

SIFAT-SIFAT RUANG SEMI HASIL KALI DALAM

SKRIPSI

**OLEH:
LAUHA KURNIA SAFIRA
NIM. 200601110056**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

SIFAT-SIFAT RUANG SEMI HASIL KALI DALAM

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**OLEH:
LAUHA KURNIA SAFIRA
NIM. 200601110056**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

SIFAT-SIFAT RUANG SEMI HASIL KALI DALAM

SKRIPSI

Oleh
Lauha Kurnia Safira
NIM. 200601110056

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 29 Agustus 2024

Dosen Pembimbing I



Dian Maharani, M.Si.
NIP. 199400217 202012 2 001

Dosen Pembimbing II



Juhari, M.Si.
NIPPPK. 19840209 202321 1 010

Mengetahui,
Ketua, Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT RUANG SEMI HASIL KALI DALAM

SKRIPSI

Oleh
Lauha Kurnia Safira
NIM. 200601110056

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 11 September 2024

Ketua Penguji : Dr. Elly Susanti, M.Sc.
Anggota Penguji 1 : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Anggota Penguji 2 : Dian Maharani, M.Si.
Anggota Penguji 3 : Juhari, M.Si.



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini

Nama : Lauha Kurnia Safira

NIM : 200601110056

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat-Sifat Ruang Semi Hasil Kali Dalam

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 September 2024



Lauha Kurnia Safira
NIM. 200601110056

MOTO

”Jika kamu gagal, cobalah lagi. Jika kamu salah, perbaikilah lagi. Tetapi jika kamu menyerah, semua akan berhenti.”

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirrahiim

Alhamdulillah rabbil ‘aalamin, puji syukur bagi Allah yang selalu memberikan kekuatan serta pertolongan dalam segala keadaan.

Dengan sepenuh hati skripsi ini dipersembahkan kepada:

Seluruh keluarga penulis, terkhusus cinta pertama penulis almarhum Bapak Abbas yang selalu menjadi motivator dan tidak pernah menuntut apapun kepada penulis, dari beliau penulis belajar arti keberanian menghadapi segala hal. Perempuan yang menjadi panutan penulis, Ibu Marpu’ah yang selalu memahami kondisi penulis disegala keadaan dan tidak pernah lelah mendoakan serta memberikan dukungan spiritual serta material demi kelancaran dalam penulisan skripsi ini, terimakasih selalu berusaha mengutamakan kebahagiaan penulis dan menjadi *support system* utama bagi penulis. Kepada kakak satu-satunya dari penulis, Fatya Nia Rahmawati yang senantiasa menginspirasi dalam proses pendidikan dan meraih masa depan serta selalu memberikan apresiasi atas setiap pencapaian penulis. Dan tak lupa kepada diri penulis, terimakasih telah terus berusaha dan tidak pernah lelah dalam menghadapi setiap hambatan dan kegagalan.

Terimakasih karena tidak pernah menyerah.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah *subhanahu wa ta'ala* yang telah melimpahkan segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Sifat-Sifat Ruang Semi Hasil Kali Dalam” dengan baik.

Shalawat serta salam semoga selalu tercurah limpahkan kepada Nabi Agung, Nabi Muhammad *shalallahu 'alaihi wa sallam*, yang telah berhasil membimbing umat Islam dari zaman jahiliyyah menuju zaman yang dipenuhi ilmu pengetahuan yang beradab.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu persyaratan untuk mendapatkan gelar sarjana matematika di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan dan ketulusan hati, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. HM. Zainuddin MA., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Ibu Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Ibu Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ibu Dian Maharani, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Bapak Juhari, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Seluruh dosen, tenaga kependidikan, dan sivitas akademika Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Keluarga penulis, khususnya *almarhum* Bapak Abbas yang telah mengajarkan kemandirian, keberanian, dan kekuatan, serta Ibu Marpu'ah yang selalu memberikan dukungan, dampingan, nasihat, keteladanan, sekaligus mendoakan keberhasilan penulis selama ini dan tak lupa kakak Fatya Nia Rahmawati yang selalu memberikan semangat. Terima kasih atas

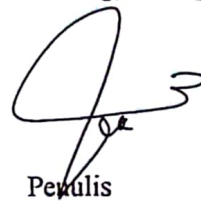
kasih sayang dan cinta yang selalu diberikan.

8. Sahabat-sahabat dan teman-teman sekolah SMA peneliti waalaikumussalam akhi serta teman-teman Gg. Cokro dan tak lupa kepada seluruh teman program studi Matematika yang senantiasa saling menyemangati, memotivasi, dan berbagi informasi. Terima kasih atas kebersamaan, kebahagiaan, serta keceriaan selama masa perkuliahan yang penuh dengan suka cita dan selama proses penulisan skripsi.

Penulis menyadari atas keterbatasan kemampuan yang penulis miliki, sehingga dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan segala kritik maupun saran yang bersifat membangun, agar dikemudian hari dapat menghasilkan karya yang lebih baik.

Demikian skripsi ini disusun. Semoga dapat bermanfaat bagi pembaca dan dapat menjadi bahan kajian literatur untuk penelitian selanjutnya.

Malang, 11 September 2024



Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR SIMBOL	xi
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
مستخلص البحث.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah.....	5
1.3. Tujuan Penelitian	6
1.4. Manfaat Penelitian	6
1.5. Batasan Masalah	7
1.6. Daftar Istilah	7
BAB II KAJIAN TEORI	10
2.1 Teori pendukung.....	10
2.1.1 Ruang Vektor	10
2.1.2 Ruang Bernorma	15
2.1.3 Ruang Hasil Kali Dalam	20
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadist.....	24
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	27
BAB III METODE PENELITIAN	30
3.1 Jenis Penelitian.....	30
3.2 Pra Penelitian	30
3.3 Tahapan Penelitian.....	30
BAB IV PEMBAHASAN.....	33
4.1 Ruang Semi Hasil Kali Dalam.....	33
4.2 Norma yang Diinduksi dari Hasil Kali Dalam.....	36
4.3 Seminorma yang Dibentuk dari Semi Hasil Kali Dalam	37
4.4 Sifat-Sifat Ruang Semi Hasil Kali Dalam	40
4.5 Kajian Integrasi Al-Qur'an/Hadist.....	55
BAB V PENUTUP	58
5.1 Kesimpulan	58
5.2 Saran	58
DAFTAR PUSTAKA	60
RIWAYAT HIDUP	62

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam penelitian ini memiliki makna sebagai berikut.

$\ \cdot \ $	: Norma
$\operatorname{Re}(x, y)$	: Bagian real dari (x, y)
$\operatorname{Im}(x, y)$	: Bagian imajiner dari (x, y)
$[\cdot, \cdot]$	: Semi hasil kali dalam
$(\cdot, \cdot)$	: Koordinat di $\mathbb{C}$
$(x + y)$	: penjumlahan x dan y (bukan koordinat di $\mathbb{C}$)

ABSTRAK

Safira, Lauha Kurnia. 2024. **Sifat-Sifat Ruang Semi Hasil Kali Dalam**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Norma; Hasil kali dalam; Semi hasil kali dalam;

Ruang hasil kali dalam dapat menjadi ruang bernorma dengan norma yang didapatkan dari hasil kali dalamnya yaitu dengan mengakarkan hasil kali dalam antar dua vektor yang sama. Ruang hasil kali dalam dapat digeneralisasi menjadi ruang semi hasil kali dalam. Sehingga ruang vektor yang dilengkapi dengan semi hasil kali dalam disebut ruang semi hasil kali dalam. Semi hasil kali dalam tentu memiliki definisi dan sifat-sifat yang berbeda dengan hasil kali dalam. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam. Kajian ini dilakukan dengan mengumpulkan beberapa teori yang berhubungan seperti ruang vektor, ruang bernorma, ruang hasil kali dalam, serta ruang semi hasil kali dalam. Pada pembahasan, penulis membuktikan sifat-sifat pada ruang semi hasil kali dalam, yaitu identitas dasar, ketaksamaan Cauchy-Schwarz, hukum jajar genjang, identitas polarisasi, dan kekontinuan.

ABSTRACT

Safira, Lauha Kurnia. 2024. **The Properties of Semi Inner Product Space**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Keywords: Norm; Inner product; Semi inner product;

The inner product space can be a normed space with the norm obtained from the inner product by rooting the inner product between the same two vectors. The inner product space can be generalized into a semi inner product space. So a vector space equipped with semi inner product is called a semi inner product space. The semi inner product certainly has different definitions and properties than inner product space. Therefore, the aim of this research is to find out the properties that apply to the semi inner product space. The research is based on collecting relevant theories such as vector space, norm space, inner product space, and semi inner product space. As an result, it is proven that there are six properties that apply to the semi inner product space like basic identity, Cauchy-Schwartz inequality, parallelogram law, polarization identity, and continuity.

مستخلص البحث

سفيرا، لوحا كورنيا. ٢٠٢٤. خصائص الفضاء شبه المنتج الداخلي. بحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة (الأولى): ديان مهاراني، الماجستير. المشرف (الثاني): جوهرى، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: المعيار؛ الناتج الضرب الداخلي؛ النصف الناتج الضرب الداخلي؛

يمكن أن يكون فضاء الناتج الضرب الداخلي فضاءً معيارياً بالمعيار مع الحصول من الناتج الضرب الداخلي يعني بالتربيع الناتج الضرب الداخلي بين المتجهين نفسيهما. يمكن تعميم فضاء ناتج الضرب الداخلي ليصبح فضاءً نصفاً الناتج الضرب الداخلي. وحتى، الفضاء الاتجاهي الذي المجهز بنصف ناتج الضرب الداخلي يسمى فضاء النصفى الناتج الضرب الداخلي. بالطبع، أن النصف الناتج الضرب الداخلي له تعريف وخصائص المختلفة بالناتج الضرب الداخلي. لذلك، الهدف من هذا البحث هو لمعرفة الخصائص التي تنطبق على فضاء النصفى الناتج الضرب الداخلي. تتم هذه الدراسة بجمع بعض النظريات المتعلقة بما مثل، الفضاء الاتجاهي، والفضاء المعياري، وفضاء الناتج الضرب الداخلي، وفضاء النصفى الناتج الضرب الداخلي. في المناقشة، أثبتت الباحثة خصائص على الفضاء النصفى الناتج الضرب الداخلي، وهي الذاتية الأساسية، ومتباينة كوتشي-شفارتس، وقانون متوازي الأضلاع، والذاتية الاستقطابية، والاستمرارية. كالنتيجة، ثبت أن هناك ست خصائص التي تنطبق على فضاء النصفى الناتج الضرب الداخلي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Konsep ruang hasil kali dalam merupakan salah satu objek matematika yang dipelajari dan dikembangkan oleh para peneliti (Sanjaya, 2015). Ruang hasil kali dalam dapat menjadi ruang bernorma dengan norma yang diinduksi dari hasil kali dalamnya (Juliana & Wahyuni, 2021). Menurut Rynne & Youngson (2008), diketahui V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$. Hasil kali dalam pada V adalah fungsi $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian hingga untuk setiap $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(H1). [x, x] \geq 0$$

$$(H2). [x, x] = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = 0$$

$$(H3). [\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$$

$$(H4). [x, y] = \overline{[y, x]}$$

Pasangan $(V, [\cdot, \cdot])$ disebut ruang hasil kali dalam di mana V adalah suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) dan $[\cdot, \cdot]$ adalah suatu hasil kali dalam pada V . Namun, dalam pembahasan ini ruang yang digunakan hanya atas lapangan bilangan kompleks.

Ruang hasil kali dalam memiliki beragam aplikasi diberbagai bidang matematika dan ilmu terapan, seperti fisika, teknik dan ilmu komputer, ekonomi, serta teknologi informasi dan komunikasi. Salah satu contohnya yaitu aplikasi ruang hasil kali dalam untuk pengolahan gambar. Ruang hasil kali dalam tersebut berfungsi sebagai dasar matematis yang digunakan untuk memahami dan

mengimplementasikan teknik-teknik yang dibahas baik dari sisi teori maupun aplikasinya dalam pemrosesan gambar.

Ruang hasil kali dalam dapat digeneralisasi menjadi ruang semi hasil kali dalam, sehingga suatu ruang bernorma dapat dibentuk menjadi ruang semi hasil kali dalam. Lumer (1961) menggeneralisasi ruang hasil kali dalam yang disebut sebagai ruang semi hasil kali dalam Lumer atau biasa disebut ruang semi hasil kali dalam. Semi hasil kali dalam pada ruang vektor V merupakan suatu fungsi bernilai kompleks yang memetakan yang mengasosiasikan suatu lapangan skalar dari V dengan sepasang vektor pada V , sehingga memenuhi aksioma-aksioma ruang semi hasil kali dalam (Sari dkk., 2019).

Perbedaan antara ruang hasil kali dalam dengan ruang semi hasil kali dalam terdapat pada aksioma-aksiomanya. Jika suatu ruang vektor memenuhi aksioma-aksioma ruang semi hasil kali dalam, maka ia belum tentu memenuhi aksioma-aksioma ruang hasil kali dalam. Sedangkan, jika suatu ruang vektor memenuhi aksioma ruang hasil kali dalam, maka ruang vektor tersebut juga memenuhi aksioma ruang semi hasil kali dalam (Nofaria, 2014). Pada tahun 1967, seorang ilmuwan lain, yaitu Giles menambahkan aksioma homogenitas pada definisi ruang semi hasil kali dalam Lumer untuk mengembangkan konsep ruang semi hasil kali dalam Lumer (Lumer, 1961). Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$. Semi hasil kali dalam pada V adalah pemetaan $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in V$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut.

$$(I1). [x, x] \geq 0$$

$$(I2). [x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$(I3). [\lambda x, y] = \lambda[x, y]$$

$$(I4). [x, y] = \overline{[y, x]}$$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan semi hasil kali dalam disebut ruang semi hasil kali dalam (Promislow, 2008).

Penelitian mengenai ruang semi hasil kali dalam telah beberapa kali dilakukan, di antaranya yaitu penelitian yang membahas tentang semi hasil dalam atas dan bawah yang dilakukan oleh Sanjaya (2015). Penelitian ini membahas semi hasil kali dalam atas dan bawah beserta hubungannya dengan semi hasil kali dalam lainnya. Semi hasil kali dalam atas dan bawah berkaitan erat dengan pemetaan dual dinormalisasi dan semi hasil kali dalam Lumer-Giles yang ditunjukkan oleh beberapa ekuivalensi dari definisi semi hasil kali dalam atas dan bawah.

Nofaria (2014) telah melakukan penelitian yang membahas tentang sifat-sifat semi hasil kali dalam. Penelitian ini berjudul semi hasil kali dalam pada suatu norma di ruang vektor kompleks. Pada penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan aksioma yang menjadi perbedaan antara hasil kali dalam dengan semi hasil kali dalam. Selain itu juga menjelaskan seminorma dan membuktikan kebenaran teorema-teorema yang berlaku pada semi hasil kali dalam dan seminorma pada ruang vektor kompleks.

Penelitian lain yang dilakukan oleh Sari, dkk., (2019) telah mengkaji ruang semi hasil kali dalam pada ruang bernorma kompleks. Penelitian tersebut menjelaskan bahwa suatu ruang bernorma kompleks dapat dibentuk menjadi ruang semi hasil kali dalam menggunakan hubungan antara pemetaan dual dinormalisasi pada ruang bernorma kompleks dengan semi hasil kali dalam. Suatu ruang semi

hasil kali dalam merupakan suatu ruang bernorma kompleks dengan norma yang dibangun oleh semi hasil kali dalam.

Merujuk penelitian-penelitian sebelumnya, telah dibahas mengenai ruang semi hasil kali dalam. Namun, masih belum dijelaskan secara detail. Oleh karena itu, peneliti ingin mengkaji lebih dalam mengenai sifat-sifat apa saja yang berlaku ruang semi hasil kali dalam. Penelitian lainnya tentang ruang semi hasil kali dalam serta sifat-sifatnya juga telah dilakukan oleh Promislow (2008).

Adanya perbedaan antara ruang hasil kali dalam dan ruang semi hasil kali dalam tersebut menyebabkan adanya perbedaan sifat-sifat ruangnya. Dalam skripsi ini, sifat-sifat yang akan dibahas adalah identitas dasar, hukum jajar genjang, ketaksamaan Cauchy-schwartz, identitas polarisasi dan kekontinuan (Promislow, 2008). Berbicara mengenai sifat-sifat, Allah memiliki bermacam-macam sifat wajib. Persoalan mengenai sifat Allah adalah salah satu topik penting dan sering dibahas dalam ajaran agama Islam. Berbagai kelompok dalam Islam meyakini bahwa Allah memiliki sifat-sifat agung. Beberapa sifat agung yang dimaksud adalah Maha Mendengar, Maha Melihat, Maha Berkuasa, dan sifat-sifat mulia lainnya (Wirman, 2013). Seperti yang dijelaskan dalam al-Qur'an surat Al-Hasyr ayat 22 sampai 24 yang artinya:

“Dialah Allah yang tiada Tuhan selain Dia, Yang Maha Mengetahui yang gaib dan yang nyata. Dialah Yang Maha Pemurah lagi Maha Penyayang. Dialah Allah yang tiada Tuhan selain Dia, Maharaja, Yang Mahasuci, Yang Maha Sejahtera, Yang Maha Mengaruniakan Keamanan, Yang Maha Memelihara, Yang Maha Perkasa, Yang Mahakuasa, Yang Maha Memelihara Segala Keagungan. Mahasuci Allah dari apa yang mereka persekutukan. Dialah Allah Yang Menciptakan, Yang Maha Mengadakan, Yang Maha Membentuk Rupa, Yang Mempunyai Nama-nama yang paling Baik. Bertasbih kepada-Nya apa yang ada di langit dan di bumi. Dan Dialah Yang Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana” (RI, 2019)

Menurut tafsir Ibnu Katsir ayat di atas menjelaskan bahwa tidak ada Ilahi yang had selain Allah, karena itu tidak ada Tuhan melainkan hanya Allah semata. Allah mengetahui seluruh ciptaan baik yang tampak oleh pandangan manusia maupun yang tidak tampak. Tidak ada sesuatupun yang tersembunyi dari Allah baik di muka bumi ini maupun di langit, kecil maupun besar, tinggi maupun pendek, dan lain sebagainya. Allah merupakan Tuhan yang mempunyai sifat rahmat yang sangat luas dan meliputi seluruh makhluk di alam semesta. Rahmat Allah tidak terbatas, merangkul setiap ciptaa-Nya tanpa terkecuali (Katsir, 2004).

Selain itu, disebutkan juga bahwa Allah menguasai segala sesuatu serta mengendalikan semuanya tanpa ada rintangan dan halangan. Karena kesempurnaan dalam dzat, sifat, dan perbuatan-Nya, maka Allah tidak pernah memiliki kekurangan serta aib. Allah menguasai dan menaklukkan segala sesuatu di alam ini, sehingga tidak ada yang dapat menyamai kekuasaan, keagungan, kemuliaan, serta kebesaran-Nya. Oleh karena itu, hanya Allah yang layak memiliki kebesaran yang mutlak, dan semua keagungan yang ada berasal dari-Nya (Katsir, 2004).

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam.

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan pemaparan latar belakang dan rumusan masalah tersebut, adapun tujuan penelitian yang diambil yaitu untuk mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam.

1.4. Manfaat Penelitian

Sesuai dengan tujuan penelitian, maka manfaat penelitian ini dibedakan berdasarkan beberapa kepentingan pihak, yaitu:

1. Manfaat bagi peneliti

Penelitian ini merupakan salah satu kegiatan menambah wawasan peneliti untuk mengetahui apa saja sifat-sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam.

2. Manfaat bagi pembaca

a. Bagi mahasiswa, penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan rujukan atau referensi untuk mata kuliah pada konsorsium analisis.

b. Bagi peneliti akademis, penelitian ini dapat digunakan untuk pengembangan penelitian-penelitian selanjutnya.

3. Manfaat bagi instansi

Penelitian ini dapat meningkatkan pengembangan kurikulum matematika khususnya pada konsorsium analisis.

1.5. Batasan Masalah

Agar kajian ini tidak terlalu luas pembahasannya, maka penelitian ini hanya membahas sifat-sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam hanya atas lapangan bilangan kompleks.

1.6. Daftar Istilah

Terdapat beberapa definisi istilah terkait penelitian ini, yaitu:

1. Ruang Hasil Kali Dalam (Rynne & Youngson, 2008)

Jika diketahui V sebagai ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$. Hasil kali dalam pada V adalah fungsi $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian hingga untuk setiap $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(H1). [x, x] \geq 0$$

$$(H2). [x, x] = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = 0$$

$$(H3). [\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$$

$$(H4). [x, y] = \overline{[y, x]}$$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

2. Ruang semi hasil kali dalam (Promislow, 2008)

Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$. Semi hasil kali dalam pada V adalah pemetaan $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in V$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(I1). [x, x] \geq 0$$

$$(I2). [x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$(I3). [\lambda x, y] = \lambda[x, y]$$

$$(I4). [x, y] = \overline{[y, x]}$$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan semi hasil kali dalam disebut ruang semi hasil kali dalam.

3. Seminorma (Nel, 2016)

Misalkan V adalah ruang vektor. Fungsi $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{C}$ dikatakan seminorma pada V jika memenuhi

$$(O1). \|x\| \geq 0, \quad (x \in V)$$

$$(O2). \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad (\alpha \in \mathbb{C}, x \in V)$$

$$(O3). \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (x, y \in V)$$

4. Definisi bilangan kompleks (Purwosetiyono, 2015)

Bilangan kompleks z merupakan pasangan berurut (x, y) dengan $x, y \in \mathbb{R}$, dan dapat ditulis dengan $z = (x, y)$. Bilangan kompleks z merupakan bilangan yang berbentuk $x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$, dan dapat ditulis $z = x + iy$.

Jika $z = (x, y) = x + iy$, maka

$x = \text{Re}(z)$ = bagian real z

$y = \text{Im}(z)$ = bagian imajiner z

i = satuan imajiner dan $i^2 = -1$

5. Operasi bilangan kompleks (Purwosetiyono, 2015)

Operasi pada bilangan kompleks sesuai dengan operasi pada bilangan real.

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$.

a. Penjumlahan

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

b. Pengurangan

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

c. Perkalian

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

d. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 - y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 - y_2^2}, \quad z_2 \neq 0$$

6. Sifat Modulus dan Konjugat Bilangan Kompleks (Purwosetiyono, 2015)

a. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

b. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

c. $\bar{\bar{z}} = z$

d. $|\overline{z}| = |z|$

e. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

f. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

g. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

h. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

i. $z \bar{z} = |z|^2$

j. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

k. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori pendukung

Dalam penelitian ini, topik yang akan dibahas adalah sifat-sifat ruang semi hasil kali dalam. Sebelum lebih lanjut, terdapat sejumlah teori yang relevan dengan topik yang akan dibahas, beberapa di antaranya adalah ruang bernorma, ruang hasil kali dalam, dan ruang semi hasil kali dalam. Karena dalam penelitian ini mengkaji sifat-sifat ruang semi hasil kali dalam, maka yang akan dibahas terlebih dahulu adalah ruang vektor.

2.1.1 Ruang Vektor

Sebelum mempelajari mengenai ruang semi hasil kali dalam, akan dipaparkan terlebih dahulu ruang vektor. Ruang vektor didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Rorres, 2014)

Misalkan V adalah vektor yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Dengan penjumlahan antar vektor, yang menggabungkan setiap pasangan x dan y di V dan dilambangkan dengan $+$, dan perkalian dengan skalar yang menggabungkan bilangan real atau kompleks dengan vektor dan dilambangkan dengan $\cdot$, maka V dengan dua operasi tersebut dikatakan ruang vektor apabila untuk setiap vektor $x, y, z \in V$ dan untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut.

(V1). Tertutup penjumlahan

$$x + y \in V$$

(V2). Komutatif penjumlahan

$$x + y = y + x$$

(V3). Asosiatif penjumlahan

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

(V4). Identitas penjumlahan

Terdapat $0 \in V$, sedemikian sehingga $0 + x = x + 0 = x, \forall x \in V$

(V5). Invers penjumlahan

Terdapat $-x \in V$, sedemikian sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$

(V6). Tertutup perkalian

$$\alpha x \in V$$

(V7). Distributif penjumlahan terhadap perkalian skalar

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

(V8). Distributif perkalian skalar terhadap penjumlahan vektor

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

(V9). Asosiatif perkalian skalar

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

(V10). Identitas perkalian

Terdapat $1 \in \mathbb{N}$ sehingga $1x = x$

Contoh 2.2

Misalkan Y adalah himpunan semua barisan bilangan kompleks di mana untuk $x =$

$(x_n) \in Y$ dengan

$$x_n = \begin{cases} a_k \in \mathbb{C}, a_k \neq 0 & \text{untuk } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{untuk } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada Y didefinisikan sebagai

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$$

Untuk $(x_n), (y_n) \in Y$ dan α adalah bilangan kompleks. Tunjukkan bahwa Y adalah ruang vektor atas lapangan bilangan kompleks.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa Y adalah ruang vektor atas lapangan bilangan kompleks, maka harus memenuhi aksioma-aksioma berikut.

Misalkan $x = (x_n), y = (y_n) \in Y$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$.

(V1). Akan dibuktikan $x + y \in Y$

$$\begin{aligned} x + y &= (x_n) + (y_n) \\ &= (x_n + y_n) \end{aligned}$$

Karena $x + y \in Y$, misalkan jumlah suku tak nol di x ada sebanyak a dan jumlah suku tak nol di y ada sebanyak b , maka jumlah suku tak nol di $x + y$ ada sebanyak n , dengan $0 \leq n \leq a + b$. Akibatnya $x + y \in Y$.

(V2). Akan dibuktikan $x + y = y + x$

$$\begin{aligned} x + y &= (x_n) + (y_n) \\ &= (x_n + y_n) \\ &= (y_n + x_n) \\ &= y + x \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $x + y = y + x$

(V3). Akan dibuktikan $(x + y) + z = x + (y + z)$

$$\begin{aligned}
 (x + y) + z &= (x_n) + (y_n) + (z_n) \\
 &= (x_n + y_n) + (z_n) \\
 &= (x_n) + ((y_n) + (z_n)) \\
 &= x + (y + z)
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(x + y) + z = x + (y + z)$

(V4). Terdapat $0 \in Y$ sehingga $0 + x = x + 0 = x$

sedemikian sehingga $0 + x = x + 0 = x$

$$\begin{aligned}
 0 + x &= x + 0 = (x_n) + (0) \\
 &= (x_n + 0) \\
 &= (x_n) \\
 &= x
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa Terdapat $0 \in \mathbb{C}$ sehingga $0 + x = x + 0 = x$

(V5). Terdapat $-x \in Y$ sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$

yang didefinisikan sebagai

$$-x = (-x_n)$$

sedemikian sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$

$$\begin{aligned}
 x + (-x) &= (x_n) + (-x_n) \\
 &= (x_n + (-x_n)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa Terdapat $-x \in Y$ sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$

(V6). Akan dibuktikan $\alpha x \in Y$

$$\begin{aligned}
 \alpha x &= \alpha(x_n) \\
 &= (\alpha x_n) \in Y
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\alpha x \in Y$

(V7). Akan dibuktikan $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)x &= (\alpha + \beta)(x_n) \\&= (\alpha x_n + \beta x_n) \\&= (\alpha x_n) + (\beta x_n) \\&= \alpha x + \beta x\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(V8). Akan dibuktikan $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$$\begin{aligned}\alpha(x + y) &= \alpha(x_n + y_n) \\&= (\alpha x_n + \alpha y_n) \\&= (\alpha x_n) + (\alpha y_n) \\&= \alpha x + \alpha y\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(V9). Akan dibuktikan $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)x &= (\alpha\beta)(x_n) \\&= (\alpha\beta x_n) \\&= \alpha(\beta x_n) \\&= \alpha(\beta x)\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(V10). Akan dibuktikan $1x = x$ untuk setiap $x \in Y$

$$\begin{aligned}1x &= 1(x_n) \\&= (1x_n) \\&= (x_n) = x\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $1x = x$ untuk setiap $x \in Y$.

Karena semua memenuhi semua aksioma, maka terbukti bahwa Y merupakan ruang vektor atas lapangan kompleks.

Definisi 2.3 (Kombinasi Linear) (Kreyszig, 1989)

Suatu kombinasi linear dari vektor-vektor $x_1, \dots, x_n$ dari ruang vektor V merupakan bentuk dari

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

di mana koefisien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ adalah sembarang skalar.

Definisi 2.4 (Bergantung Linear) (Kreyszig, 1989)

Suatu himpunan $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ dikatakan bergantung linear, dengan $n \geq 1$ pada ruang vektor V , didefinisikan sebagai berikut

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

di mana $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ adalah skalar. Setidaknya terdapat satu vektor dari M yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor lainnya. Misalkan, jika berlaku

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

dengan $\alpha \neq 0$, maka M bergantung linear, sehingga diperoleh

$$x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1} \quad \left(\beta_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_n} \right)$$

2.1.2 Ruang Bernorma

Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan norma. Dalam konsep ruang bernorma, norma memenuhi aksioma-aksioma tertentu, berikut definisi ruang bernorma.

Definisi 2.5 (Rynne & Youngson, 2008)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$. Suatu norma pada V merupakan pemetaan $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(N1). \|x\| \geq 0$$

$$(N2). \|x\| = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = 0$$

$$(N3). \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N4). \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (ketaksamaan segitiga)}$$

Ruang vektor V yang memiliki norma disebut ruang bernorma.

Contoh 2.6

Misalkan X adalah himpunan semua barisan bilangan kompleks. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, didefinisikan suatu norma pada X sebagai

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

Tunjukkan bahwa $\|\cdot\|$ adalah ruang bernorma.

Penyelesaian:

$$(N1). \text{ Akan dibuktikan } \|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \text{ di mana } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \geq 0 \text{ dengan kata lain } \|x\| \geq 0.$$

Karena modulus bilangan kompleks selalu tak negatif, maka $\|x\| \geq 0$.

$$(N2). \text{ Akan dibuktikan } \|x\| = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = 0$$

$$(\rightarrow) \text{ jika } \|x\| = 0, \text{ maka } x = 0$$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

Artinya $x_i = 0$ untuk semua i , sehingga $x = 0$.

($\leftarrow$) Jika $x = 0$, maka $\|x\| = 0$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |0|^2$$

$$\|x\| = 0$$

Terbukti bahwa $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(N3). Akan dibuktikan $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$$\|\alpha x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha|^2 |x_i|^2$$

$$= |\alpha|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$= |\alpha| \|x\|$$

Terbukti bahwa $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(N4). Akan dibuktikan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x + y\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + |y_i|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

Sehingga diperoleh $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Maka terbukti bahwa

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Karena keempat aksioma terpenuhi, maka $\|x\|$ adalah ruang bernorma.

Contoh 2.7

Misalkan X adalah himpunan semua barisan bilangan kompleks. Untuk $x =$

$(x_1, x_2, \dots) \in X$, didefinisikan suatu norma pada X sebagai

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2$$

Tunjukkan bahwa $\|\cdot\|$ adalah ruang bernorma.

Penyelesaian:

(N1). Akan dibuktikan $\|x\| \geq 0$

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 \text{ di mana } \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 \geq 0 \text{ dengan kata lain } \|x\| \geq 0.$$

Karena modulus bilangan kompleks selalu tak negatif, maka $\|x\| \geq 0$.

(N2). Akan dibuktikan $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

($\rightarrow$) Jika $\|x\| = 0$, maka $x = 0$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$x = 0$$

($\leftarrow$) Jika $x = 0$, maka $\|x\| = 0$

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 = 0$$

$$|x_{2n}|^2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|x_{2n}| = 0$$

$$x_{2n} = 0$$

$$x = (0, 0, 0, \dots)$$

Namun, dapat dilihat bahwa $x \neq (0, 0, 0, \dots)$. Sehingga tidak terpenuhi

$$\|x\| = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = 0.$$

(N3). Akan dibuktikan $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_{2n}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^2 |x_{2n}|^2 \\ &= |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 \end{aligned}$$

$$= |\alpha| \|x\|$$

(N4). Akan dibuktikan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n} + y_{2n}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 + |y_{2n}|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_{2n}|^2 \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Karena aksioma ke dua tidak terpenuhi, maka terbukti bahwa $\|x\|$ bukan merupakan ruang bernorma.

Definisi 2.8 (Kreyszig, 1978)

Suatu barisan (x_n) di ruang bernorma V konvergen ke x jika V memuat x sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Atau ditulis $(x_n) \rightarrow x$.

Definisi 2.9 (Sherbert, 2010)

Suatu barisan $X = (x_n)$ dikatakan terbatas jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.10 (Sherbert, 2010)

Suatu barisan konvergen adalah barisan yang terbatas.

Bukti:

Misalkan $x_n \rightarrow x$ ambil $\varepsilon = 1$, berdasarkan definisi terdapat $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < 1$ untuk semua $n > \mathbb{N}$. Kemudian dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, untuk $n \geq \mathbb{N}$ didapatkan

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

pilih

$$M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n-1}|, 1 + |x|\}$$

Sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

2.1.3 Ruang Hasil Kali Dalam

Sebelum membahas semi hasil kali dalam, akan dibahas terlebih dahulu tentang ruang hasil kali dalam karena semi hasil kali dalam merupakan generalisasi dari ruang hasil kali dalam.

Definisi 2.11 (Rynne & Youngson, 2008)

Misalkan diketahui V sebagai ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$. Hasil kali dalam pada V adalah fungsi $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian hingga untuk setiap $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(H1). [x, x] \geq 0$$

$$(H2). [x, x] = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = 0$$

$$(H3). [\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$$

$$(H4). [x, y] = \overline{[y, x]}$$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

Contoh 2.12

Misalkan X adalah himpunan barisan bilangan kompleks. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in X$, didefinisikan fungsi $[\cdot, \cdot] : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ sebagai

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

untuk $(x_i), (y_i) \in X$ dan $\bar{y}_i$ adalah konjugat y_i . Tunjukkan bahwa $[.,.]$ merupakan hasil kali dalam.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa $[.,.]$ merupakan hasil kali dalam, yaitu:

(H1). Akan dibuktikan $[x, x] \geq 0$

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \geq 0 \\ &= [x, x] \geq 0 \end{aligned}$$

Karena modulus bilangan kompleks selalu tak negatif, maka $[x, x] \geq 0$.

(H2). Akan dibuktikan $[x, x] = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

($\rightarrow$) Jika $[x, x] = 0$, maka $x = 0$

Diketahui bahwa $[x, x] = 0$, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{x}_i \\ 0 &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

($\leftarrow$) Jika $x = 0$, maka $[x, x] = 0$

Diketahui bahwa $x = 0$, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |0|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $[x, x] = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(H3). Akan dibuktikan $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$

$$\begin{aligned}
 [\alpha x + \beta y, z] &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i + \beta y_i) \bar{z}_i \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i + \bar{z}_i) + \sum_{i=1}^{\infty} (\beta y_i + \bar{z}_i) \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + \bar{z}_i) + \beta \sum_{i=1}^{\infty} (y_i + \bar{z}_i) \\
 &= \alpha[x, z] + \beta[y, z]
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$.

(H4). Akan dibuktikan $[x, y] = \overline{[y, x]}$

Karena telah diketahui

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
 \overline{[y, x]} &= \overline{\sum_{i=1}^{\infty} y_i \bar{x}_i} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y_i \bar{x}_i} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{y}_i x_i \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \\
 &= [x, y]
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $[x, y] = \overline{[y, x]}$.

Karena keempat aksioma terpenuhi, maka $[\cdot, \cdot]$ merupakan hasil kali dalam.

Contoh 2.13

Misalkan X adalah himpunan barisan bilangan kompleks. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in X$, didefinisikan fungsi $[\cdot, \cdot]: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ sebagai

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i} \bar{y}_{2i}$$

untuk $(x_i), (y_i) \in X$ dan $\forall i \in \mathbb{N}$, $\bar{y}_i$ adalah konjugat y_i . Tunjukkan bahwa $[\cdot, \cdot]$ merupakan hasil kali dalam.

Penyelesaian:

(H1). Akan dibuktikan $[x, x] \geq 0$

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i} \overline{x_{2i}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_{2i}|^2 \geq 0 \\ &= [x, x] \geq 0 \end{aligned}$$

Karena modulus bilangan kompleks selalu tak negatif, maka $[x, x] \geq 0$.

(H2). Akan dibuktikan $[x, x] = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

($\rightarrow$) Jika $[x, x] = 0$, maka $x = 0$

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i} \overline{x_{2i}} \\ 0 &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_{2i}|^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

($\leftarrow$) Jika $x = 0$, maka $[x, x] = 0$

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i} \overline{x_{2i}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_{2i}|^2 &= 0, \forall i \in \mathbb{N} \\ |x_{2i}|^2 &= 0 \\ x_{2i} &= 0 \end{aligned}$$

Namun, dapat dilihat bahwa $x \neq (0, 0, 0, \dots)$. Sehingga tidak terbukti

$[x, x] = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(H3). Akan dibuktikan $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$

$$\begin{aligned} [\alpha x + \beta y, z] &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_{2i} + \beta y_{2i}) \overline{z_{2i}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_{2i} + \overline{z_{2i}}) + \sum_{i=1}^{\infty} (\beta y_{2i} + \overline{z_{2i}}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} (x_{2i} + \overline{z_{2i}}) + \beta \sum_{i=1}^{\infty} (y_{2i} + \overline{z_{2i}}) \end{aligned}$$

$$= \alpha[x, z] + \beta[y, z]$$

Terbukti bahwa $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$.

(H4). Akan dibuktikan $[x, y] = \overline{[y, x]}$

Karena telah diketahui

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{2i} \overline{y_{2i}}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \overline{[y, x]} &= \overline{\sum_{i=1}^{\infty} y_{2i} \overline{x_{2i}}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y_{2i} \overline{x_{2i}}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y_{2i}} x_{2i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i} \overline{y_{2i}} \\ &= [x, y] \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $[x, y] = \overline{[y, x]}$.

Karena aksioma dua tidak terpenuhi, maka $[.,.]$ bukan merupakan hasil kali dalam.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadist

Pada kajian integrasi ini bertujuan untuk mencari petunjuk dari ayat Al-Qur'an ataupun Hadist yang berkaitan dengan topik pembahasan, yaitu sifat-sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam. Beberapa sifatnya adalah identitas dasar, ketaksamaan segitiga, dan hukum jajar genjang. Sifat-sifat tersebut secara umum beragam atau bermacam-macam tetapi sama-sama berlaku pada ruang semi hasil kali dalam.

Pada masa Nabi Muhammad *shallallahu 'alai wasallam*, umat Islam menerima sifat-sifat Allah sebagaimana yang disebutkan dalam Al-Qur'an tanpa mendalami maknanya secara mendalam. Sifat-sifat tersebut dianggap sebagai kesempurnaan yang mutlak. Sifat-sifat kesempurnaan Allah memberikan gambaran tentang keagungan dan kemuliaan-Nya yang tidak terbatas. Hal ini menjadikan Allah lebih mulia dan lebih agung dari pada segala sesuatu yang ada, karena sifat-sifat-Nya mencerminkan keunggulan yang tidak terbandingkan dengan apapun. Itu sebabnya Allah memiliki sifat mengetahui, Esa, dan semua sifat kesempurnaan lainnya (Cecep Anwar, 2023).

Menurut Muhammad Abduh dalam Risalah at-Tauhid menjelaskan bahwa golongan *Ahlussunnah*, terutama dari kalangan Asy'ariah dan Maturidiah, mengajarkan bahwa Allah memiliki sifat-sifat seperti '*ilmu, qudrat, iradat, sama*', *bashar* dan lain sebagainya. Mereka memandang bahwa penting bagi umat Islam untuk menyakini bahwa Allah memiliki sifat-sifat tersebut, yang merupakan ciri khas dan pembeda dari sifat-sifat makhluk-Nya (Wirman, 2013). Prinsip ini dikenal sebagai *akidah mukhalafah* atau perbedaan mutlak. Akidah ini memperlihatkan bahwa istilah yang digunakan kepada Allah harus dipahami dalam pengertian tersendiri atau tidak sama dengan makhluknya (Cecep Anwar, 2023).

Penetapan sifat-sifat Allah didasarkan pada kenyataan yang dijelaskan melalui Al-Qur'an dan Hadist, yang merupakan sumber utama akidah Islam. Akan tetapi, pemahaman ini membutuhkan penalaran akal sehat, terutama bagi orang yang belum mempercayai keberadaan Allah sebagai Tuhan. Menetapkan sifat-sifat Allah bukan hanya sekedar formalitas, tetapi merupakan keharusan untuk memahami makna dari sifat-sifat tersebut. Dengan demikian, orang yang belum

paham dapat mendapatkan pemahaman yang lebih dalam dan mampu menjelaskan sifat-sifat Allah secara rinci yang kemudian dapat memperkuat keyakinan kepada Allah (Arifinsyah, 2020).

Keberadaan sifat-sifat Allah tersebut diungkapkan oleh seorang ulama yang bernama Abduh secara jelas sebagai berikut:

“Bahwa sesungguhnya sifat-sifat Allah yang wajib diyakini (oleh orang beriman) adalah bersumber dari petunjuk akal dan informasi yang diberikan oleh syariat Islam. Keyakinan ini juga merupakan keimanan seluruh nabi-nabi yang diutus oleh Allah kepada umat yang berbeda-beda. Sebagian dari sifat-sifat itu ada yang disebut secara jelas oleh syariat dan dapat diterima oleh akal dengan penggambaran yang layak untuk Allah. Karena analisis rasional saja tidak cukup untuk memahami semua itu, maka diperlukan perangkat iman yaitu ketundukan dan kepercayaan bahwa Allah memiliki sifat-sifat itu sesuai dengan informasi wahyu yang disampaikan oleh para Rasul Allah” (Wirman, 2013).

Selanjutnya Syekh Muhammad mengemas sifat-sifat Allah dengan membaginya berdasarkan tiga kategori hukum akal, yaitu wajib, mustahil, dan jaiz. Dalam pembagian ini beliau menetapkan bahwa terdapat 20 sifat wajib bagi Allah, 20 sifat yang mustahil bagi Allah, dan 1 sifat jaiz bagi Allah (Arifinsyah, 2020). Sifat wajib bagi Allah *subhanahu wata'ala* merupakan sifat yang pasti (wajib dimiliki oleh Allah, yang sesuai dengan keagungan-Nya sebagai Pencipta alam dan seisinya. Pada dasarnya, Allah memiliki sifat-sifat yang tak terbatas karena Allah adalah Maha Segalanya. Namun, dalam ajaran *ahlussunnah* dijelaskan bahwa setiap umat Islam wajib meyakini dan mengimani 20 sifat wajib bagi Allah *subhanahu wata'ala*. Sifat-sifat ini mencakup aspek-aspek kesempurnaan dan kebesaran Allah yang harus diyakini oleh setiap muslim (Cecep Anwar, 2023).

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada subbab ini akan dibahas mengenai definisi ruang semi hasil kali dalam serta sifat-sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam. Selanjutnya, didefinisikan ruang semi hasil kali dalam sebagaimana berikut.

Definisi 4.1 (Ruang Semi Hasil Kali Dalam) (Promislow, 2008)

Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$. Semi hasil kali dalam pada V adalah pemetaan $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in V$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(I1). [x, x] \geq 0$$

$$(I2). [x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$(I3). [\lambda x, y] = \lambda [x, y]$$

$$(I4). [x, y] = \overline{[y, x]}$$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan semi hasil kali dalam disebut ruang semi hasil kali dalam.

Definisi 4.3 (Kreyszig, 1989)

Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam atas lapangan $\mathbb{C}$. Norma pada suatu ruang hasil kali dalam didefinisikan dengan

$$\|x\| = \sqrt{[x, x]} = [x, x]^{1/2}$$

Norma ini dikatakan norma yang diinduksi dari hasil kali dalam.

Definisi 4.5 (Seminorma) (Nel, 2016)

Misalkan V adalah ruang vektor. Fungsi $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{C}$ dikatakan seminorma pada V jika memenuhi.

$$(O1). \|x\| \geq 0, (x \in V)$$

$$(O2). \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, (\alpha \in \mathbb{C}, x \in V)$$

$$(O3). \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (x, y \in V)$$

Seminorma yang diinduksi dari semi hasil kali dalam berbentuk

$$\|x\| = \sqrt{[x, x]} = [x, x]^{\frac{1}{2}}$$

(Promislow, 2008).

Lemma 4.7 (Identitas Dasar) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam, maka untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y]$$

dimana $\operatorname{Re}[x, y]$ menunjukkan bagian real dari $[x, y]$.

Teorema 4.8 (Ketaksamaan Cauchy-Schwartz) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam, maka untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$|[x, y]| \leq \|x\| \|y\|$$

Pada kasus hasil kali dalam, maka persamaan berlaku jika dan hanya jika x dan y bergantung linear (artinya salah satu dari x dan y adalah kelipatan skalar dari yang lain).

Proposisi 4.9 (Hukum Jajar Genjang) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam, maka untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Proposisi 4.10 (Identitas Polarisasi) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam, maka untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$[x, y] = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Teorema 4.11 (Promislow, 2008)

Jika suatu norma $\|\cdot\|$ pada ruang vektor X memenuhi hukum jajar genjang, maka norma tersebut dapat diinduksi oleh hasil kali dalam.

Teorema 4.12 (Kekontinuan Hasil Kali Dalam) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam. Pada ruang semi hasil kali dalam, jika barisan $(x_n) \rightarrow x$ dan $(y_n) \rightarrow y$, maka $([x_n, y_n]) \rightarrow [x, y]$ untuk $x, y \in V$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode kualitatif. Kualitatif ini berdasarkan pada studi literatur. Metode studi literatur merupakan metode yang dilakukan dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber, membaca, dan mencatat serta mengolah bahan penelitian. Objek yang digunakan dalam penelitian ini adalah sifat-sifat ruang semi hasil kali dalam.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum melakukan penelitian, peneliti mengumpulkan beberapa rujukan dari penelitian terdahulu yang berhubungan dengan topik penelitian yang akan digunakan. Dalam penelitian ini peneliti menggunakan rujukan utama dari buku Promislow (2008).

3.3 Tahapan Penelitian

Untuk membuktikan sifat-sifat ruang semi hasil kali dalam, langkah-langkah yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan lemma 4.7 (identitas dasar)
 - a. Mendefinsikan ruang bernorma.
 - b. Memaparkan definisi ruang semi hasil kali dalam.
 - c. Membuktikan $\|x + y\|^2$ menggunakan aksioma-aksioma semi hasil kali dalam.

- d. Terbukti lemma 4.7 (identitas dasar).
2. Membuktikan teorema 4.8 (ketaksamaan Cauchy-Schwartz)
 - a. Mendefinisikan fungsi pada kombinasi linier.
 - b. Mengembangkan fungsi menjadi fungsi kuadrat.
 - c. Membuktikan fungsi kuadrat adalah non-negatif.
 - d. Terbukti 4.8 ketaksamaan Cauchy-Schwartz.
3. Membuktikan proposisi 4.9 (hukum jajar genjang).
 - a. Membuktikan $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ menggunakan aksioma-aksioma semi hasil kali dalam dan identitas dasar.
 - b. Terbukti proposisi 4.9 (hukum jajar genjang).
4. Membuktikan proposisi 4.10 (identitas polarisasi).
 - a. Membuktikan $\|x + y\|^2$ dan $\|x - y\|^2$ menggunakan aksioma-aksioma semi hasil kali dalam dan identitas dasar.
 - b. Mendefinisikan $\operatorname{Re}[x, y]$.
 - c. Mengubah bagian imajiner menjadi bagian real.
 - d. Terbukti proposisi 4.10 (identitas polarisasi).
5. Membuktikan teorema 4.11
 - a. Mendefinisikan fungsi hasil kali dalam.
 - b. Membuktikan fungsi tersebut memenuhi aksioma-aksioma hasil kali dalam.
 - c. Membuktikan aksioma kelinieran menggunakan hukum jajar genjang.
 - d. Terbukti teorema 4.11.
6. Membuktikan teorema 4.12 (kekontinuan pada hasil kali dalam).
 - a. Mendefinisikan kekonvergenan pada ruang bernorma.

- b. Mendefinsikan barisan terbatas.
- c. Membuktikan barisan konvergen adalah barisan terbatas.
- d. Mengembangkan $||x_n, y_n] - [x, y]|$ sehingga sesuai dengan ketaksamaan Cauchy-Schwartz.
- e. Terbukti teorema 4.12 (kekontinuan pada hasil kali dalam).

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Ruang Semi Hasil Kali Dalam

Sebelum membuktikan beberapa sifat yang berkaitan dengan ruang semi hasil kali dalam, akan dipaparkan terlebih dahulu beberapa definisi yang berkaitan dengan topik. Definisi tersebut di antaranya adalah definisi ruang semi hasil kali dalam, ruang hasil kali dalam dan seminorma. Kemudian, dilanjutkan dengan melakukan pembuktian pada sifat-sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam.

Definisi 4.1 (Ruang Semi Hasil Kali Dalam) (Promislow, 2008)

Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$. Semi hasil kali dalam pada V adalah pemetaan $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in V$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut.

$$(I1). [x, x] \geq 0$$

$$(I2). [x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$(I3). [\lambda x, y] = \lambda [x, y]$$

$$(I4). [x, y] = \overline{[y, x]}$$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan semi hasil kali dalam disebut ruang semi hasil kali dalam.

Akibat dari aksioma ke (I2), (I3), dan (I4) adalah

$$[z, x + y] = [z, x] + [z, y]$$

$$[x, \lambda y] = \bar{\lambda} [x, y]$$

Selain itu, jika $x = 0$, maka

$$[x, x] = [0, x] = [0x, x] = 0[x, x] = 0$$

$$[x, x] = [x, 0] = [x, x0] = 0[x, x] = 0[x, x] = 0,$$

di mana 0 yang muncul pada $[x, x]$ adalah vektor nol.

Dengan demikian jika $x = 0$, maka $[x, x] = [0, x] = [x, 0] = 0$.

Untuk semua $x \in V$ apabila $[x, x] = 0$ berakibat $x = 0$, maka $[\cdot, \cdot]$ disebut sebagai hasil kali dalam.

Contoh 4.2 (Ruang Semi Hasil Kali Dalam)

Misalkan Y adalah himpunan semua barisan bilangan kompleks di mana untuk $x = (x_n) \in Y$ dengan

$$x_n = \begin{cases} a_k \in \mathbb{C}, a_k \neq 0 & \text{untuk } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{untuk } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Didefinisikan $[\cdot, \cdot]: Y \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ sebagai

$$[x, y] = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{y_{2n}}$$

Penjumlahan hasil kali suku-suku genap barisan (x_n) dan konjugat suku-suku genap barisan (y_n) . Tunjukkan bahwa $[\cdot, \cdot]$ adalah semi hasil kali dalam di V .

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $[\cdot, \cdot]$ adalah semi hasil kali dalam di Y .

(I1). Akan dibuktikan $[x, x] \geq 0$

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{x_{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 \geq 0 \\ &= [x, x] \geq 0 \end{aligned}$$

Karena modulus bilangan kompleks selalu non-negatif, maka $[x, x] =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{x_{2n}} \geq 0.$$

(I2). Akan dibuktikan bahwa $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

$$\begin{aligned} [x + y, z] &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_{2n} + y_{2n}) \overline{z_{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_{2n} \overline{z_{2n}}) + \sum_{n=1}^{\infty} (y_{2n} \overline{z_{2n}}) \\ &= [x, z] + [y, z] \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$.

(I3). Akan dibuktikan bahwa $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$

Misalkan λ adalah bilangan kompleks

$$\begin{aligned} [\lambda x, y] &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_{2n} \overline{y_{2n}} \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{y_{2n}} \\ &= \lambda [x, y] \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$.

(I4). Selanjutnya, akan dibuktikan $[x, y] = \overline{[y, x]}$

Karena telah diketahui

$$[x, y] = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{y_{2n}}$$

selanjutnya

$$\begin{aligned} \overline{[y, x]} &= \overline{\sum_{n=1}^{\infty} y_{2n} \overline{x_{2n}}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_{2n} \overline{x_{2n}}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_{2n}} x_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{y_{2n}} \\ &= [x, y] \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $[x, y] = \overline{[y, x]}$.

Karena kelima aksioma terpenuhi, maka terbukti bahwa $[\cdot, \cdot]$ adalah semi hasil kali dalam di Y .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $[\cdot, \cdot]$ bukan merupakan hasil kali dalam di Y . Untuk setiap $x \in Y$, apabila $[x, x] = 0$ berakibat $x = 0$.

Pilih barisan $x = (2, 0, 1, 0, 3i, 0, 5, 0, i, 0, \dots)$

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{x_{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Namun, dapat dilihat bahwa $x \neq (0, 0, 0, \dots)$.

Ini menunjukkan bahwa $[\cdot, \cdot]$ adalah semi hasil kali dalam yang bukan merupakan hasil kali dalam.

4.2 Norma yang Diinduksi dari Hasil Kali Dalam

Ruang hasil kali dalam dapat menjadi ruang bernorma dengan norma yang diinduksi dari hasil kali dalamnya yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.3 (Kreyszig, 1989)

Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam atas lapangan $\mathbb{C}$. Norma pada suatu ruang hasil kali dalam didefinisikan dengan

$$\|x\| = \sqrt{[x, x]} = [x, x]^{1/2}$$

Norma ini dikatakan norma yang diinduksi dari hasil kali dalam.

Contoh 4.4

Misalkan X adalah himpunan barisan bilangan kompleks. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in X$. Berdasarkan contoh 2.6, $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan sebagai $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{x}_i)^{1/2}$ adalah norma. Untuk $(x_i) \in X$ dan $\bar{x}_i$ adalah konjugat x_i , tunjukkan bahwa $\|\cdot\|$ adalah norma yang diinduksi dari hasil kali dalam

Penyelesaian:

Berdasarkan contoh 2.12, $[\cdot, \cdot]: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan sebagai $[x, y] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$ adalah hasil kali dalam.

Sehingga

$$\begin{aligned} \|x\| &= (\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{x}_i)^{1/2} \\ &= \sqrt{[x, x]} \\ &= ([x, x])^{1/2} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\|\cdot\|$ adalah norma yang diinduksi dari hasil kali dalam.

4.3 Seminorma yang Dibentuk dari Semi Hasil Kali Dalam

Sebelum membahas sifat-sifat pada ruang semi hasil kali dalam, akan dibahas terlebih dahulu seminorma yang dibentuk dari semi hasil kali dalam atau ruang seminorma. Berikut definisinya.

Definisi 4.5 (Seminorma) (Nel, 2016)

Misalkan V adalah ruang vektor. Fungsi $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{C}$ dikatakan seminorma pada V jika memenuhi.

$$(O1). \|x\| \geq 0, \quad (x \in V)$$

$$(O2). \| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|, \quad (\alpha \in \mathbb{C}, x \in V)$$

$$(O3). \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \quad (x, y \in V)$$

Jika $\| \cdot \|$ memiliki sifat $\| x \| = 0$ yang berakibat $x = 0$, maka $\| \cdot \|$ adalah norma (Wilde, 2003).

Seminorma dapat didefinisikan menggunakan semi hasil kali dalam, yaitu sebagai berikut.

$$\| x \| = \sqrt{[x, x]} = [x, x]^{\frac{1}{2}}$$

(Promislow, 2008).

Contoh 4.6 (Seminorma)

Misalkan Y adalah himpunan semua barisan bilangan kompleks di mana untuk $x = (x_n) \in Y$ dengan

$$x_n = \begin{cases} a_k \in \mathbb{C}, a_k \neq 0 & \text{untuk } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{untuk } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Didefinisikan $\| \cdot \|: Y \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ sebagai

$$\| x \| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n} \overline{x_{2n}}|$$

Penjumlahan hasil kali suku-suku genap barisan (x_n) dan konjugat suku-suku genap barisan (y_n) . Tunjukkan bahwa $\| \cdot \|$ adalah seminorma.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $\| \cdot \|$ merupakan seminorma jika memenuhi kondisi berikut.

(O1). Akan ditunjukkan bahwa $\| x \| \geq 0$ untuk semua $x \in Y$

$$\begin{aligned} \| x \| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n} \overline{x_{2n}}| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$= \|x\| \geq 0$$

Karena modulus bilangan kompleks selalu non-negatif, maka terbukti bahwa $\|x\| \geq 0$.

(O2). Akan dibuktikan bahwa $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_{2n} \overline{x_{2n}} \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{x_{2n}} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(O3). Akan ditunjukkan bahwa $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_{2n} \overline{x_{2n}} + y_{2n} \overline{y_{2n}}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_{2n}|^2 \\ &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\|\cdot\|$ bukan merupakan norma di Y .

Untuk setiap $x \in Y$, apabila $\|x\| = 0$ berakibat $x = 0$.

Pilih barisan $x = (2, 0, 1, 0, 3i, 0, 5, 0, i, 0, \dots)$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n} \overline{x_{2n}}| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Namun, dapat dilihat bahwa $x \neq (0, 0, 0, \dots)$.

Ini menunjukkan bahwa $\|x\|$ adalah seminorma yang bukan norma.

Karena semua aksioma terpenuhi maka $\|\cdot\|$ merupakan seminorma. Selanjutnya, akan diberikan contoh seminorma yang diinduksi dari semi hasil kali dalam.

Misalkan Y adalah himpunan semua barisan bilangan kompleks di mana untuk $x = (x_n) \in Y$ dengan

$$x_n = \begin{cases} a_k \in \mathbb{C}, a_k \neq 0 & \text{untuk } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{untuk } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Telah dibuktikan bahwa $\|x\|$ adalah seminorma pada contoh 4.6. Tunjukkan $\|\cdot\|$ adalah seminorma yang diinduksi dari semi hasil kali dalam.

Penyelesaian:

Berdasarkan contoh 4.2 telah dibuktikan bahwa $[\cdot, \cdot]$ adalah ruang semi hasil kali dalam yang didefinisikan $[\cdot, \cdot]: Y \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ sebagai $[x, y] = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{y_{2n}}$.

Sehingga

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{x_{2n}}} \\ &= [\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \overline{x_{2n}}]^{\frac{1}{2}} \\ &= [x, x]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\|\cdot\|$ adalah seminorma yang diinduksi dari semi hasil kali dalam.

4.4 Sifat-Sifat Ruang Semi Hasil Kali Dalam

Promislow (2008) telah memaparkan beberapa lemma, teorema, serta Proposisi yang terpenuhi pada ruang semi hasil kali dalam. Beberapa di antaranya yaitu, lemma identitas dasar, ketaksamaan Cauchy-Schwartz, ketaksamaan segitiga, dan lain sebagainya.

Lemma 4.7 (Identitas Dasar) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam, maka untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y]$$

di mana $\operatorname{Re}[x, y]$ menunjukkan bagian real dari $[x, y]$.

Bukti:

Untuk membuktikan lemma ini digunakan aksioma ruang semi hasil kali dalam, yaitu

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

serta

$$[x, y] = \overline{[y, x]}$$

maka

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= [x + y, x + y] && \text{(kedua ruas dikuadratkan)} \\
 &= [x, x + y] + [y, x + y] \\
 &= [x, x] + [x, y] + \overline{[y, x]} + [y, y] && \text{(berdasarkan I2)} \\
 &= \|x\|^2 + [x, y] + \overline{[y, x]} + \|y\|^2 \\
 &= \|x\|^2 + [x, y] + [x, y] + \|y\|^2 && \text{(berdasarkan I4)} \\
 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y] + \|y\|^2 && \text{(lemma identitas dasar)}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y]$$

Dengan demikian lemma identitas dasar terbukti.

Teorema 4.8 (Ketaksamaan Cauchy-Schwartz) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam, maka untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$|[x, y]| \leq \|x\| \|y\|$$

Pada kasus hasil kali dalam, maka persamaan tersebut berlaku jika dan hanya jika x dan y bergantung linear (artinya salah satu dari x atau y adalah kelipatan skalar dari yang lain).

Bukti:

Didefinisikan suatu fungsi $f(t)$ sebagai berikut.

$$f(t) = \|x + ty\|^2$$

untuk semua $x, y \in V$.

Sehingga

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \|x + ty\|^2 \\
 &= [x + ty, x + ty] \\
 &= [x, x] + t[x, y] + t\overline{[y, x]} + t^2[y, y] && \text{(berdasarkan I2)} \\
 &= \|x\|^2 + t[x, y] + t\overline{[y, x]} + t^2\|y\|^2 \\
 &= \|x\|^2 + t[x, y] + t[x, y] + t^2\|y\|^2 && \text{(berdasarkan I4)} \\
 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}([x, y])t + \|y\|^2 t^2
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan kuadrat di atas secara umum dapat di bentuk menjadi

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}([x, y])t + \|y\|^2 t^2 \\
 f(t) &= at^2 + bt + c
 \end{aligned}$$

di mana

$$a = \|y\|^2$$

$$b = 2\operatorname{Re}([x, y])$$

$$c = \|x\|^2$$

Kemudian, untuk memastikan bahwa fungsi $f(t)$ tersebut selalu non-negatif, substitusikan persamaan kuadrat tersebut ke dalam diskriminan (Δ) dari persamaan kuadrat yang dirumuskan sebagai berikut.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

sehingga

$$\Delta = (2\operatorname{Re}([x, y]))^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2$$

$$= 4(\operatorname{Re}([x, y]))^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2$$

Agar fungsi $f(t)$ selalu non-negatif, maka haruslah $\Delta \leq 0$, maka

$$\Delta \leq 4(\operatorname{Re}([x, y]))^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2$$

$$4(\operatorname{Re}([x, y]))^2 \leq 4\|y\|^2\|x\|^2$$

$$(\operatorname{Re}([x, y]))^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

Namun, yang ingin dibuktikan adalah ketaksamaan untuk modulus atau nilai mutlak dari $[x, y]$. Karena $|[x, y]|$ lebih besar atau sama dengan $|\operatorname{Re}[x, y]|$, maka

$$|[x, y]|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

$$|[x, y]| \leq \|x\|\|y\| \quad (\text{ketaksamaan Cauchy-Schawrtz})$$

Pada kasus hasil kali dalam, ketaksamaan $|[x, y]| = \|x\|\|y\|$ terjadi jika dan hanya jika diskriminan dari fungsi kuadrat adaah nol, yaitu

$$(\operatorname{Re}([x, y]))^2 = \|y\|^2\|x\|^2$$

Ini terjadi jika dan hanya jika $|[x, y]| = \|x\|\|y\|$. Hal ini dapat terjadi jika x atau y bergantung linier, yaitu terdapat suatu skalar α sehingga $x = \alpha y$ atau $y = \alpha x$.

Proposisi 4.9 (Hukum Jajar Genjang) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam, maka untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Bukti:

Dengan menggunakan aksioma ruang semi hasil kali dalam serta lemma identitas dasar diperoleh

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= [x + y, x + y] + [x - y, x - y] \\
&= [x, x + y] + [y, x + y] + [x, x - y] + [-y, x - y] \\
&= [x, x] + [x, y] + \overline{[y, x]} + [y, y] + \\
&\quad [x, x] + [x, -y] + \overline{[-y, x]} + [-y, -y] \\
&= \|x\|^2 + [x, y] + \overline{[y, x]} + \|y\|^2 + \|x\|^2 - [x, y] - \\
&\quad \overline{[y, x]} + \|y\|^2
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{berdasarkan V2}) \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{berdasarkan V8})
\end{aligned}$$

Dengan demikian hukum jajar genjang terbukti.

Proposisi 4.10 (Identitas Polarisasi) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam, maka untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$[x, y] = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Bukti:

Untuk semua $x, y \in \mathbb{C}$, maka

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= [x + y, x + y] \\
&= [x + y, x] + [x + y, y] \\
&= [x, x] + \overline{[y, x]} + [x, y] + [y, y] \quad (\text{berdasarkan I2}) \\
&= \|x\|^2 + [x, y] + \overline{[y, x]} + \|y\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|x\|^2 + [x, y] + [x, y] + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2[x, y] + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y] + \|y\|^2 \quad (\text{lemma identitas dasar})
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= [x - y, x - y] \\
&= [x - y, x] - [x - y, y] \\
&= [x, x] - \overline{[y, x]} - [x, y] + [y, y] \quad (\text{berdasarkan I2}) \\
&= \|x\|^2 - [x, y] - \overline{[y, x]} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - [x, y] - [x, y] + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2[x, y] + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}[x, y] + \|y\|^2 \quad (\text{lemma identitas dasar})
\end{aligned}$$

Menurut (Kreyszig, 1989), jika

$$\operatorname{Re}[x, y] = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}((\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y] + \|y\|^2) - (\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}[x, y] + \|y\|^2)) \\
&= \frac{1}{4}(\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y] + \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y] - \|y\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(2\operatorname{Re}[x, y] + 2\operatorname{Re}[x, y]) \\
&= \frac{1}{4}(4\operatorname{Re}[x, y]) \\
&= \operatorname{Re}[x, y] \quad (1)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengalikan $z = x + iy$ dengan $-i$ didapatkan

$$\operatorname{Im}[x, y] = \operatorname{Re}([x, iy])$$

Akan diubah bagian imajiner atau y menjadi bagian real atau x , didapatkan

$$-i(z) = -i(x + iy)$$

$$-iz = -ix - i^2y$$

maka

$$-iz = -ix - i^2y$$

$$= -ix - (-1)y \quad (\text{karena nilai } i^2 = -1)$$

$$= -ix + y$$

$$= y - ix$$

Bagian real dari $-iz$ adalah y , sehingga

$$y = \text{Re}(-iz) = \text{Re}(-i[x, y]) = \text{Re}(-[ix, y]) = \text{Re}([ix, -y])$$

diketahui bahwa y adalah bagian imajiner atau $\text{Im}[x, y]$, maka

$$\text{Im}[x, y] = \text{Re}([ix, -y])$$

Karena perkalian dengan $-i$ mengubah bagian imajiner menjadi real dan sebaliknya, maka bagian imajiner dari $[ix, -y]$ adalah bagian real dari $[x, iy]$, sehingga

$$\text{Re}([ix, -y]) = \text{Re}([x, iy])$$

maka,

$$\text{Im}[x, y] = \text{Re}([ix, -y]) = \text{Re}([x, iy])$$

Dengan demikian dari persamaan diatas dapat disimpulkan bahwa

$$\text{Im}[x, y] = \text{Re}([x, iy])$$

Sehingga diperoleh

$$[x, y] = \text{Re}[x, y] + i\text{Im}[x, y]$$

$$= \text{Re}[x, y] + i\text{Re}([x, iy])$$

Selanjutnya telah diketahui bahwa

$$\text{Re}[x, y] = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

maka untuk $i\text{Re}([x, iy])$

$$i\text{Re}([x, iy]) = \frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\|x + iy\|^2 &= [x + iy, x + iy] \\ &= [x + iy, x] + [x + iy, iy] \\ &= [x, x] + \overline{[iy, x]} + [x, iy] + [iy, iy] \quad (\text{berdasarkan I2}) \\ &= \|x\|^2 + [x, iy] + \overline{[iy, x]} + i\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + [x, iy] + [x, iy] + i\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2[x, iy] + i\|y\|^2\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\|x - iy\|^2 &= [x - iy, x - iy] \\ &= [x - iy, x] - [x - iy, iy] \\ &= [x, x] - \overline{[iy, x]} - [x, iy] + [iy, iy] \quad (\text{berdasarkan I2}) \\ &= \|x\|^2 - \overline{[iy, x]} - [x, iy] + i\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - [x, iy] - [x, iy] + i\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2[x, iy] + i\|y\|^2\end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}i(\|x\|^2 + 2[x, iy] + i\|y\|^2) - (\|x\|^2 - 2[x, iy] + i\|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}i(\|x\|^2 + 2[x, iy] + i\|y\|^2 - \|x\|^2 + 2[x, iy] - i\|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}i(2[x, iy] + 2[x, iy]) \\ &= \frac{1}{4}4i[x, iy] \\ &= i\text{Re}([x, iy])\end{aligned} \tag{2}$$

Dengan demikian dengan menggabungkan (1) dan (2), maka identitas polarisasi terbukti.

$$\begin{aligned}[x, y] &= \operatorname{Re}[x, y] + i\operatorname{Im}([x, iy]) \\ &= \operatorname{Re}[x, y] + i\operatorname{Im}[x, y] \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)\end{aligned}$$

Teorema 4.11 (Promislow, 2008)

Jika suatu norma $\|\cdot\|$ pada ruang vektor V atas lapangan kompleks memenuhi hukum jajar genjang, maka norma tersebut dapat diinduksi oleh hasil kali dalam.

Garis besar bukti:

Definisikan suatu fungsi $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ yang diduga menjadi hasil kali dalam untuk setiap $x, y \in V$ sebagai

$$[x, y] = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi $[x, y]$ tersebut memenuhi aksioma-aksioma hasil kali dalam. Aksioma konjugat simetris dan positività sudah jelas. Aksioma kelinearan pada variable pertama perlu dibuktikan menggunakan beberapa operasi aljabar dan sebagainya menggunakan hukum jajar genjang.

Bukti:

Diberikan bahwa norma $\|\cdot\|$ pada V memenuhi hukum jajar genjang jika untuk setiap $x, y \in V$, berlaku

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Didefinisikan fungsi $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sebagai berikut.

$$[x, y] = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $[\cdot, \cdot]$ merupakan hasil kali dalam.

1. Akan ditunjukkan bahwa $[x, x] \geq 0$

Dengan menggunakan hukum jajar genjang, diperoleh

$$\|x - x\| = 0, \text{ maka } \|x - x\|^2 = 0$$

dan

$$\|x + x\| = 2\|x\|, \text{ maka } \|x + x\|^2 = 4\|x\|^2$$

serta

$$\|x + ix\|^2 = \|(1 + i)x\|^2 = (1 + i)^2 \|x\|^2$$

dan

$$\|x - ix\|^2 = \|(1 - i)x\|^2 = (1 - i)^2 \|x\|^2$$

maka

$$\begin{aligned} [x, x] &= \frac{1}{4} (\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2 + i\|x + ix\|^2 - i\|x - ix\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (4\|x\|^2 - 0 + i((1 + i)^2 \|x\|^2) - i((1 - i)^2 \|x\|^2)) \\ &= \frac{1}{4} (4\|x\|^2) \\ &= \|x\|^2 \\ &= [x, x] \geq 0 \end{aligned}$$

Karena modulus bilangan kompleks selalu non-negatif, terlebih jika dikuadratkan, maka terbukti bahwa $[x, x] \geq 0$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $[x, x] = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

Dengan menggunakan hukum jajar genjang, didapat

$$\|x - x\| = 0, \text{ maka } \|x - x\|^2 = 0$$

dan

$$\|x + x\| = 2\|x\| = 2(0) = 0, \text{ maka } \|x + x\|^2 = 4\|x\|^2 = 4(0)^2 = 0$$

serta

$$\begin{aligned}\|x + ix\|^2 &= \|(1 + i)x\|^2 \\ &= (1 + i)^2 \|x\|^2 \\ &= (1 + i)^2 (0)^2 = 0\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\|x - ix\|^2 &= \|(1 - i)x\|^2 \\ &= (1 - i)^2 \|x\|^2 \\ &= (1 - i)^2 (0)^2 = 0\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}[x, x] &= \frac{1}{4} (\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2 + i\|x + ix\|^2 - i\|x - ix\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (0 - 0 + 0 - 0) \\ &= \frac{1}{4} (0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Dengan demikian, $[x, x] = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

3. Akan ditunjukkan bahwa $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$

Untuk semua $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, maka dengan menggunakan hukum jajar genjang didapatkan

$$\|z + \alpha x + \beta y\|^2 = \|(z + \alpha x) + \beta y\|^2 \quad (\text{berdasarkan V3})$$

$$= \|z + \alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 + 2[z + \alpha x, \beta y]$$

$$\|z - \alpha x - \beta y\|^2 = \|(z + \alpha x) - \beta y\|^2 \quad (\text{berdasarkan V3})$$

$$= \|z + \alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 - 2[z + \alpha x, \beta y]$$

$$\|z + \alpha x + i\beta y\|^2 = \|(z + \alpha x) + i\beta y\|^2 \quad (\text{berdasarkan V3})$$

$$= \|z + \alpha x\|^2 + \|i\beta y\|^2 + 2i[z + \alpha x, i\beta y]$$

$$\begin{aligned}\|z - \alpha x - i\beta y\|^2 &= \|(z + \alpha x) - i\beta y\|^2 && \text{(berdasarkan V3)} \\ &= \|z + \alpha x\|^2 + \|i\beta y\|^2 - 2[z + \alpha x, i\beta y]\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}[\alpha x + \beta y, z] &= \frac{1}{4} (\|z + \alpha x + \beta y\|^2 - \|z - \alpha x - \beta y\|^2 + \\ &\quad i\|z + \alpha x + i\beta y\|^2 - i\|z - \alpha x - i\beta y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} ((\|z + \alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 + 2[z + \alpha x, \beta y]) - \\ &\quad (\|z + \alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 - 2[z + \alpha x, \beta y]) + \\ &\quad i(\|z + \alpha x\|^2 + \|i\beta y\|^2 + 2i[z + \alpha x, i\beta y]) - \\ &\quad i(\|z + \alpha x\|^2 + \|i\beta y\|^2 - 2[z + \alpha x, i\beta y])) \\ &= \frac{1}{4} (\|z + \alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 + 2[z + \alpha x, \beta y] - \\ &\quad \|z + \alpha x\|^2 - \|\beta y\|^2 + 2[z + \alpha x, \beta y] + \\ &\quad i(\|z + \alpha x\|^2 + \|i\beta y\|^2 + 2i[z + \alpha x, i\beta y]) - \\ &\quad \|z + \alpha x\|^2 - \|i\beta y\|^2 + 2[z + \alpha x, i\beta y]) \\ &= \frac{1}{4} (2[z + \alpha x, \beta y] + 2[z + \alpha x, \beta y]) + \\ &\quad i(2i[z + \alpha x, i\beta y] + 2[z + \alpha x, i\beta y]) \\ &= \frac{1}{4} (4[z + \alpha x, \beta y] + 4i[z + \alpha x, i\beta y]) \\ &= \frac{1}{4} (4[z, \beta y] + 4[\alpha x, \beta y] + 4i[z, i\beta y] + 4i[\alpha x, i\beta y]) \\ &= \frac{1}{4} (4[z, \beta y] + 4\alpha[x, \beta y] + 4i[z, i\beta y] + 4i\alpha[x, i\beta y]) \\ &= \frac{1}{4} (4([z, \beta y] + \alpha[x, \beta y] + i[z, i\beta y] + i\alpha[x, i\beta y])) \\ &= [z, \beta y] + \alpha[x, \beta y] + i[z, i\beta y] + i\alpha[x, i\beta y] \\ &= \alpha[x, z] + \beta[y, z]\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$.

4. Akan ditunjukkan bahwa $[x, y] = \overline{[y, x]}$

Untuk semua $x, y \in V$

$$[y, x] = \frac{1}{4} (\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2)$$

Dengan menggunakan hukum jajar genjang, maka

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= [x + y, x + y] \\ &= [x + y, x] + [x + y, y] \\ &= [x, x] + \overline{[y, x]} + [x, y] + [y, y] \\ &= \|x\|^2 + [x, y] + [x, y] + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2[x, y] + \|y\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|y + x\|^2 &= [y + x, y + x] \\ &= [y + x, y] + [y + x, x] \\ &= [y, y] + \overline{[y, x]} + [x, y] + [x, x] \\ &= \|y\|^2 + [x, y] + [x, y] + \|x\|^2 = \|x\|^2 + 2[x, y] + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Sehingga $\|x + y\|^2 = \|y + x\|^2$

dan

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= [x - y, x - y] \\ &= [x - y, x] - [x - y, y] \\ &= [x, x] - \overline{[y, x]} - [x, y] - [y, y] \\ &= \|x\|^2 - [x, y] - [x, y] - \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2[x, y] - \|y\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= [y - x, y - x] \\ &= [y - x, y] - [y - x, x] \\ &= [y, y] - \overline{[y, x]} - [x, y] + [x, x] \end{aligned}$$

$$= \|y\|^2 - [x, y] - [x, y] + \|x\|^2 = \|x\|^2 - 2[x, y] + \|y\|^2$$

Sehingga $\|x - y\|^2 = \|y - x\|^2$.

Serta perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\|x + iy\|^2 &= [x + iy, x + iy] \\ &= [x + iy, x] + [x + iy, iy] \\ &= [x, x] + \overline{[iy, x]} + [x, iy] + [iy, iy] \\ &= \|x\|^2 + [x, iy] + [x, iy] + i\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2[x, iy] + i\|y\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|iy + x\|^2 &= [iy + x, iy + x] \\ &= [iy + x, iy] + [iy + x, x] \\ &= [iy, iy] + \overline{[iy, x]} + [x, iy] + [x, x] \\ &= i\|y\|^2 + [x, iy] + [x, iy] + \|x\|^2 = \|x\|^2 + 2[x, iy] + i\|y\|^2\end{aligned}$$

Sehingga $\|x + iy\|^2 = \|y + ix\|^2$.

Kemudian

$$\begin{aligned}\|x - iy\|^2 &= [x - iy, x - iy] \\ &= [x - iy, x] - [x - iy, iy] \\ &= [x, x] - \overline{[iy, x]} - [x, iy] - [iy, iy] \\ &= \|x\|^2 - [x, iy] - [x, iy] - i\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2[x, iy] - i\|y\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|iy - x\|^2 &= [iy - x, iy - x] \\ &= [iy - x, iy] - [iy - x, x] \\ &= [iy, iy] - \overline{[iy, x]} - [x, iy] + [x, x] \\ &= i\|y\|^2 - [x, iy] - [x, iy] + \|x\|^2 = \|x\|^2 - 2[x, iy] + i\|y\|^2\end{aligned}$$

Sehingga $\|x - iy\|^2 = \|y - ix\|^2$.

maka

$$\begin{aligned}
[x, y] &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \\
&= \frac{1}{4} (\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2) \\
&= \frac{1}{4} ((\|x\|^2 - 2\overline{[y, x]} + \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\overline{[y, x]} - \|y\|^2) + \\
&\quad i(\|x\|^2 + 2\overline{[iy, x]} + i\|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\overline{[iy, x]} - i\|y\|^2)) \\
&= \frac{1}{4} (4\overline{[y, x]}) + (4i\overline{[iy, x]}) \\
&= \frac{1}{4} 4(\overline{[y, x]} + i\overline{[iy, x]}) \\
&= \overline{[y, x]}
\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $[x, y] = \overline{[y, x]}$

Karena semua aksioma terpenuhi, maka terbukti bahwa $[\cdot, \cdot]$ adalah hasil kali dalam yang menginduksi norma $\|\cdot\|$, yang membuktikan bahwa norma tersebut dapat diinduksi oleh hasil kali dalam.

Selanjutnya akan dipaparkan sifat ruang semi hasil kali dalam yang terakhir,

Teorema 4.12 (Kekontinuan Hasil Kali Dalam) (Promislow, 2008)

Diberikan V adalah ruang semi hasil kali dalam. Pada setiap ruang semi hasil kali dalam, jika barisan $(x_n) \rightarrow x$ dan $(y_n) \rightarrow y$, maka $([x_n, y_n]) \rightarrow [x, y]$ untuk $x, y \in V$.

Bukti:

Untuk semua $x, y \in V$.

$$\begin{aligned}
|[x_n, y_n] - [x, y]| &= |[x_n, y_n] - [x_n, y] + [x_n, y] - [x, y]| \\
&= |([x_n, y_n] - [x_n, y]) + ([x_n, y] - [x, y])| \text{ (ketaksamaan} \\
&\hspace{15em} \text{segitiga)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |[x_n, y_n] - [x_n, y]| + |[x_n, y] - [x, y]| \\
&\leq |[x_n, y_n - y]| + |[x_n - x, y]|
\end{aligned}$$

Pada ketaksamaan yang terakhir berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Schwartz didapatkan

$$|[x_n, y_n] - [x, y]| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|$$

Karena barisan (x_n) dan (y_n) adalah konvergen, maka $\|x_n\|$ dan $\|y_n\|$ terbatas dan ketika $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$ atau dapat ditulis $([x_n, y_n]) \rightarrow [x, y]$. Dengan demikian terbukti bahwa jika barisan $(x_n) \rightarrow x$ dan $(y_n) \rightarrow y$, maka $([x_n, y_n]) \rightarrow [x, y]$ untuk $x, y \in V$.

4.5 Kajian Integrasi Al-Qur'an/Hadist

Dalam membuktikan sifat-sifat ruang semi hasil kali dalam, tentunya memerlukan definisi-definisi yang berkaitan dengan ruang semi hasil kali dalam. Terdapat beragam sifat yang berlaku pada ruang semi hasil kali dalam, beberapa di antaranya adalah identitas dasar, ketaksamaan Cauchy-schwartz, hukum jajar genjang, dan lain sebagainya. Hal ini serupa dengan al-Qur'an surat Al-Hasyr ayat 22 sampai 24 yang menjelaskan bahwa Allah *subhanahu wata'ala* juga memiliki sifat yang bermacam-macam. Ada banyak sifat kesempurnaan yang dimiliki Allah, tetapi yang wajib diketahui ada sebanyak dua puluh sifat.

Sifat-sifat wajib bagi Allah yaitu *wujud* (ada), *qidam* (terdahulu), *baqaa* (kekal), *mukhalafatu lil hawadisi* (berbeda dengan makhluk), *qiyamuhu binafsihi* (berdiri sendiri), *wahdaniyah* (esa), *qudrah* (kuasa), *iradah* (berkehendak), *ilmu* (mengetahui), *hayaat* (hidup), *sama'* (mendengar), *bashar* (melihat), *kalam* (berfirman), *qadiran* (kuasa), *muridan* (berkehendak), *'aaliman* (mengetahui),

hayyan (hidup), *sami'an* (mendengar), *bashiran* (melihat), *mutakaliman* (berfirman). Berikut ini penjelasan tentang beberapa sifat wajib bagi Allah *subhanahu wata'ala* (Arifinsyah, 2020).

1. *Wujud* (ada)

Syekh Muhammad Zain dan Muhammad Quraish Shihab menegaskan bahwa keberadaan Allah adalah suatu yang pasti, yang diyakini oleh setiap manusia tanpa terkecuali. Mereka menjelaskan bahwa Al-Qur'an dan kitab-kitab samawi sebelumnya tidak menuturkan tentang keberadaan Tuhan tersebut, tetapi eksistensi (keberadaan) Allah dapat dibuktikan melalui eksistensi alam semesta yang teratur dengan hukum-hukumnya. Hal itu membuktikan bahwa ada yang mengatur alam, yaitu Allah *subhanahu wata'ala*.

2. *Qidam* (terdahulu)

Qidam Allah yaitu tidak ada permulaan bagi Allah *ta'ala* atau tidak ada yang mendahului-Nya. Makhluk lain berpangkal, sedangkan Allah tidak berpangkal. Alam semesta ini ada karena ada yang mengatur dan menciptakan. Segala sesuatu yang baru pasti memiliki pencipta yang mendahuluinya, dan Allah adalah yang awal dan juga yang akhir.

3. *Baqaa* (kekal)

Menurut Syekh Muhammad Zain kekal adalah tidak ada akhir atau kesudahan bagi wujud Allah, artinya keberadaan Allah itu tidak diputus atau diakhiri dengan ketiadaan. Semua makhluk di bumi, termasuk manusia dan hewan, serta semua makhluk di langit, akan mengalami kebinasaan dan akhir kehidupan. Tidak ada yang tersisa kecuali mereka yang dikehendaki oleh Allah.

4. *Mukhalafatu lil hawadisi* (berbeda dengan makhluk)

Allah tidak bersifat seperti makhluk, bukan *jisim* yang membutuhkan ruang, dan bukan sifat yang ada pada zat, tidak memiliki anggota tubuh, tidak memiliki arah, dan tidak pula bertempat. Jika Allah serupa dengan makhluk, maka status kebaruan Allah akan sama dengan kebaruan makhluk. Jika Allah menyerupai makhluk, maka pasti terdapat kemiripan antara Tuhan dan makhluk dalam beberapa aspek atau bagian.

5. *Qiyamuhu binafsihi* (berdiri sendiri)

Al-Qayyum berarti sendiri, yang tidak bersandar atau bergantung kepada yang lain karena semua yang lain adalah makhluk-Nya. Allah adalah sumber kehidupan yang memungkinkan semua makhluk tercipta. Menurut Syekh Muhammad Zain, Allah berdiri sendiri tanpa mengandalkan pada makhluk lain karena Allah adalah pencipta makhluk.

Memahami sifat-sifat wajib bagi Allah tidak hanya memperkaya pengetahuan manusia tentang keagungan-Nya, tetapi juga memperkuat pondasi iman manusia. Dengan merenungkan sifat-sifat Allah yang abadi dan sempurna, manusia diberi kekuatan serta ketenangan untuk menjalani kehidupan dengan penuh kepercayaan kepada-Nya. Dengan demikian, pemahaman akan sifat-sifat Allah bukan hanya sekedar kajian intelektual, tetapi juga sebuah perjalanan spiritual yang menghidupkan dan memperdalam hubungan manusia dengan Sang Pencipta.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dipaparkan pada bab empat, maka dapat disimpulkan bahwa pada ruang semi hasil kali dalam berlaku sifat-sifat sebagai berikut. Misalkan V adalah ruang semi hasil kali dalam. Maka berlaku,

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}[x, y]$, untuk semua $x, y \in V$

dimana $\operatorname{Re}[x, y]$ menunjukkan bagian real dari $[x, y]$.

2. $|[x, y]| \leq \|x\|\|y\|$, untuk semua $x, y \in V$

Pada kasus hasil kali dalam, maka persamaan berlaku jika dan hanya jika x dan y bergantung linear (artinya salah satu dari x atau y adalah kelipatan skalar dari yang lain).

3. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, untuk semua $x, y \in V$.

4. $[x, y] = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$, untuk semua $x, y \in V$.

5. Jika suatu norma $\|\cdot\|$ pada ruang vektor V memenuhi hukum jajar genjang, maka norma tersebut dapat diinduksi oleh hasil kali dalam.

6. Jika barisan $(x_n) \rightarrow x$ dan $(y_n) \rightarrow y$, maka $([x_n, y_n]) \rightarrow [x, y]$ untuk $x, y \in V$.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, peneliti hanya berfokus pada ruang semi hasil kali dalam saja. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat

mengembangkan kepada ruang yang lebih luar, seperti ruang semi hasil kali dalam-2 ataupun yang lainnya. Harapan peneliti, penelitian ini dapat menjadi kontribusi penting pada masa mendatang untuk membantu pemahaman terkait ruang semi hasil kali dalam.

DAFTAR PUSTAKA

- Arifinsyah, H. A. (2020). Argumen Al-Qur'an Tentang Sifat-Sifat Allah Menurut Syekh Muhammad Zain. *Jurnal Ilmu Al-Qur'an dan Tafsir*, Vol. 3, No. 1, Hal. 32-66.
- Cecep Anwar, H. B. (2023). *Modul sifat-Sifat Bagi Allah SWT*. Jakarta: Kementerian Agama Republik Indonesia.
- Elad, M. (2009). *Sparse and Redundant Representation from Theory to Application in Signal and Image Processing*. Israel: Springer.
- Isa Nofaria, M. F. (2014). Semi Hasil Kali Dalam pada Suatu Norma di Ruang Vektor Kompleks. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, 358-362.
- Juliana, I., & Wahyuni, M. (2021). Ruang Hasil Kali Dalam. *Jurnal Pendidikan Tambusai*, 5(3), 114592–114601.
- Katsir, A. F. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir Juz 28*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications. In Operator Theory for Electromagnetics*. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3679-3_2
- Lumer, G. (1961). Semi-Inner-Product Spaces. *University of Chicago*, 29–48.
- Promislow, S. D. (2008). *A First Course in Functional Analysis*. Toronto, Ontario, Canada: Amazon.
- Purwosetiyono, D. (2015). *Modul 1 Bilangan Kompleks*. Semarang: Universitas PGRI Semarang.
- RI, K. (2019). *Al-Qur'an dan Terjemahnya (Edisi Penyempurnaan 2019)*. Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.
- Rorres, H. A. (2014). *Elementary Linear Algebra*. United States of America: Quad Graphics/Versailles.
- Rynne, B., & Youngson, M. (2008). *Linier Functional Analysis. Springer Undergraduate Mathematics Series*.
- Sanjaya, F. (2015). Semi Hasil Kali Dalam Atas dan Bawah. *AdMathEdu*, Vol. 5, No.1 Hal.35-44.
- Sari, N. P., Haripamyu, H., & Ekariani, S. (2019). Ruang Semi Hasil Kali Dalam Pada Ruang Bernorm Kompleks. *Jurnal Matematika UNAND*, 8(2), 67.

<https://doi.org/10.25077/jmu.8.2.67-75.2019>

Nel, L. (2016). *Continuity Theory*. Canada: Springer.

Wilde, I. F. (2003). *Topological Vector Space*. London: King's Collage.

Wirman, E. P. (2013). Sifat dan Zat Allah Menurut Abduh Berdasarkan Buku Hasyiah. *Tajdid*, Vol. 16, No. 2, hal 191-204.

RIWAYAT HIDUP



Lauha Kurnia Safira, yang lebih dikenal dengan panggilan Lauha atau Lala. Lahir di Bojonegoro pada 07 Mei 2003 yang merupakan anak kedua dari dua bersaudara, buah cinta dari pasangan almarhum Bapak Abbas dan Ibu Marpu'ah. Saat ini, penulis tinggal bersama Ibu dan kakak perempuannya disalah satu desa kecil yang ada di kabupaten Bojonegoro, tepatnya desa Woro, Kepohbaru, Bojonegoro.

Penulis memulai pendidikan ketika berumur empat tahun di RA Tarbiyatul Athfal Woro pada tahun 2006. Setelah lulus, penulis melanjutkan pendidikannya di MI Tarbiyatul Athfal Woro yang berada satu lokasi dengan RA pada tahun 2007-2013. Kemudian penulis menempuh sekolah menengah pertama pada tahun 2014-2017 di MTs Islamiyah Attanwir Bojonegoro. Pada saat memasuki sekolah menengah atas, penulis melanjutkan pendidikan di yayasan Attanwir, yakni MA Attanwir Bojonegoro hingga tahun 2020. Setelah lulus MA, penulis diterima di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang di Program Studi Matematika melalui jalur SBMPTN.

Selama bersekolah, penulis merupakan siswa yang cukup aktif dalam organisasi bahasa, tepatnya di divisi *Education* dan kegiatan-kegiatan yang ada di sekolah. Sehingga saat di perkuliahan penulis juga aktif dalam salah satu organisasi himpunan, yaitu sebagai anggota HMPS selama dua periode mulai semester dua sampai semester empat yang ditempatkan di divisi Kematematikaan. Selain itu, penulis juga pernah mengikuti Riset Kompetitif Mahasiswa (2023) yang diadakan oleh kampus dan mengikuti beberapa kegiatan volunteer baik dari dalam kampus maupun luar kampus.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lauha Kurnia Safira
NIM : 200601110056
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat-Sifat Ruang Semi Hasil Kali Dalam
Pembimbing I : Dian Maharani, M.Si.
Pembimbing II : Juhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	15 November 2023	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	22 November 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	28 November 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	5 Desember 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	11 Desember 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	13 Desember 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	26 Desember 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	28 Desember 2023	ACC Bab I, II, III dan seminar proposal	8.
9.	28 Desember 2023	ACC Seminar Proposal	9.
10.	22 Februari 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal, Bab IV dan V	10.
11.	13 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	11 April 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	12.
13.	10 Juni 2024	ACC Bab IV dan V	13.
14.	11 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	14.
15.	15 Juni 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	15.
16.	20 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	16.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
17.	25 Juli 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	17.
18.	29 Agustus 2024	ACC Sidang Skripsi	18.
19.	11 September 2024	ACC Akhir	19.

Malang, 11 September 2024

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005