ANALISIS HETEROSKEDASTISITAS PADA REGRESI LINIER BERGANDA

SKRIPSI

oleh:
ANA SYUKRIYAH
NIM. 07610090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS HETEROSKEDASTISITAS PADA REGRESI LINIER BERGANDA

SKRIPSI

Diajukan kepada :
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
ANA SYUKRIYAH
NIM. 07610090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS HETEROSKEDASTISITAS PADA REGRESI LINIER BERGANDA

SKRIPSI

oleh:
ANA SYUKRIYAH
NIM. 07610090

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 12 September 2011

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP.19760318 200604 1 002	NIP.19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS HETEROSKEDASTISITAS PADA REGRESI LINIER BERGANDA

SKRIPSI

oleh:
ANA SYUKRIYAH
NIM. 07610090

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Telah Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 12 September 2011

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
Penguji Utama:	Evawati Alisah, M.Pd NIP.19720604 199903 2 001	……………………………..
Ketua Penguji:	Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP.19710420 200003 1 003	……………………………..
Sekertaris Penguji:	Abdul Aziz, M.Si NIP.19760318 200604 1 002	……………………………..
Anggota Penguji:	Fachrur Rozi, M.Si NIP.19800527 200801 1 012	……………………………..

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ana Syukriyah
NIM	: 07610090
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil aliahan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. apabila kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 9 September 2011

Yang membuat pernyataan,

Ana Syukriyah
NIM. 07610090

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

You have to endure caterpillars if you want to see butterflies*

"Anda harus tahan terhadap ulat jika ingin dapat melihat kupu-kupu"

* Antoine De Saint

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Teriring dzikir, Pemulis menadahkan kedua tangan seraya berdo'a dengan penuh harapan Kepada-Mu Ya Robbii. Dengan Ridho-Mu yang selalu mengiringi setiap langkah kecil penulis, Penulis berperang melawan kebodohan atas perintah-Mu

Dengan penuh cinta dan ketulusan karya ini penulis persembahkan kepada:

Ibunda Zumaro dan ayahanda Syamsul Anam, segenap keluarga besar penulis, adik-adik penulis (Badriyah dan Hida), Abidin, serta semua kerabat yang selalu memberi motivasi pada penulis untuk berusaha selalu memberikan yang terbaik.

Segenap Dosen yang telah memberikan ilmu kepada penulis.

Dan segenap sahabat-sahabat penulis, serta semua mahasiswa Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamualakum Wr. Wb.

Alhamdulillah penulis hanturkan kehadirat Allah SWT telah limpahkan kasih sayang, rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini untuk memenuhi tugas akhir dalam menempuh gelar Sarjana (S1) di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Karya ini penulis buat bukan hanya sebagai formalitas untuk mendapat gelar sarjana, melainkan juga sebagai salah satu jalan untuk mendapatkan ilmu di kampus Ulul Albab tercinta. Alhamdulillah setelah melewati beberapa rintangan dan hambatan penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **Analisis Heteroskedastisitas pada Regresi Linier Berganda**

Lantunan sholawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada rosul penutup dari para rosul, Nabi Besar Muhammad SAW, kepada sahabat-sahabat beliau, dan seluruh anggota keluarga beliau.

Terselesaikannya skripsi ini, tidak terlepas dari bimbingan dan motivasi dari berbagai pihak, oleh karena itu, penulis mengucapkan syukur dan terimakasih yang sedalam-dalamnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, dan para pembantu Rektor, atas layanan fasilitas yang telah diberikan selama penulis menempuh studi.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU. D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M. Pd selaku ketua jurusan Matematika yang selalu memberikan kritik dan saran demi kemajuan dan kebaikan kami.
4. Abdul Aziz, M. Si selaku pembimbing skripsi yang selalu memberikan ilmu, bimbingan, arahan, dan masukan dalam menyelesaikan skripsi.
5. Fachrur Rozi, M. Si selaku dosen pembimbing integrasi agama dan sains yang telah membimbing dan memberikan penjelasan dalam penyusunan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Orang tua (Zumaro dan Syamsul Anam) dan keluarga tercinta, yang banyak memberikan dorongan baik moril, materiil, dan spiritual.
7. Abidin, yang selalu menemani saat jatuh dan bangun serta selalu memberikan dukungan dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.
8. Semua sahabat-sahabatku yang telah memberikan motivasi dan doa untuk terselesaikannya skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang konstruktif sangat kami harapkan dari semua pihak dalam penyempurnaan penulisan yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya. Dan semoga ilmu yang telah penulis peroleh di kampus ini dapat bermanfaat. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 9 September 2011

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR LAMPIRAN

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Syukriyah, Ana. 2007. **Analisis Heteroskedastisitas pada Regresi Linier Berganda**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing : (1) Abdul Aziz, M.Si
(2) Fachrur Rozi, M.Si

Kata kunci: regresi linier berganda, heteroskedastisitas, uji *White*, *Weighted Least Squares* (WLS).

Regresi linier berganda adalah fungsi hubungan antara variabel terikat dan variabel-variabel. Fungsi regresi juga memuat parameter-parameter yang tidak diketahui β

$$y = X\beta + \varepsilon .$$

Regresi linier berganda bersifat heteroskedastisitas, jika memiliki varians yang variansi *error* berbeda. Sebaliknya, suatu regresi disebut homoskedastisitas jika memiliki variansi *error* yang konstan. Analisis regresi menggunakan data heteroskedastisitas masih akan memberikan estimasi tidak bias untuk hubungan antara variabel yang diestimasi dan hasilnya, tapi tidak efisien. Variansi *error* yang bias mengakibatkan kesimpulan yang bias, sehingga hasil tes hipotesis yang mungkin salah. Uji *White* adalah salah satu metode untuk menguji keberadaan heteroskedastisitas. Heteroskedastisitas dapat diatasi dengan transformasi, seperti membagi regresi dengan standar deviasi *error* dan menerapkan prosedur *least squares* untuk regresi hasil transformasi. Matriks kovariansi *error* pada regresi adalah $E\left(\varepsilon\varepsilon^T\right) = \Phi = \sigma^2\Psi$, dimana Ψ adalah mariks simetri dan definit positif. sehingga kita bisa menggunakan invers dari matriks P untuk mentransformasi regresi, dimana $PP^T = P^2 = \Phi$, sehingga kita punya regresi tranformasi $P^{-1}y = P^{-1}X\beta + P^{-1}\varepsilon$ atau $y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$. Hasil estimasi parameter yang didapat dari OLS adalah $\hat{\beta}^* = \left(X^T\Psi^{-1}X\right)^{-1} X^T\Psi^{-1}y$ dan matriks kovariansi $Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2\left(X^T\hat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1}$, prosedur ini disebut *Weighted Least Squares*. Hal ini juga dapat meningkatkan pendekatan untuk normalitas.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Syukriyah, Ana. 2007. **Heteroskedastisitas analysis on Multiple Linear Regression**. Thesis. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (1) Abdul Aziz, M. Si
(2) Fachrur Rozi, M.Si

Key words: linear regression, heteroscedastisity, White test, Weighted Least Squares (WLS).

Multiple linear regression is relationship function between dependent variable and independent variables. Regression function also involves unknown parameters β

$$y = X\beta + \varepsilon .$$

Multiple linear regression is heteroscedasticity, if the regression have different variance errors. In contrast, a regression is called homoskedasticity if it has constant variance errors. Regression analysis using heteroscedasticity data will still provide an unbiased estimate for the relationship between the predictor variable and the outcome, but it is inefficient. Biased variance errors lead to biased inference, so results of hypothesis tests are possibly wrong. White test is one of methods to test for the presence of heteroscedasticity. Heteroscedasticity can be removed by a transformation, such as dividing regression be the standard deviation of error term and applying the usual least squares procedures to transformed regression. The covariance matrix for error of regression is $E\left(\varepsilon\varepsilon^T\right) = \Phi = \sigma^2\Psi$, where Ψ is positive definite symmetric matrix. So we can using inverse of matrix P to transform regression, where $PP^T = P^2 = \Phi$, so we have transformed regression $P^{-1}y = P^{-1}X\beta + P^{-1}\varepsilon$ or $y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$. OLS given the estimated parameter is $\hat{\beta}^* = \left(X^T\Psi^{-1}X\right)^{-1} X^T\Psi^{-1}y$ and covariance matrix is $Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2\left(X^T\hat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1}$, this procedure called Weighted Least Square. This may also improve the approximation to normality.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain misalkan ekonomi, kesehatan, pertahanan dan keamanan, budaya, sosial, politik, dan agama. Sedangkan cabang ilmu matematika yang seringkali digunakan adalah statistik. Statistik yaitu metode atau ilmu yang mempelajari cara pengumpulan, pengolahan, penganalisisan, penafsiran dan penarikan kesimpulan.

Seperti yang diketahui banyak kejadian atau peristiwa di alam maupun masyarakat yang menunjukkan bahwa tidak hanya dipengaruhi satu hal saja tetapi oleh beberapa hal lain *(multivariat)* yang mempengaruhi secara bersamaan. Dalam menghadapi permasalahan ini, ilmu statistik mendekatinya dengan menggunakan regresi linier berganda *(Multiple Linear Regression)*.

Analisis regresi merupakan ilmu peramalan dalam statistik. Analisis regresi dapat dikatakan sebagai usaha memprediksi atau meramalkan perubahan. Regresi mengemukakan tentang keingintahuan apa yang terjadi dimasa depan untuk memberi sumbangan menentukan keputusan yang terbaik. Regresi biasa dinyatakan dalam rumus

$$y = \beta X + \varepsilon$$

dimana y adalah variabel terikat, X adalah variabel bebas, dan ε adalah kesalahan residual (*error*).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam regresi linear berganda, ada beberapa asumsi yang harus dipenuhi agar taksiran parameter dalam model regresi linear berganda memenuhi sifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) agar tahap estimasi yang diperoleh benar dan efektif. Salah satu asumsi yang harus dipenuhi untuk memenuhi sifat BLUE adalah homoskedastisitas, bila asumsi tersebut tidak terpenuhi maka yang terjadi adalah sebaliknya, yakni heteroskedastisitas yang artinya variansi *error* tidak konstan. Variansi *error* tidak konstan menyebabkan kesimpulan yang dicapai tidak valid atau bias. Jadi, unsur heteroskedastisitas yang termuat dalam suatu regresi harus diatasi agar tercapai kesimpulan yang valid.

Pada tahun 2010, Kurt Schmidheiny menuliskan hasil penelitiannya tentang heteroskedastisitas pada *paper*-nya yang berjudul *"Heteroskedasticity in the Linear Model"*. Kurt meneliti dan menuliskan hasil penelitian pada *paper*nya tentang cara mengestimasi model yang memuat unsur heteroskedastisitas sehingga model tersebut bersifat BLUE, dan model linier yang dipakai adalah model linier sederhana. Penelitian ini bisa dikembangkan dengan cara merubah obyek penelitian, yakni merubah model yang dipakai (model linier sederhana) dengan model linier berganda. Dengan adanya pengembangan penelitian ini bisa diketahui cara mengestimasi model linier berganda yang memuat unsur heteroskedastisitas sehingga model tersebut bersifat BLUE.

Kasus heteroskedastisitas disinggung dalam surat Al-An'am ayat 152 yang berbunyi:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

وَأَنَّ هَٰذَا صِرَٰطِى مُسْتَقِيمًا فَٱتَّبِعُوهُ ۖ وَلَا تَتَّبِعُوا۟ ٱلسُّبُلَ فَتَفَرَّقَ بِكُمْ عَن سَبِيلِهِۦ ۚ ذَٰلِكُمْ وَصَّىٰكُم بِهِۦ لَعَلَّكُمْ تَتَّقُونَ ﴿١٥٣﴾

Artinya:
"Dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalanKu yang lurus, Maka ikutilah Dia, dan janganlah kamu mengikuti jalan-jalan (yang lain), karena jalan-jalan itu mencerai beraikan kamu dari jalanNya. yang demikian itu diperintahkan Allah agar kamu bertakwa".(Al-An'am: 152).

Penanggulangan kasus heteroskedastisitas dapat dilakukan dengan *Weighted Least Square* (WLS) yang dapat pula dikatakan sebagai kuadrat terkecil yang diberlakukan secara umum *(Generalized Least Square)* yang terboboti. Hal ini disinggung dalam surat Ar-Ra'd ayat 11 yang berbunyi:

...إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا۟ مَا بِأَنفُسِهِمْ

Artinya:
"... Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri" (Ar-Ra'd : 11)

Kasus heteroskedastisitas ini sering timbul apabila data yang digunakan adalah data *cross sectional.* Data *cross sectional* ini biasanya diperoleh dari penelitian yang bersifat survei.

Berdasarkan latar belakang di atas yang telah dipaparkan, penulis mengambil judul ***"Analisis Heteroskedastisitas pada Regresi Linier Berganda"***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah uraikan di atas, maka masalah dapat dirumuskan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Bagaimana mengatasi unsur heteroskedastisitas pada regresi linier berganda?
2. Bagaimana mengestimasi parameter model regresi linier berganda dengan unsur heteroskedastisitas?
3. Bagaimana aplikasi metode estimasi model regresi linier berganda dengan unsur heteroskedastisitas pada jarak tempuh mobil yang didukung oleh satu gallon bahan bakar?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasar rumusan masalah yang telah ditetapkan, maka didapat tujuan sebagai berikut:

1. Mengetahui cara mengatasi unsur heteroskedastisitas pada regresi linier berganda.
2. Mengetahui cara mengestimasi parameter model regresi linier berganda dengan unsur heteroskedastisitas.
3. Mengetahui aplikasi metode estimasi model regresi linier berganda dengan unsur heteroskedastisitas pada jarak tempuh mobil yang didukung oleh satu gallon bahan bakar.

1.4 Batasan Penelitian

Dalam penelitian ini memiliki batasan-batasan masalah sebagai berikut :

1. Dalam mendeteksi adanya heteroskedastisitas, uji yang akan digunakan adalah uji *White*.
2. Metode yang digunakan untuk mengatasi dan mengestimasi unsur heteroskedastisitas adalah *Weighted Least Squares* (WLS).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan bermanfaat bagi berbagai pihak, antara lain :

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini bermanfaat sebagai penerapan teori yang didapat selama pendidikan yang telah ditempuh dan bekal pengetahuan bagi penulis apabila akan mengembangkan penelitian lebih lanjut tetang heteroskedastisitas pada regresi linier berganda.

2. Bagi Pembaca

   Penelitian ini bisa menambah pengetahuan pembaca tentang heteroskedastisitas pada regresi linier berganda, dan mengatasi saat menghadapi kasus tersebut.

3. Bagi Universitas

   Penelitian ini dapat dijadikan sebagai tambahan kepustakaan dan menjadi masukan bagi pihak-pihak yang ingin meneliti lagi masalah-masalah yang relevan dengan topik ini.

1.6 Metode Penelitia

Penelitian ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan *(Library Research)*, yakni mengumpulkan data secara literatur yang akan dipergunakan sebagai acuan dalam menganalisis masalah. Penelitian ini mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan dan mempelajari pustaka-pustaka yang berkenaan dengan materi penelitian seperti regresi linier berganda, heteroskedastisitas, *uji white*, dan *Weighted Least Squares* (WLS).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Menganalisis dan menyusun hasil langkah pertama yang mencakup tentang:
    a) Konsep dasar heteroskedastisitas pada regresi linier berganda
    b) Cara mandeteksi adanya heteroskedastisitas pada regresi linier berganda
    c) Akibat adanya heteroskedastisitas pada regresi linier berganda
    d) Cara mengatasi unsur heteroskedastisitas pada regresi linier berganda
    e) Cara mengestimasi parameter model regresi linier berganda dengan unsur heteroskedastisitas
3. Mengaplikasikan metode WLS untuk mengatasi unsur heteroskedastisitas pada model regresi linier berganda pada kasus jarak tempuh mobil dengan langkah-langkah sebagai berikut:
    a. Analisis korelasi pada data
    b. Analisis regresi pada data

       Dalam analisis regresi ini akan dilakukan uji Ketepatan Parameter Estimasi dan uji Ketepatan Regresi
    c. Uji asumsi klasik

       Dalam uji asumsi klasik ini akan dilakukan lima uji, yaitu:
        a) Uji normalitas
        b) Uji linieritas
        c) Uji multikolinieritas
        d) Uji Heteroskedastisitas

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

e) Uji autokorelasi

4. Memberikan kesimpulan dari penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan hasil penelitian ini dibagi menjadi empat bab dan setiap bab dibagi menjadi beberapa sub bab. Materi pokok dari setiap bab adalah sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan.

Bab pendahuluan ini merupakan bagian awal dari penulisan yang menyajikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka.

Dalam bab landasan teori akan dijelaskan teori yang melandasi penelitian ini yaitu tinjauan umum tentang regresi linier berganda dan heteroskedastisitas.

BAB III Pembahasan.

Bab pembahasan berisi hasil dari analisis heteroskedastisitas pada regresi linier berganda yang telah dilakukan.

BAB IV Penutup.

Dalam bab penutup ini akan diuraikan mengenai kesimpulan dari pembahasan dan saran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Regresi Linier Berganda

Dalam menentukan nilai variabel tidak bebas (y), perlu diperhatikan variabel-variabel bebas (x) yang mempengaruhinya terlebih dahulu, dengan demikian harus diketahui hubungan antara satu variabel tidak bebas *(Dependent Variable)* dengan beberapa variabel lain yang bebas *(Independent Variable)*. Untuk meramalkan y, apabila semua variabel bebas diketahui, maka dapat dipergunakan model persamaan regresi linier berganda sebagai berikut :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \tag{2.1}$$

dengan i =1, 2, 3, … , n dan k =0, 1, 2, 3, … dimana:

y = variabel tidak bebas

x = variabel bebas

β = koefisien Regresi

ε = kesalahan regresi (*Error*)

apabila dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

dengan $k < n$ yang berarti banyak observasi harus lebih banyak dari pada banyak variabel bebas, akan diperoleh:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\underset{nx1}{y} = \underset{nxk}{X}\,\underset{kx1}{\beta} + \underset{nx1}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

atau

$$\underset{nx1}{\varepsilon} = \underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\,\underset{kx1}{\beta}$$

dimana Y dan ε adalah vektor, sedangkan X adalah vektor (Supranto, 2009: 239-241).

Salah satu metode estimasi parameter untuk regresi linier berganda adalah *Ordinary Least Square* (OLS). Konsep dari metode *Ordinary Least Square* adalah menaksir parameter regresi (β) dengan meminimumkan jumlah kuadrat dari *error* (Dajan, 1986: 325-326). Sehingga taksiran parameter regresi ($\hat{\beta}$) dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki} \tag{2.3}$$

apabila dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}}_{\hat{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}}_{\hat{\beta}}$$

Tujuan OLS adalah meminimumkan jumlah kuadrat *error* (Lains, 2003: 182-184), yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{I=1}^{n} \varepsilon_i^2 \\
&= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \\
&= \underset{1xn}{\varepsilon^T} \underset{nx1}{\varepsilon} \\
&= \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta} \right)^T \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta} \right) \\
&= \left(\underset{1xn}{y^T} - \left(\underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta} \right)^T \right) \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta} \right) \\
&= \left(\underset{1xn}{y^T} - \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^T} \right) \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta} \right) \\
&= \underset{1xn}{y^T} \underset{nx1}{y} - \underset{1xn}{y^T} \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta} - \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^T} \underset{nx1}{y} + \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^T} \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta}
\end{aligned}
$$

karena $\underset{1xn}{y^T} \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta}$ adalah skalar (ordo 1x1), maka matriks *transpose*-nya adalah :

$$\left(\underset{1xn}{y^T} \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta} \right)^T = \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^T} \underset{nx1}{y} \tag{2.4}$$

jadi

$$S = \underset{1xn}{y^T} \underset{nx1}{y} - 2 \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^T} \underset{nx1}{y} + \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^T} \underset{nxk}{X} \underset{kx1}{\beta} \tag{2.5}$$

Untuk mengestimasi parameter regresi (β) maka jumlah kuadrat *error* harus diminimumkan (Supranto, 2009: 241-242), hal tersebut bisa diperoleh dengan melakukan turunan pertama terhadap β, dengan aturan penurunan skalar berikut, misalkan z dan w adalah vektor-vektor berordo $mx1$, sehingga $y = z^T w$ adalah skalar, maka $\frac{dy}{dz} = w$, $\frac{dy}{dz^T} = w^T$, $\frac{dy}{dw} = z$, dan $\frac{dy}{dw^T} = z^T$. Sehingga didapatkan hasil turunan jumlah kuadrat *error* berikut,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0 - 2\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} + \underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta} + \left(\underset{1xk}{\beta^T}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^T \\
&= -2\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} + \underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta} + \underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta} \\
&= -2\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} + 2\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

dan hasil estimasi parameter β didapatkan dengan menyamakan hasil turunan jumlah kuadrat *error* dengan nol, sehingga pada saat hasil turunan jumlah kuadrat *error* disamakan dengan nol parameter β menjadi $\hat{\beta}$, dan diperoleh

$$
\begin{aligned}
-2\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} + 2\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\hat{\beta}} &= 0 \\
2\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\hat{\beta}} &= 2\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} \\
\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\hat{\beta}} &= \underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} \\
\underset{kx1}{\hat{\beta}} &= \left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Akan ditujukan bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimasi linier tak bias dari β:

$$
\begin{aligned}
E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right) &= E\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y}\right) \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}E\left(\underset{nx1}{y}\right) \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta} \\
&= \underset{kx1}{\beta}
\end{aligned}
$$

dari sini terbukti bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimasi linier tak bias dari β (Lains, 2003: 185).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.2) ke dalam persamaan (2.6) didapat:

$$\begin{aligned}
\underset{kx1}{\hat{\beta}} &= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{y} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\left(\underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\beta}+\underset{nx1}{\varepsilon}\right) \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\beta}+\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon} \\
&= \underset{kx1}{\beta}+\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

(2.8)

Untuk dapat menunjukkan bahwa $\hat{\beta}$ adalah penaksir OLS yang paling baik *(Best Estimator)* dalam arti taksiran variansi parameter ($Var(\hat{\beta})$) adalah yang terendah, maka bisa diperlihatkan sebagai berikut:

$$Cov(\hat{\beta}) = E\left[\left(\hat{\beta}-E(\hat{\beta})\right)\left(\hat{\beta}-E(\hat{\beta})\right)^T\right]$$

$$= \begin{bmatrix} E(\hat{\beta}_1-\beta_1) \\ E(\hat{\beta}_2-\beta_2) \\ \vdots \\ E(\hat{\beta}_k-\beta_k) \end{bmatrix}\left[E(\hat{\beta}_1-\beta_1)\quad E(\hat{\beta}_2-\beta_2)\quad \cdots \quad E(\hat{\beta}_k-\beta_k)\right]$$

$$= \begin{bmatrix} E(\hat{\beta}_1-\beta_1)^2 & E(\hat{\beta}_1-\beta_1)E(\hat{\beta}_2-\beta_2) & \cdots & E(\hat{\beta}_1-\beta_1)E(\hat{\beta}_k-\beta_k) \\ E(\hat{\beta}_1-\beta_1)E(\hat{\beta}_2-\beta_2) & E(\hat{\beta}_2-\beta_2)^2 & \cdots & E(\hat{\beta}_2-\beta_2)E(\hat{\beta}_k-\beta_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\hat{\beta}_1-\beta_1)E(\hat{\beta}_k-\beta_k) & E(\hat{\beta}_2-\beta_2)E(\hat{\beta}_k-\beta_k) & \cdots & E(\hat{\beta}_k-\beta_k)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_k) \\ Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) & Var(\hat{\beta}_2) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_k) & Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_k) & \cdots & Var(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

jelas terlihat bahwa variansi adalah anggota dari diagonal utama, sedangkan kovarian adalah unsur-unsur diluar diagonal utama. Kovariansi tersebut bisa dituliskan dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Cov\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right) &= E\left[\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}} - E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right)\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}} - E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right)\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}} - \underset{kx1}{\beta}\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}} - \underset{kx1}{\beta}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\underset{kx1}{\beta} + \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon} - \underset{kx1}{\beta}\right)\left(\underset{kx1}{\beta} + \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon} - \underset{kx1}{\beta}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon}\right)\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon}\right)\left(\underset{nx1}{\varepsilon^T}\ \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\right)\right] \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ E\left(\underset{nx1}{\varepsilon}\ \underset{nx1}{\varepsilon^T}\right) \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\Phi}\ \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

dengan Φ adalah matriks diagonal. Pada saat variansi *error* bersifat homoskedastisitas, maka bisa ditulis $\Phi = \sigma^2 I$ dengan asumsi tersebut persamaan (2.8) menjadi (Long dan Ervin, 1998: 8-9):

$$\begin{aligned}
Var\left(\hat{\beta}\right) &= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \sigma^2\ \underset{nxn}{I}\ \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \sigma^2\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \sigma^2\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxk}{I} \\
&= \sigma^2\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Apabila variansi *error* tidak diketahui, maka harus didapat taksirannya, dan untuk taksiran variansi *error* dilakukan dengan menaksir konstanta variansi error ($\hat{\sigma}^2$) (Supranto, 2009: 157), sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n-k} \qquad (2.11)$$

dengan variansi taksiran ini diperoleh variansi parameter regresi sebagai berikut (Long dan Ervin. 2000; 5):

$$Var\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right) = \hat{\sigma}^2 \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \qquad (2.12)$$

Dalam regresi linear berganda, ada beberapa asumsi yang harus dipenuhi agar taksiran parameter dalam model regresi linear berganda memenuhi sifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*), agar tahap estimasi yang diperoleh benar dan efektif. Estimator ini akan BLUE bila memenuhi teorema Gauss Markov sebagai berikut (Nachrowi , 2002: 123):

1. Rata-rata (harapan) variabel ε bernilai nol atau $E(\varepsilon) = 0$
2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel *error* untuk setiap observasi atau $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0;\ i \neq j$.
3. Memiliki *error* yang bersifat homoskedastisitas atau $Var(\varepsilon_i \mid X_i) = \sigma^2$.
4. Nilai variabel (X) tetap atau nilainya independen terhadap faktor *error* (ε) atau $Cov(X, \varepsilon) = 0$
5. Model regresi dispesifikasi secara benar, dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Tidak ada hubungan linier (*kolinieritas*) antar variabel-variabel bebas.

Ada beberapa penyimpangan asumsi dalam regresi linier berganda, yakni:

1. Multikolinieritas

   Istilah ini diciptakan oleh Ragner Frish, yang berarti ada hubungan linier yang sempurna atau eksak diantara variabel-variabel bebas dalam model regresi (Firdaus, 2004: 111).

2. Heteroskedastisitas

   Salah satu asumsi dasar yang harus dipenuhi adalah variansi *error* harus konstan ($Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$), jika tidak konstan, maka terdapat unsur heteroskedastisitas. Data *cross-sectional* cenderung memuat unsur heteroskedastisitas karena pengamatan dilakukan pada individu yang berbeda pada saat yang sama (Supranto, 2004: 45-47).

3. Autokorelasi

   Autokorelasi merupakan gangguan pada fungsi yang berupa korelasi di antara variabel *error*, ini berarti tidak terpenuhinya asumsi yang menyatakan bahwa nilai-nilai variabel ε tidak berkorelasi (Firdaus, 2004: 98).

2.2 Heteroskedastisitas *(Heteroscedasticity)*

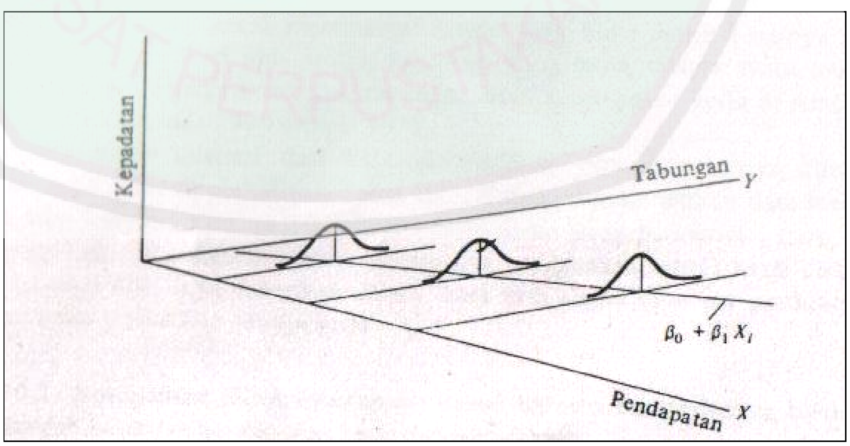
Salah satu asumsi yang harus dipenuhi agar model bersifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) adalah harus terdapat variansi yang sama dari setiap *error*-nya atau homoskedastisitas, secara simbolis

$$E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma^2 \tag{2.13}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

apabila asumsi ini tidak terpenuhi maka yang terjadi adalah sebaliknya, yakni heteroskedastisitas. Heteroskedastisitas berarti variansi *error* berbeda dari suatu observasi ke observasi lainnya. Sehingga setiap observasi mempunyai reliabilitas yang berbeda (Firdaus, 2004: 106).

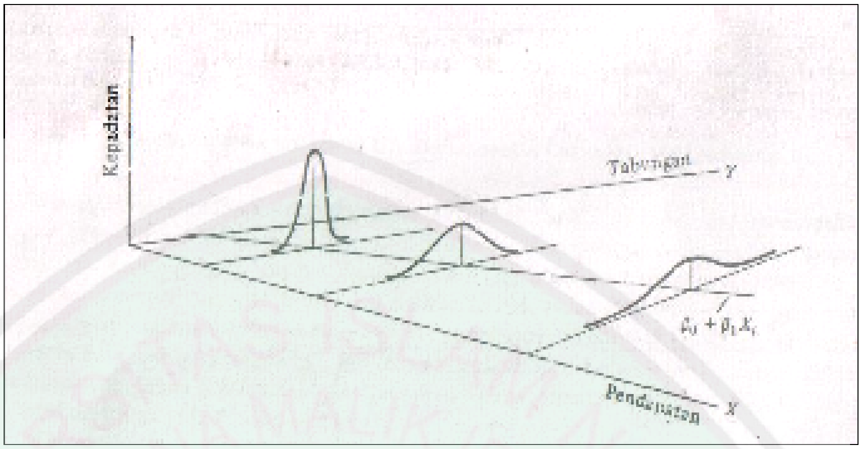
Asumsi homoskedastisitas menyatakan bahwa setiap variansi *error* di sekitar rata-rata nolnya tidak tergantung pada nilai variabel bebas. Setiap variansi *error* masih tetap sama baik untuk variabel bebas bernilai kecil maupun besar. Secara matematik variansi *error* (σ_ε^2) bukanlah fungsi dari variabel bebas (X) , yaitu $\sigma_\varepsilon^2 \neq f(X)$. Dan jika variansi *error* tidak konstan (nilai-nilainya tergantung pada nilai-nilai variabel bebas) maka variansi *error* merupakan fungsi dari variabel bebas (X), yaitu $\sigma_\varepsilon^2 = f(X)$ sehingga besar atau kecilnya nilai variabel bebas mempengaruhi nilai variansi *error*. Ketergantungan ini dilukiskan secara diagramatis pada panel-panel. Kasus heteroskedastisitas ditunjukkan dengan menaik atau menurunnya sebaran pengamatan-pengamatan dari garis regresi (Gujarati, 1999: 177-178), seperti nampak gambar di bawah ini :



Sumber : Damodar N. Gujarati

Gambar 2.1: Variansi *error* bersifat homoskedastisitas

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Sumber : Damodar N. Gujarati

Gambar 2.2: Variansi *error* bersifat heteroskedastisitas

Konsekuensi adanya heteroskedastisitas dalam suatu model regresi adalah penaksir OLS (*Ordinary Least Squared*) tetap tidak bias dan konsisten, tetapi penaksir tersebut tidak efisien baik bagi sampel besar maupun sampel kecil, ini terjadi pada penaksiran OLS dengan memperhatikan kehadiran hereroskedastisitas maupun pada penaksiran OLS tanpa memperhatikan kehadiran heteroskedastisitas (Lains, 2003: 319-323). Unsur heteroskedastisitas menyebabkan hasil dari *t*-test dan *F*-test menyesatkan, karena kedua uji tersebut menggunakan besaran variansi taksiran, lebih besarnya variansi taksiran dibanding variansi sebenarnya akan menyebabkan standar taksiran *error* juga labih besar, sehingga interval kepercayaan sangat besar pula (Nachrowi, 2002: 133).

Pada estimasi OLS ada dua macam perlakuan terhadap unsur heteroskedastisitas, yakni:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Estimasi OLS dengan memperhatikan heteroskedastisitas

Dalam metode ini akan digunakan taksiran parameter regresi ($\hat{\beta}$) dan variansi taksiran parameter yang telah diberikan untuk menghitung heteroskedastisitas secara eksplisit dengan variansi dan asumsi variansi *error* (σ_ε^2) diketahui. Secara umum, dapat ditunjukan bahwa variansi taksiran parameter tidak sama dengan variansi parameter yang sebenarnya, hal tersebut menyebabkan tidak bisanya dibuat selang kepercayaan dan menguji hipotesis (dengan t-Test dan F-Test), karena hasilnya tidak valid.

2. Estimasi OLS tanpa memperhatikan heteroskedastisitas

Dalam metode ini, tidak hanya digunakan taksiran parameter regresi ($\hat{\beta}$), akan tetapi juga variansi *error* (homoskedastisitas) umum, bahkan pada saat heteroskedastisitas ada atau dicurigai ada. Bila tidak diperhatikan heteroskedastisitas dan mempergunakan variansi *error* secara umum, maka akan menghasilkan:

a) Variansi taksiran variansi parameter bersifat bias terhadap variansi parameter sebenarnya, karena OLS akan mengestimasi secara berlebihan atau terlalu rendah. Bias dari taksiran variansi parameter regresi tersebut tidak bisa dikatakan bias positif *(overestimation)* atau negatif *(underestimation)* karena bergantung hubungan variansi sebanarnya dan nilai-nilai yang diambil oleh variabel bebas.

b) Selang kepercayaan tidak memberikan hasil yang valid.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

jadi, jika dipaksakan menggunakan prosedur pengujian biasa terlepas dari heteroskedastisitas, dan apapun hasilnya dapat menyesatkan (Gujarati, 2010: 475).

Dari sumber lain diterangkan bahwa, keadaan heteroskedastisitas dapat mengakibatkan hal-hal berikut:

1. Taksiran variansi parameter regresi yang diperoleh dari OLS tetap memenuhi persyaratan tidak bias.
2. Variansi yang diperoleh tidak efesien, artinya cenderung membesar sehingga tidak lagi merupakan variansi yang terkecil. Kecenderungan semakin membesarnya variansi tersebut akan mengakibatkan uji hipotesis yang akan dilakukan tidak memberikan hasil yang baik (tidak valid).

Dengan demikian, model perlu diperbaiki terlebih dulu agar pengaru heteroskedastisitas hilang (Firdaus, 2004: 107).

2.3 Uji Heteroskedastisitas *White*

Uji *White* dilakukan dengan membandingkan perkalian antara banyak observasi dengan koefiensi determinasi dengan nilai kritis *Chi-Square* (Gujarati, 2010: 94). Uji ini akan digambarkan sebagai berikut:

Misalkan model persamaan diberikan sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \tag{2.14}$$

yang dibentuk ke dalam matriks menjadi:

$$\underset{nx1}{y} = \underset{nxk}{X}\,\underset{kx1}{\beta} + \underset{nx1}{\varepsilon}$$

atau

$$\underset{nx1}{\varepsilon} = \underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\,\underset{kx1}{\beta}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Apabila hipotesis nol adalah variansi *error* persamaan regresi linier berganda bersifat homoskedastisitas atau tidak ada heteroskedastisitas, maka hipotesis ini dapat diuji dengan menunjukkan bahwa ukuran sampel (n) dikalikan dangan koefisiensi determinasi (R^2) yang didapatkan dari persamaan (2.14) secara asimtotik mengikuti distribusi *Chi-Square* dengan derajat kebebasan (df) sejumlah produk silang variabel bebas (tidak termasuk konstanta) dari persamaan (2.14), jadi :

$$nR^2 \sim \chi^2_{df} \tag{2.15}$$

dimana derajat kebebasan didefinisikan seperti sebelumnya, dan koefisiensi determinasi bisa didapatkan dari hasil bagi jumlah kuadrat regresi *(Explained Sum of Square, ESS)* dengan jumlah kuadrat total *(Total Sum of Square, TSS),* sedangkan *TSS* didapatkan dari penjumlahan *ESS* dan jumlah kuadrat *error (Residual Sum of Square ,RSS),* secara matematis bisa ditulis dengan

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} \tag{2.16}$$

$$TSS = ESS + RSS \tag{2.17}$$

dengan

$$ESS = \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i^2 = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} X_{ki}$$

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

Apabila kedua ruas dari persamaan (2.16) dibagi TSS , maka diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - \overline{y} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y} \right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y} \right)^2}$$

sehingga koefisiensi determinasi menjadi

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - \overline{y} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y} \right)^2} \tag{2.18}$$

Jika nilai *Chi-Square* yang didapatkan melebihi nilai *Chi-Square kritis* pada tingkat signifikan yang dipilih, maka terdapat heteroskedastisitas, yang artinya hipotesis nol ditolak. Jika nilai tidak melebihi nilai *Chi-Square kritis*, tidak terdapat heteroskedastisitas atau hipotesis nol diterimah (Gujarati, 2010: 491-492).

2.4 *Weighted Least Squares* (WLS)

Apabila variansi *error* (σ_ε^2) diketahui atau dapat diperkirakan, cara yang paling mudah untuk mengatasi adanya heteroskedastisitas adalah dengan metode kuadrat terkecil terboboti (*Weighted Least Square)* yang memberikan hasil estimasi bersifat BLUE (Gujarati, 2010: 493).

Untuk menggambarkan metode ini, akan diberikan model sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i \tag{2.19}$$

untuk mendapatkan taksiran variansi parameter regresi, diasumsikan untuk sementara bahwa variansi *error* sebenarnya (σ_ε^2) untuk setiap observasi diketahui, sehingga transformasi persamaan (2.18) yang dihasilkan adalah:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{y_i}{\sigma_\varepsilon} = \beta_0 \frac{1}{\sigma_\varepsilon} + \beta_1 \frac{x_{1i}}{\sigma_\varepsilon} + \beta_2 \frac{x_{2i}}{\sigma_\varepsilon} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_\varepsilon} \tag{2.20}$$

transformasi ini dilakukan membagi baik sisi kiri maupun sisi kiri regresi dengan akar variansi *error* (σ_ε). Sekarang anggaplah

$$v_i = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_\varepsilon} \tag{2.21}$$

dan v_i bisa disebut faktor *error* yang ditransformasikan, apabila faktor *error* tersebut bersifat homoskedastisitas, maka bisa diketahui bahwa estimator OLS dari parameter-parameter pada persamaan (2.19) bersifat BLUE. Untuk melihat bahwa faktor *error* (v_i) homoskedastisitas bisa dengan cara berikut:

$$v_i^2 = \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_\varepsilon^2} \tag{2.22}$$

sehingga

$$E\left(v_i^2\right) = E\left(\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

karena variansi *error* sudah diketahui, maka

$$E\left(v_i^2\right) = \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\right) E\left(\varepsilon_i^2\right)$$

karena $E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma_\varepsilon^2$, maka

$$E\left(v_i^2\right) = \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\right) \sigma_\varepsilon^2$$

$$= 1$$

yang jelas merupakan konstanta, maka bisa diketahui bahwa *error* pada persamaan hasil transformasi (v_i) besifat homoskedastisitas (Gujarati, 2006: 475).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedangkan pada tahap estimasi dalam metode WLS dilakukan seperti metode OLS yang diterapkan pada persamaan hasil transformasi (Schmidheiny, 2010: 5).

Estimasi dalam statistika disinggung dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147, yaitu:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya:

"Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih." (Ash-Shaffaat: 147).

2.5 Uji Hipotesis

Istilah hipotesis berasal dari bahasa Yunani yaitu *hupo* (sementara) dan *thesis* (pernyataan atau teori). Jadi hipotesis adalah pernyataan sementara yang masih lemah kebenarannya sehingga perlu pengujian. Kemudian para ahli menafsirkan arti hipotesis sebagai dugaan terhadap hubungan dua variabel atau lebih (Kerlinger, 1996: 18). Hipotesis merupakan jawaban sementara terhadap rumusan masalah atau sub masalah penelitian yang masih memerlukan pengujian atas kebenarannya dengan analisis data yang diperoleh. Hipotesis harus dibuat dalam setiap penelitian yang bersifat analitis. sedangkan penelitian deskriptif tidak memerlukan hipotesis (Riduwan, 2006: 37).

Hipotesis Nol atau Nihil (H_0), merupakan hipotesis awal peneliti yang diharapkan ditolak setelah penelitian. Hipotesis awal inilah yang perlu dilakukan pengujian secara statistik. Hipotesis alternatif atau tandingan (H_1), merupakan hipotesis alternatif peneliti yang diharapkan diterima setelah penelitian. Hipotesis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tandingan ini akan diterima jika hipotesis nol ditolak secara statistik (setelah uji hipotesis).

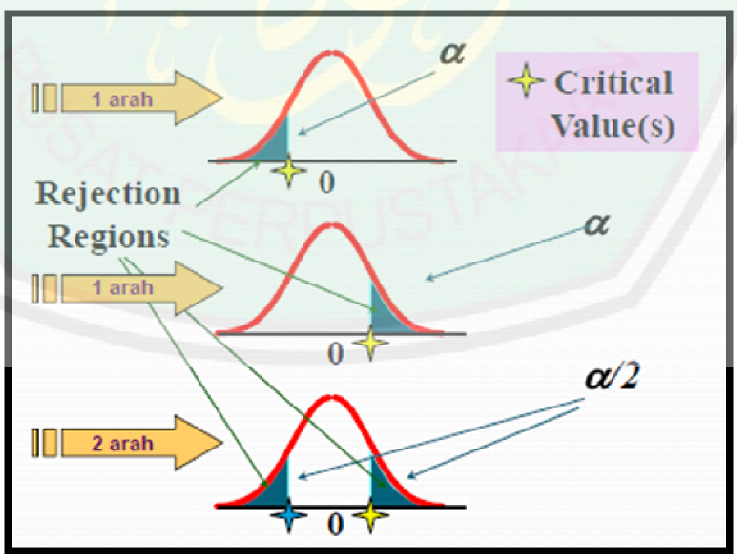
Hipotesis Direksional (langsung), adalah hipotesis yang arahnya sudah jelas (tertentu) yaitu dengan pernyataan kurang atau lebih, seperti contoh

$$H_0 : \mu \geq 0$$
$$H_1 : \mu < 0$$

Pengujian hipotesis direksional menggunakan uji satu arah yaitu uji arah kiri atau uji arah kanan. Sedangkan hipotesis Non Direksional (tak langsung), adalah hipotesis yang tidak menunjukkan arah tertentu, yaitu dengan pernyataan sama dengan, seperti contoh

$$H_0 : \mu = 0$$
$$H_1 : \mu \neq 0$$

Pengujian hipotesis non direksional menggunakan uji dua arah (Aziz: 2010). Uji satu arah dan dua arah seperti nampak gambar di bawah ini:



Gambar 2.3: Uji hipotesis satu arah dan dua arah
(Sumber: Anonymous, 2011)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dimana α adalah tingkat kesalahan, *rejection regions* adalah daerah penolakan H_0, dan *critical value* nilai kritis yang menyatakan batas daerah penerimaan H_0.

2.6 Uji Statistik

a. Uji t

Uji t pada dasarnya menujukkan seberapa jauh pengaruh satu variabel bebas secara individual dalam menerangkan variansi terikat.

Hipotesis dalam Uji t diformulasikan sebagai berikut:

$H_0 : \beta = 0$, artinya variabel bebas bukan merupakan penjelas yang signikan terhadap variabel terikat.

$H_1 : \beta \neq 0$, artinya variabel bebas merupakan penjelas yang signikan terhadap variabel terikat.

Untuk menguji hipotesis tersebut digunakan statistik t yang dihitung dengan cara berikut

$$t_{stat} = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}} \tag{2.23}$$

dimana $\hat{\beta}$ adalah nilai parameter dan $S_{\hat{\beta}}$ adalah *standart error* dari $\hat{\beta}$. *standart error* dari masing-masing parameter dihitung dari akar varians masing-masing.

Untuk mengetahui kebenaran hipotesis digunakan kriteria bila *t*-hitung lebih besar dari *t*-tabel, maka H_0 ditolak dan H_1 diterima, artinya ada pengaruh antara variabel bebas terhadap variabel terikat dengan tingkat kesalahan tertentu, begitu pula sebaliknya bila *t*-hitung lebih kecil dari *t*-

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tabel, maka H_0 diterima dan H_1 ditolak, artinya tidak ada ada pengaruh antara variabel bebas terhadap variabel terikat (Turmudi dan Harini, 2008: 247).

b. Uji F

Uji F dilakukan untuk mengetahui pengaruh variabel bebas secara bersama terhadap variabel terikat. Dengan menggunakan formula hipotesis yang akan diuji:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$, artinya secara bersama-sama tidak ada pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikat.

$H_1 : \exists i \in \{1, 2, \cdots, k\}, \ni \beta_i \neq 0$, artinya secara bersama-sama ada pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikat.

Untuk menguji hipotesis tersebut digunakan statistik F yang dihitung dengan cara berikut

$$F_{stat} = \frac{R^2 / (n-1)}{(1-R^2)/(n-k)} \tag{2.24}$$

dimana R^2 adalah koefesien determinasi, n adalah banyaknya obsevasi, dan k adalah banyaknya variabel bebas yang mempengaruhi variabel terikat.

Untuk mengetahui kebenaran hipotesis digunakan kriteria bila *F*-hitung lebih besar dari *F*-tabel, maka H_0 ditolak dan H_1 diterima, artinya ada pengaruh antara variabel bebas terhadap variabel terikat dengan tingkat kesalahan tertentu, begitu pula sebalikanya bila *F*-hitung lebih kecil dari *t*-

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tabel, maka H_0 diterimah dan H_1 ditolak, artinya tidak ada ada pengaruh antara variabel bebas terhadap variabel terikat (Turmudi dan Harini, 2008: 247).

c. Koefisien Determinasi

Ketetapan model dilakukan untuk mendeteksi ketetapan yang paling baik dari garis regresi. Uji ini dilakukan dengan melihat besarnya nilai koefisien determinasi. (R^2) yang merupakan besaran non negatif dan besarnya antara angka nol sampai dengan satu ($0 \le R^2 \le 1$).

Koefisien determinasi bernilai nol berarti tidak ada hubungan antara variabel bebas dengan variabel terikat. Sebaliknya nilai koefisien determinasi 1 berarti suatu hubungan sempurna dari ketetapan model. Koefisien determinasi didefinisikan sebagai berikut (Gujarati. 2010: 154-156):

$$R^2 = \frac{\sum\left(\hat{Y} - \bar{Y}\right)^2}{\sum\left(Y - \bar{Y}\right)^2} \tag{2.25}$$

2.7 Uji Asumsi Klasik

a. Uji Normalitas

Dalam analisis regresi diperlukan pengujian terhadap normalitas pada *error*, apabila *error* normal maka variabel terikat juga normal. Untuk uji normalitas bisa juga digunakan uji *Jarque-Bera* pengujian normalitas dengan uji *Jarque-Bera* menggunakan formula sebagai berikut:

$$JB = n\left[\frac{S^2}{6} + \frac{\left(K-3\right)^2}{24}\right] \tag{2.26}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dimana S menunjukkan S*kewness* dan K menunjukkan *Kurtosis. error* kemungkinan berasal dari distribusi normal jikan nilai JB lebih kecil dari nilai $\chi^2_{\alpha,df}$ tertentu (Algifari, 2000).

b. Uji Multikolinieritas

Uji multikolinieritas dapat dilakukan dengan cara meregresi model analisis dan melakukan uji korelasi antar variabel independen dengan menggunakan tolerance dan *Varians Inflating Factors* (VIF) jika nilai tolerance lebih kecil dari 0,01 dan nilai VIF lebih besar dari 10 maka terjadi multikolinieritas. Dengan formula

$$TOL = 1 - R^2$$

dan

$$VIF = \frac{1}{TOL}$$ (Gujarati, 2006: 70-71)

c. Uji Autokolinieritas

Untuk menguji adanya otokorelasi dapat menggunakan metode *Durbin Watson* (DW) sebagai berikut (Algifari, 2000):

$$d = 2\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}\right]$$

dimana

d : statistik Uji durbin Watson

ε_{i-1} : *error* pada observasi $i-1$

ε_i : *error* pada observasi t

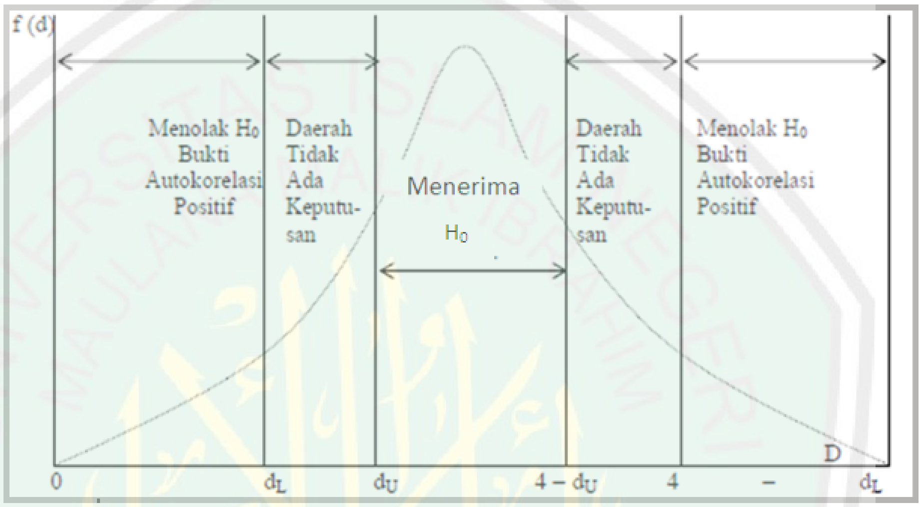
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dalam pengujian ini menggunkan hipotesis berikut

$H_0 : \rho = 0$ tidak ada autokorelasi

$H_1 : \rho \neq 0$, ada autokorelasi.

kriteria ini bisa digambarkan sebagaimana berikut:



Gambar 2.4: Kritria uji hipotesis autolorelasi
(Sumber: Suprihatmi, 2007: 9)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Model Regresi Linier Berganda dengan Heteroskedastisitas

Model regresi linier berganda secara umum ditulis sebagai berikut :

$$\underset{nx1}{y} = \underset{nxk}{X}\,\underset{kx1}{\beta} + \underset{nx1}{\varepsilon} \tag{3.1}$$

dimana:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \text{dan } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

yang memuat unsur heteroskedastisitas dan model tersebut tetap ditaksir menggunakan metode OLS dengan memperhatikan kehadiran heteroskedastisitas, yakni menggunakan taksiran parameter dan variansi parameter yang telah diberikan metode OLS untuk menghitung persamaan tersebut secara eksplisit. Dengan asumsi bahwa $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $E(\varepsilon\varepsilon^T) = \Phi$, didapatkan taksiran parameter β sebagai berikut:

$$\underset{kx1}{\hat{\beta}} = \left(\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\,\underset{nx1}{y}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

disamping itu didapat pula taksiran variansi parameter sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right) &= E\left[\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}} - E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right)\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}} - E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right)\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}} - \underset{kx1}{\beta}\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}} - \underset{kx1}{\beta}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\underset{kx1}{\beta} + \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon} - \underset{kx1}{\beta}\right)\left(\underset{kx1}{\beta} + \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon} - \underset{kx1}{\beta}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon}\right)\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nx1}{\varepsilon}\right)\left(\underset{nx1}{\varepsilon^T}\ \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\right)\right] \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\, E\left(\underset{nx1}{\varepsilon}\ \underset{nx1}{\varepsilon^T}\right) \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\Phi}\ \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Karena persamaan (3.1) memuat unsur heteroskedastisitas, maka variansi *error* pada regresi tersebut tidak konstan karena nilai-nilainya tergantung pada nilai variabel bebas (X). Jika matriks variansi kovariansi *error* (Φ) diketahui, maka bisa dipergunakan untuk mengatasi heteroskedastisitas. Akan tetapi, jarang sekali variansi *error* pada kasus heteroskedastisitas diketahui, sehingga harus didapatkan estimasi variansi *error* tersebut terlebih dahulu agar bisa dilakukan estimasi parameter regresi yang memuat unsur heteroskedastisitas secara eksplisit.

Apabila diasumsikan $\Phi = \sigma^2\Psi$ dengan Φ adalah matriks yang memuat variansi *error* sebagai unsur diagonal utamanya, maka persamaan (3.2) menjadi:

$$
Var\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}}\right) = \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\, \sigma^2 \underset{nxn}{\Psi}\, \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \tag{3.3}
$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga bisa diketahui bahwa Ψ merupakan unsur heteroskedastisitas. Dari sini bisa diketahui bahwa untuk mendapatkan variansi *error* (Φ) harus didapatkan Ψ yang bisa didapatkan dari data yang diketahui (telah diuji) memuat unsur heteroskedastisitas.

3.2 Variansi *Error* dengan Unsur Heteroskedastisitas

Variansi *error* pada regresi yang memuat heteroskedastisitas jarang diketahui. Karenanya apabila

$$E\left(\underset{nx1}{\varepsilon}\underset{1xn}{\varepsilon^T}\right) = \underset{nxn}{\Phi} = \sigma^2 \underset{nxn}{\Psi} \tag{3.4}$$

maka harus didapat bentuk dari Ψ terlebih dahulu agar didapatkan taksiran variansi *error* $(\hat{\Phi})$ sebagai konstanta proporsionalitas. Apabila ψ_{ij} dengan $i, j = 1,2,\cdots,n$ adalah unsur matriks Ψ, maka:

$$\Phi = \sigma^2 \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{n1} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1n} & \psi_{2n} & \cdots & \psi_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Jika diasumsikan bahwa pada persamaan (3.1) tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel *error* untuk setiap observasi, sehingga untuk ψ_{ij} dengan $i \neq j$ bernilai 0, sedangkan untuk ψ_{ij} dengan $i = j$ bernilai ψ_i, maka didapat,

$$\Phi = \sigma^2 \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dimana Φ adalah matriks simetri dan *positive definite*, sehingga ada matriks C adalah mariks orthogonal sehingga $CC^T = C^T C = I$ sedemikian hingga $C^T \Phi C = D$ adalah matrik diagonal dengan elemen-elemennya merupakan nilai-nilai eigen dari Φ yang bernilai positif.

Dalam analisis regresi secara umum seperti persamaan (3.1) bila k parameter yang ditaksir dari n observasi, maka *error*-nya yang sebanyak n tersebut memiliki $n-k$ derajat bebas, jadi jelas *error* tersebut tidak mungkin bebas, hal ini bisa dijadikan dasar dalam menentukan unsur heteroskedastisitas (Ψ). *Error* dalam regresi linier berganda ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\underset{nx1}{\varepsilon} &= \underset{nx1}{y} - \underset{nx1}{\hat{y}} \\
&= \underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\, \underset{kx1}{\hat{\beta}} \\
&= \underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\, \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\, \underset{nx1}{y} \\
&= \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\, \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^T} \right) \underset{nx1}{y}
\end{aligned}$$

apabila $H = X\left(X^T X\right)^{-1} X^T$, maka

$$\underset{nx1}{\varepsilon} = \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H} \right) \underset{nx1}{y} \tag{3.7}$$

karena $E(y) = X\beta$, akibatnya

$$\begin{aligned}
\underset{nx1}{\varepsilon} - E\left(\underset{nx1}{\varepsilon}\right) &= \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nx1}{y} - E\left[\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nx1}{y}\right] \\
&= \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nx1}{y} - \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)E\left(\underset{nx1}{y}\right) \\
&= \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nx1}{y} - \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta} \\
&= \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right) \\
&= \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nx1}{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

dari sini bisa didapat variansi *error* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Cov\left(\underset{nx1}{\varepsilon}\right) &= E\left[\left(\underset{nx1}{\varepsilon} - E(\underset{nx1}{\varepsilon})\right)\left(\underset{nx1}{\varepsilon} - E(\underset{nx1}{\varepsilon})\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nx1}{\varepsilon}\right)\left(\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nx1}{\varepsilon}\right)^T\right] \\
&= E\left\{\left[\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\underset{nx1}{\varepsilon}\right]\left[\underset{1xn}{\varepsilon^T}\left(\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\right)^T\right]\right\} \\
&= \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)E\left(\underset{nx1}{\varepsilon}\,\underset{1xn}{\varepsilon^T}\right)\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)^T \\
&= \left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\sigma^2\underset{nxn}{I}\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)^T \\
&= \sigma^2\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)^T
\end{aligned} \tag{3.9}$$

di lain pihak

$$\begin{aligned}
\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}\right)^T &= \left(\underset{nxn}{I^T} - \underset{nxn}{H^T}\right) \\
&= \underset{nxn}{I} - \left(\underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\right)^T \\
&= \underset{nxn}{I} - \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T} \\
&= \underset{nxn}{I} - \underset{nxn}{H}
\end{aligned}$$

dan $HH = H^T = H$, dengan kata lain H bersifat idempoten, sehingga persamaan (3.9) menjadi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\underset{nx1}{\varepsilon}\right) &= \sigma^2\left(\underset{nxn}{I}-\underset{nxn}{H}\right)\left(\underset{nxn}{I}-\underset{nxn}{H}\right)\\
&= \sigma^2\left(\underset{nxn}{I}-\underset{nxn}{H}-\underset{nxn}{H}+\underset{nxn}{H}\,\underset{nxn}{H}\right)\\
&= \sigma^2\left(\underset{nxn}{I}-\underset{nxn}{H}\right)
\end{aligned}
$$

(3.10)

Dari sini bisa diketahui bahwa

$$
\begin{aligned}
\underset{nxn}{\Psi} &= \underset{nxn}{I}-\underset{nxn}{H}\\
&= \underset{nxn}{I}-\underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}
\end{aligned}
$$

(3.11)

Persamaan (3.11) merupakan unsur heteroskedastisitas pada regresi linier berganda dan bisa dijadikan sebagai dasar untuk mengatasi heteroskedastisitas. Dengan asumsi tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi, seperti yang diperlihatkan pada persamaan (3.6), dan apabila h_{ii} merupakan unsur diagonal dari matriks H , maka:

$$
\begin{aligned}
\underset{nxn}{\Psi} &= \underset{nxn}{I}-\underset{nxn}{H}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & h_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} (1-h_{11}) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (1-h_{22}) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & (1-h_{nn}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(3.12)

hal ini menunjukan bahwa nilai variansi *error* bergantung sepenuhnya dengan nilai variabel bebas (X). Selanjutnya didapatkan nilai estimasi dari σ^2 agar bisa didapatkan nilai estimasi dari variansi *error* sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$
$$= \frac{1}{n-k}\underset{1xn}{\varepsilon^T}\underset{nx1}{\varepsilon}$$
$$= \frac{1}{n-k}\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right)^T\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right)$$
$$= \frac{1}{n-k}\left(\underset{1xn}{y^T} - \left(\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right)^T\right)\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right) \tag{3.13}$$
$$= \frac{1}{n-k}\left(\underset{1xn}{y^T} - \underset{1xk}{\beta^T}\underset{kxn}{X^T}\right)\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right)$$
$$= \frac{1}{n-k}\left(\underset{1xn}{y^T}\underset{nx1}{y} - \underset{1xn}{y^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta} - \underset{1xk}{\beta^T}\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} + \underset{1xk}{\beta^T}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right)$$
$$= \frac{1}{n-k}\left(\underset{1xn}{y^T}\underset{nx1}{y} - 2\underset{1xk}{\beta^T}\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} + \underset{1xk}{\beta^T}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right)$$

dari persamaan (3.11) dan persamaan (3.13) didapatkan hasil estimasi dari variansi *error*

$$\underset{nxn}{\hat{\Phi}} = \hat{\sigma}^2\underset{nxn}{\Psi}$$
$$= \frac{1}{n-k}\left(\underset{1xn}{y^T}\underset{nx1}{y} - 2\underset{1xk}{\beta^T}\underset{kxn}{X^T}\underset{nx1}{y} + \underset{1xk}{\beta^T}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\underset{kx1}{\beta}\right)\left(\underset{nxn}{I} - \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\right) \tag{3.14}$$

3.3 Mengatasi Heteroskedastisitas pada Regresi Linier Berganda

Seandainya metode OLS tetap digunakan dalam model regresi linier berganda dengan heteroskedastisitas tanpa mengatasi heteroskedastisitas tersebut terlebih dahulu, maka nilai estimasi parameter tetap tidak bias akan tetapi memiliki variansi yang bias, hasil taksiran tersebut bisa lebih kecil atau lebih besar dari variansi parameter yang sebenarnya, hal ini bisa dilihat dari perbandingan variansi dari regresi yang bersifat homoskedastisitas dengan variansi dari regresi yang bersifat homoskedastisitas berikut:

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, variansi koefiensi parameter dari regresi yang bersifat homoskedastisitas yang didapat dari OLS adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$Var\left(\hat{\beta}_{homo}\right) = \sigma^2 \left(\underset{kxn}{X^T} \underset{nxk}{X}\right)^{-1}$$

dan untuk regresi yang bersifat heteroskedastisitas

$$Var\left(\hat{\beta}_{heter}\right) = \left(\underset{kxn}{X^T} \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T} \sigma^2 \underset{nxn}{\Psi} \underset{nxk}{X} \left(\underset{kxn}{X^T} \underset{nxk}{X}\right)^{-1}$$

dan secara umum

$$\left(\underset{kxn}{X^T} \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \neq \left(\underset{kxn}{X^T} \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T} \underset{nxn}{\Psi} \underset{nxk}{X} \left(\underset{kxn}{X^T} \underset{nxk}{X}\right)^{-1}$$

karena matriks Ψ bukanlah matriks identitas, sehingga besar kecilnya nilai unsur-unsur matriks Ψ mempengaruhi besar kecilnya taksiran variansi parameter. Dari sini bisa diketahui bahwa hasil taksiran variansi parameter dari regresi yang bersifat heteroskedastisitas tidak sesuai dengan nilai yang variansi parameter yang sebenarnya, lain halnya dengan hasil taksiran variansi parameter dari regresi yang bersifat homoskedastisitas. Dan untuk mengatasi sifat hetereoskedastisitas pada suatu regresi sehingga bisa diperoleh taksiran variansi parameter yang sesuai dengan variansi parameter yang sebenarnya bisa digunakan metode *Weighted Least Squares* (WLS), yang akan ditunjukkan berikut ini.

Error pada persamaan regresi linier berganda yang memuat heteroskedastisitas memiliki varansi yang tidak konstan, seperti yang telah dibahas sebelumnya variansi *error* pada kasus heteroskedastisitas bisa ditulis:

$$E\left(\underset{nx1}{\varepsilon} \underset{1xn}{\varepsilon^T}\right) = \underset{nxn}{\hat{\Phi}} = \hat{\sigma}^2 \underset{nxn}{\Psi}$$

maka akan ada matriks P yang bersifat simetri,

$$\underset{nxn}{P^T} \underset{nxn}{P} = \underset{nxn}{P} \underset{nxn}{P} = \underset{nxn}{P^2} = \underset{nxn}{\hat{\Phi}} \quad (3.15)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga bisa diketahui bahwa P merupakan standar deviasi *error*. Dari persamaan (3.12) didapatkan P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{11})} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{22})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{nn})} \end{bmatrix}$$

dan

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{11})}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{22})}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{nn})}} \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan metode *Weighted Least Squares* (WLS), mengatasi heteroskedastisitas dilakukan dengan mentransformasikan persamaan (3.1) dengan cara mengalikan persamaan tersebut dengan *inverse* dari standar deviasi *error* $\left(P^{-1}\right)$, dan hasil transformasi yang diperoleh adalah:

$$\underset{nxn}{P^{-1}}\ \underset{nx1}{y} = \underset{nxn}{P^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\beta} + \underset{nxn}{P^{-1}}\ \underset{nx1}{\varepsilon} \tag{3.16}$$

bisa juga ditulis dengan

$$\underset{nx1}{y^*} = \underset{nxk}{X^*}\ \underset{kx1}{\beta^*} + \underset{nx1}{\varepsilon^*} \tag{3.17}$$

dimana $y^* = P^{-1}y$, $X^* = P^{-1}X$, dan $\varepsilon^* = P^{-1}\varepsilon$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sekarang bisa ditunjukan bahwa unsur heteroskedastisitas sudah tidak ada pada persamaan (3.17), hal ini bisa dilakukan dengan menunjukkan bahwa variansi *error* adalah suatu konstanta sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Cov\left(\underset{nx1}{\varepsilon^*}\right) &= E\left(\underset{nx1}{\varepsilon^*}\,\underset{1xn}{\varepsilon^{*T}}\right) \\ &= E\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nx1}{\varepsilon}\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nx1}{\varepsilon}\right)^T\right) \\ &= E\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nx1}{\varepsilon}\,\underset{1xn}{\varepsilon^T}\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\right)^T\right) \end{aligned}$$

karena $\left(P^{-1}\right)^T = P^{-1}$, maka didapat

$$\begin{aligned} Cov\left(\varepsilon^*\right) &= E\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nx1}{\varepsilon}\,\underset{1xn}{\varepsilon^T}\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\right)^T\right) \\ &= E\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nx1}{\varepsilon}\,\underset{1xn}{\varepsilon^T}\,\underset{nxn}{P^{-1}}\right) \\ &= \underset{nxn}{P^{-1}}\,E\left(\underset{nx1}{\varepsilon}\,\underset{1xn}{\varepsilon^T}\right)\underset{nxn}{P^{-1}} \\ &= \underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}}\,\underset{nxn}{P^{-1}} \\ &= \underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nxn}{P}\,\underset{nxn}{P}\,\underset{nxn}{P^{-1}} \\ &= I \end{aligned}$$

karena $Cov\left(\varepsilon^*\right)$ adalah suatu konstanta, hal ini menunjukkan sudah tidak ada unsur heteroskedastisitas pada persamaan (3.17) atau dengan kata lain persamaan (3.17) bersifat homoskedastisitas.

Selain bisa ditunjukan bersifat homoskedastisitas, persamaan (3.17) juga bisa ditunjukan telah memenuhi teorema *Gauss Markov* yang lain sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Rata-rata (harapan) variabel ε^* bernilai nol.

$$\begin{aligned} E\Big(\underset{nx1}{\varepsilon^*}\Big) &= E\Big(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nxk}{X^*}\underset{kx1}{\beta^*}\Big) \\ &= E\Big(\underset{nx1}{y^*}\Big) - E\Big(\underset{nxk}{X^*}\underset{kx1}{\beta^*}\Big) \\ &= \underset{nxk}{X^*}\underset{kx1}{\beta^*} - \underset{nxk}{X^*}\underset{kx1}{\beta^*} \\ &= \underset{nx1}{0} \end{aligned}$$

2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel *error* untuk setiap observasi.

$$\begin{aligned} Cov\left(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*\right) &= E\left(\varepsilon_i^* \varepsilon_j^*\right) \\ &= E\left(P^{-1}\varepsilon_i P^{-1}\varepsilon_j\right) \\ &= P^{-1}E\left(\varepsilon_i\right)P^{-1}E\left(\varepsilon_j\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Nilai variabel (X_i^*) tetap atau nilainya independen terhadap faktor *error* (ε_i^*).

$$\begin{aligned} Cov\left(X_i^*, \varepsilon_i^*\right) &= E\left(X_i^* \varepsilon_i^*\right) \\ &= E\left(P^{-1}X_i P^{-1}\varepsilon_i\right) \\ &= P^{-1}E\left(X_i\right)P^{-1}E\left(\varepsilon_i\right) \\ &= P^{-1}E\left(X_i\right)P^{-1}0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.4 Estimasi Regresi Linier Berganda dengan Heteroskedastisitas

Untuk mengestimasi model regresi linier berganda yang memuat unsur heteroskedastisitas digunakan metode *Weighted Least Square* (WLS), yakni metode OLS yang diterapkan pada hasil trasformasi regresi yang telah dijelaskan sebelumnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.4.1 Estimasi Parameter Regresi

Untuk mendapatkan hasil estimasi parameter regresi ($\hat{\beta}^*$) pada persamaan (3.17) maka digunakan metode *least square* dengan meminimumkan jumlah kuadrat *error* (S^*), yaitu:

$$\begin{aligned}
S^* &= \sum_{I=1}^{n} \varepsilon_i^{*2} \\
&= \varepsilon_1^{*2} + \varepsilon_2^{*2} + \cdots + \varepsilon_n^{*2} \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* & \varepsilon_2^* & \cdots & \varepsilon_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \vdots \\ \varepsilon_n^* \end{bmatrix} \\
&= \underset{1xn}{\varepsilon^{*T}} \underset{nx1}{\varepsilon^*} \\
&= \left(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} \right)^T \left(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} \right) \\
&= \left(\underset{1xn}{y^{*T}} - \left(\underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} \right)^T \right) \left(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} \right) \\
&= \left(\underset{1xn}{y^{*T}} - \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^{*T}} \right) \left(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} \right) \\
&= \underset{1xn}{y^{*T}} \underset{nx1}{y^*} - \underset{1xn}{y^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} - \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{y^*} + \underset{1xk}{\beta^{*T}} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta}
\end{aligned}$$

karena $y^{*T} X^* \beta$ adalah skalar maka matriks *transpose*-nya adalah

$$\left(\underset{1xn}{y^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} \right)^T = \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{y^*} \tag{3.18}$$

sehingga diperoleh

$$S^* = \underset{1xn}{y^{*T}} \underset{nx1}{y^*} - 2 \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{y^*} + \underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} \tag{3.19}$$

Kemudian meminimumkannya dengan melakukan turunan pertama terhadap parameter regresi (β), dengan aturan penurunan skalar berikut, Misalkan z dan w adalah vector-vektor berordo $mx1$, sehingga $y = z^T w$ adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

skalar, maka $\frac{dy}{dz} = w$, $\frac{dy}{dz^T} = w^T$, $\frac{dy}{dw} = z$, dan $\frac{dy}{dw^T} = z^T$. Sehingga didapatkan hasil turunan jumlah kuadrat *error* berikut,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S^*}{\partial \beta} &= 0 - 2 \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{y^*} + \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} + \left(\underset{1xk}{\beta^T} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^T \\
&= -2 \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{y^*} + \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} + \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta} \\
&= -2 \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{y^*} + 2 \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \underset{kx1}{\beta}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dan hasil estimasi parameter β didapatkan dengan menyamakan hasil turunan jumlah kuadrat *error* dengan nol, sehingga pada saat hasil turunan jumlah kuadrat *error* disamakan dengan nol parameter β menjadi $\hat{\beta}^*$, dan diperoleh

$$\begin{aligned}
\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} &= \left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{y^*} \\
&= \left(\left(\underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^T \underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \left(\underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^T \underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nx1}{y} \\
&= \left(\underset{nxk}{X^T} \left(\underset{nxn}{P^{-1}} \right)^T \underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{nxk}{X^T} \left(\underset{nxn}{P^{-1}} \right)^T \underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nx1}{y} \\
&= \left(\underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nxn}{P^{-1}} \underset{nx1}{y} \\
&= \left(\underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{(PP)^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{(PP)^{-1}} \underset{nx1}{y} \\
&= \left(\underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{\Phi^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{\Phi^{-1}} \underset{nx1}{y}
\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

karena $\Phi = \hat{\sigma}^2\Psi$, maka

$$\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} = \left(\underset{nxk}{X^T} \left(\hat{\sigma}^2 \underset{nxn}{\Psi} \right)^{-1} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{nxk}{X^T} \left(\hat{\sigma}^2 \underset{nxn}{\Psi} \right)^{-1} \underset{nx1}{y}$$

$$= \left(\underset{nxk}{X^T} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \underset{nxn}{\Psi^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{nxk}{X^T} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \underset{nxn}{\Psi^{-1}} \underset{nx1}{y}$$

$$= \hat{\sigma}^2 \left(\underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{\Psi^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{\Psi^{-1}} \underset{nx1}{y}$$

$$= \left(\underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{\Psi^{-1}} \underset{nxk}{X} \right)^{-1} \underset{nxk}{X^T} \underset{nxn}{\Psi^{-1}} \underset{nx1}{y} \tag{3.21}$$

3.4.2 Estimasi Variansi Parameter

Dengan aplikasi WLS pada persamaan (3.17) didapat taksiran variansi parameter regresi sebagai berikut:

$$Cov\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} \right) = E\left[\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} - E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} \right) \right) \left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} - E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} \right) \right)^T \right]$$

$$= E\left[\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} - \underset{kx1}{\beta} \right) \left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*} - \underset{kx1}{\beta} \right)^T \right]$$

$$= E\left[\left(\underset{kx1}{\beta} + \left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{\varepsilon^*} - \underset{kx1}{\beta} \right) \left(\underset{kx1}{\beta} + \left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{\varepsilon^*} - \underset{kx1}{\beta} \right)^T \right]$$

$$= E\left[\left(\left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{\varepsilon^*} \right) \left(\left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{\varepsilon^*} \right)^T \right]$$

$$= E\left[\left(\left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nx1}{\varepsilon^*} \right) \left(\underset{1xn}{\varepsilon^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \right) \right]$$

$$= \left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \underset{kxn}{X^{*T}} E\left(\underset{nx1}{\varepsilon^*} \underset{1xn}{\varepsilon^{*T}} \right) \underset{kxn}{X^*} \left(\underset{kxn}{X^{*T}} \underset{nxk}{X^*} \right)^{-1} \tag{3.22}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

karena $E\left(\varepsilon^{*}\varepsilon^{*T}\right)$, maka

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^{*}}\right) &= \left(\underset{kxn}{X^{*T}}\underset{nxk}{X^{*}}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^{*T}}\underset{nxn}{I}\underset{nxk}{X^{*}}\left(\underset{kxn}{X^{*T}}\underset{nxk}{X^{*}}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^{*T}}\underset{nxk}{X^{*}}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^{*T}}\underset{nxk}{X^{*}}\left(\underset{kxn}{X^{*T}}\underset{nxk}{X^{*}}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^{*T}}\underset{nxk}{X^{*}}\right)^{-1}\underset{nxn}{I} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^{*T}}\underset{nxk}{X^{*}}\right)^{-1} \\
&= \left(\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{T}\underset{nxn}{P^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^{T}}\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\right)^{T}\underset{nxn}{P^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

karena $\left(P^{-1}\right)^{T} = P^{-1}$, maka

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^{*}}\right) &= \left(\underset{kxn}{X^{T}}\underset{nxn}{P^{-1}}\underset{nxn}{P^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^{T}}\underset{nxn}{(PP)^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^{T}}\underset{nxn}{\Phi^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^{T}}\left(\hat{\sigma}^{2}\underset{nxn}{\Psi}\right)^{-1}\underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^{T}}\frac{1}{\hat{\sigma}^{2}}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\
&= \hat{\sigma}^{2}\left(\underset{kxn}{X^{T}}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

3.4.3 Sifat-sifat Estimator WLS

Suatu estimator dikatakan baik apabila estimator tersebut menghasilkan estimasi yang bersifat *unbias* (tidak bias), efisien, dan konsisten. Untuk mengetahui apakah WLS merupakan estimator yang baik, akan ditujukan bahwa hasil estimasi WLS memenuhi sifat-sifat tersebut, yakni:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. *Unbias* (tidak bias)

Dengan $E(Y) = X\beta$ akan ditunjukan bahwa aplikasi metode WLS menghasilkan taksiran parameter ($\hat{\beta}^*$) yang tidak bias sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right) &= E\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\Psi^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\ \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\Psi^{-1}}\ \underset{nx1}{y}\right) \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\Psi^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\ \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\Psi^{-1}}\ E\left(\underset{nx1}{y}\right) \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\Psi^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1}\ \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\Psi^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\beta} \\
&= \underset{kx1}{\beta}
\end{aligned}
$$

karena bisa ditunjukan bahwa nilai ekspektasi dari taksiran parameter sama dengan parameter yang sebenarnya, maka bisa diketahui bahwa estimator WLS menghasilkan nilai estimasi yang *unbias* (tidak bias).

2. Efisien

Suatu estimator dikatakan efisien apabila estimator tersebut mempunyai variansi parameter yang kecil. Jika terdapat lebih dari satu estimator, maka estimator yang efisien adalah estimator yang mempunyai variansi parameter terkecil. Dengan persamaan (3.3) dan persamaan (3.22) bisa dibandingkan antara hasil estimator OLS dan WLS, perbandingan tersebut dirumuskan dengan

$$R(\theta_1, \theta_2) = Cov(\theta_1) - Cov(\theta_2)$$

sehingga

$$R\left(\hat{\beta}, \hat{\beta}^*\right) = Cov\left(\hat{\beta}\right) - Cov\left(\hat{\beta}^*\right) \tag{3.23}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Di lain pihak diketahui bahwa :

$$Var\left(\hat{\beta}_{heter}\right)=\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\sigma^2\underset{nxn}{\Psi}\underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}$$

dan

$$Cov\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)=\hat{\sigma}^2\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned} R\left(\hat{\beta},\hat{\beta}^*\right) &= Cov\left(\hat{\beta}\right)-Cov\left(\hat{\beta}^*\right) \\ &= \left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\sigma^2\underset{nxn}{\Psi}\underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}-\hat{\sigma}^2\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1} \\ &= \hat{\sigma}^2\left(\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxn}{\Psi}\underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}-\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\right) \\ &= \hat{\sigma}^2\underset{nxn}{A}\underset{nxn}{\Psi}\underset{nxn}{A^T} \\ &= \underset{kxn}{A}\underset{nxn}{\Phi}\underset{nxk}{A^T} \\ &= \underset{kxk}{D} \end{aligned} \tag{3.24}$$

dengan

$$A=\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}-\left(\underset{kxn}{X^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}$$

karena Φ matriks *positive definite*, maka bisa diketahui bahwa D adalah matriks *positive semidefinite*.

Dari persamaan (3.24) diketahui bahwa :

$$R\left(\hat{\beta},\hat{\beta}^*\right)\geq 0$$

hal ini menunjukkan bahwa

$$Cov\left(\hat{\beta}^*\right)\leq Cov\left(\hat{\beta}\right).$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $Cov\left(\hat{\beta}^*\right)$ nilainya lebih kecil dari $Cov\left(\hat{\beta}\right)$, hal ini menunjukkan penaksir OLS yang memperhatikan kehadiran heteroskedastisitas menjadi kurang efisien dibandingkan dengan WLS, dengan kata lain WLS lebih efisien dalam mengestimasi parameter yang memuat heteroskedastisitas pada regresi linier berganda.

3. Konsisten

Estimator dikatakan konsisten, jika hasil taksiran variansi parameter yang diperoleh semakin mendekati nilai yang sebenarnya dengan bertambahnya sampel (n), atau ditulis

$$E\left(\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2 \to 0, \text{ jika } n \to \infty$$

Sehingga diperoleh taksiran variansi parameter sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)\right)^2 &= E\left[\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-\underset{kx1}{\beta}\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-\underset{kx1}{\beta}\right)^T\right] \\
&= E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-\underset{kx1}{\beta}\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-\underset{kx1}{\beta}\right)^T \\
&= \left(E\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)-E\left(\underset{kx1}{\beta}\right)\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-\underset{kx1}{\beta}\right)^T \\
&= \left(\underset{kx1}{\beta}-\underset{kx1}{\beta}\right)\left(\underset{kx1}{\hat{\beta}^*}-\underset{kx1}{\beta}\right)^T \\
&= \underset{kx1}{0}
\end{aligned}$$

yang artinya WLS merupakan estimator yang konsisten.

Dengan terpenuhinya ketiga sifat tersebut, maka bisa ditunjukan bahwa WLS merupakan estimator yang baik atau BLUE (*Best Linear Unbias Estimator*).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.5 Koefisiensi Determinasi dan *F*-hitung

Dalam menentukan koefisiensi determinasi bisa dipergunakan jumlah kuadrat *error* berikut :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{*2} &= \underset{1xn}{\varepsilon^{*T}}\ \underset{nx1}{\varepsilon^{*}} \\
&= \left(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nx1}{\hat{y}^*}\right)^T \left(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nx1}{\hat{y}^*}\right) \\
&= \left(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nxk}{X^*}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)^T \left(\underset{nx1}{y^*} - \underset{nxk}{X^*}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right) \\
&= \left(\underset{nxn}{P^{-1}}\ \underset{nx1}{y} - \underset{nxn}{P^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)^T \left(\underset{nxn}{P^{-1}}\ \underset{nx1}{y} - \underset{nxn}{P^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right) \\
&= \left(\underset{nxn}{P^{-1}}\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)\right)^T \left(\underset{nxn}{P^{-1}}\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)\right) \\
&= \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)^T \left(\underset{nxn}{P^{-1}}\right)^T \underset{nxn}{P^{-1}}\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right) \\
&= \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right)^T \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\left(\underset{nx1}{y} - \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*}\right) \\
&= \underset{1xn}{y^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nx1}{y} - \underset{1xn}{y^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\beta} - \underset{1xk}{\beta^T}\ \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nx1}{y} + \underset{1xk}{\beta^T}\ \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\beta}
\end{aligned}
$$

karena

$$
\begin{aligned}
\underset{1xn}{y^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\ \underset{kx1}{\hat{\beta}^*} &= \underset{kxn}{y^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nx1}{y} \\
&= \underset{kxn}{y^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\left(\underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxk}{X}\right)^{-1} \underset{nxk}{X}\ \underset{kxn}{X^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nx1}{y} \\
&= \underset{1xn}{y^T}\ \underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\ \underset{nx1}{y}
\end{aligned}
$$

dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$
\begin{aligned}
\underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nxk}{X}\,\underset{kx1}{\hat{\beta}^{*}} &= \left[\left(\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y}\right]^T \underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{kxn}{X}\left(\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{kxn}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} \\
&= \left[\left(\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y}\right]^T \underset{kxn}{I}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} \\
&= \left(\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y}\right)^T\left[\left(\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\right]^T \underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} \\
&= \underset{1xn}{y^T}\left(\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\right)^T\underset{nxk}{X}\left[\left(\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\right]^T \underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y}
\end{aligned}
$$

dimana $\left(\Phi^{-1}\right)^T = \Phi^{-1}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nxk}{X}\,\underset{kx1}{\hat{\beta}^{*}} &= \underset{1xn}{y^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nxk}{X}\left[\left(\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nxk}{X}\right)^{-1}\right]^T \underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} \\
&= \underset{1xn}{y^T}\left(\underset{kxn}{X^T}\right)^{-1}\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} \\
&= \underset{1xn}{y^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y}
\end{aligned}
$$

sehingga diketahui bahwa $y^T\hat{\Phi}^{-1}X\hat{\beta}^{*} = \hat{\beta}^{*T}X^T\hat{\Phi}^{-1}X\hat{\beta}^{*}$ maka :

$$
\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{*2} = \underset{1xn}{y^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y}
$$

atau

$$
\underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} = \underset{1xn}{y^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{*2} \tag{3.25}
$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

di pihak lain

$$\underset{1xn}{y^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} = \underset{1xn}{y^T}\left(\underset{nxn}{P^{-1}}\right)^T \underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nx1}{y}$$
$$= \left(\underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nx1}{y}\right)^T \underset{nxn}{P^{-1}}\,\underset{nx1}{y}$$
$$= \underset{1xn}{y^{*T}}\,\underset{nx1}{y^*}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^{*2}$$

(3.26)

dengan demikian persamaan (3.25) menjadi :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{*2} - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{*2} = \underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^{*2} = \underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y}$$

(3.27)

Berdasarkan persamaan di atas bisa didapat koefisien determinasi (R^2) dari persamaan yang telah ditransformasikan, yaitu:

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i^* - \overline{y}^*\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^* - \overline{y}^*\right)^2\right)^{-1} \qquad (3.28)$$

dengan

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i^* - \overline{y}^*\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^{*2} - n\overline{y}^{*2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^{*2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)^2$$
$$= \underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)^2$$

(3.29)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^* - \overline{y}^*\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{*2} - n\overline{y}^{*2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^{*2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)^2$$
$$= \underset{1xn}{y^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)^2 \qquad (3.30)$$

sehingga diperoleh

$$R^2 = \left(\underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)\left(\underset{1xn}{y^T}\,\underset{nxn}{\hat{\Phi}^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)^{-1}$$
$$= \left(\underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)\left(\underset{1xn}{y^T}\,\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)^{-1} \qquad (3.31)$$
$$= \left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\,\underset{kxn}{X^T}\,\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\underset{1xn}{y^T}\,\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\,\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^*\right)^{-1}$$

Dari sini bisa dengan mudah diperoleh nilai hitung statistik F untuk persamaan yang sudah ditransformasikan, yaitu

$$F_{hitung} = \frac{ESS / n-k}{RSS / k-1}$$
$$= \frac{n-k}{k-1}\frac{ESS}{RSS}$$

dimana $TSS = ESS + RSS$, sehingga

$$F_{hitung} = \frac{n-k}{k-1}\frac{EES}{TSS - ESS}$$
$$= \frac{n-k}{k-1}\frac{ESS/TSS}{1-ESS/TSS}$$

sedangkan $R^2 = \dfrac{EES}{TSS}$, maka

$$F_{hitung} = \frac{n-k}{k-1}\frac{R^2}{1-R^2} \qquad (3.32)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.31) ke dalam persamaan (3.32) bisa didapatkan *F*-hitung untuk persamaan (3.17) sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
F_{hitung} &= \frac{n-k}{k-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i^* - \overline{y}^*)(\sum_{i=1}^{n} y_i^* - \sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i^*) \\
&= \frac{n-k}{k-1}\frac{R^2}{1-R^2} \\
&= \frac{n-k}{k-1}\frac{\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^*\right)\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\underset{1xn}{y^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^*\right)^{-1}}{1-\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\underset{1xk}{\hat{\beta}^{*T}}\underset{kxn}{X^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^*\right)\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\underset{1xn}{y^T}\underset{nxn}{\Psi^{-1}}\underset{nx1}{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^*\right)^{-1}}
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

3.6 Kajian Matematika dalam Al-Qur'an

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, ada beberapa ayat Al-Qur'an yang menyinggung penelitian ini, yakni:

a. Surat Ash-Shaffat ayat 147 menginspirasi estimasi.

Surat Ash-Shaffat ayat 147 menceritakan tentang kisah Nabi Yunus yang keluar dari kaumnya ketika akan disiksa oleh kaumnya sebelum mendapat perintah dari Allah SWT untuk Hijrah. Kemudian Nabi Yunus mendapatkan balasan dari Allah SWT. Setelah itu, Nabi Yunus diutus kembali kepada kaumnya. "Kami mengutusnya" yakni menugaskannya lagi "kepada seratus ribu orang atau lebih" jika kamu melihat mereka sekali pandang (Shihab, 2003: 83).

Pada lafadz الف أويزيدون yang artinya "seratus atau lebih" merupakan contoh suatu taksiran. hal ini seperti seseorang ditanya berapa banyak mahasisiwa UIN yang ikut seminar, dan orang tersebut menjawab 300 atau lebih, jawaban tersebut merupakan dugaan menurut pandangannya, karena orang tersebut tidak bisa memberikan jawaban yang pasti. Sama halnya dengan الف أويزيدون pada

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

surat Ash Shaffat ayat 147 di atas, jika seseorang menanyakan berapa banyak umat Nabi Yunus secara pasti, maka orang tersebut hanya dapat menduga banyaknya karena ayat tersebut tidak ada kejelasan dalam menerangkan banyak umat Nabi Yunus. Terdapat berbagai pendapat dalam menafsirkan الف أويزيدون, antara lain sebagai berikut:

1. Shihab dalam Tafsir al-Misbah (2003: 84)

   Kata أو yang artinya "atau" pada kalimat أو يردون , lebih ditafsirkan oleh ulama dengan arti "bahkan", ada juga yang menafsirkan "dan". Jika diartikan "atau", maka ayat ini seperti menyatakan mereka sebanyak seratus ribu atau lebih. Jika dipamahaminya dalam arti "dan" atau "bahkan", maka bisa diartiakan beliau diutus kepada dua kelompok, yakni seratus ribu orang adalah orang-orang Yahudi penduduk negeri Nainawa, yang ketika itu berada dalam tawanan kerajaan Asyur, sedang yang lebih adalah selain orang Yahudi yang bermukim juga dinegeri itu.

2. Hamka dalam Tafsir al-Ahzar (1981:194)

   Tafsir ini menceritakan bahwa setelah Nabi Yunus sehat dan kuat kembali, dia diperintahkan Tuhan melaksanakan perintah, yaitu mendatangi dan melakukan dakwah kepada kaumnya di negeri Ninive ini, yang berjumlah seratus ribu orang atau lebih, artinya lebih dari seratus ribu kaum, dan tidak mungkin kuran dari itu.

3. Al-Mahally dan As-Syuyuthi, dalam tafsir Jalalain (1990: 1946)

Menjelaskan bahwa وأرسلنه (Dan kami utus dia) kepada kaum Bunainawiy إلى مائة ألف (kepada seratus ribu orang) bahkan أويزيدون (atau lebih

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dari itu) yakni lebihnya dua puluh atau tiga puluh atau tujuh puluh ribu orang. Para ulama memperkirakan jumlah umat Nabi Yunus dengan jumlah yang berbeda-beda, meskipun demikian tidak ada yang mengatakan kurang dari seratus ribu orang. Dari ketiga penafsiran di atas dapat disimpulkan bahwa terdapat suatu penggunaan istilah pendugaan pada surat Ash Shaffat ayat 147. Dari penjelasan di atas telah dibuktikan bahwa Al-Quran tidak hanya berbicara tentang ilmu-ilmu agama saja, akan tetapi juga berbicara tentang ilmu statistik. Namun, dalam Al-Quran konsep-konsep ilmu statistik tidak disajikan secara langsung, akan tetapi berupa pengetahuan yang membutuhkan penafsiran secara mendalam.

b. Surat Al-An'am ayat 152 memberikan inspirasi untuk mendeteksi adanya heteroskedastisitas.

Heteroskedastisitas merupakan salah satu masalah yang menghambat tercapainya hasil penelitian yang valid, sehingga heteroskedastisitas harus diatasi, hal ini disinggung dalam surat Al-An'am ayat 152. Dalam surat tersebut lafadz وأنّ هذا صرطى مستقيما فاتبعوه yang artinya "Dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalanKu yang lurus" maksudnya adalah Allah memerintahkan pada manusia untuk tetap dijalan lurus. Dalam Lubbabut Tafsiir Min Ibnu Katsiir (1994: 228-329) ada berbagai pendapat dalam menafsirkan kata صرطى مستقيما antara lain sebagai berikut:

1. Ibnu Mas'ud pernah ditanya oleh seseorang "Apakah yang dimaksud *ash-Shiraathul Mustaqiim* itu?", beliau menjawab "Muhammad SAW meninggalkan kita di dekatnya (*ash-Shiraathul Mustaqiim*) sedang ujungnya berada di surga, di sebelah kanan dan kirinya terdapat kuda, dan disana ada

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

beberapa orang yang memanggil siapa saja yang melewati mereka. Barang siapa yang memilih kuda tersebut, maka dia akan sampai di Neraka. Dan siapa yang memilih *ash-Shiraathul Mustaqiim* akan sampai di Surga." setelah itu Ibnu Mas'ud membaca surat Al-An'am ayat 152.

2. Imam Ahmad mengatakan dari An-Nawwas bin Sam'an, dari Rosulullah SAW, beliau pernah bersabda: "Allah telah membuat perumpamaan *ash-Shiraathul Mustaqiim* yang dikedua sisinya terdapat pagar, yang masing-masing memiliki beberapa pintu terbuka, dan pada pintu itu terdapat tabir yang terurai. Pada pintu *shirath* terdapat seorang penyeru yang berseru, "Wahai sekalian manusia, masuklah semuanya ke *ash-Shiraathul Mustaqiim* dan janganlah kalian berpecah-belah". Dan ada satu lagi penyeru yang memanggil dari atas *shirath* dengan seruan, "Celakalah engkau, jangan engkau membukanya, karena jika engkau membukanya maka engkau akan terperosok ke dalamnya". Maka *shirath* adalah Islam, kedua pagar itu adalah hukum-hukum Allah. Adapapun penyeru yang berada di *shirath* adalah Kitabullah (Al-Qur'an), dan penyeru yang berseru dari atas *shirath* adalah penasehat Allah yang berada di hati setiap orang Muslim.

Dalam penelitian ini, kata صرطى مستقيما yang artiya "jalan lurus" ditafsirkan sebagai suatu kebenaran, sedangkan kebenaran pada regresi linier berganda tercapai bila model tersebut bersifat BLUE. Untuk mencapai sifat BLUE harus dipenuhi beberapa asumsi dan salah satu asumsi yang harus dipenuhi adalah homoskesdastisitas, yakni variansi *error* konstan. Sedangkan pada kalimat ولاتتّعوْا اتسبل فتفرّق بكم عن سبله kata سبله pada akhir lafadz ini secara umum dapat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dipahami bermakna serupa walaupun tidak sama dengan صرطى yang artinya *"*jalan-Ku*"* pada awal ayat, perbedaan antara dua kata yang hampir sama tersebut adalah صرطى dimaknai sebagai jalan yang luas serta selalu benar, sedangkan سبل adalah jalan kecil atau lorong, sehingga ولاتتّعوْا اتسبل فتفرّق بكم عن سبله yang artinya "dan jangan kalian mengikuti jalan yang membuat jauh dari jalan-jalan-Nya*"* maksudnya adalah larangan untuk mengikuti jalan yang lain (bukan jalan Allah). Apabila "jalan lurus (kebenaran)" pada model diartikan tercapainya sifat BLUE, maka "jalan yang lain" pada maksud kalimat kedua bisa diartikan sebagai tidak tercapainya sifat BLUE, dengan kata lain unsur heteroskedastisitas termasuk dalam "jalan yang lain". Jadi pada regresi linier berganda heteroskedastisitas harus diatasi agar tercapai suatu kebenaran.

c. Surat Ar-Rad ayat 11 memberikan inspirasi menggunakan WLS untuk mengatasi heteroskedastisitas.

Dalam tafsir Al-Mishbah (2003: 555-556) diterangkan bahwa Ar-Rad ayat 11 berbicara tentang suatu perubahan, dan ada ayat lain yang memiliki konteks yang hampir sama dengan surat tersebut, yakni surat An-Anfal ayat 53:

ذَٰلِكَ بِأَنَّ ٱللَّهَ لَمۡ يَكُ مُغَيِّرًا نِّعۡمَةً أَنۡعَمَهَا عَلَىٰ قَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡ

Artinya:
yang demikian itu adalah karena Sesungguhnya Allah sekali-kali tidak akan meubah sesuatu nikmat yang telah dianugerahkan-Nya kepada suatu kaum, hingga kaum itu merubah apa-apa yang ada pada diri mereka sendiri.(An-Anfal: 53)

kedua ayat tersebut membicarakan tentang suatu perubahan. Pada An-Anfal ayat 53 berbicara tentang perubahan suatu nikmat menuju ke niqmat (bencana), dalam

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lubaabut Tafsir (1994: 65-66) juga menafsirkan ayat ini dengan tafsiran yang sama, tafsiran ini diperkuat dengan lafadz كدأب ءال فرعون "(keadaan mereka) serupa dengan keadaan Fir'aun dan pengikut-pengikutnya" pada ayat berikutanya (An-Anfal ayat 54), hal ini menjelaskan bahwa perubahan dari nikmat menuju bencana tersebut seperti pada saat Allah mencabut nikmat yang dianugrakan kepada Fir'aun dan pengikutnya karena dosa-dosa mereka, yakni mendustakan ayat-ayat Allah, dalam tafsir Adhwa'ul bayan juga memberikan tafsiran yang sama dengan kedua tafsiran tersebut. Sedangkan pada Ar-Rad ayat 11 yang menggunakan kata ما bermakna lebih luas, yakni keadaan apapun, baik nikmat atau suatu yang positif menuju ke niqmat (bencana) ataupun sebalikanya.

Pada pembahasan ini, "keadaan" pada Ar-Rad ayat 11 ditafsirkan dengan tafsiran yang kedua dari tafsir Al-Mishbah , yakni perubahan dari negatif menuju ke positif, sehingga lafadz إن الله لا يغيّر ما بقوم yang artinya "Sesungguhnya Allah tidak merubah Keadaan sesuatu kaum", kata ما yang artinya "keadaan" diartikan sebagai kondisi bermasalah, sedangkan dalam model regresi linier berganda kondisi bermasalah berarti tidak tercapainya sifat BLUE atau tidak terpenuhinya asumsi. Heteroskedastisitas adalah adalah sifat yang menyebabkan tidak tercapainya sifat BLUE dalam regresi linier berganda, ini berarti heteroskedastisitas merupakan masalah dalam regresi linier berganda. Dan pada lafadz حتّى يغيّروْا ما بأنفسهم yang artinya "sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri", kata يغيّروْا yang artinya "merubah" yang subyeknya adalah kaum diartikan sebagai usaha untuk mengatasi ما atau keadaan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang bermasalah. Bila heteroskedastisitas merupakan sebuah masalah maka harus diatasi. Mengatasi unsur heteroskedastisitas bisa dilakukan dengan metode *Weighted Least Square (WLS)*. Jadi *Weighted Least Square (WLS)* adalah upaya "merubah keadaan".

3.7 Aplikasi Data

Data yang dipakai dalam penelitian ini adalah data rincian dari 40 mobil yang memuat jarak tempuh mobil yang didukung oleh satu gallon bahan bakar, kecepatan tertinggi mobil, tenaga kuda mesin mobil, dan berat mobil, data tersebut terlampir (Lampiran 1).

Di sini akan diteliti ketergantungan jarak tempuh sebuah mobil yang didukung oleh satu gallon bahan bakar terhadap kecepatan tertinggi mobil, tenaga kuda mesin mobil, dan berat mobil. Dengan memisalkan variabel-variabel sebagai berikut:

y : jarak tempuh sebuah mobil yang didukung oleh satu gallon bahan bakar

x_1 : kecepatan tertinggi mobil

x_2 : tenaga kuda mesin mobil

x_3 : berat mobil

3.7.1 Analisis Korelasi pada Data

Analisis korelasi bertujuan untuk mengetahui derajat hubungan dan kontribusi variabel bebas (independent) dengan variabel terikat (dependent). Uji ini dilakukan dengan cara membandingkan t-hitung untuk korelasi antara setiap variabel bebas dan variabel terikat dan t-tabel dengan derajat kebebasan $n-2$, dengan formula t-hitung

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$t_{stat} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

dimana r merupakan merupakan koefisiensi korelasi. Untuk menghitung koefisiensi korelasi antara A dan B bisa didapatkan dengan rumus

$$r_{AB} = \frac{n\sum AB - \sum A \sum B}{\sqrt{n\sum A^2 - \left(\sum B\right)^2}\sqrt{n\sum B^2 - \left(\sum B\right)^2}}$$

Dalam uji dua sisi pada tingkat kesalahan α, suatu variabel bebas dikatakan berkorelasi terhadap variabel terikat apabila *t*-hitung untuk korelasi antara variabel terikat dengan variabel bebas tersebut lebih besar dibandingkan *t*-tabel pada tingkat kesalahan $\alpha/2$ ($t_{tabel} < t_{stat}$) atau lebih kecil dari nilai negatif *t*-tabel tersebut ($t_{stat} < -t_{tabel}$). Dalam uji korelasi ini digunakan hipotesis berikut:

$H_0 : r = 0$ (tidak ada korelasi)

$H_1 : r \neq 0$ (ada korelasi)

Untuk mendapatkatkan korelasi antara variabel dari data di atas digunakan *Eviews 3* dengan hasil sebagai berikut:

Tabel 1 : Korelasi antara variabel

	y	x_1	x_2	x_3
y	1	-0.644314	-0.784685	-0.759788
x_1	-0.644314	1	0.925278	0.443414
x_2	-0.784685	0.925278	1	0.740128
x_3	-0.759788	0.443414	0.740128	1

Sumber: Analisis Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

di pihak lain dengan derajat kebebasan

$$
\begin{aligned}
df &= n-2 \\
&= 38
\end{aligned}
$$

dan tingkat kesalahan $\alpha = 5\%$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} &= \frac{0.05}{2} \\
&= 0.025
\end{aligned}
$$

didapatkan t-tabel berikut:

$$
\begin{aligned}
t_{tabel(0.025;38)} &= 2.0357 \\
-t_{tabel(0.025;38)} &= -2.0357
\end{aligned}
$$

Dengan formula

$$
\mathrm{t}_{stat} = \frac{\mathrm{r}}{\sqrt{\frac{1-\mathrm{r}^2}{\mathrm{n}-2}}}
$$

bisa didapatkan t-hitung untuk korelasi antara setiap variabel bebas dan variabel terikat sebagai berikut:

t-hitung untuk korelasi antara x_1 dan y

$$
\begin{aligned}
\mathrm{t}_{stat(y,x_1)} &= \frac{-0.644314}{\sqrt{\frac{1-(-0.644314)^2}{40-2}}} \\
&= -5.19354
\end{aligned}
$$

t-hitung untuk korelasi antara x_2 dan y

$$
\begin{aligned}
\mathrm{t}_{stat(y,x_2)} &= \frac{-0.78469}{\sqrt{\frac{1-(-0.78469)^2}{40-2}}} \quad \text{, dan} \\
&= -7.80314
\end{aligned}
$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

t-hitung untuk korelasi antara x_3 dan y

$$\begin{aligned} t_{stat(y,x_3)} &= \frac{-0.75979}{\sqrt{\dfrac{1-(-0.75979)^2}{40-2}}} \\ &= -7.20372 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan perbandingan antara t-hitung dan t-tabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned} t_{stat(y,x_1)} &< -t_{tabel(0.025;38)} \\ -5.19354 &< -2.0357 \end{aligned}$$

yang artinya menolak H_0 dan menerima H_1, sehingga bisa disimpulkan bahwa ada korelasi antara x_1 dan y,

$$\begin{aligned} t_{stat(y,x_2)} &< -t_{tabel(0.025;38)} \\ -7.80314 &< -2.0357 \end{aligned}$$

yang artinya menolak H_0 dan menerima H_1, sehingga bisa disimpulkan bahwa ada korelasi antara x_2 dan y, dan

$$\begin{aligned} t_{stat(y,x_3)} &< -t_{tabel(0.025;38)} \\ -7.20372 &< -2.0357 \end{aligned}$$

yang artinya menolak H_0 dan menerima H_1, sehingga bisa disimpulkan bahwa ada korelasi antara x_3 dan y.

3.7.2 Analisis Regresi pada Data

Analisis ini digunakan untuk mengetahui pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen. Dalam penelitian ini akan menggunakan model regresi berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bisa ditulis dalam notasi matriks seperti berikut:

$$\underset{40x1}{y} = \underset{40x3}{X}\,\underset{3x1}{\beta} + \underset{40x1}{\varepsilon}$$

sehingga didapatkan regresi dalam notasi matriks untuk data diatas seperti berikut:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 65.4 \\ 56 \\ \vdots \\ 32.3 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 96 & 49 & 17.5 \\ 1 & 97 & 55 & 20 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 120 & 130 & 30 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

dengan meminimumkan jumlah kuadrat *error* akan didapatkan estimasi koefisiensi

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & \sum x_1 & \sum x_2 & \sum x_3 \\ \sum x_1 & \sum x_1^{\ 2} & \sum x_1 x_2 & \sum x_1 x_3 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^{\ 2} & \sum x_2 x_3 \\ \sum x_3 & \sum x_1 x_3 & \sum x_2 x_3 & \sum x_3^{\ 2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \\ \sum x_3 y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 183.691 \\ -1.098 \\ 0.302 \\ -2.097 \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 65.4 \\ 56 \\ \vdots \\ 32.3 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 96 & 49 & 17.5 \\ 1 & 97 & 55 & 20 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 120 & 130 & 30 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} 183.691 \\ -1.098 \\ 0.302 \\ -2.097 \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} 9.019 \\ 4.143 \\ \vdots \\ 3.971 \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

apabila diambil salah satu observasi, yakni observasi pertana, maka menghasilkan regresi sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \beta_3 x_{31} + \varepsilon_1$$
$$65.4 = 183.691 + (-1.098)96 + (0.302)49 + (-2.097)17.5 + 9.019$$

Analisis regresi untuk data tersebut juga bisa menggunakan *Eviews 3* dengan hasil sebagai sebagai berikut:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/09/11 Time: 20:30
Sample: 1 40
Included observations: 40

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	184.6990	83.84481	2.202867	0.0341
X1	-1.110264	0.897990	-1.236388	0.2243
X2	0.307384	0.420711	0.730631	0.4697
X3	-2.103176	0.996544	-2.110470	0.0418

R-squared	0.699366	Mean dependent var	41.63000
Adjusted R-squared	0.674313	S.D. dependent var	7.484761
S.E. of regression	4.271474	Akaike info criterion	5.836435
Sum squared resid	656.8377	Schwarz criterion	6.005323
Log likelihood	-112.7287	F-statistic	27.91568
Durbin-Watson stat	1.334241	Prob(F-statistic)	0.000000

Gambar 3.1: Output *Eviews 3* untuk Regresi Linier Berganda
(Sumber: Analisis penulis)

Agar *output* untuk regresi linier berganda tersebut menjadi lebih informatif, output tersebut disusun secara singkat sebagai berikut:

$$y_i = 184.6990 - 1.110264x_{1i} + 0.307384x_{2i} - 2.103176x_{3i}$$
SE : (83.84481) (0.897990) (0.420711) (0.996544)
t_{stat} : (2.202867) (-1.236388) (0.730631) (-2.110470)
$R^2 = 0.699366$
$F_{stat} = 27.91568$
$n = 40$

dan dari hasil tersebut didapatkan hasil analisis sebagai berikut:

a Uji Ketepatan Parameter Estimasi

Untuk menguji ketepatan parameter estimasi digunakan Uji-*t*, uji ini bertujuan untuk mengetahui variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap variabel terikat. Dalam uji dua sisi pada tingkat kesalahan α , suatu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

variabel bebas dikatakan berpengaruh signifikan terhadap variabel terikat apabila *t*-hitung untuk koofesien regresi tersebut lebih besar dibandingkan *t*-tabel pada tingkat kesalahan $\alpha/2$ ($t_{tabel} < t_{stat}$) atau lebih kecil dari nilai negatif *t*-tabel tersebut ($t_{stat} < -t_{tabel}$), dengan formula *t*-hitung

$$t_{stat} = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}}$$

dimana β adalah koefisiensi regresi dan $S_{\hat{\beta}}$ adalah standar deviasi *error* dari $\hat{\beta}$.

Dari hasil *Eviews 3* di atas bisa ditunjukan

$$t_{stat}(\beta_1) = -1.236388$$
$$t_{stat}(\beta_2) = 0.730631$$
$$t_{stat}(\beta_3) = -2.110470$$

di pihak lain diketahui bahwa t_{tabel} untuk $df = 37$ dengan tingkat kesalahan $\alpha = 5\%$, sehingga

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

adalah sebagai berikut:

$$t_{tabel(0.025;37)} = 0.84265$$
$$-t_{tabel(0.025;37)} = -0.84265$$

Uji signifikansi pada variabel bebas x_1 menggunakan hipotesis berikut:

$H_0 : \hat{\beta}_1 = 0$ (x_1 tidak berpengaruh signifikan terhadap y)

$H_1 : \hat{\beta}_1 \neq 0$ (x_1 berpengaruh signifikan terhadap y)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan didapatkan perbandingan antara *t*-hitung dan *t*-tabel untuk $\hat{\beta}_1$ berikut:

$$t_{stat}(\hat{\beta}_1) < -t_{tabel(0.025;37)}$$

yang artinya menolak H_0 dan menerima H_1, sehingga bisa disimpulkan bahwa x_1 berpengaruh secara signifikan terhadap y.

Uji signifikansi pada variabel bebas x_2 menggunakan hipotesis berikut:

$H_0 : \hat{\beta}_2 = 0$ (x_2 tidak berpengaruh signifikan terhadap y)

$H_1 : \hat{\beta}_2 \neq 0$ (x_2 berpengaruh signifikan terhadap y)

dan didapatkan perbandingan antara *t*-hitung dan *t*-tabel untuk $\hat{\beta}_2$ berikut:

$$t_{stat}(\hat{\beta}_2) < t_{tabel(0.025;37)}$$

yang artinya menerima H_0 dan menolak H_1, sehingga bisa disimpulkan bahwa x_2 tidak berpengaruh secara signifikan terhadap y.

Uji signifikansi pada variabel bebas x_3 menggunakan hipotesis berikut:

$H_0 : \hat{\beta}_3 = 0$ (x_3 tidak berpengaruh signifikan terhadap y)

$H_1 : \hat{\beta}_3 \neq 0$ (x_3 berpengaruh signifikan terhadap y)

dan didapatkan perbandingan antara *t*-hitung dan *t*-tabel untuk $\hat{\beta}_3$ berikut:

$$t_{stat}(\hat{\beta}_3) < -t_{tabel(0.025;37)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang artinya menolak H_0 dan menerima H_1, sehingga bisa disimpulkan bahwa x_3 berpengaruh secara signifikan terhadap y.

Dari hasil uji di atas didapat kesimpulan bahwa regresi di atas memiliki dua variabel bebas yang berpengaruh secara signifikan terhadap perubahan variabel terikat, yakni x_1 dan x_3, sedangkan variabel yang lain (x_2) tidak berpengaruh segnifikan terhadap variabel terikat (y).

b Uji Ketepatan Regresi

Uji ketepatan model bertujuan untuk mengetahui apakah regresi sudah tepat, hal ini bisa ditunjukan dengan melakukan tiga uji, yaitu:

1. Koefisiensi Determinasi

Koefisiensi determinasi (R^2) di atas berguna untuk mengetahui besarnya sumbangan pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikat yang dinyatakan dalam persentase. output *Eviews 3* di atas memberikan koefisiensi determinasi sebagai berikut:

$$R^2 = 0.699366$$

hal ini menunjukkan bahwa variasi dari perubahan variabel terikat (y) mampu dijelaskan oleh variabel bebas (x_1, x_2 dan x_3) secara bersama-sama sebesar 69.9366%, sedangkan sisanya sebesar 30.0634% dijelaskan oleh faktor-faktor lain yang tidak termasuk dalam rergesi.

2. Uji signifikansi keseluruhan model

Untuk menguji signifikansi keseluruhan model digunakan Uji-*F*, uji ini bertujuan untuk mengetahui apakah variabel bebas secara bersama-sama

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap perubahan variabel terikat. Dalam uji dua sisi pada tingkat kesalahan α, suatu variabel bebas dikatakan berpengaruh yang signifikan secara bersama terhadap perubahan variabel terikat apabila F-hitung untuk regresi tersebut lebih besar dibandingkan F-tabel pada tingkat kesalahan $\alpha/2$ ($F_{stat} > F_{tabel}$) atau lebih kecil dari nilai negatif F-tabel tersebut ($F_{stat} < -F_{tabel}$). Uji signifikansi keseluruhan model menggunakan hipotesis berikut:

$H_0 : \Gamma_{x_1, x_2, x_3 - y} = 0$ (x_1, x_2, dan x_3 secara bersama tidak berpengaruh signifikan terhadap y)

$H_1 : \Gamma_{x_1, x_2, x_3 - y} \neq 0$ (x_1, x_2, dan x_3 secara bersama berpengaruh signifikan terhadap y)

dari hasil *Eviews 3* di atas bisa ditunjukkan

$$F_{stat} = 27.91568$$

dipihak lain diketahui bahwa F-tabel untuk derajat kebebasan pembilang 3 dan derajat kebebasan penyebut 37 dengan tingkat kesalahan $\alpha = 5\%$, sehingga

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

adalah berikut:

$$F_{tabel(0.025;3;37)} = 4.2995$$

sehingga bisa didapatkan perbandingan antara F-hitung dan F-tabel sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$F_{stat} > F_{tabel}$$

yang artinya menolak H_0 dan menerima H_1, dan dapat disimpulkan bahwa variabel bebas dari regresi (x_1, x_2 dan x_3) berpengaruh yang signifikan secara bersama terhadap perubahan variabel terikat (y).

3.7.3 Uji Asumsi Klasik pada *Error* Regresi Data

Dalam uji asumsi klasik data akan diuji dengan beberapa uji, yakni uji normalitas, uji linieritas, uji multikolinieritas, uji heteroskedastisitas, dan uji autokolinieritas. Hasil uji-uji tersebut adalah sebagai berikut:

1. Uji Normalitas

Dalam suatu regresi *error* harus berdistribusi nomal, hal ini untuk memenuhi asumsi *zero mean* ($E(\varepsilon)=0$), sehingga variabel terikat juga normal. Uji normalitas *error* dalam penelitian ini menggunakan *Jarque-Berra Test*, dengan formula *Jarque-Berra* (JB) berikut :

$$JB = n\left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right]$$

dimana S adalah *skewness* (kecondongan) dan K adalah *kurtosis* (keruncingan). *Skewness* bisa didapatkan dari hasil bagi momen ketiga rata-rata bengan pangkat tiga dari standar deviasi, sedangkan *kurtosis* bisa didapatkan dari hasil bagi momen keempat rata-rata dengan kuadrat dari momen kedua, sehingga bisa dirumuskan sebagai berikut:

$$S = \frac{E\left(\varepsilon - E(\varepsilon)\right)^3}{\sigma^3}$$

dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

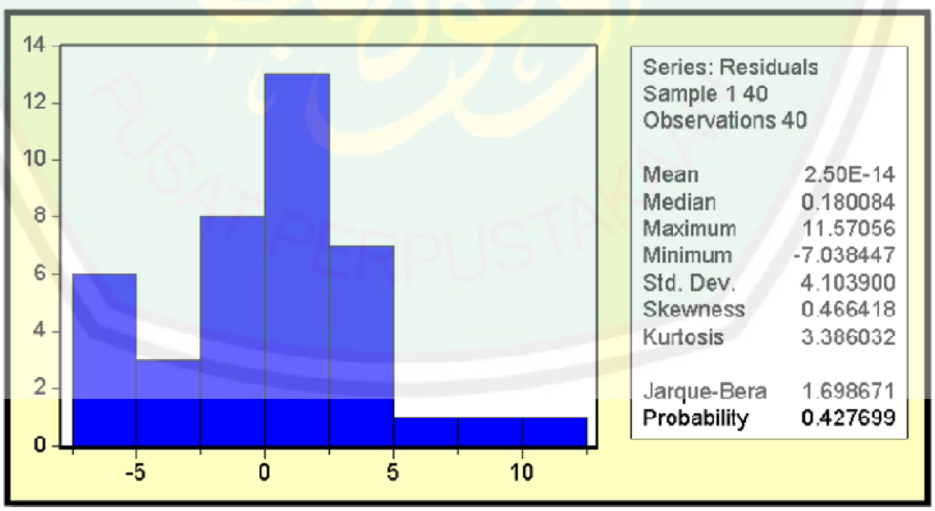
$$K = \frac{E\left(\varepsilon - E\left(\varepsilon\right)\right)^4}{\left[E\left(\varepsilon - E\left(\varepsilon\right)\right)^2\right]^2}.$$

Uji JB dilakukan dengan cara membandingkan hasil hitung *Jarque-Berra* (JB) dengan tabel *Chi-Square*. Apabila *Jarque-Berra* lebih besar dibandingkan nilai tabel *Chi-Square* ($JB > \chi^2_{df}$), maka data yang diuji tidak normal, dan apabila sebaliknya ($JB < \chi^2_{df}$), maka data yang diuji termasuk dalam kelas distribusi normal. Dalam uji normalitas data akan digunakan hipotesis berikut:

$H_0 : \mu = 0$ (normal)

$H_1 : \mu \neq 0$ (tidak normal)

Dalam uji ini digunakan *Eviews 3* untuk membuat histogram data. diperoleh hasil sebagaimana gambar di bawah ini



Gambar 3.2: Output *Eviews 3* Histogram untuk Uji Normalitas
(Sumber: Analisis penulis)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari perhitungan *Eviews 3*, dengan $n = 40$ diperoleh hasil berikut ini:

$$JB = 1.698671$$

dan

$$\chi_3^2 = 7.81473$$

sehingga didapatkan perbandingan sebagai berikut:

$$JB < \chi_{df}^2$$

yang artinya menerima H_0 dan menolak H_1, sehingga bisa disimpulkan bahwa data distribusi normal.

2. Uji Linieritas

Uji linieritas dilakukan dengan cara membandingkan F-hitung dengan F-tabel. Apabila F-hitung lebih besar dibandingkan F-tabel $(F_{stat} > F_{tabel})$, maka data yang diuji termasuk dalam data linier, dan apabila sebaliknya $(F_{stat} < F_{tabel})$, maka data yang diuji termasuk dalam data tidak linier.

$$F_{stat} = \frac{n-k}{k-1}\frac{R^2}{1-R^2}$$

dengan R^2 adalah koefisiensi determinasi, dan

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam uji linieritas pada data dipergunakan *Eviews 3* dengan hasil sebagai berikut:

Ramsey RESET Test:			
F-statistic	9.304708	Probability	0.004339
Log likelihood ratio	9.429716	Probability	0.002135

Test Equation:
Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/09/11 Time: 20:31
Sample: 1 40
Included observations: 40

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-738.9194	312.0799	-2.367725	0.0236
X1	5.962376	2.455860	2.427816	0.0205
X2	-2.075273	0.868301	-2.390038	0.0224
X3	9.448832	3.892176	2.427648	0.0205
FITTED^2	0.051658	0.016935	3.050362	0.0043

R-squared	0.762504	Mean dependent var	41.63000
Adjusted R-squared	0.735362	S.D. dependent var	7.484761
S.E. of regression	3.850385	Akaike info criterion	5.650692
Sum squared resid	518.8912	Schwarz criterion	5.861802
Log likelihood	-108.0138	F-statistic	28.09277
Durbin-Watson stat	1.570450	Prob(F-statistic)	0.000000

Gambar 3.3: Output *Eviews 3* untuk Uji Linieritas
(Sumber: Analisis penulis)

Dari pengujian linieritas di atas, dihasilkan nilai *F*-hitung berikut :

$$F_{stat} = 28.09277$$

dipihak lain diketahui bahwa *F*-tabel untuk derajat kebebasan pembilang 4 dan derajat kebebasan penyebut 37 dengan tingkat kesalahan $\alpha = 5\%$ adalah berikut:

$$F_{tabel(0.05;3;37)} = 8.599$$

sehingga didapatkan perbandingan antara *F*-hitung dan *F*-tabel sebagai berikut:

$$F_{stat} > F_{tabel}$$

dari sini bisa disimpulkan bahwa data linier.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Uji Multikolinieritas

Uji Multikolinieritas dilakukan dengan cara melakukan uji korelasi antar variabel bebas, hal ini dilakukan dengan meregresi setiap variabel bebas dan dengan menggunakan *tolerance* (TOL) dan *Varians Infloating Factor* (VIF) dari regresi tersebut bisa diketahui ada tidaknya multikolinieritas, dimana *tolerance* dan *Varians Infloating Factor* didefinisikan dengan

$$TOL = 1 - R^2$$

dan

$$VIF = \frac{1}{TOL}$$

Apabila dalam uji tersebut didapatkan *tolerance* lebih kecil 0,10 dan VIF lebih besar dari 10 maka terjadi multikolinieritas. Hasil uji multikolinieritas dari setiap variabel bebas dari data adalah sebagai berikut:

a. Regresi variabel bebas x_1 terhadap variabel bebas yang lain.

Model yang dipergunakan dalam hal ini adalah:

$$x_{1i} = \alpha_1 x_{2i} + \alpha_2 x_{3i}$$

dengan menggunakan *Eviews 3* didapatkan hasil sebagai sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dependent Variable: X1				
Method: Least Squares				
Date: 07/09/11 Time: 20:33				
Sample: 1 40				
Included observations: 40				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X2	0.261804	0.157715	1.659983	0.1051
X3	3.409921	0.536246	6.358872	0.0000
R-squared	0.552533	Mean dependent var		105.4250
Adjusted R-squared	0.552533	S.D. dependent var		6.221911
S.E. of regression	11.97624	Akaike info criterion		7.852433
Sum squared resid	5450.350	Schwarz criterion		7.936877
Log likelihood	-155.0487	Durbin-Watson stat		0.192225

Gambar 3.4: Output *Eviews 3* untuk Uji Multikolinieritas pada x_1
(Sumber: Analisis penulis)

hasil output di atas memberikan koefisiensi determinasi berikut

$$R^2 = 0.552533$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned} TOL &= 1 - R^2 \\ &= 1 - 0.552533 \\ &= 0.447466 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} VIF &= \frac{1}{TOL} \\ &= \frac{1}{0.447466} \\ &= 2.234805 \end{aligned}$$

b. Regresi variabel bebas x_2 terhadap variabel bebas yang lain.

Model yang dipergunakan dalam hal ini adalah:

$$x_{2i} = \delta_1 x_{1i} + \delta_2 x_{3i}$$

dengan menggunakan *Eviews 3* didapatkan hasil sebagai sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dependent Variable: X2				
Method: Least Squares				
Date: 07/09/11 Time: 20:34				
Sample: 1 40				
Included observations: 40				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	0.258253	0.155575	1.659983	0.1051
X3	2.256357	0.671952	3.357914	0.0018
R-squared	0.560030	Mean dependent var		81.27500
Adjusted R-squared	0.548452	S.D. dependent var		17.70121
S.E. of regression	11.89473	Akaike info criterion		7.838775
Sum squared resid	5376.418	Schwarz criterion		7.923219
Log likelihood	-154.7755	F-statistic		48.36959
Durbin-Watson stat	1.515964	Prob(F-statistic)		0.000000

Gambar 3.5: Output *Eviews 3* untuk Uji Multikolinieritas pada x_2
(Sumber: Analisis penulis)

hasil output di atas memberikan koefisiensi determinasi berikut

$$R^2 = 0.560030$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned} TOL &= 1 - R^2 \\ &= 1 - 0.560030 \\ &= 0.43997 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} VIF &= \frac{1}{TOL} \\ &= \frac{1}{0.43997} \\ &= 2.272882 \end{aligned}$$

c. Regresi variabel bebas x_3 terhadap variabel bebas yang lain.

Model yang dipergunakan dalam hal ini adalah:

$$x_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dengan menggunakan *Eviews 3* didapatkan hasil sebagai sebagai berikut:

Dependent Variable: X3
Method: Least Squares
Date: 07/09/11 Time: 20:34
Sample: 1 40
Included observations: 40

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	0.151184	0.023775	6.358872	0.0000
X2	0.101414	0.030202	3.357914	0.0018

R-squared	0.380388	Mean dependent var	24.25000
Adjusted R-squared	0.364082	S.D. dependent var	3.162278
S.E. of regression	2.521741	Akaike info criterion	4.736483
Sum squared resid	241.6488	Schwarz criterion	4.820927
Log likelihood	-92.72966	F-statistic	23.32867
Durbin-Watson stat	1.443155	Prob(F-statistic)	0.000023

Gambar 3.6: Output *Eviews 3* untuk Uji Multikolinieritas pada x_3
(Sumber: Analisis penulis)

hasil output di atas memberikan koefisiensi determinasi berikut

$$R^2 = 0.380388$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned} TOL &= 1 - R^2 \\ &= 1 - 0.380388 \\ &= 0.619612 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} VIF &= \frac{1}{TOL} \\ &= \frac{1}{0.619612} \\ &= 1.613913 \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Hasil uji multikolinieritas di atas terangkum dalam tabel berikut:

Tabel 2: Uji Multikolinieritas

Variabel	Tolerance	VIF	Interprestasi
x_1	0.44746	2.234805	tidak terjadi multikolinieritas
x_2	0.43997	2.272882	tidak terjadi multikolinieritas
x_3	0.619612	1.613913	tidak terjadi multikolinieritas

Sumber: Analisis Penulis

Dari tabel 2 dapat dilihat bahwa tidak terjadi multikolinieritas pada model regresi yang digunakan dalam data. Hal ini ditunjukkan dengan nilai *tolerance* lebih besar dari 0,10 dan nilai VIF lebih kecil dari 10.

4. Uji Heteroskedastisitas

Untuk mengetahui apakah data yang digunakan memuat heteroskedastisitas atau tidak digunakan Uji *White*. Untuk menguji heteroskedastisitas dilakukan dengan membandingkan perkalian banyak observasi dengan koefisiensi determinasi dengan nilai tabel *Chi-Square*, secara matematis bisa ditulis

$$nR^2 \sim \chi^2_{df}$$

apabila perkalian banyak observasi dengan koefisiensi determinasi lebih besar dibandingkan nilai tabel *Chi-Square* $(nR^2 > \chi^2_{df})$, maka *error* (ε) bersifat heteroskedastisitas, dan apabila sebaliknya $(nR^2 < \chi^2_{df})$, maka *error* tidak bersifat heteroskedastisitas, dengan kata lain *error* bersifat homoskedastisitas.

Untuk menujukkan apakah data pada lampiran 1 memiliki *error* yang bersifat heteroskedastisitas digunakan *Eviews 3* dengan hasil sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

White Heteroskedasticity Test:			
F-statistic	2.813903	Probability	0.015951
Obs*R-squared	18.31003	Probability	0.031742

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 07/09/11 Time: 20:36
Sample: 1 40
Included observations: 40

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	42869.86	58887.15	0.728000	0.4723
X1	-906.2744	1241.420	-0.730031	0.4710
X1^2	4.767729	6.524131	0.730784	0.4706
X1*X2	-4.186606	6.001490	-0.697594	0.4908
X1*X3	9.538603	14.54380	0.655854	0.5169
X2	394.1887	574.1220	0.686594	0.4976
X2^2	0.922897	1.383046	0.667293	0.5097
X2*X3	-4.088130	6.812923	-0.600055	0.5530
X3	-875.4003	1380.911	-0.633930	0.5309
X3^2	3.975259	8.250309	0.481831	0.6334

R-squared	0.457751	Mean dependent var	16.42094
Adjusted R-squared	0.295076	S.D. dependent var	25.68821
S.E. of regression	21.56776	Akaike info criterion	9.192594
Sum squared resid	13955.05	Schwarz criterion	9.614814
Log likelihood	-173.8519	F-statistic	2.813903
Durbin-Watson stat	1.928777	Prob(F-statistic)	0.015951

Gambar 3.7: Output *Eviews 3* untuk Uji Heteroskedastisitas
(Sumber: Analisis penulis)

Output untuk uji heteroskedastitas di atas memberikan hasil perkalian banyak observasi dengan koefisiensi determinasi sebagai berikut:

$$nR^2 = 18.31003$$

dipihak lain didapatkan *Chi-Square* dari $df = 9$ dengan tingkat kesalahan $\alpha = 5\%$ sebagai berikut:

$$\chi_9^2 = 16.9190$$

dan didapatkan perbandingan sebagai berikut:

$$nR^2 > \chi_{df}^2$$

dari sini bisa diambil kesimpulan bahwa *error* bersifat heteroskedastisitas.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena hasil uji heteroskedastisitas dari data adalah terdapat heteroskedastisitas, maka heteroskedastisitas tersebut harus diatasi. Pada penenlitian ini metode yang akan digunakan untuk mengatasi heteroskedastisitas adalah WLS, yakni mengatasi heteroskedastisitas dilakukan dengan transformasi model yang memuat heteroskedastisitas tersebut, dan didapatkan model transformasi berikut:

$$y^* = X^*\beta$$
$$P^{-1}y = P^{-1}X\beta$$

dengan

$$P^T P = PP = P^2 = \hat{\Phi}$$

dimana

$$\hat{\Phi} = \hat{\sigma}^2 \Psi$$

di pihak lain didapatkan

$$\begin{aligned}\Psi &= I - H \\ &= I - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T. \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.24983 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0.106214 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0.402141 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.75017 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0.893786 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0.597859 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{Y^T Y - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X \beta}{n-k} \\ &= 17.692\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga bisa didapat

$$P=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{11})} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{22})} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{nn})}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3.6431501 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 3.9766188 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 3.2523434\end{bmatrix}$$

dan

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{11})}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{22})}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{(1-h_{nn})}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.274487 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0.2514699 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0.3074706\end{bmatrix}$$

dan didapatkan data baru dari model transformasi sebagaimana lampiran 2. Data tersebut memuat lima variabel baru, yakni y^*, x_0^*, x_1^*, x_2^* dan x_3^*,dimana $y^* = P^{-1}y$, $x_0^* = P^{-1}$, $x_1^* = P^{-1}x_1, x_2^* = P^{-1}x_2$ dan $x_3^* = P^{-1}x_3$. Dengan cara yang sama seperti sebelumnya digunakan regresi untuk data hasil transformasi adalah sebagai berikut:

$$y_i^* = \beta_0 x_{0i}^* + \beta_1 x_{1i}^* + \beta_2 x_{2i}^* + \beta_3 x_{3i}^* + \varepsilon^*$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bisa ditulis dalam notasi matriks seperti berikut:

$$y^* = X^* \beta^* + \varepsilon^*$$

sehingga didapatkan regresi dalam notasi matriks untuk data diatas seperti berikut:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 17.9515 \\ 14.0823 \\ \vdots \\ 9.9313 \end{bmatrix}}_{y^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2744 & 26.3508 & 13.4499 & 4.8035 \\ 0.2514 & 24.3925 & 13.8308 & 5.0293 \\ 0.2514 & 24.3925 & 13.8308 & 5.0293 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.3074 & 36.8964 & 39.9711 & 9.2241 \end{bmatrix}}_{X^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \end{bmatrix}}_{\beta^*} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_3^* \\ \vdots \\ \varepsilon_n^* \end{bmatrix}}_{\varepsilon^*}$$

dengan meminimumkan jumlah kuadrat *error* akan didapatkan estimasi koefisiensi

$$\hat{\beta}^* = \left(X^{*T} X^*\right)^{-1} X^{*T} y^*$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & \sum x_0^* & \sum x_1^* & \sum x_2^* & \sum x_3^* \\ \sum x_0^* & \sum x_0^{*2} & \sum x_0^* x_1^* & \sum x_0^* x_2^* & \sum x_0^* x_3^* \\ \sum x_1^* & \sum x_0^* x_1^* & \sum x_1^{*2} & \sum x_1^* x_2^* & \sum x_1^* x_3^* \\ \sum x_2^* & \sum x_0^* x_2^* & \sum x_1^* x_2^* & \sum x_2^{*2} & \sum x_2^* x_3^* \\ \sum x_3^* & \sum x_0^* x_3^* & \sum x_1^* x_3^* & \sum x_2^* x_3^* & \sum x_3^{*2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y^* \\ \sum x_0^* y^* \\ \sum x_1^* y^* \\ \sum x_2^* y^* \\ \sum x_3^* y^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 184.3764 \\ -1.1074 \\ 0.2954 \\ -2.0521 \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 17.9515 \\ 14.0823 \\ \vdots \\ 9.9313 \end{bmatrix}}_{y^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2744 & 26.3508 & 13.4499 & 4.8035 \\ 0.2514 & 24.3925 & 13.8308 & 5.0293 \\ 0.2514 & 24.3925 & 13.8308 & 5.0293 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.3074 & 36.8964 & 39.9711 & 9.2241 \end{bmatrix}}_{X^*} \underbrace{\begin{bmatrix} 184.3764 \\ -1.1074 \\ 0.2954 \\ -2.0521 \end{bmatrix}}_{\beta^*} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2.4091 \\ 0.9662 \\ 0.9411 \\ \vdots \\ 1.2238 \end{bmatrix}}_{\varepsilon^*}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

apabila diambil salah satu observasi, yakni observasi pertana, maka menghasilkan regresi sebagai berikut

$$y_i^* = \beta_0 x_{0i}^* + \beta_1 x_{1i}^* + \beta_2 x_{2i}^* + \beta_3 x_{3i}^* + \varepsilon^*$$

$$17.9515 = (184.3764)0.2744 + (-1.1074)26.3508 + (0.2954)13.4499 + (-2.0521)4.8035 + 2.4091$$

analisis data pada tabel menggunakan *Eviews 3* dengan hasil sebagai sebagai berikut:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/09/11 Time: 20:37
Sample: 1 40
Included observations: 40

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X0	184.3764	75.63675	2.437657	0.0199
X1	-1.107449	0.809239	-1.368506	0.1796
X2	0.295401	0.371766	0.794590	0.4321
X3	-2.052169	0.877662	-2.338222	0.0250

R-squared	0.781695	Mean dependent var	10.52223
Adjusted R-squared	0.763503	S.D. dependent var	2.228867
S.E. of regression	1.083919	Akaike info criterion	3.093682
Sum squared resid	42.29567	Schwarz criterion	3.262570
Log likelihood	-57.87364	F-statistic	42.96904
Durbin-Watson stat	1.344574	Prob(F-statistic)	0.000000

Gambar 3.8: Output *Eviews 3* untuk Regresi Linier Berganda Data Transformasi
(Sumber: Analisis penulis)

Agar *output* untuk regresi linier berganda tersebut menjadi lebih informatif, output tersebut disusun secara singkat sebagai berikut:

$$y_i^* = 184.3764 x_{0i}^* - 1.107449 x_{1i}^* + 0.295401 x_{2i}^* - 2.052169 x_{3i}^*$$

SE : (75.63675) (0.809239) (0.371766) (0.877662)

t_{stat} : (2.202867) (-1.368506) (0.794590) (-2.338223)

$R^2 = 0.781695$

$F_{stat} = 42.96904$

$n = 40$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sekarang bisa ditunjukan bahwa data pada lampiran 2 memiliki variansi *error* yang bersifat homoskedastisitas menggunakan *Eviews 3* dengan hasil sebagai berikut:

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	2.414839	Probability	0.026968
Obs*R-squared	21.87929	Probability	0.057260

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 07/09/11 Time: 20:39
Sample: 1 40
Included observations: 40

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	143.2797	226.7372	0.631920	0.5330
X0	589.2655	5997.260	0.098256	0.9225
X0^2	-32866.30	114815.6	-0.286253	0.7770
X0*X1	789.4827	2402.404	0.328622	0.7451
X0*X2	-340.4795	911.0058	-0.373740	0.7116
X0*X3	323.3664	1186.010	0.272651	0.7873
X1	-21.11466	63.83352	-0.330777	0.7435
X1^2	-4.313882	12.61102	-0.342072	0.7350
X1*X2	3.890754	9.722876	0.400165	0.6923
X1*X3	-4.679179	13.13078	-0.356352	0.7245
X2	5.409323	24.55404	0.220303	0.8274
X2^2	-0.840012	1.826084	-0.460007	0.6493
X2*X3	1.865924	4.072789	0.458144	0.6507
X3	4.267102	49.00469	0.087075	0.9313

R-squared	0.546982	Mean dependent var	1.057392
Adjusted R-squared	0.320473	S.D. dependent var	1.583409
S.E. of regression	1.305258	Akaike info criterion	3.639895
Sum squared resid	44.29613	Schwarz criterion	4.231003
Log likelihood	-58.79790	F-statistic	2.414839
Durbin-Watson stat	1.863768	Prob(F-statistic)	0.026968

Gambar 3.9 : Output *Eviews 3* untuk Uji Heteroskedastisitas Regresi Data Transformasi
(Sumber: Analisis penulis)

Output untuk uji heteroskedastisitas dengan metode *White* memberikan hasil perkalian banyak observasi dengan koefisiensi determinasi

$$nR^2 = 21.87929$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dipihak lain didapatkan *Chi-Square* dengan $df = 13$ dan tingkat tingkat kesalahan $\alpha = 5\%$, yaitu

$$\chi^2_{13} = 22.3621$$

dan didapatkan perbandingan, yaitu

$$nR^2 < \chi^2_{df}$$

hal ini menunjukkan bahwa *error* (ε) bersifat homoskedastisitas.

5. Uji Autokorelasi

Salah satu asumsi yang harus dipenuhi dalam suatu regresi adalah harus tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel *error* untuk setiap observasi. Uji autokorelasi dalam penelitian ini menggunakan Uji Durbin–Watson, kriteria dalam uji ini adalah

$d < d_L$: autokorelasi positif

$d > 4 - d_L$: autokorelasi negatif

$d_U < d < 4 - d_U$: tidak ada autokorelasi positif maupun negatif

$\left.\begin{array}{l} d_U \le d \le d_L \\ 4 - d_U \le d \le 4 - d_L \end{array}\right\}$: pengujian tidak meyakinkan

dimana

d : d-hitung

d_u : nilai kritis untuk batas atas

d_L : nilai kritis untuk batas bawah

secara singkat jika bisa ditunjukan

$$d_u < d < 4 - d_u$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

maka dapat disimpulkan tidak terjadi autokorelasi positif maupun autokorelasi negative. Dengan formula *d*-hitung (d) berikut :

$$d = 2\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}\right]$$

Dalam uji ini akam mengguanakan hipotesis

$H_0 : r = 0$ (tidak ada autokorelasi)

$H_1 : r \neq 0$ (ada autokorelasi)

Dalam uji autokolinieritas pada data dipergunakan *Eviews 3* dengan hasil sebagai berikut:

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:				
F-statistic	1.158815	Probability		0.325945
Obs*R-squared	2.520528	Probability		0.283579
Test Equation:				
Dependent Variable: RESID				
Method: Least Squares				
Date: 07/09/11 Time: 20:40				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X0	-11.17372	75.66256	-0.147678	0.8835
X1	0.114663	0.809235	0.141694	0.8882
X2	-0.040681	0.371133	-0.109613	0.9134
X3	0.101185	0.876346	0.115463	0.9088
RESID(-1)	0.252395	0.176811	1.427488	0.1626
RESID(-2)	0.033924	0.175580	0.193211	0.8479
R-squared	0.063013	Mean dependent var		-0.030091
Adjusted R-squared	-0.074779	S.D. dependent var		1.040949
S.E. of regression	1.079168	Akaike info criterion		3.127739
Sum squared resid	39.59655	Schwarz criterion		3.381071
Log likelihood	-56.55479	F-statistic		0.457306
Durbin-Watson stat	1.764522	Prob(F-statistic)		0.805029

Gambar 3.10: Output *Eviews 3* untuk Uji Autokorelasi
(Sumber: Analisis Penulis)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Hasil pengujian autokorelasi di atas, dihasilkan nilai *d*-hitung berikut :

$$d = 1.764522$$

dan untuk $n = 40$ dan $k = 4$ didapat nilai kritis untuk batas atas pada tingkat kesalahan $\alpha = 5\%$ sebagai berikut:

$$d_u = 1.730$$

sehingga bisa didapat perbandingan berikut :

$$d_u < d < 4 - d_u$$
$$1.730 < 1.764522 < 2.270$$

yang artinya menerima H_0 dan menolak H_1, sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi autokorelasi positif dan autokorelasi negatif pada model regresi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV
PENUTUP

4.1 Simpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa :

1. Regresi linier berganda yang memuat unsur heteroskedastisitas memiliki variansi *error* yang tidak konstan, estimasi variansi *error* tersebut adalah

$$\hat{\Phi} = \hat{\sigma}^2 \Psi$$

dengan

$$\Psi = I - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T$$

dan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y^T Y - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X \beta}{n-k}$$

untuk mengatasi unsur heteroskedastisitas pada regresi linier berganda bisa dilakukan dengan metode *Weighted Least Squares* (WLS). Pada metode ini, didapat matriks P yang memiliki sifat

$$P^T P = PP = P^2 = \hat{\Phi}$$

sehingga tansformasi persamaan untuk mengatasi heterokedastisitas dilakukan dengan mengalikan persamaan yang memuat unsur heteroskedastisitas dengan P^{-1}.

2. Estimasi dilakukan dengan metode WLS, yakni penerapan metode OLS pada hasil transformasi persamaan, sehingga menghasilkan taksiran parameter regresi ($\hat{\beta}^*$) sebagai berikut :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\hat{\beta}^* = \left(X^T\Psi^{-1}X\right)^{-1} X^T\Psi^{-1}Y$$

dengan taksiran variansi parameter berikut

$$Cov\left(\hat{\beta}^*\right) = \hat{\sigma}^2\left(X^T\Psi^{-1}X\right)^{-1}$$

yang memenuhi sifat-sifat dari taksiran parameter yang baik yaitu tidak bias, efisien, dan konsisten.

3. Data dari 40 mobil yang memuat jarak tempuh mobil yang didukung oleh satu gallon bahan bakar (y) yang dipengaruhi oleh kecepatan tertinggi mobil (x_1), tenaga kuda mesin mobil (x_2), dan berat mobil (x_3), dan data tersebut memiliki regresi

$$y_i = 184.6990 - 1.110264x_{1i} + 0.307384x_{2i} - 2.103176x_{3i}$$

Dalam regresi tersebut variabel-variabel bebas secara bersama mampu menjelaskan variabel terikat sebesar 69.9366%, dan dari ketiga variabel bebas tersebut terdapat dua variabel yang berpengaruh secara signifikan, akan tetapi ketiga variabel bebas tersebut berpengaruh secara signifikan secara bersama. Selain itu, regresi tersebut bersifat normal, linier tidak memuat multikolinieritas, akan tetapi mempunyai *error* yang bersifat heteroskedastisitas, dan dapat diatasi mengunakan metode WLS, sehingga menghasilkan data baru, data baru tersebut memiliki regresi

$$y_i^* = 184.3764x_{0i}^* - 1.107449x_{1i}^* + 0.295401x_{2i}^* - 2.052169x_{3i}^*$$

dimana $y^* = P^{-1}y$, $x_0^* = P^{-1}$, $x_1^* = P^{-1}x_1, x_2^* = P^{-1}x_2$ dan $x_3^* = P^{-1}x_3$, yang bersifat homoskedastisitas dan tidak memuat autokolinieritas.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4.2 Saran

Didalam penelitian ini peneliti menggunakan model regresi linier berganda. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan menggunakan model nonlinier atau model-model lain yang lebih rumit.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Algifari. 2000. *Analisis Regresi (Teori dan Kasus, edisi 2)*. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta

Al-Mahalli, Imam Jalalud-din dan Imam Jalalud-din As-Suyuthi. 1990. تفسير الجلالين. Jilid I. Terjemahan Bahrur Abubakar. Bandung: Sinar Baru.

Al-Maragi, Ahmad Mustafa. 1974.Tafsir Al-Maragi. Terjemahan Bahrun Abu Bakar. dkk. Semarang: Toha Putra.

Aziz, Abdul. 2010. Hypotheses Test. http://blog.uin-malang.ac.id/abdulaziz/2010/09/06/statistik-matematika/Hypotheses-Test-Slides (diakses pada tanggal 26 Juli 2011)

Aziz, Abdul. 2010. *Ekonometrika*. Malang: UIN-MALIKI Press.

Cai, Li; F. Hayes, Andrew. 2008. A New Test of Linier Hypotheses in OLS Regression Under Heteroscedasticity of Unknown Form. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*: 23-28.

Flachaire, Emmanuel. 2005. More Efficient Tests Robust to Heteroscedasticity of Unknown Form. *Eurequa*: 2-5.

Dajan, Anto. 1986. *Pengantar Metode* Statistika. Jakarta: LP3ES.

Draper, Norman. 1966. *Applied Regression Analysis*. Terjemahan Bambang Sumantri. Jakarta : PT Gramedia Pustaka Utama.

Firdaus, Muhammad. 2004. *Ekonometri Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: PT Bumi Aksara.

Gujarati, N. Damodar. 1992. *Essensials of Econometrics.* Jilid I. Terjemahan Julius A. Mulyadi dan Yelvi Andri. Jakarta: Erlangga.

Gujarati, N. Damodar. 1992. *Essensials of Econometrics.* Jilid II. Terjemahan Julius A. Mulyadi dan Yelvi Andri. Jakarta: Erlangga.

Gujarati, N. Damodar dan Dawn C. Porter. 2010. *Basic Econometrics.* Jilid I. Terjemahan Eugenia Mardanugraha. dkk. Jakarta: Selemba Empat.

Gujarati, N. Damodar dan Dawn C. Porter, DKK. 1999. *Ekonometrika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Lains, Alfian. 2003. *Ekonometrika Teori dan Aplikasi*. Jakarta: Pustaka LP3ES Indonesia.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

M. Gere, James. DKK. 1983. *Matrix Algebra for Engineers*. Terjemahan G. Tejosutekno. Jakarta: Erlangga.

Muhammad, Abdullah. 1994. لباب التفسير من ابن كثير . Jilid 3. Terjemahan M. Abdul Ghoffar. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Nachrowi, Nachrowi Djalal. 2002. *Penggunaan Teknik Ekonometrika*. Jakarta: PT Roja Grafindo Persada.

Schmidheiny, Kurt. 2010. Heteroscedasticity in the Linier Model. *Universitat Pompeu Fabra*: 1-7.

Scoot Longa, J; H. Ervin, Laurie. 1998. Correcting for Heteroscedasticity with Heteroscedasticity Consistent Standard Errors in the Linier Model: Small sample Considerations. *The American Statistician*: 7-11.

Scoot Longa, J; H. Ervin, Laurie. 2000. Using Heteroscedasticity Consistent Standard Errors in the Linier Model. *The American Statistician*: 5-8.

Shihab, M Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Sugiyanto, Catur. 2002. *Ekonometri Terapan*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Supranto. 2004. *Ekonometri*. Jilid I. Bogor: Ghalia Indonesia.

Supranto. 2004. *Ekonometri*. Jilid II. Bogor: Ghalia Indonesia.

Supranto. 2009. *Statistik Teori dan Aplikasi*. Jilid II. Jakarta: Erlangga.

Sembiring, RK. 1995. *Analisi Regresi*. Bandung: ITB.

Turmudi, Harini, Sri. 2008. *Metode Statistika Pendekatan Teoritis dan Aplikatif*. Malang: UIN-Malang Press.

Winarno, Wing Wahyu. 2007. *Analisis Ekonometrika dan Statistika dengan Eviews*. Yogyakarta: UPP STIM YKPN.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang 65144
Telp.(0341)551345/Fax.(0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ana Syukriyah
Nim : 07610090
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul skripsi : Analisis Heteroskedastisitas pada Regresi Linier Berganda
Dosen Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Dosen Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

NO	TANGGAL	HAL YANG DIKONSULTASIKAN	TANDA TANGAN
1	20 Mei 2011	Bab I dan Bab II	1
2	13 Juni 2011	Bab III	2
3	21 Juni 2011	Bab I dan Bab II Agama	3
4	27 Juni 2011	Revisi Bab I, Bab II, dan Bab III	4
5	01 Juli 2011	Bab III Agama	5
6	04 Juli 2011	Presentasi Bab II	6
7	06 Juli 2011	Revisi Bab II	7
8	14 Juli 2011	Revisi Bab III	8
9	12 Agt 2011	Acc Agama	9
10	13 Agt 2011	Acc Keseluruhan	10

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 2

Data rincian dari 40 mobil

Observasi	MGP	SP	HP	WT
1	65.4	96	49	17.5
2	56.0	97	55	20.0
3	55.9	97	55	20.0
4	49.0	107	70	20.0
5	46.5	96	53	20.0
6	46.2	105	70	20.0
7	45.4	97	55	20.0
8	59.2	98	62	22.5
9	53.3	98	62	22.5
10	43.4	107	80	22.5
11	41.1	103	73	22.5
12	40.9	113	93	22.5
13	40.9	113	92	22.5
14	40.4	103	73	22.5
15	39.6	100	66	22.5
16	39.3	103	73	22.5
17	38.9	106	78	22.5
18	38.8	113	92	22.5
19	38.2	106	78	22.5
20	42.2	109	90	25.0
21	40.9	110	92	25.0
22	40.7	101	74	25.0
23	40.0	111	95	25.0
24	39.3	105	81	25.0
25	38.8	111	92	25.0
26	38.4	110	92	25.0
27	38.4	110	92	25.0
28	38.4	110	92	25.0
29	46.9	90	52	27.5
30	36.3	112	103	27.5
31	36.1	103	84	27.5
32	36.1	103	84	27.5
33	35.4	111	102	27.5
34	35.3	111	102	27.5
35	35.1	102	81	27.5
36	35.1	106	90	27.5
37	35.0	106	90	27.5
38	33.2	109	102	30.0
39	32.9	109	102	30.0
40	32.3	120	130	30.0

Sumber: Diadaptasi dari U.S. Environmental Protection Agency, 1991, Report EPA/AA/CTAB/91-02

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 3

Data hasil transformasi untuk mengatasi heteroskedastisitas

Observasi	Y^*	X_0^*	X_1^*	X_2^*	X_3^*
1	15.5423	0.2745	26.3508	13.4499	4.8035
2	13.1161	0.2515	24.3926	13.8308	5.0294
3	13.1161	0.2515	24.3926	13.8308	5.0294
4	13.0317	0.2863	30.6365	20.0425	5.7264
5	13.3313	0.2531	24.2966	13.4138	5.0618
6	11.8494	0.2483	26.0679	17.3786	4.9653
7	13.1161	0.2515	24.3926	13.8308	5.0294
8	11.7880	0.2456	24.0735	15.2302	5.5271
9	11.7880	0.2456	24.0735	15.2302	5.5271
10	10.5345	0.2431	26.0095	19.4463	5.4693
11	11.0961	0.2428	25.0088	17.7247	5.4631
12	10.1642	0.2526	28.5443	23.2396	5.6836
13	10.1642	0.2526	28.5443	23.2396	5.6836
14	11.0961	0.2428	25.0088	17.7247	5.4631
15	11.4280	0.2434	24.3385	16.0634	5.4762
16	11.0961	0.2428	25.0088	17.7247	5.4631
17	10.6309	0.2424	25.6958	18.9083	5.4543
18	10.1642	0.2526	28.5443	23.2396	5.6836
19	10.6309	0.2424	25.6958	18.9083	5.4543
20	9.4304	0.2421	26.3932	21.7926	6.0535
21	9.3384	0.2430	26.7298	22.3558	6.0750
22	10.5013	0.2438	24.6204	18.0387	6.0942
23	9.3055	0.2435	27.0337	23.1369	6.0887
24	9.8731	0.2425	25.4602	19.6407	6.0620
25	9.4459	0.2531	28.0929	23.2842	6.3272
26	9.3384	0.2430	26.7298	22.3558	6.0750
27	9.3384	0.2430	26.7298	22.3558	6.0750
28	9.3384	0.2430	26.7298	22.3558	6.0750
29	14.6732	0.3363	30.2664	17.4873	9.2481
30	8.4418	0.2459	27.5381	25.3252	6.7616
31	9.5690	0.2473	25.4758	20.7764	6.8018
32	9.5690	0.2473	25.4758	20.7764	6.8018
33	8.7102	0.2478	27.5090	25.2786	6.8153
34	8.7102	0.2478	27.5090	25.2786	6.8153
35	9.6820	0.2488	25.3810	20.1555	6.8429
36	9.0889	0.2447	25.9414	22.0257	6.7301
37	9.0889	0.2447	25.9414	22.0257	6.7301
38	8.1291	0.2522	27.4920	25.7265	7.5666
39	8.1291	0.2522	27.4920	25.7265	7.5666
40	8.7074	0.3075	36.8965	39.9712	9.2241

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG