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}(y - b)\right).$$

## 2.5 Perhitungan Waktu dalam Al-Qur'an

Manusia sebagai ciptaan Tuhan yang paling sempurna di dunia tak akan pernah lepas dari problematika kehidupan. Oleh karena itu penyelesaian dalam

suatu permasalahan tentunya dibutuhkan suatu bentuk cara atau metode yang sangat baik sehingga diperoleh bentuk solusi permasalahan yang sempurna, seperti dalam kasus menentukan jatuhnya awal bulan puasa Ramadhan sebagaimana sabda Rasulullah SAW yang berarti “ *janganlah kalian berpuasa hingga kalian melihatnya (hilal). Dan jika hilal tertutup awan atau mendung dari (penglihatan) kalian maka perkirakanlah ia*” serta Rasulullah juga bersabda yang artinya “ *jaganlah kalian berpuasa hingga kalian melihat Hilal (bulan baru) dan jangan pula berbuka hingga melihatnya (terbit) kembali*” (Panji, 2012:4). Dari kedua hadist tersebut kita dapat mengetahui bahwa kita dianjurkan oleh Rasulullah SAW untuk melakukan estimasi dengan suatu perhitungan (hisab) dalam menentukan bulan (baru) atau jatuhnya awal bulan puasa Ramadhan, yang tentunya dengan metode-metode perhitungan yang baik.

Dalam perhitungan jatuhnya awal bulan puasa Ramadhan seperti yang telah kita ketahui ada beberapa yaitu metode hisab, rukyatul hilal, wujudul hilal, imkanur rukyat MABIMS, dan rukyat global yang merupakan metode-metode perhitungan estimasi atau perhitungan pendekatan secara teoritis dalam menentukan jatuhnya awal bulan puasa. Akan tetapi dalam penetapan jatuhnya awal bulan puasa digunakan 1 metode dari beberapa metode yang ada, dimana metode tersebut memperoleh solusi estimasi atau perhitungan pendekatan yang sempurna serta memenuhi ketentuan-ketentuan yang ada. Perhitungan-perhitungan hal tersebut tentunya tergantung oleh adanya perubahan waktu (perubahan siang dan malam) yang diakibatkan oleh perputaran matahari dan bulan sehingga diketahui waktu, bulan, pekan dan tahun. Melakukan suatu

perhitungan berdasarkan manfaat dari perubahan malam dan siang (perputaran matahari dan bulan) ini sebenarnya sudah termaktub dalam Al-Qur'an sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Al-An'am ayat 96 yaitu sebagai berikut:

فَالِقُ الْإِصْبَاحِ وَجَعَلَ اللَّيْلَ سَكَنًا وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ حُسْبَانًا ۚ ذَٰلِكَ تَقْدِيرُ  
 الْعَزِيزِ الْعَلِيمِ ﴿٩٦﴾

*Artinya: Dia menyingsingkan pagi dan menjadikan malam untuk beristirahat, dan (menjadikan) matahari dan bulan untuk perhitungan. Itulah ketentuan Allah yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui (Qs Al-An'am ayat 96).*

Menurut Abu Yahya (2004:423) tafsir surat Al-An'am ayat 96 menjelaskan bahwa Allah SWT menyingsingkan pagi sehingga hari semakin terang, dan manusia dapat melakukan berbagai aktivitas dan menjadikan malam untuk beristirahat, dan (menjadikan) matahari dan bulan untuk perhitungan dengan matahari dan bulan dapat diketahui waktu, baik waktu beribadah maupun waktu bermu'amalah. Itulah ketetapan Allah yang Maha perkasa di mana dengan keperkasaan-Nya, semua makhluk tunduk kepada-Nya dan tidak berjalan melebihi batas yang Allah tetapkan lagi Maha mengetahui ilmu-Nya meliputi yang nampak maupun yang tersembunyi, yang awal maupun yang akhir, di antara dalil aqli yang menunjukkan ilmu-Nya meliputi segala sesuatu adalah dengan diatur-Nya makhluk-makhluk yang besar dengan pengaturan yang indah, dimana hal ini membuat kita takjub karena begitu indahnyanya, begitu sempurnanya dan begitu sesuaiyanya dengan maslahat dan hikmah. Serta surat Al-Isra' ayat 12 yaitu sebagai berikut:

وَجَعَلْنَا اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ آيَاتَيْنِ ۗ فَمَحَوْنَا آيَةَ اللَّيْلِ وَجَعَلْنَا آيَةَ النَّهَارِ مُبْصِرَةً  
لِتَبْتَغُوا فَضْلًا مِّن رَّبِّكُمْ ۖ وَلِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ ۚ وَكُلَّ شَيْءٍ فَصَّلَنَاهُ  
تَفْصِيلًا

*Artinya: Dan Kami jadikan malam dan siang itu dua tanda (yang membuktikan kekuasaan Kami), maka Kami hapuskan tanda malam itu (sehingga menjadi gelap-gelita), dan Kami jadikan tanda siang itu terang-benderang supaya kamu mudah mencari rezeki dari limpah kurnia Tuhan kamu, dan supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan hitungan hisab (bulan dan hari) dan (ingatlah) tiap-tiap sesuatu (yang kamu perlukan untuk dunia dan agama kamu), Kami telah menerangkannya satu persatu (dalam Al-Quran) dengan sejelas-jelasnya (Qs Al-Isra' ayat 12).*

Menurut Sayyid Quthb (2004:14) penghapusan tanda malam dan penampakan tanda siang itu bertujuan agar kamu mencari karunia dari Tuhanmu dan supaya kamu mengetahui bilangan tahun-tahun dan perhitungan. Malam untuk beristirahat dan menenangkan diri, sedangkan siang untuk bekerja dan beraktivitas. Lalu dari pergantian siang dan malam ini manusia mengerti akan bilangan tahun dan mengetahui perhitungan musim. Juga untuk menandai waktu perjanjian dan hubungan bermasyarakat lainnya.

Dalam Ibnu Katsir (2004:160) tafsir surat Al-Isra' ayat 12 adalah Allah SWT telah memberikan berbagai tanda-tanda kekuasaan-Nya yang sangat besar kepada makhluk-Nya. Diantaranya, dijadikan-Nya siang dan malam berbeda, agar mereka merasa tenang pada malam hari dan bertebaran pada siang hari untuk menjalani kehidupan, membuat barang-barang, bekerja dan melakukan perjalanan. Selain itu agar mereka mengetahui jumlah hari, pekan, bulan, dan tahun serta mengetahui batas waktu hutang, juga waktu ibadah, dan mu'amalah.

Sedangkan dalam tafsir jalalain (2010:172) surat Al-Isra' ayat 12 menjelaskan bahwa Allah SWT jadikan malam dan siang sebagai dua tanda yang kedua-duanya menunjukkan kekuasaan-Nya dan Allah SWT tutup cahayanya dengan kegelapan malam hari supaya kalian tenang berada di dalamnya, dan Allah SWT jadikan tanda siang itu terang sehingga seseorang dapat melihat berkat adanya cahaya agar kalian mencari pada siang hari karunia dari Tuhan kalian dengan berusaha dan supaya kalian mengetahui melalui malam dan siang hari itu bilangan tahun-tahun dan perhitungan waktu-waktu.

Berdasarkan empat tafsir di atas ayat ini menginformasikan bahwa matahari dan bulan bukan sekedar sebuah tanda gelap dan terang akan tetapi juga merupakan suatu dorongan untuk melakukan perhitungan atau prediksi karena banyak kegunaan untuk mengetahui bilangan tahun dan waktu. Dalam hal ini melakukan perhitungan atau prediksi yang pasti menggunakan sumber daya terbaik atau metode terbaik yang kita ketahui, sehingga dengan metode yang baik maka suatu permasalahan dapat terprediksikan bentuk solusinya serta akan terselesaikan dengan sempurna

### BAB III

#### PEMBAHASAN

Persamaan gelombang merupakan persamaan yang menggambarkan bagaimana pergerakan suatu partikel yang pergerakannya acak dan bebas. Dengan proses *Brownian Motion* bentuk persamaan gelombang diperoleh sebagaimana yang terdapat pada bab II yaitu bentuk persamaan gelombang tali yang bertipe hiperbolik, linier, orde dua, dan 1D. Dalam hal ini dikatakan persamaan gelombang tali yang bertipe hiperbolik karena persamaan tersebut mempunyai nilai diskriminan ( $D$ ) yang lebih besar dari 0 (positif) dan sifat linieritas disebabkan oleh fungsional dari koefisien pada setiap suku yang koefisien-koefisiennya merupakan konstanta yaitu 1 pada turunan waktu dan pada turunan ruang adalah  $\gamma^2$  yang merupakan bilangan konstan pada gelombang tali dalam persamaan tersebut. Kemudian orde dua 1D pada persamaan tersebut diakibatkan karena turunan tertinggi pada variabel terikatnya  $u(x, t)$  adalah berderajat dua dan gelombang yang terjadi hanya menjalar pada sumbu  $x$  dengan rentang waktu ( $t$ ). Bentuk persamaan gelombang tali yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (3.1)$$

Dalam penelitian ini persamaan gelombang tali akan diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik adalah bentuk penyelesaian yang menggunakan metode-metode pendekatan, oleh karena itu sebagai bahan perbandingan untuk mengetahui kesignifikanan dari bentuk solusi secara numerik maka dibutuhkan bentuk solusi analitik. Berdasarkan literatur Shepley L Ross 1984 bentuk solusi

analitik dari persamaan gelombang tali (3.1) dengan syarat awal  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u(0, t) = 0$ , dan kondisi batas  $u(l, t) = 0$  serta kecepatan awal  $u_t(x, 0) = g(x)$  ketika  $0 \leq x \leq L$ , dan  $0 \leq t \leq \infty$  diperoleh bentuk umum solusi analitik yaitu sebagai berikut:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \left[ a_n \sin \frac{n\pi \gamma t}{L} + b_n \cos \frac{n\pi \gamma t}{L} \right].$$

Dimana  $a_n = \frac{2}{n\pi \gamma} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ , dan  $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$  dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Adanya bentuk umum solusi analitik dari persamaan gelombang tali (3.1) maka dapat mengetahui bentuk solusi analitik untuk kasus gelombang tali ketika  $f(x) = \sin 2x$ , sedangkan syarat awal dan kondisi batas adalah sebagai berikut:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (3.3)$$

$$u(l, t) = 0 \quad (3.4)$$

$$u_t(x, 0) = 0. \quad (3.5)$$

Dengan interval  $0 \leq x \leq \pi$ , dan  $0 \leq t \leq \infty$  serta untuk  $n = 2$ , maka berdasarkan kecepatan awal pada (3.5) dimana  $u_t(x, 0) = 0$ , artinya  $g(x) = 0$  diperoleh nilai  $a_2 = 0$ . Sedangkan untuk  $b_2$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot \sin \frac{2\pi x}{\pi} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot \sin 2x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 4x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(8\pi)}{16} \right) \Big|_0^{\pi}. \end{aligned}$$

Dengan mengetahui  $a_2 = 0$  dan  $b_2 = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(8\pi)}{16} \right) \Big|_0^\pi$  serta  $\gamma = 1$  maka diperoleh

bentuk solusi analitiknya yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[ \sin \frac{2\pi x}{\pi} \right] \left[ (0) \sin \frac{2\pi(1)t}{\pi} + \left( \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(8\pi)}{16} \right) \Big|_0^\pi \right) \cos \frac{2\pi(1)t}{\pi} \right] \\ &= [\sin 2x][1 \cos 2t] \\ &= \sin 2x \cdot \cos 2t \quad (\text{Ross, 1984:741}). \end{aligned}$$

Dalam penelitian ini untuk menyelesaikan persamaan gelombang tali dengan penyelesaian numerik maka terlebih dahulu dibutuhkan syarat awal dan kondisi batas. Oleh karena itu digunakanlah syarat awal dan kondisi batas pada (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5). Selain syarat awal dan kondisi batas di atas yang digunakan pada penyelesaian numerik terhadap persamaan gelombang tali dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit *Lax Friedrich* maka proses penyelesaian persamaan gelombang tali (3.1) tersebut juga membutuhkan bentuk pendekatan pada persamaan turunan kedua dari persamaan gelombang tali tersebut baik turunan kedua pada waktu ( $t$ ) dan turunan kedua pada ruang ( $x$ ) yang dilakukan dengan pendekatan beda hingga yaitu metode beda tengah dan beda maju. Dalam metode beda maju pada kasus ini titik-titik pada waktunya berkisar pada  $n + 2$ ,  $n$ , dan  $n + 1$ , sedangkan untuk ruangnya pada  $j$ . Sehingga dengan bentuk  $u(x_j, t_n) \approx u_j^n$  maka bentuk turunan pertama pada waktu disimbolkan dengan  $u(x_j, t_n)_t \approx \frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial t} \approx \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n$  dan bentuk turunan kedua pada waktu disimbolkan dengan  $u(x_j, t_n)_{tt} \approx \frac{\partial^2 u(x_j, t_n)}{\partial t^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n$ . Oleh karena itu

bentuk persamaan turunan pertama dan kedua untuk metode beda maju adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{a) Bentuk turunan pertama: } \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \\
 \text{b) Bentuk turunan kedua: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n &= \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \right)}{\partial t} \\
 &= \frac{\left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)_{n+1} - \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)_n}{\Delta t} \\
 &= \frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1} - u_j^{n+1} + u_j^n}{\Delta t^2} \\
 &= \frac{u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + u_j^n}{\Delta t^2}. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Sedangkan untuk metode beda tengah pada kasus ini titik-titik pada ruangnya berkisar pada  $j + \frac{1}{2}$ ,  $j$ , dan  $j - \frac{1}{2}$ , sedangkan untuk titik-titik pada waktunya berkisar pada  $n$ . Sehingga dengan bentuk  $u(x_j, t_n) \approx u_j^n$  maka bentuk turunan pertama pada ruang disimbolkan dengan  $u(x_j, t_n)_x \approx \frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n$  dan bentuk turunan kedua pada ruang disimbolkan dengan  $u(x_j, t_n)_{xx} \approx \frac{\partial^2 u(x_j, t_n)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n$ . Oleh karena itu diperoleh bentuk persamaan turunan pertama dan kedua

untuk metode beda tengah yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{a) Bentuk turunan pertama: } \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{(u_{j+1/2}^n)_{j+1/2} - (u_{j-1/2}^n)_{j-1/2}}{2\Delta x} \\
 &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}
 \end{aligned}$$

b) Bentuk turunan kedua: 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n = \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_j^n}{\partial x}$$

$$= \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \right)_{\text{maju}} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \right)_{\text{mundur}}}{\Delta x}$$

sehingga diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n &= \frac{\left( \frac{u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n}{\Delta x} \right)_{j+1/2} - \left( \frac{u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n}{\Delta x} \right)_{j-1/2}}{\Delta x} \\ &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x} \\ &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.1 Solusi Metode *Lax Friedrich* pada Persamaan Gelombang Tali

Pandang persamaan (3.1) sesuai dengan permasalahan yang ada pada bab I bahwa dalam penelitian ini lebih ditekankan pada bagaimana metode *Lax Friedrich* ini menyelesaikan persamaan gelombang tali. Oleh karena itu maka persamaan gelombang tali ini akan diselesaikan dengan menggunakan pendekatan metode *Lax Friedrich* sehingga untuk menyelesaikannya akan mengikuti prosedur metode *Lax Friedrich* yang ada yaitu dengan mengimplementasikan metode beda maju dan metode beda tengah. Dalam hal ini metode beda maju digunakan untuk turunan pada waktu ( $t$ ) dan metode beda tengah digunakan untuk turunan pada ruang ( $x$ ). Dengan mengetahui bentuk turunan kedua baik turunan kedua pada waktu ( $t$ ) dan turunan kedua pada ruang ( $x$ ) yang terdapat pada persamaan (3.6) dan (3.7) maka untuk menyelesaikan persamaan (3.1) dengan metode *Lax Friedrich* yaitu mensubstitusikan bentuk persamaan turunan

kedua tersebut terhadap persamaan (3.1) sehingga diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\frac{u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + u_j^n}{\Delta t^2} - \gamma^2 \left( \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) = 0.$$

Ketika bentuk persamaan turunan kedua pada  $x$  dipindah ruas ke ruas kanan, maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\frac{u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + u_j^n}{\Delta t^2} = \gamma^2 \left( \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right).$$

Dengan merubah bentuk persamaan di atas ke dalam bentuk persamaan yang lebih sederhana maka di dapat persamaan sebagai berikut:

$$u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + u_j^n = \gamma^2 \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Dari bentuk persamaan di atas jika dirubah ke dalam bentuk yang lebih sederhana maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$u_j^{n+2} = 2u_j^{n+1} - u_j^n + \gamma^2 \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Pandang persamaan di atas ternyata terdapat suatu suku yang diakibatkan oleh turunan pada waktu yang sukunya berbentuk  $u_j^n$ , maka suku yang berbentuk  $u_j^n$  tersebut diganti dengan rata-rata ruangnya yang berkisar di titik  $j + 1$  dan  $j - 1$  pada saat  $n$  yaitu  $u_j^n = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$ , sehingga dengan bentuk rata-rata ruang

tersebut diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$u_j^{n+2} = 2u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \gamma^2 \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Dengan memisalkan  $r^2 = \gamma^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$  maka diperoleh bentuk skema *Lax Friedrich* sebagai berikut:

$$u_j^{n+2} = 2u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + r^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (3.8)$$

Dari bentuk persamaan skema *Lax Friedrich* di atas ketika dilakukan perhitungan diskritisasinya maka dapat diketahui nilai-nilai pada  $u_j^n$  dengan  $n = 1, 2, 3 \dots$  dan  $j = 1, 2, 3 \dots$ . Ketika menggunakan  $\Delta t = 0.142$ ,  $\Delta x = 0.2$ ,  $\gamma = 1$  dan syarat awal serta kondisi batas pada persamaan (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) maka diperoleh bentuk diskritisasi sebagai berikut:

Untuk mencari nilai pada  $u_j^1$  dengan  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  maka berdasarkan  $u(x, 0) = f(x) = \sin 2x$  sehingga diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

$$u_1^1 = \sin(2x_1) = \sin(2(0)) = 0$$

$$u_2^1 = \sin(2x_2) = \sin(2(0.2)) = 0.3894$$

$$u_3^1 = \sin(2x_3) = \sin(2(0.4)) = 0.7174$$

$$u_4^1 = \sin(2x_4) = \sin(2(0.6)) = 0.9320$$

$$u_5^1 = \sin(2x_5) = \sin(2(0.8)) = 0.9996.$$

Kemudian untuk mencari nilai pada  $u_j^2$  dengan  $j = 1, 2, 3, 4$ , dan 5 maka akan digunakan kondisi kecepatan awal  $u_t(x, 0) = 0$ , sehingga hal tersebut mengakibatkan  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0$  atau  $u_j^{n+1} = u_j^n$ , oleh karena itu maka ketika  $n = 1$  terdapat  $u_j^2 = u_j^1$  dengan  $j = 1, 2, 3, 4$ , dan 5. Dengan hal tersebut maka diperoleh nilai-nilai  $u_j^2$  sebagai berikut:

$$u_1^2 = u_1^1 = 0$$

$$u_2^2 = u_2^1 = 0.3894$$

$$u_3^2 = u_3^1 = 0.7174$$

$$u_4^2 = u_4^1 = 0.9320$$

$$u_5^2 = u_5^1 = 0.9996$$

$$u_6^2 = u_6^1 = 0.9093.$$

Sedangkan untuk mencari nilai-nilai pada  $u_j^3$  dengan  $j = 1, 2, 3, 4,$  dan  $5,$  maka digunakan bentuk persamaan skema *Lax Friedrich* (3.8) ketika  $n = 1.$

Untuk  $n = 1$  dan  $j = 1$  maka diperoleh nilai  $u_1^3$  sebagai berikut:

$$u_1^{1+2} = 2u_1^{1+1} - \frac{1}{2}(u_{1+1}^1 + u_{1-1}^1) + r^2(u_{1+1}^1 - 2u_1^1 + u_{1-1}^1)$$

$$u_1^3 = 2u_1^2 - \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1) + r^2(u_2^1 - 2u_1^1 + u_0^1)$$

$$u_1^3 = 2(0) - \frac{1}{2}(0.3894 + 0) + 0.5(0.3894 - 2(0) + 0)$$

$$u_1^3 = 0.$$

Untuk  $n = 1$  dan  $j = 2$  maka diperoleh nilai  $u_2^3$  sebagai berikut:

$$u_2^{1+2} = 2u_2^{1+1} - \frac{1}{2}(u_{2+1}^1 + u_{2-1}^1) + r^2(u_{2+1}^1 - 2u_2^1 + u_{2-1}^1)$$

$$u_2^3 = 2u_2^2 - \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1) + r^2(u_3^1 - 2u_2^1 + u_1^1)$$

$$u_2^3 = 2(0.3894) - \frac{1}{2}(0.7174 + 0) + 0.5(0.7174 - 2(0.3894) + 0)$$

$$u_2^3 = 0.3894.$$

Untuk  $n = 1$  dan  $j = 3$  maka diperoleh nilai  $u_3^3$  sebagai berikut:

$$u_3^{1+2} = 2u_3^{1+1} - \frac{1}{2}(u_{3+1}^1 + u_{3-1}^1) + r^2(u_{3+1}^1 - 2u_3^1 + u_{3-1}^1)$$

$$u_3^3 = 2u_3^2 - \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1) + r^2(u_4^1 - 2u_3^1 + u_2^1)$$

$$u_3^3 = 2(0.7174) - \frac{1}{2}(0.9320 + 0.3894) + 0.5(0.9320 - 2(0.7174) + 0.3894)$$

$$u_3^3 = 0.7174 .$$

Untuk  $n = 1$  dan  $j = 4$  maka diperoleh nilai  $u_4^3$  sebagai berikut:

$$u_4^{1+2} = 2u_4^{1+1} - \frac{1}{2}(u_{4+1}^1 + u_{4-1}^1) + r^2(u_{4+1}^1 - 2u_4^1 + u_{4-1}^1)$$

$$u_4^3 = 2u_4^2 - \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1) + r^2(u_5^1 - 2u_4^1 + u_3^1)$$

$$u_4^3 = 2(0.9320) - \frac{1}{2}(0.9996 + 0.7174) + 0.5(0.9996 - 2(0.9320) + 0.7174)$$

$$u_4^3 = 0.9320.$$

Untuk  $n = 1$  dan  $j = 5$  maka diperoleh nilai  $u_5^3$  sebagai berikut:

$$u_5^{1+2} = 2u_5^{1+1} - \frac{1}{2}(u_{5+1}^1 + u_{5-1}^1) + r^2(u_{5+1}^1 - 2u_5^1 + u_{5-1}^1)$$

$$u_5^3 = 2u_5^2 - \frac{1}{2}(u_6^1 + u_4^1) + r^2(u_6^1 - 2u_5^1 + u_4^1)$$

$$u_5^3 = 2(0.9996) - \frac{1}{2}(0.9093 + 0.9320) + r^2(0.9093 - 2(0.9996) + 0.9320)$$

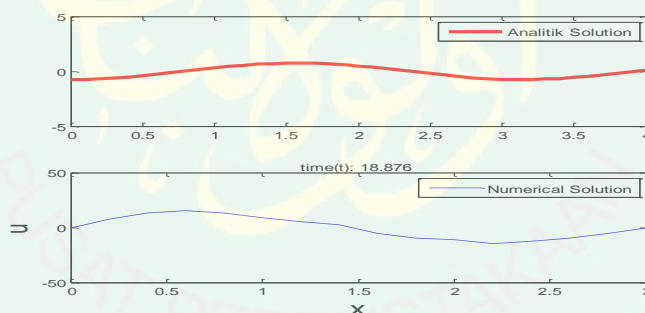
$$u_5^3 = 0.9996.$$

Dari hasil perhitungan nilai-nilai  $u_j^n$  dengan  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , dan  $6$  ketika  $n = 1$  dan  $2$ , serta perhitungan nilai  $u_j^{n+2}$  dengan  $j = 1, 2, 3, 4$ , dan  $5$  ketika  $n = 1$  dalam  $\Delta t = 0.142$ ,  $\Delta x = 0.2$  dimana  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 0.142$ ,  $t_3 = 0.284$  dan  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.2$ ,  $x_3 = 0.4$ ,  $x_4 = 0.6$ ,  $x_5 = 0.8$ . Maka dibuatlah dalam bentuk tabel perhitungan diskritisasi solusi analitik dan numerik yaitu berikut:

**Tabel 3.1** Tabel Galat dari Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Tali  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$  Menggunakan Metode *Lax Friedrich*

$x_j / t_n$	Solusi Analitik $u(x, t) = \sin 2x \cdot \cos 2t$			Solusi Numerik $u(j, n+2)$			Galat adalah $u(x, t) - u(j, n+2)$		
	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$
$x_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2$	0,3894	0,3746	0,3308	0,3894	0,3894	0,3894	0	0,01	0,05
$x_3$	0,7174	0,6947	0,6244	0,7174	0,7174	0,7174	0	0,02	0,09
$x_4$	0,392	0,9136	0,8477	0,392	0,392	0,392	0	0,01	0,08
$x_5$	0,9996	0,9994	0,9755	0,9996	0,9996	0,9996	0	0	0,02

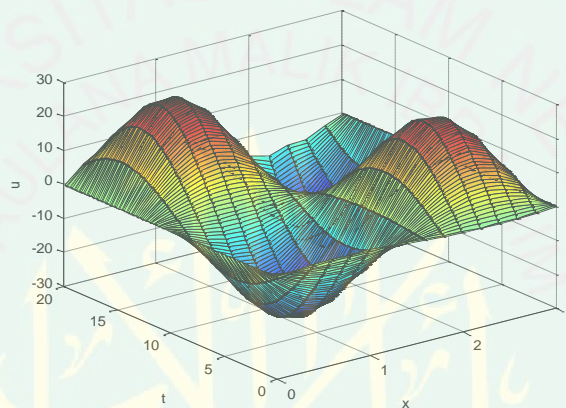
Dari bentuk persamaan skema *Lax Friedrich* di atas ketika digunakan syarat awal dan kondisi batas pada persamaan (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) maka dapat diketahui bentuk penampang gelombangnya dalam 2D secara eksplisit yaitu sebagai berikut:



**Gambar 3.1** Grafik 2D Solusi Metode *Lax Friedrich* pada Persamaan Gelombang Tali

Dari gambar 3.1 di atas, grafik tersebut menggambarkan suatu pergerakan gelombang tali yang terjadi dalam perjalanan waktu di saat nilai konstan pada gelombang tersebut  $\gamma$  adalah 1 dengan interval  $x$  adalah  $[0, 3]$ . Oleh karena itu gelombang bergerak dalam waktu ke waktu secara perlahan sehingga terbentuk suatu panjang gelombang yang menjalar di sumbu  $x$  dengan amplitudo gelombang antara 30 dan -30. Bentuk grafik gelombang tali yang terjadi dalam hal tersebut diketahui bahwa masih dalam keadaan kondisi yang tidak stabil karena bentuk

grafik solusi secara numerik tidak mempunyai bentuk grafik yang sama dengan solusi analitiknya. Hal tersebut terjadi ketika dilakukan pada  $\Delta x$  adalah  $2 \times 10^{-1}$  dan  $\Delta t$  adalah  $143 \times 10^{-3}$ . Berdasarkan pergerakan gelombang tali yang bergerak dari waktu ke waktu maka perubahan bentuk gelombangnya dapat digambarkan dalam bentuk 3D yaitu sebagai berikut:



**Gambar 3.2** Grafik 3D Solusi Metode *Lax Friedrich* pada Persamaan Gelombang Tali

Dari gambar 3.2 di atas, grafik tersebut menggambarkan perubahan suatu bentuk gelombang tali dari waktu ke waktu ketika nilai konstan pada gelombang tersebut  $\gamma$  adalah 1,  $\Delta x$  adalah  $2 \times 10^{-1}$ , dan  $\Delta t$  adalah  $143 \times 10^{-3}$  dengan interval pada  $x$  adalah  $[0, 3]$ , sedangkan interval pada  $t$  adalah  $[0, 20]$ .

### 3.2 Solusi Stabilitas pada Skema *Lax Friedrich*

Dengan mengetahui bentuk persamaan terakhir solusi metode *Lax Friedrich* atau yang disebut juga skema *Lax Friedrich* yaitu pada persamaan (3.8) maka persamaan tersebut selanjutnya akan dianalisis kestabilannya dengan menggunakan metode *Von Neumann* sehingga dalam proses analisis kestabilan pada persamaan (3.8) ini akan diimplementasikan deret *Fourier* khusus 1D yaitu yang mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$u_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} G_k^n e^{\frac{2\pi i j k}{J}}. \quad (3.9)$$

Pandang persamaan (3.8) persamaan tersebut dapat diuraikan menjadi sebagai berikut:

$$u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + \frac{1}{2}u_{j+1}^n + \frac{1}{2}u_{j-1}^n = \gamma^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Dengan memisalkan  $r^2 = \gamma^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$  maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + \frac{1}{2}u_{j+1}^n + \frac{1}{2}u_{j-1}^n = r^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Persamaan di atas dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + \frac{1}{2}u_{j+1}^n + \frac{1}{2}u_{j-1}^n = r^2 u_{j+1}^n - 2r^2 u_j^n + r^2 u_{j-1}^n.$$

Untuk lebih memudahkan dalam menyelesaikan persamaan tersebut maka dimisalkan terlebih dahulu angka koefisien-koefisien pada setiap sukunya yaitu dengan  $A = 1, B = 2, C = \frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}, E = r^2, F = 2r^2$  dan  $H = r^2$ . Oleh karena itu maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$Au_j^{n+2} - Bu_j^{n+1} + Cu_{j+1}^n + Du_{j-1}^n = Eu_{j+1}^n - Fu_j^n + Hu_{j-1}^n. \quad (3.10)$$

Pandang persamaan (3.9) kemudian substitusikan persamaan tersebut ke persamaan (3.10) sehingga diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

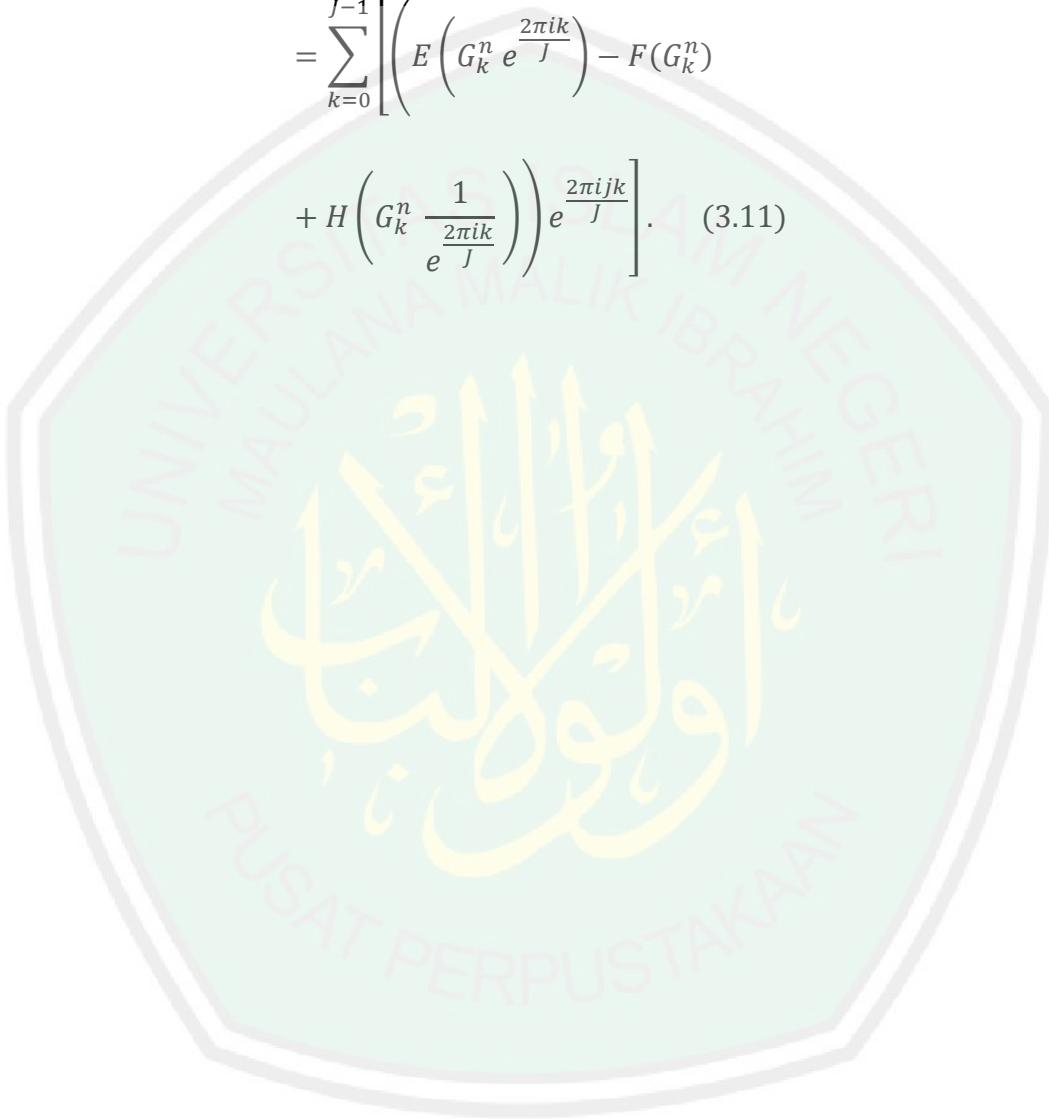
$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{J-1} \left[ A \left( G_k^{n+2} e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right) - B \left( G_k^{n+1} e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right) + C \left( G_k^n e^{\frac{2\pi i(j+1)k}{J}} \right) \right. \\ & \quad \left. + D \left( G_k^n e^{\frac{2\pi i(j-1)k}{J}} \right) \right] \\ & = \sum_{k=0}^{J-1} \left[ E \left( G_k^n e^{\frac{2\pi i(j+1)k}{J}} \right) - F \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right) + H \left( G_k^n e^{\frac{2\pi i(j-1)k}{J}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Jika dijabarkan lagi persamaan di atas menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{J-1} \left[ A \left( G_k^{n+2} e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right) - B \left( G_k^{n+1} e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right) + C \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ijk}{J}} e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) \right. \\ & \quad \left. + D \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ijk}{J}} e^{-\frac{2\pi ik}{J}} \right) \right] \\ & = \sum_{k=0}^{J-1} \left[ E \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ijk}{J}} e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - F \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right) + H \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ijk}{J}} e^{-\frac{2\pi ik}{J}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Persamaan tersebut dirubah kedalam bentuk yang lebih sederhana diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{J-1} \left[ \left( A(G_k^{n+2}) - B(G_k^{n+1}) + C \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) + D \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) \right) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{J-1} \left[ \left( E \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - F(G_k^n) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + H \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) \right) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right]. \quad (3.11)
\end{aligned}$$



Persamaan (3.11) di atas juga dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{J-1} \left[ A(G_k^{n+2}) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{J-1} \left[ \left( B(G_k^{n+1}) - C \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - D \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + E \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - F(G_k^n) + H \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) \right) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right]. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan kembali nilai  $A, B, C, D, E, F$  dan  $H$  maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{J-1} \left[ (G_k^{n+2}) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{J-1} \left[ \left( 2(G_k^{n+1}) - \frac{1}{2} \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - \frac{1}{2} \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + r^2 \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - 2r^2(G_k^n) + r^2 \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) \right) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right]. \end{aligned}$$

Jika persamaan di atas disamadengankan nol maka diperoleh bentuk yang lebih sederhana yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{J-1} G_k^{n+2} e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \\
& - \sum_{k=0}^{J-1} 2(G_k^{n+1}) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \\
& - \sum_{k=0}^{J-1} \left[ \left( -\frac{1}{2} \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - \frac{1}{2} \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) + r^2 \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2r^2(G_k^n) + r^2 \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) \right) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Jika disederhanakan lagi maka persamaan di atas menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{J-1} \left[ G_k^{n+2} e^{\frac{2\pi ijk}{J}} - 2(G_k^{n+1}) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right. \\
& \quad \left. - \left( -\frac{1}{2} \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - \frac{1}{2} \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) + r^2 \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - 2r^2(G_k^n) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r^2 \left( G_k^n \frac{1}{e^{\frac{2\pi ik}{J}}} \right) \right) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Persamaan di atas juga dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{J-1} \left[ G_k^{n+2} e^{\frac{2\pi ijk}{J}} - 2(G_k^{n+1}) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right. \\
& \quad \left. - \left( -\frac{1}{2} \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) - \frac{1}{2} \left( G_k^n e^{-\frac{2\pi ik}{J}} \right) + r^2 \left( G_k^n e^{\frac{2\pi ik}{J}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2r^2(G_k^n) + r^2 \left( G_k^n e^{-\frac{2\pi ik}{J}} \right) \right) e^{\frac{2\pi ijk}{J}} \right] = 0. \tag{3.11a}
\end{aligned}$$



Dengan menggunakan hubungan ortogonality yaitu sebagai berikut:

$$\sum_{j=0}^{J-1} \omega_j^k \omega_j^{-l} = \begin{cases} J, & \text{jika } k \equiv l \pmod{J} \\ 0, & \text{jika tidak atau sebaliknya,} \end{cases}$$

serta menggunakan transformasi *Fourier* diskrit yaitu sebagai berikut:

$$\sum_{j=0}^{J-1} U_j^n \omega_j^{-l} = \sum_{k=0}^{J-1} G_k^n \sum_{j=0}^{J-1} \omega_j^k \omega_j^{-l} = J G_l^n.$$

Sehingga diperoleh bentuk inversnya yaitu sebagai berikut:

$$G_l^n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n \omega_j^{-l}.$$

Dari persamaan  $G_l^n$  di atas,  $G_l^n$  adalah merupakan invers dari  $U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} G_k^n \omega_j^k$  dengan  $\omega_j = e^{\frac{2\pi i j}{J}}$  dan  $G_l^n$  disebut dengan transformasi *Fourier* diskrit. Oleh karena itu berdasarkan hubungan ortogonality dan transformasi *Fourier* diskrit serta mengalikan semua suku dengan  $e^{-\frac{2\pi i j k}{J}}$  maka persamaan (3.11a) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G_k^{n+2} e^{\frac{2\pi i j k}{J}} e^{-\frac{2\pi i j k}{J}} - 2(G_k^{n+1}) e^{\frac{2\pi i j k}{J}} e^{-\frac{2\pi i j k}{J}} \\ - \left( -\frac{1}{2} \left( G_k^n e^{\frac{2\pi i k}{J}} \right) - \frac{1}{2} \left( G_k^n e^{-\frac{2\pi i k}{J}} \right) + r^2 \left( G_k^n e^{\frac{2\pi i k}{J}} \right) \right. \\ \left. - 2r^2(G_k^n) + r^2 \left( G_k^n e^{-\frac{2\pi i k}{J}} \right) \right) e^{\frac{2\pi i j k}{J}} e^{-\frac{2\pi i j k}{J}} = 0. \end{aligned}$$

Dengan mengeluarkan bentuk  $G_k^n$  dan  $e^{\frac{2\pi i j k}{J}} e^{-\frac{2\pi i j k}{J}} = e^0 = 1$  maka dari persamaan di atas diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$G_k^{n+2} - 2(G_k^{n+1}) - \left( \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi ik}{J}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi ik}{J}} + r^2 e^{\frac{2\pi ik}{J}} - 2r^2 + r^2 e^{-\frac{2\pi ik}{J}} \right) G_k^n = 0.$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu sebagai berikut:

$$G_k^{n+2} - 2(G_k^{n+1}) + \left( \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi ik}{J}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi ik}{J}} - r^2 e^{\frac{2\pi ik}{J}} + 2r^2 - r^2 e^{-\frac{2\pi ik}{J}} \right) G_k^n = 0$$

Pandang persamaan di atas maka dengan mensubstitusikan bentuk *Euler's* identitas yaitu  $e^{\pm i\beta} = \cos\beta \pm i \sin\beta$  dan  $\beta = \frac{2\pi k}{J}$ . Oleh karena itu maka

diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$G_k^{n+2} - 2(G_k^{n+1}) + \left( \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2\pi k}{J} + i \sin \frac{2\pi k}{J} \right) + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2\pi k}{J} - i \sin \frac{2\pi k}{J} \right) - r^2 \left( \cos \frac{2\pi k}{J} + i \sin \frac{2\pi k}{J} \right) + 2r^2 - r^2 \left( \cos \frac{2\pi k}{J} - i \sin \frac{2\pi k}{J} \right) \right) G_k^n = 0.$$

Dengan merubah bentuk persamaan di atas ke bentuk yang lebih sederhana maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$G_k^{n+2} - 2(G_k^{n+1}) + \left( \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{J} + \frac{1}{2} i \sin \frac{2\pi k}{J} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{J} - \frac{1}{2} i \sin \frac{2\pi k}{J} - r^2 \cos \frac{2\pi k}{J} - r^2 i \sin \frac{2\pi k}{J} + 2r^2 - r^2 \cos \frac{2\pi k}{J} + r^2 i \sin \frac{2\pi k}{J} \right) G_k^n = 0.$$

Dengan menyatukan setiap suku yang sama maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$G_k^{n+2} - 2(G_k^{n+1}) + \left( \cos \frac{2\pi k}{J} - 2r^2 \cos \frac{2\pi k}{J} + 2r^2 \right) G_k^n = 0.$$

Dengan  $\beta = \frac{2\pi k}{J}$ . Maka persamaan di atas menjadi sebagai berikut:

$$G_k^{n+2} - 2(G_k^{n+1}) + ((1 - 2r^2) \cos\beta + 2r^2)G_k^n = 0.$$

Ketika pada persamaan di atas untuk setiap suku dikalikan dengan  $\frac{1}{G_k^n}$  maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\frac{G_k^{n+2}}{G_k^n} - 2\frac{G_k^{n+1}}{G_k^n} + ((1 - 2r^2) \cos\beta + 2r^2)\frac{G_k^n}{G_k^n} = 0.$$

Dengan merubah persamaan di atas ke bentuk persamaan yang lebih sederhana maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$G_k^2 - 2G_k + ((1 - 2r^2) \cos\beta + 2r^2) = 0. \quad (3.12)$$

Dengan asumsi  $G_k^n = (G_k)^n$  maka persamaan (3.12) dapat ditulis menjadi bentuk sebagai berikut:

$$G_k^2 - 2G_k + ((1 - 2r^2) \cos\beta + 2r^2) = 0. \quad (3.12a)$$

Oleh karena untuk memperoleh bentuk persamaan faktor amplifikatif ( $G_k$ ) maka persamaan di atas diselesaikan dengan rumus  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$G_{k1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dengan memandang persamaan (3.12a) maka diketahui  $a = 1$ ,  $b = -2$ , dan  $c = (1 - 2r) \cos\beta + 2r$ , **oleh karena itu maka diperoleh bentuk sebagai berikut:**

$$G_{k1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - ((1 - 2r^2) \cos\beta + 2r^2)}.$$

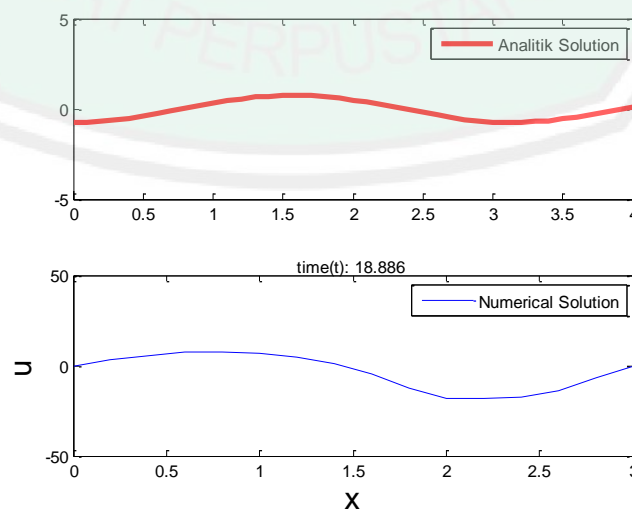
Ketika mengetahui bentuk persamaan dari  $G_{k_{1,2}}$  maka diperoleh bentuk faktor amplifikatif  $G_{k_1}$ , dan  $G_{k_2}$  yaitu sebagai berikut:

$$G_{k_1} = 1 + \sqrt{1 - ((1 - 2r^2) \cos\beta + 2r^2)}$$

dan

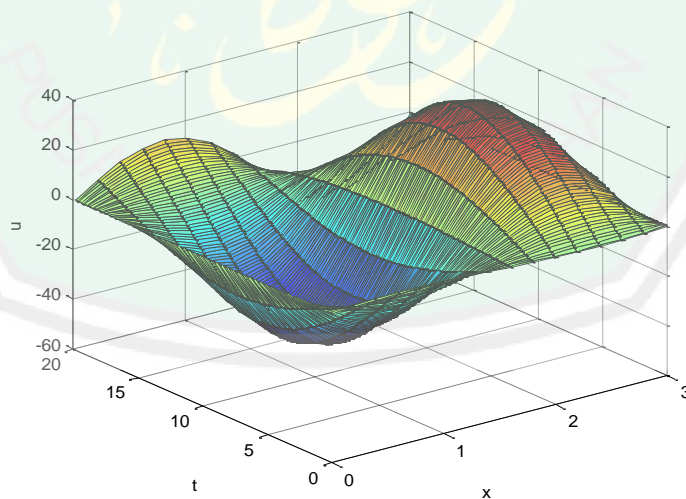
$$G_{k_2} = 1 - \sqrt{1 - ((1 - 2r^2) \cos\beta + 2r^2)}.$$

Dalam kajian pustaka di atas telah dijelaskan bahwa syarat kestabilan dari *Von Neumann* yaitu  $|G_{k_1}| \leq 1$  dan  $|G_{k_2}| \leq 1$ . Oleh karena itu  $|G_{k_1}| \leq 1$  dan  $|G_{k_2}| \leq 1$  ketika  $r = \pm 0.71$  dengan titik diskritnya yaitu  $\cos\beta = -1$ ,  $\cos\beta = 0$ ,  $\cos\beta = 1$ . Dengan mengetahui bentuk persamaan faktor amplifikatif tersebut maka ketika disimulasikan nilai  $\gamma$ ,  $\Delta t$ , dan  $\Delta x$  diperoleh bentuk penampang gelombang nya dalam grafik 2D yaitu sebagai berikut:



**Gambar 3.3** Grafik 2D Solusi Metode *Lax Friedrich* dengan Kondisi Faktor Amplifikatif pada Persamaan Gelombang Tali

Grafik di atas merupakan gambaran persamaan gelombang tali yang pergerakan gelombangnya bergerak dari waktu ke waktu secara perlahan dan gelombang tersebut berhenti bergerak disaat berada pada kondisi stabil yaitu ketika gelombang tersebut dalam keadaan mempunyai bentuk sama dengan solusi analitiknya di saat waktu tertentu. Gambaran pergerakan gelombang tali pada gambar tersebut disimulasikan ketika bilangan konstan pada gelombang  $\gamma$  adalah 1,  $\Delta x = 2 \times 10^{-1}$ , dan  $\Delta t = 142 \times 10^{-3}$  serta interval pada  $x$  [0, 3] dengan diberikan waktu ( $t$ ) adalah 19. Ketika dicermati grafik pergerakan gelombang pada gambar di atas dengan simulasi tersebut diperoleh kesimpulan bahwa gelombang mencapai kestabilannya disaat waktu  $t = 18.886$ . Berdasarkan pergerakan gelombang tali yang bergerak dari waktu ke waktu maka perubahan bentuk gelombangnya dapat digambarkan dalam bentuk 3D yaitu sebagai berikut:



**Gambar 3.4** Grafik 3D Solusi Metode *Lax Friedrich* dengan Kondisi Faktor Amplifikatif pada Persamaan Gelombang Tali

Dari gambar 3.4 di atas, grafik tersebut menggambarkan perubahan suatu bentuk gelombang tali dari waktu ke waktu ketika nilai konstan pada gelombang

tersebut  $\gamma$  adalah 1,  $\Delta x$  adalah  $2 \times 10^{-1}$ , dan  $\Delta t$  adalah  $142 \times 10^{-3}$  dengan interval pada  $x$  adalah  $[0, 3]$ , sedangkan interval pada  $t$  adalah  $[0, 20]$ .

Berdasarkan perhitungan dari faktor amplifikatif dengan mensubstitusikan nilai  $\Delta t = 2 \times 10^{-1}$ ,  $\Delta x = 142 \times 10^{-3}$ , dan  $\gamma = 1$  maka diperoleh nilai  $|G_{k_1}| = |G_{k_2}| = 1$ . Dengan mengetahui bahwa nilai  $|G_{k_1}| = |G_{k_2}| = 1$  maka penyelesaian analisis stabilitas pada skema *Lax Friedrich* yang diperoleh dari proses penyelesaian metode *Lax Friedrich* terhadap persamaan gelombang tali adalah stabil kesimpulan tersebut dikatakan karena hasil dari analisis kestabilan dengan menggunakan analisis stabilitas *Von Neumann* diperoleh nilai  $|G_{k_1}| \leq 1$  dan  $|G_{k_2}| \leq 1$ .

### 3.3 Perhitungan Waktu dan Metode Pendekatan dalam Al-Qur'an

Perubahan malam dan siang atau perputaran waktu sangatlah menjadi syarat mutlak dalam menentukan jatuhnya awal bulan puasa dan hari raya. Dalam perubahan waktu terkadang terjadi beberapa kendala yang dapat mempengaruhi dalam menentukan awal bulan puasa, oleh karena itu untuk mencapai suatu ketetapan kapan hari awal bulan puasa itu akan terjadi maka perlu adanya metode perhitungan secara teoritis yang tentunya bersifat secara pendekatan sehingga dengan metode pendekatan tersebut tercipta suatu kesimpulan atau solusi. Sistem metode pendekatan dilakukan oleh manusia di muka bumi ini karena pada dasarnya manusia tidak ada yang dapat mengetahui sesuatu yang bersifat pasti kecuali hanya Allah SWT.

Dalam perhitungan metode *Lax Friedrich* untuk mencari kondisi kestabilan pada waktu tertentu itu dipengaruhi oleh perubahan waktu, oleh karena

itu untuk mencapai atau memperoleh suatu solusi yang stabil maka metode tersebut melakukan analisisnya dengan cara pendekatan yang dilakukan dalam perstep waktu. Dengan adanya ilmu pendekatan yang dapat digunakan dalam menyelesaikan suatu permasalahan yang terpengaruhi oleh perubahan waktu maka tentunya dapat membantu dalam mencari suatu bentuk solusi yang sifatnya estimasi karena secara garis besar hanya Allah SWT yang tau terhadap suatu yang pasti. Oleh karena itu, Allah SWT yang berhak disembah. Tidak ada selain Allah SWT. Allah SWT yang menciptakan manusia dan alam beserta isinya berdasarkan kehendak-Nya dalam perputaran atau perubahan waktu. Tidak ada cela ataupun kekurangan, Maha Suci Allah SWT yang Maha agung.

## BAB IV

### PENUTUP

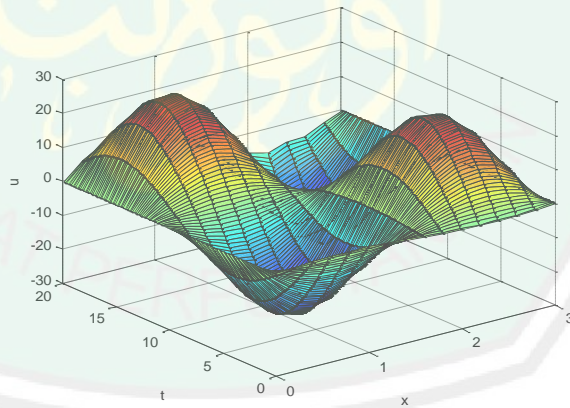
#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan beberapa hal berikut:

- 1) Solusi numerik pada persamaan gelombang tali dengan menggunakan metode *Lax Friedrich* diperoleh bentuk persamaan skema *Lax Friedrich* yaitu sebagai berikut:

$$u_j^{n+2} = 2u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + r^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Dari bentuk persamaan skema *Lax Friedrich* di atas dapat diketahui bentuk penampang gelombangnya yaitu sebagai berikut:



**Gambar 4.1** Grafik 3D Solusi Metode *Lax Friedrich* pada Persamaan Gelombang Tali

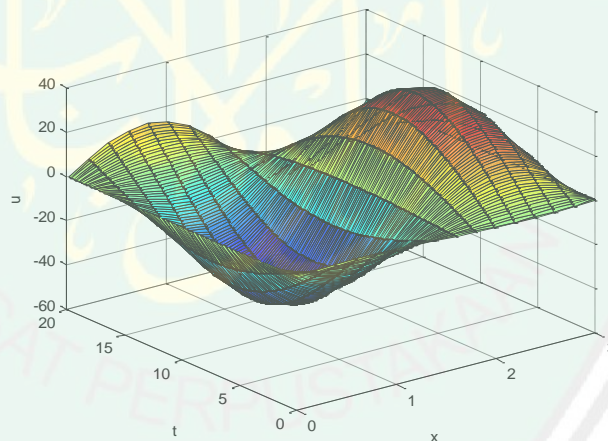
Grafik gelombang di atas terjadi ketika  $\gamma$  adalah 1 dengan interval di  $x$  adalah  $[0, 3]$ , interval di  $t$  adalah  $[0, 20]$ , dan amplitudo gelombang antara 30 dan -30. Dari bentuk grafik gelombang yang terjadi tersebut diketahui bahwa

masih dalam keadaan kondisi yang tidak stabil, hal tersebut terjadi ketika dilakukan pada  $\Delta x$  adalah  $2 \times 10^{-1}$  dan pada  $\Delta t$  adalah  $143 \times 10^{-3}$ .

- 2) Ketika mengetahui bentuk persamaan skema *Lax Friedrich* di atas maka bentuk skema tersebut dianalisis bentuk solusi kestabilannya dengan menggunakan *Von Neumann* sehingga diperoleh bentuk faktor

amplifikatifnya yaitu  $G_{k,1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - ((1 - 2r^2) \cos\beta + 2r^2)}$ . Faktor

amplifikatif  $G_{k,1,2}$  tersebut akan stabil ketika nilai  $r = \pm 0.71$ , dari hal tersebut maka diketahui bentuk penampang gelombangnya yang berdasarkan nilai faktor amplifikatif yaitu sebagai berikut:



**Gambar 4.2** Grafik 3D Solusi Metode *Lax Friedrich* Dengan Kondisi Faktor Amplifikatif pada Persamaan Gelombang Tali

Gambaran pergerakan gelombang tali pada gambar tersebut disimulasikan ketika bilangan konstan pada gelombang  $\gamma$  adalah 1 dengan  $\Delta x = 2 \times 10^{-1}$  dan  $\Delta t = 142 \times 10^{-3}$ . Ketika dicermati grafik pergerakan gelombang pada gambar di atas dengan simulasi tersebut dan diberikan waktu ( $t$ ) adalah 19 maka diperoleh kesimpulan bahwa gelombang mencapai kestabilannya

disaat waktu  $t = 18.886$ , hal ini terjadi karena perhitungan dari faktor amplifikatif dengan iterasi tersebut diperoleh nilai  $|G_{k_1}|$  dan  $|G_{k_2}|$  adalah 1 yang memenuhi syarat kestabilan analisis stabilitas *Von Neumann* yaitu  $|G_{k_1}| \leq 1$  dan  $|G_{k_2}| \leq 1$ .

#### 4.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menggunakan metode lain dalam *finite* volum dan diterapkan pada persamaan yang sifatnya tidak linier.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-syafi'i.
- As-Suyuthi, J.. 2010. *Tafsir Jalalain*. Surabaya: Pustaka ELBA.
- Dadang. *Ayat Al-Quran Berkaitan dengan Fisika*. (Online: <http://dadang48.blogspot.com> diakses pada tanggal 19 Juni 2012).
- Djojodihardjo, H.. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Feed, B.. *Tafsir Al-Qur'an Al-Karim*. (Online: <http://www.tafsir.web.id/p/download-tafsir-al-quran.html.pdf> diakses pada tanggal 23 Januari 2014)
- Finizio, N. dan Ladas, G.. 1988. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Flaherty. Tanpa Tahun. *Cours Note: Partial Differential Equation*. Troy, New York: Rensselaer Polytechnic Institute.
- Munir, R.. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Nagle, K. dan Saff, E.B.. 2003. *Fundamental of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Florida: University of South Florida.
- Noye, J.. 1930. *Numerical Solution Partial Differential Equation*. New York: Oxford.
- Panji. *Dalil Perhitungan Hisab*. (Online: [www.laskarislam.com/t3446](http://www.laskarislam.com/t3446) diakses pada tanggal 07 Januari 2014).
- Quthb, S.. 2004. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an*. Jakarta: Gema Insani.
- Rahman, A.. 2000. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Rezzolla, L.. 2005. *Numerical Methods for The Solution of Hyperbolic Partial Differential Equation*. Trieste: International School for Advanced Studies.
- Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations*. New York: University of New Hampshire.
- Sasongko, B.S.. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V Andi Offset.
- Shouan. *Finite Difference Scheme*. (Online: [mmc2.geofisica.unam.mx/anum/Ejemplito/MDF/notes4.pdf](http://mmc2.geofisica.unam.mx/anum/Ejemplito/MDF/notes4.pdf) diakses pada tanggal 18 Juni 2013).
- Soeharjo. 1996. *Matematika IV*. Surabaya: Diktat ITS.
- Spiegel, M.R.. 1994. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuan*. Jakarta: Erlangga.
- Supardi. 2011. *Metode Numerik dengan Matlab*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Tippler, P.A.. 1998. *Fisika untuk Sain dan Teknik*. Jakarta: Erlangga.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: Polytechnic University.