

OPERATOR PADA RUANG HILBERT

SKRIPSI

oleh:
FARIDHATUN NASIKAH
NIM. 07610086



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011**

OPERATOR PADA RUANG HILBERT

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**oleh:
FARIDHATUN NASIKAH
NIM. 07610086**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011**

OPERATOR PADA RUANG HILBERT

SKRIPSI

oleh:
FARIDHATUN NASIKAH
NIM. 07610086

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 14 Januari 2011

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

OPERATOR PADA RUANG HILBERT

SKRIPSI

oleh:
FARIDHATUN NASIKAH
NIM. 07610086

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2011

Penguji Utama	: Usman Pagalay, M. Si NIP.19650414 200312 1 001
Ketua Penguji	: Abdussakir, M. Pd NIP. 19751006 200312 1 001
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003
Anggota Penguji	: Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERSEMBAHAN

Dengan untaian syukur Alhamdulillah, karya ini dipersembahkan kepada:

1. Bapak Nuroddin Ali dan Ibu Siti Munawaroh yang selalu memberikan dukungan, dorongan, semangat, motivasi dan selalu mendo'akan dalam setiap langkah. Semoga Allah membalas semua amal ibadahnya dan meridhoi do'a-do'anya.
2. Adik Muhammad Irfan Nudin dan Chilyatul 'Auliya Nur Rohmah yang selalu menjadi penyemangat dan motivasi dalam proses penyelesaian skripsi ini.

MOTTO

وَأَقِمِ الصَّلَاةَ طَرَفِي النَّهَارِ وَزُلْفًا مِّنَ اللَّيْلِ إِنَّ الْحَسَنَاتِ يُذْهِبْنَ السَّيِّئَاتِ ذَلِكَ ذِكْرَىٰ

لِلذَّاكِرِينَ

“Dan dirikanlah sembahyang itu pada kedua tepi siang (pagi dan petang) dan pada bahagian permulaan daripada malam. Sesungguhnya perbuatan-perbuatan yang baik itu menghapuskan (dosa) perbuatan-perbuatan yang buruk. Itulah peringatan bagi orang-orang yang ingat.”

(Q.S. Huud: 114)

KATA PENGANTAR



Alhamdulillah, puji Syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufiq serta Hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing ke jalan yang lurus dan jalan yang di ridhoi-Nya yakni agama Islam.

Berkat bantuan, bimbingan dan dorongan dari berbagai pihak, maka penulis mengucapkan banyak terimakasih dan hanya ungkapan serta doa yang penulis berikan, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, sebagai rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, D.Sc sebagai Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, sebagai Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Hairur Rahman, M.Si, dan Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag sebagai dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan bimbingan dan arahan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
5. Ayahanda Nuroddin Ali, Ibunda Siti Munawaroh, Adik Muhammad Irfan Nudin dan Chilyatul ‘Auliya Nur Rohmah tercinta serta segenap keluarga yang telah memberikan do’a, dukungan dan motivasi kepada penulis.

6. Buat Khoirul Anwar yang selalu memberi motivasi, dorongan dan selalu menemaniku dikala susah dan senang. Terimakasih atas semuanya semoga Allah membalas semuanya.
7. Ayahanda Mochammad Sholehuddin dan Ibunda Sulati Utami Ningsih yang selalu memberikan kasih sayang tiada tara ukurannya dan motivasi yang tidak pernah terlupakan.
8. Teman-teman di Madrasah Aliyah Negeri (MAN) Tulungagung 2 yaitu Debry Kurniasari, Barit Fatchur Rosadi, Diya' Uddin, Yusnia Fatmawati, Agus Riyanto dan Afif yang berjuang bersama-sama. Motivasi kalian semua akan selalu dikenang dan diingat selamanya.
9. Sahabat-sahabat di SFC yaitu Siti Afiyah Diniyati, Lia Fitrotul Chusna, Lailiatul Mubtadi'ah dan Diah Ayu Resmi yang selalu memberi dorongan, motivasi, nasehat, dan membantu. Persahabatan ini akan selalu dikenang dan diingat selamanya.
10. Seluruh angkatan 2007 diantaranya Mohammad Safi'i, Emma Provita Rahma, Silva Ahmad Adini, Yulis Sya'idah dan semuanya saja yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang telah diimpikan. Masa-masa bersama kalian semua merupakan cerita tersendiri dan tidak akan bisa dilupakan.
11. Seluruh penghuni Mabna Ummu Salamah 12, Wisma Dahlia dan Wisma Melati
12. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini bermanfaat. Amin...

Malang, 14 Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	
HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN KATA PENGANTAR	i
HALAMAN DAFTAR ISI	iv
HALAMAN DAFTAR LAMBANG	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
BAB I: PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II: KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Terbatas dan Supremum	8
2.2 Ruang Vektor	9

2.3 Ruang Metriks	14
2.4 Ruang Hasil Kali Dalam.....	17
2.5 Ruang Norm	29
2.6 Ruang Hilbert	35
2.7 Operator Linier	39
BAB III: PEMBAHASAN	
3.1 Operator <i>Adjoint</i>	44
3.2 Operator Normal.....	52
3.3 Operator <i>Self-Adjoint</i>	55
3.4 Operator Uniter.....	58
3.5 Kajian Agama	61
BAB IV: PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	66
4.2 Saran	67
DAFTAR PUSTAKA	

DAFTAR LAMBANG

$B(\mathcal{H})$	Ruang fungsi terbatas
$B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$	Ruang operator linier terbatas
\mathbb{C}	Bilangan kompleks
$C[a, b]$	Ruang fungsi kontinu
$d(x, y)$	Jarak dari x ke y
$\ f\ $	Norm fungsi linier terbatas pada f
I	Operator identitas
\inf	Infimum (batas bawah terbesar)
$L^2[a, b]$	Ruang fungsi lebesgue
\mathbb{R}	Bilangan Real
\sup	Supremum (batas atas terkecil)
$\ T\ $	Norm operator linier terbatas pada T
T^*	Operator <i>adjoint</i> pada ruang Hilbert
\mathbf{u}	Vektor u
$-\mathbf{u}$	Invers penjumlahan \mathbf{u}
$\ x\ $	Norm x
$\langle x, y \rangle$	Hasil kali dalam x dan y
$\overline{\langle x, y \rangle}$	Konjugate dari $\langle x, y \rangle$
$\bar{\alpha}$	Konjugate dari α
\in	Anggota
\forall	Untuk setiap
\exists	Terdapat
\rightarrow	Konvergen ke
θ	Vektor nol
A^\perp	Komplemen orthogonal dari subspace tertutup A

ABSTRAK

Nasikah, Faridhatun. 2011. **Operator Pada Ruang Hilbert**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M. Si
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Salah satu permasalahan pada analisis fungsional adalah operator linier. Operator linier didefinisikan: Diberikan X dan Y dua ruang vektor. Operator $T: X \rightarrow Y$ disebut operator linier jika memenuhi dua kondisi berikut ini:

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad ; \forall x, y \in X$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx \quad ; \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$$

dimana \mathbb{F} field

Operator linier tidak hanya terdapat pada ruang vector tetapi berlaku juga pada ruang norm, ruang metrics dan ruang Hilbert. Manfaat dari adanya operator pada ruang Hilbert banyak sekali diantaranya menimbulkan pemikiran baru tentang fisika quantum. Pembahasan tentang operator ruang Hilbert bermacam-macam, tetapi pada penelitian ini pembahasan operator ruang Hilbert pada ruang Hilbert yang kompleks. Operator pada ruang Hilbert yaitu operator Adjoint, Operator Normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter. Pada penelitian ini memperoleh sifat-sifat yang berlaku pada operator adjoint, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter.

Kata kunci: ruang hasil kali dalam, ruang Hilbert, operator linier, dan operator linier terbatas

ABSTRACT

Nasikah, Faridhatun. 2011. Normal, Self-Adjoit dan Unitary Operators on Hilbert Space. Thesis. Department of mathematics. Faculty of Science and Technology. State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang

Advisors: (I) Hairur Rahman, M. Si
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

One of the topics in functional analysis is a linear operator. Linear operator is defined: Given X and Y are two vector spaces. Operator $T: X \rightarrow Y$ is called a linear operator if it satisfies the following two conditions:

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad ; \forall x, y \in X$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx \quad ; \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$$

Where \mathbb{F} is a field.

Linear operators are not only found in vector space, but applies also to the norm space, metrics space and Hilbert space. Benefits of the operator on Hilbert space, is generatins new ideas about physics quantum. Previous studied have been done of operators on Hilbert space, but this study focuses of operators on a complex Hilbert space. Operators on the Hilbert space are adjoint operator, normal operator, self-adjoint operator and unitary operator. This research acquires the properties that apply to the adjoint operator, normal operator, self-adjoint operator and unitary operator.

Keywords: inner product space, Hilbert space, linear operators, bounded linear operators

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menuntut ilmu merupakan kewajiban bagi semua umat Islam (muslim), hal tersebut ditegaskan dalam hadits tersebut:

طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ وَ مُسْلِمَةٍ

Artinya: *“Menuntut Ilmu merupakan kewajiban bagi kaum muslim laki-laki dan perempuan.”*

Pada hadits di atas jelas bahwa menuntut atau mencari ilmu itu hukumnya wajib bagi kaum muslim laki-laki maupun perempuan. Tidak ada perbedaan antara kaum laki-laki maupun perempuan dalam mencari ilmu. Jenis kelamin laki-laki maupun perempuan bukan merupakan penghalang untuk mencari ilmu.

Selain hadits di atas masih banyak lagi dalil-dalil yang berkaitan dengan menuntut ilmu, seperti firman Allah pada surat Al-Mujaadilah ayat 11

...يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۗ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: *“...Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan.”*

Pada Surat Al-Mujaadilah ayat 11 dijelaskan bahwa keutamaan orang yang mempunyai ilmu. Dijelaskan bahwa Allah akan memberikan kemuliaan berupa pengangkatan derajat.

Selain mempelajari ilmu agama sudah seharusnya mempelajari ilmu dunia. Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang harus dipelajari. Secara bahasa, kata “matematika” berasal dari bahasa Yunani yaitu “*mathema*” atau mungkin juga “*mathematikos*” yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang Belanda menyebut matematika dengan *wiskunde* yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan ‘*ilmu al-hisab*, artinya ilmu berhitung. Secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Definisi-definisi yang dibuat para ahli matematika semuanya benar berdasar sudut pandang tertentu. Meskipun belum ada definisi yang tepat, matematika mempunyai ciri khas yang tidak dimiliki pengetahuan lain, yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa symbol, dan menganut pola pikir deduktif (pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti benar)(Abdusysykir, 2007: 5-9).

Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Bahasa matematika merupakan suatu bahasa yang menjadikan suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis dan dipecahkan(Purwanto, 1997:1). Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak lepas dari alam dan agama, yang semuanya dapat dilihat dalam Al-Qur’an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat

diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah SWT(Rahman, 2007:1).

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain, dimana matematika selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Hal ini disebabkan oleh kemajuan IPTEK (Ilmu Pengetahuan dan Teknologi). Penghitungan matematika menjadi dasar bagi desain ilmu teknik, fisika, kimia maupun disiplin ilmu lainnya. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu, menggunakan matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka. Salah satu materi dari ilmu matematika adalah analisis fungsional, khususnya ruang Hilbert. David Hilbert (1862-1943) adalah orang yang telah menemukan ruang Hilbert. Dia adalah salah seorang matematikawan Jerman. dia juga salah satu matematikawan paling berpengaruh dari abad ke-19 sampai awal abad ke-20. Konsep ruang Hilbert ini berguna dalam analisis matematika dan mekanika quantum.

Operator linier adalah pemetaan antara dua ruang fungsi atau pemetaan dari ruang vector ke ruang vector, atau pemetaan dari ruang Banach ke ruang Banach atau pemetaan dari ruang Hilbert ke ruang Hilbert. Operator linier tersebut dapat bernilai real ataupun kompleks. Andaikan X dan Y adalah dua buah ruang vector. Sebuah operator linier $T: X \rightarrow Y$ adalah operator linier yang memenuhi dua kondisi sebagai berikut:

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad ; \forall x, y \in X$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx \quad ; \forall x \in X, \alpha \in F$$

dimana F adalah field (Bishop, Bridges. 1985: 301).

Operator linier yang terbatas pada ruang Hilbert dinamakan operator linier pada ruang Hilbert. Operator pada ruang Hilbert antara lain operator adjoint, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter. Pada penelitian ini mencari sifat-sifat yang berlaku pada operator *adjoint*, operator normal, operator *self adjoint* dan operator normal.

1.2 Rumusan Masalah

Pada penelitian ini rumusan masalah yang sesuai dengan penelitian ini adalah : Bagaimana karakteristik dari operator pada ruang Hilbert?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan diadakannya penelitian ini adalah: Mendeskripsikan dan menjelaskan tentang karakteristik dari operator pada ruang Hilbert.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Peneliti

Penelitian ini bermanfaat bagi peneliti untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari, khususnya bidang analisis untuk mengkaji lebih lanjut tentang operator pada ruang Hilbert.

2. Pembaca

Penelitian ini bermanfaat bagi pembaca untuk menambah khazanah keilmuan dan sebagai titik awal pembahasan yang bisa dilanjutkan atau dikembangkan.

3. Instansi

Penelitian ini bermanfaat bagi instansi untuk menambah perbendaharaan karya tulis ilmiah khususnya di bidang analisis, sehingga dapat memberikan informasi ilmiah tentang ilmu analisis dalam matematika khususnya yang berkaitan dengan operator pada ruang Hilbert.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah digunakan untuk menghindari agar pembahasan tidak semakin meluas dan tidak sesuai dengan rumusan masalah yang ada di atas. Pada penelitian ini peneliti membatasi pembahasan pada ruang Hilbert di bilangan kompleks.

1.6 Metode Penelitian

Jenis dari penelitian ini adalah deskriptif kualitatif dan penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian kepustakaan (*library research*) yaitu penelitian yang dilaksanakan dengan menggunakan literatur (kepustakaan), baik berupa buku, catatan, jurnal maupun laporan hasil penelitian dari peneliti terdahulu yang berkaitan atau berhubungan dengan penelitian (Hasan, 2002:11).

Penelitian ini menggunakan metode “studi literatur”, sebab penelitian ini merupakan bentuk kajian. Pengumpulan data dilakukan dengan cara mencari bahan-bahan kepustakaan sebagai landasan teori yang di hubungannya dengan permasalahan yang dijadikan objek penelitian. Pembahasan dilakukan dengan mempelajari berbagai literatur seperti buku-buku cetak, *e-book*, karya tulis yang disajikan dalam bentuk jurnal, laporan penelitian serta konsultasi dengan dosen

pembimbing. Data yang sudah diperoleh atau didapatkan akan dianalisis dan ditarik kesimpulan.

Langkah-langkah penelitian:

1. Merumuskan masalah dalam bentuk kalimat tanya
2. Mencari data dari berbagai referensi berupa definisi, teorema, lemma, proposisi yang berhubungan dengan rumusan masalah
3. Analisis data
 - a) Menyusun konsep atau definisi operator *adjoint*, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter pada ruang Hilbert yang meliputi definisi dan teorema.
 - b) Membuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan operator *adjoint*, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter pada ruang Hilbert.
 - c) Membuat contoh-contoh yang berkaitan dengan operator *adjoint*, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter pada ruang Hilbert.
 - d) Menyelesaikan contoh-contoh yang berkaitan dengan operator *adjoint*, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter pada ruang Hilbert dengan menerapkan teorema-teorema yang telah dibuktikan.
4. Menarik kesimpulan dari hasil penelitian

1.7 Sistematika Penulisan

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab I pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada bab II kajian pustaka berisi tentang teori-teori yang berhubungan dengan penelitian yaitu tentang ruang vektor, ruang hasil kali dalam, ruang norm, ruang Hilbert, operator, operator linier dan operator linier terbatas.

BAB III : PEMBAHASAN

Pada bab III pembahasan berisi beberapa analisis data yang diperoleh berupa definisi, teorema, lemma, proposisi dan lainnya. Analisis data pembahasan tentang operator *adjoint*, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter pada ruang Hilbert. Membuat contoh dan menyelesaikan contoh operator *adjoint*, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter pada ruang Hilbert.

BAB IV : PENUTUP

Berisi tentang kesimpulan dan saran peneliti untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Terbatas dan Supremum

Definisi 2.1.1 (Terbatas)

Misal S himpunan tak kosong dan S subset dari \mathbb{R}

1. Suatu bilangan $x \in \mathbb{R}$ disebut *batas atas* di S jika $s \leq x$ untuk setiap $s \in S$
2. Suatu bilangan $y \in \mathbb{R}$ disebut *batas bawah* di S jika $y \leq s$ untuk setiap $s \in S$

S dikatakan terbatas di atas jika mempunyai batas atas. Sama halnya dengan, jika S mempunyai batas bawah maka disebut terbatas di bawah. Jika S mempunyai batas atas dan batas bawah maka disebut terbatas (Bartle & Sherbert, 1944:42-43).

Definisi 2.1.2 (Supremum dan Infimum)

Misal S himpunan tak kosong dan S subset dari \mathbb{R}

1. Jika S terbatas di atas, maka batas atas x disebut **Supremum** (batas atas terkecil) dari S jika tidak ada bilangan terkecil dari x yang menjadi batas atas dari S .
2. Jika S terbatas di bawah, maka batas bawah y disebut **infimum** (batas bawah terbesar) dari S jika tidak ada bilangan terbesar dari y yang menjadi batas bawah dari S (Bartle & Sherbert. 1994: 42-43)

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1

Diberikan X himpunan tak kosong untuk setiap objek-objek, dengan dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian scalar disebut ruang vektor jika X memenuhi aksioma berikut ini:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
(Sifat komutatif pada operasi penjumlahan)
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(Sifat asosiatif pada operasi penjumlahan)
3. Terdapat $\boldsymbol{\theta} \in X$ maka $\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{u}$
($\boldsymbol{\theta}$ merupakan vektor nol)
4. Untuk setiap $\mathbf{u} \in X$ terdapat $-\mathbf{u}$ maka $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \boldsymbol{\theta}$
($-\mathbf{u}$ invers \mathbf{u} pada operasi penjumlahan)
5. $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$
(Sifat Asosiatif pada operasi perkalian)
6. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Dimana $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Bishop & Bridges, 1995:235).

Contoh 2.2.2

Diberikan \mathbb{C} himpunan bilangan kompleks, dengan dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian merupakan ruang vektor.

Selesaian:

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}$ dan $\alpha, \beta, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u} = a + bi$$

$$\mathbf{v} = c + di$$

$$\mathbf{w} = e + fi$$

Berdasarkan definisi, suatu himpunan dikatakan ruang vektor jika memenuhi aksioma berikut ini:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Sifat komutatif pada operasi penjumlahan)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i \\ &= (c + di) + (a + bi) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (sifat asosiatif pada operasi penjumlahan)

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) \\ &= ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi) \\ &= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i \\ &= (a + (c + e)) + (b + (d + f))i \\ &= (a + bi) + ((c + e) + (d + f))i \\ &= (a + bi) + ((c + di) + (e + fi)) \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

3. Terdapat $\boldsymbol{\theta} \in X$ maka $\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{u}$ ($\boldsymbol{\theta}$ sifat komutatif pada operasi penjumlahan)

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} &= (a + bi) + (0 + 0i) \\ &= (a + 0) + (b + 0)i \\ &= a + bi \\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{u}$

4. Untuk setiap $\mathbf{u} \in X$ terdapat $-\mathbf{u}$ maka $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \boldsymbol{\theta}$

($-\mathbf{u}$ invers dari \mathbf{u} pada operasi penjumlahan)

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= (a + bi) + (-(a + bi)) \\ &= (a + bi) + (-a - bi) \\ &= (a - a) + (b - b)i \\ &= 0 + 0i \\ &= \boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \boldsymbol{\theta}$

5. $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$ (sifat asosiatif pada operasi perkalian)

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\mathbf{u} &= (\alpha\beta)(a + bi) \\ &= ((\alpha\beta)a + (\alpha\beta)bi) \\ &= (\alpha(\beta a) + \alpha(\beta b)i) \\ &= \alpha(\beta a + \beta bi) \\ &= \alpha(\beta(a + bi)) \\ &= \alpha(\beta\mathbf{u})\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$

$$6. (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\mathbf{u} &= (\alpha + \beta)(a + bi) \\ &= \alpha a + \alpha bi + \beta a + \beta bi \\ &= \alpha(a + bi) + \beta(a + bi) \\ &= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

$$7. \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \alpha((a + bi) + (c + di)) \\ &= \alpha a + \alpha bi + \alpha c + \alpha di \\ &= \alpha(a + bi) + \alpha(c + di) \\ &= \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

$$8. 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} 1\mathbf{u} &= 1(a + bi) \\ &= 1a + 1bi \\ &= a + bi \\ &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Berdasarkan bukti di atas maka \mathbb{C} merupakan himpunan ruang vektor.

Teorema 2.2.3

Diberikan X ruang vektor, \mathbf{u} vektor di X dan α skalar, maka:

$$1. 0\mathbf{u} = \mathbf{\theta}$$

$$2. \alpha\mathbf{\theta} = \mathbf{\theta}$$

$$3. (-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$$

$$4. \text{jika } \alpha\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta} \text{ maka } \alpha = 0 \text{ atau } \mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}$$

Bukti:

$$1. 0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u}$$

$$= 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$$

$$0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) = (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + (-0\mathbf{u})$$

$$0\mathbf{u} - 0\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + (0\mathbf{u} - 0\mathbf{u})$$

$$\boldsymbol{\theta} = 0\mathbf{u}$$

Terbukti bahwa $0\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}$

$$2. \alpha\boldsymbol{\theta} = \alpha(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta})$$

$$= \alpha\boldsymbol{\theta} + \alpha\boldsymbol{\theta}$$

$$\alpha\boldsymbol{\theta} + (-\alpha\boldsymbol{\theta}) = (\alpha\boldsymbol{\theta} + \alpha\boldsymbol{\theta}) + (-\alpha\boldsymbol{\theta})$$

$$\alpha\boldsymbol{\theta} - \alpha\boldsymbol{\theta} = \alpha\boldsymbol{\theta} + (\alpha\boldsymbol{\theta} - \alpha\boldsymbol{\theta})$$

$$\boldsymbol{\theta} = \alpha\boldsymbol{\theta}$$

Terbukti bahwa $\alpha\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$

3. Berdasarkan Definisi 2.1.1 Bagian 10 maka

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u}$$

$$= (1 + (-1))\mathbf{u}$$

$$= 0\mathbf{u}$$

$$= \boldsymbol{\theta}$$

$$(-1)\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{u}$$

$$= -\mathbf{u}$$

Terbukti bahwa $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

4. $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Berdasarkan Teorema 2.1.3 Bagian 1 maka

$$\alpha = 0$$

Sedangkan berdasarkan Teorema 2.1.3 Bagian 2

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Telah ditunjukkan bahwa jika $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$ maka $\alpha = 0$ or $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

2.3 Ruang Metriks

Definisi 2.3.1

Metriks pada himpunan M adalah suatu fungsi $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi aksioma berikut ini.

a) $d(x, y) \geq 0$

b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x)$

d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

untuk setiap $x, y, z \in M$. Jika d merupakan metriks pada himpunan M , maka pasangan berurutan (M, d) disebut ruang metrics (Goffman & Pedrick, 1974:1).

Contoh 2.3.2

Tunjukkan bahwa fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$d(x, y) := |x - y| \quad \text{untuk } x, y \in \mathbb{R}$$

Adalah metriks pada \mathbb{R}

Selesaian:

a) Karena definisi, maka

$$d(x, y) = |x - y|$$

$$\geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Terbukti bahwa $d(x, y) \geq 0$

b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

i. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

$$d(x, y) = 0$$

$$|x - y| = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x = y$$

Terbukti bahwa $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

ii. $d(x, y) = 0 \Leftarrow x = y$

$$x = y$$

$$d(x, y) = d(x, x)$$

$$= |x - x|$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa $d(x, y) = 0 \Leftarrow x = y$

Maka terbukti bahwa $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(y, x) = |y - x|$

$$= |-x + y|$$

$$\begin{aligned}
 &= |-(x - y)| \\
 &= |x - y| \\
 &= d(x, y)
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $d(y, x) = d(x, y)$

$$\begin{aligned}
 d) \quad d(x, z) &= |x - z| \\
 &= |x - z + y - y| \\
 &= |x - y - z + y| \\
 d(x, z) &= |x - y + y - z| \\
 &\leq |x - y| + |y - z| \\
 &= d(x, y) + d(y, z)
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y \in \mathbb{R}$

Maka $d(x, y) := |x - y|$ merupakan metrik pada \mathbb{R}

Definisi 2.3.3

Barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik (M, d) konvergen ke $x \in M$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$d(x, x_n) < \varepsilon ; \text{ untuk setiap } n \geq N$$

Biasanya ditulis dengan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ atau $x_n \rightarrow x$. Barisan $\{x_n\}$ pada (M, d) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon ; \text{ for all } m, n \geq N \text{ (Rynne \& Youngson, 2008:12)}$$

Teorema 2.3.4

Setiap barisan konvergen pada ruang metrik merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Jika $x_n \rightarrow x$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga

$$d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} ; \text{ untuk setiap } n \geq N$$

Berdasarkan Definisi 2.3.1 bagian d), maka $m, n \geq N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$$

Berdasarkan Definisi 2.3.1 bagian c)

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n)$$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy

Definisi 2.3.5

Ruang metriks (M, d) disebut komplet jika untuk setiap barisan Cauchy pada (M, d) adalah konvergen (Rynne & Youngson, 2008:12).

2.4 Ruang Hasil Kali Dalam**Definisi 2.4.1**

Diberikan X ruang vektor pada bilangan real. Hasil kali dalam pada X merupakan fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ dan $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\theta}$ merupakan identitas pada ruang vektor X)
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

$$3. \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$4. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

Pada Bagian 2, Bagian 3 dan Bagian 4 ekuivalen dengan

$$3' \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$4' \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

(Phillips, 1984:279-280 dan Rynne & Youngson, 2008:51).

Hasil kali dalam pada X dapat didefinisikan oleh norm sebagai berikut:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

(Kreyszig, 1978:129).

Contoh 2.4.2

Suatu fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^k x_n y_n$$

Merupakan hasil kali dalam pada \mathbb{R}^k

Selesaian

Berdasarkan definisi hasil kali dalam maka harus memenuhi;

$$1. \langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^k x_n x_n$$

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \sum_{n=1}^k x_n^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\langle x, x \rangle \geq 0$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\text{a) } \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

$$\sum_{n=1}^k x_n x_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^k x_n^2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

Maka

$$x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Maka $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$

Terbukti bahwa $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$

$$\text{b) } \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{n=1}^k \theta_n \theta_n$$

$$= \sum_{n=1}^k \theta_n^2$$

$$= \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_n^2$$

$$= 0^2 + 0^2 + \dots + 0^2$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

Terbukti bahwa $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$

Terbukti bahwa untuk setiap $\mathbf{x} \in X$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ dan $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\theta}$ merupakan identitas pada ruang vektor X)

$$\begin{aligned}
 2. \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{n=1}^k x_n y_n \\
 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\
 &= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n \\
 &= \sum_{n=1}^k y_n x_n \\
 &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ maka $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

3. $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ dimana $\alpha \in \mathbb{R}$ (bilangan real)

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{n=1}^k (\alpha x_n) y_n \\
 &= \sum_{n=1}^k \alpha (x_n y_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \alpha \sum_{n=1}^k (x_n y_n) \\
 &= \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ (bilangan real) maka

$$\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

4. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \sum_{n=1}^k (x_n + y_n) z_n$

$$= \sum_{n=1}^k (x_n z_n + y_n z_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^k x_n z_n + \sum_{n=1}^k y_n z_n \\
&= \sum_{n=1}^k x_n z_n + \sum_{n=1}^k y_n z_n \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ maka $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Berdasarkan pembuktian di atas, bahwa

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^k x_n y_n$$

merupakan hasil kali dalam pada \mathbb{R}^k . Jadi \mathbb{R}^k merupakan ruang Hilbert.

Definisi 2.4.3

Diberikan ruang vektor pada bilangan kompleks X . Hasil kali dalam pada X merupakan suatu fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$
3. $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ (Rynne & Youngson, 2008:53).

Contoh 2.4.4

Suatu fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^k x_n \overline{y_n}$$

merupakan hasil kali dalam pada \mathbb{C}^k

Selesaian

Berdasarkan definisi maka ruang hasil kali dalam harus memenuhi;

$$1. \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{n=1}^k x_n \overline{x_n}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} + \cdots + x_n \overline{x_n}$$

Misalkan:

$$x_n = a_n + b_n i$$

$$\overline{x_n} = a_n - b_n i$$

Maka

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= (a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i) + (a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i) + \cdots + (a_n + b_n i)(a_n - b_n i) \\ &= (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + \cdots + (a_n^2 + b_n^2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

$$2. \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$$

$$a) \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

$$\sum_{n=1}^k x_n \overline{x_n} = 0$$

$$x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} + \cdots + x_n \overline{x_n} = 0$$

$$x_1 \overline{x_1} = x_2 \overline{x_2} = \cdots = x_n \overline{x_n} = 0$$

Maka

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \boldsymbol{\theta}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \boldsymbol{\theta}$$

Sehingga $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$

Terbukti bahwa $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

b) $\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \sum_{n=1}^k \theta_n \overline{\theta_n} \\ &= \theta_1 \overline{\theta_1} + \theta_2 \overline{\theta_2} + \cdots + \theta_n \overline{\theta_n} \\ &= 0.0 + 0.0 + \cdots + 0.0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 0\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$

Berdasarkan bukti pada bagian a) dan bagian b) terbukti bahwa

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}3. \langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle &= \sum_{n=1}^k (\alpha x_n + \beta y_n) \overline{z_n} \\ &= \sum_{n=1}^k \alpha x_n \overline{z_n} + \beta y_n \overline{z_n} \\ &= \sum_{n=1}^k \alpha x_n \overline{z_n} + \sum_{n=1}^k \beta y_n \overline{z_n} \\ &= \alpha \sum_{n=1}^k x_n \overline{z_n} + \beta \sum_{n=1}^k y_n \overline{z_n}\end{aligned}$$

$$\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$$

Terbukti bahwa $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

$$\begin{aligned}4. \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{n=1}^k x_n \overline{y_n} \\ &= \sum_{n=1}^k \overline{y_n} x_n \\ &= \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$

Berdasarkan pembuktian di atas maka

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^k x_n \overline{y_n}$$

merupakan hasil kali dalam pada \mathbb{C}^k

Definisi 2.4.5

Ruang vektor pada bilangan real atau bilangan kompleks dengan hasil kali dalam maka disebut ruang hasil kali dalam (Rynne & Youngson, 2008:53).

Contoh 2.4.6

Sesuai dengan Contoh 2.4.2 maka \mathbb{R}^k merupakan ruang hasil kali dalam dengan hasil kali dalam

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^k x_n y_n$$

Sesuai dengan Contoh 2.4.4 maka \mathbb{C}^k

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^k x_n \overline{y_n}$$

Teorema 2.4.7

Diberikan X ruang hasil kali dalam, maka;

1. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = 0$
2. $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$
3. $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle = |\alpha|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + |\beta|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$

setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Rynne & Youngson, 2008:56)

Bukti:

$$1. \langle \theta, y \rangle = \langle x, \theta \rangle = 0$$

$$a) \langle \theta, y \rangle = \langle 0 \cdot \theta, y \rangle$$

$$= 0 \langle \theta, y \rangle$$

$$\langle \theta, y \rangle = 0$$

$$b) \langle x, \theta \rangle = \overline{\langle \theta, x \rangle}$$

$$= \overline{\langle 0 \cdot \theta, x \rangle}$$

$$= \overline{0 \langle \theta, x \rangle}$$

$$= \overline{0}$$

$$= 0$$

$$c) \langle \theta, y \rangle = \langle x, \theta \rangle$$

Maka

$$\langle \theta, y \rangle = \langle x, \theta \rangle = 0$$

2. Berdasarkan Definisi 2.4.3 Bagian 4 maka

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle}$$

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} + \overline{\langle \beta z, x \rangle}$$

$$= \overline{\alpha \langle y, x \rangle} + \overline{\beta \langle z, x \rangle}$$

$$= \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$$

Terbukti bahwa $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$

$$3. \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle$$

Berdasarkan teorema 2.4.7 Bagian 2 maka

$$\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = \bar{\alpha} \langle \alpha x + \beta y, x \rangle + \bar{\beta} \langle \alpha x + \beta y, y \rangle$$

$$\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = \bar{\alpha}\alpha \langle x, x \rangle + \bar{\alpha}\beta \langle y, x \rangle + \bar{\beta}\alpha \langle x, y \rangle + \bar{\beta}\beta \langle y, y \rangle$$

Misalkan $\bar{\alpha}\alpha = |\alpha|^2$ dan $\bar{\beta}\beta = |\beta|^2$

Maka

$$\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle$$

Terbukti bahwa

$$\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle$$

Contoh 2.4.8

Suatu fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ didefinisikan

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^k x_n \bar{y}_n$$

Tunjukkan bahwa fungsi tersebut memenuhi dengan Teorema 2.4.7

Selesaian:

$$1. \langle \theta, y \rangle = \langle x, \theta \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \langle \theta, y \rangle &= \sum_{n=1}^k \theta_n \bar{y}_n \\ &= \theta_1 \bar{y}_1 + \theta_2 \bar{y}_2 + \cdots + \theta_n \bar{y}_n \\ &= 0 \bar{y}_1 + 0 \bar{y}_2 + \cdots + 0 \bar{y}_n \end{aligned}$$

$$\langle \theta, y \rangle = 0 + 0 + \cdots + 0$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa $\langle \theta, y \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \text{b) } \langle x, \theta \rangle &= \sum_{n=1}^k x_n \bar{\theta}_n \\ &= x_1 \bar{\theta}_1 + x_2 \bar{\theta}_2 + \cdots + x_n \bar{\theta}_n \\ &= x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 + \cdots + x_n \theta_n \\ &= x_1 0 + x_2 0 + \cdots + x_n 0 \end{aligned}$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle = 0$

c) $\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle$

Akan ditunjukkan

$$\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle = 0$$

2. $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$

Berdasarkan Definisi 2.3.3 Bagian 4 maka

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} \rangle &= \sum_{n=1}^k x_n (\overline{\alpha y_n + \beta z_n}) \\ &= \sum_{n=1}^k x_n \overline{\alpha y_n} + x_n \overline{\beta z_n} \\ &= \sum_{n=1}^k x_n \overline{\alpha y_n} + \sum_{n=1}^k x_n \overline{\beta z_n} \\ &= \bar{\alpha} \sum_{n=1}^k x_n \overline{y_n} + \bar{\beta} \sum_{n=1}^k x_n \overline{z_n} \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$$

Terbukti bahwa $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$

3. $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle = |\alpha|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + |\beta|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$

Berdasarkan Teorema 2.4.7 Bagian 2 maka

$$\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle = \bar{\alpha} \sum_{n=1}^k (\alpha x + \beta y) \overline{x_n} + \bar{\beta} \sum_{n=1}^k (\alpha x + \beta y) \overline{y_n}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\alpha} \left(\sum_{n=1}^k \alpha x \bar{x}_n + \sum_{n=1}^k \beta y \bar{x}_n \right) + \bar{\beta} \left(\sum_{n=1}^k \alpha x \bar{y}_n + \sum_{n=1}^k \beta y \bar{y}_n \right) \\
&= \bar{\alpha} \left(\alpha \sum_{n=1}^k x \bar{x}_n + \beta \sum_{n=1}^k y \bar{x}_n \right) + \bar{\beta} \left(\alpha \sum_{n=1}^k x \bar{y}_n + \beta \sum_{n=1}^k y \bar{y}_n \right) \\
\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle &= \bar{\alpha} \alpha \sum_{n=1}^k x \bar{x}_n + \bar{\alpha} \beta \sum_{n=1}^k y \bar{x}_n + \bar{\beta} \alpha \sum_{n=1}^k x \bar{y}_n + \bar{\beta} \beta \sum_{n=1}^k y \bar{y}_n \\
&= \bar{\alpha} \alpha \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \beta \langle y, x \rangle + \bar{\beta} \alpha \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \beta \langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

Misalkan $\bar{\alpha} \alpha = |\alpha|^2$ dan $\bar{\beta} \beta = |\beta|^2$

maka $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle$

Terbukti bahwa

$$\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle$$

Berdasarkan pembuktian pada Bagian 1, Bagian 2 dan Bagian 3 maka terbukti bahwa

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^k x_n \bar{y}_n$$

memenuhi Teorema 2.4.7

Berdasarkan Definisi 2.4.3 bagian 3 ditunjukkan bahwa ruang hasil kali dalam bersifat linier. Berdasarkan Definisi 2.4.7 Bagian 2 dimana $\bar{\alpha}$ dan $\bar{\beta}$ konjugate linier. Kedua bentuk tersebut apabila berlaku bersama-sama pada ruang hasil kali dalam maka disebut *sesquilinear* (Kreyszig, 1978:130).

2.5 Ruang Norm

Definition 2.5.1 (Norm)

Diberikan X ruang vektor pada \mathbb{R} . Norm pada X merupakan suatu fungsi

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
3. $\|ax\| = |a|\|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *ketaksamaan segitiga*

dimana untuk setiap $x, y \in X$ dan $a \in \mathbb{R}$. (Kreyszig, 1978:31-32)

Contoh 2.5.2

Pada contoh ruang hasil kali dalam pada bilangan real didefinisikan bahwa

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_n x_n$$

Tunjukkan bahwa fungsi $\|\cdot\|$ merupakan norm pada \mathbb{R} .

Selesaian:

Berdasarkan Definisi 2.6.1 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ maka

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$1. \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geq 0$$

$$2. \|x\| = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

3. $\|a\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |ax_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$; untuk setiap $\mathbf{x} \in X, a \in \mathbb{R}$

$$\|a\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |a|^2 |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(|a|^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|a|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |a| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |a| \|\mathbf{x}\|$$

4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$; untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$

$$= \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^2 + |y_i|^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.6.1 bahwa $\|x\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

maka $\|x\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ merupakan norm.

Teorema 2.5.3

Diberikan X ruang hasil kali dalam dan $x, y \in X$. maka;

1. $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$
2. Suatu fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ merupakan norm pada X (Rynne & Youngson, 2008:56-57)

Bukti:

1. Jika $x = \theta$ atau $y = \theta$

Hasil bernilai benar, sehingga harus ditunjukkan bahwa x atau y adalah

nol. Ambil $\alpha = \frac{-\overline{\langle x, y \rangle}}{\langle x, x \rangle}$ dan $\beta = 1$

Pada bagian 3 Teorema 2.5.7 diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle \\
&= \frac{|\overline{\langle x, y \rangle}|^2}{\langle x, x \rangle} \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle x, x \rangle} + \langle y, y \rangle \\
&\leq \frac{|\overline{\langle x, y \rangle}|^2}{\langle x, x \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle x, x \rangle} + \langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} + \langle y, y \rangle \\
 &= -\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} + \langle y, y \rangle
 \end{aligned}$$

$$\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} \leq \langle y, y \rangle$$

Maka $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

2. Berdasarkan sifat dari ruang hasil kali dalam maka dapat digunakan untuk mendefinisikan ruang norm:

$$\text{a) } \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\text{b) } \|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \|\alpha x\| &= \langle \alpha x, \alpha x \rangle^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\bar{\alpha} \alpha)^{\frac{1}{2}} \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \\
 &= |\alpha| \|x\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \|x + y\|^2 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + 2\text{Re}\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\
 &\leq \langle x, x \rangle + 2\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y, y \rangle
 \end{aligned}$$

Karena $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$, berdasarkan Teorema

berdasarkan Teorema 2.5.3 dapat ditulis

$$\|\langle x, y \rangle\| \leq \|x\| \|y\|$$

Ketaksamaan ini disebut ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Teorema 2.5.4

Diberikan X ruang vektor pada \mathbb{R} dengan norm $\|\cdot\|$. Diberikan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ barisan di X yang masing-masing konvergen ke \mathbf{x}, \mathbf{y} pada X dan barisan $\{\alpha_n\}$ barisan di \mathbb{R} konvergen ke α pada \mathbb{R} , maka;

1. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \alpha x$ (Rynne & Youngson, 2008:37)

Bukti:

1. Berdasarkan ketaksamaan segitiga maka

$$\|x\| = \|x + (y - y)\|$$

$$\|x\| = \|(x - y) + y\|$$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

..... 2.1

Disisi lain

$$\|x\| = \|x + (y - y)\|$$

$$\|x\| = \|(x - y) + y\|$$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

$$-(\|x\| - \|y\|) \geq -\|x - y\|$$

$$-\|x\| + \|y\| \geq -\|x - y\|$$

$$-\|x - y\| + 2(\|x\| - \|y\|) \leq \|y\| - \|x\| + 2(\|x\| - \|y\|)$$

$$-\|x - y\| + 2(\|x\| - \|y\|) \leq \|x\| - \|y\|$$

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \quad \dots\dots\dots 2.2$$

Berdasarkan Persamaan 2.1 dan Persamaan 2.2 maka

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

$$\text{maka } \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

2. Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dan berdasarkan Teorema 2.6.3 Bagian 1

$$\text{bahwa } \left| \|x\| - \|x_n\| \right| \leq \|x - x_n\| \text{ dimana } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Maka } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$$

3. Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ dan

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ &\leq \|(x_n - x)\| + \|(y_n - y)\| \end{aligned}$$

$$\text{Maka } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$$

4. Karena $\{\alpha_n\}$ barisan konvergen maka $\{\alpha_n\}$ terbatas, sehingga terdapat

$$K > 0 \text{ sedemikian sehingga } |\alpha_n| < K ; \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha x - \alpha_n x + \alpha_n x\| \\ &= \|\alpha_n x_n - \alpha_n x - \alpha x + \alpha_n x\| \\ &= \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \\ &= \|\alpha_n (x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \\ &\leq \|\alpha_n (x_n - x)\| + \|(\alpha_n - \alpha)x\| \\ &= |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \\ &\leq K \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \end{aligned}$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \alpha x$ (Rynne & Youngson, 2008:37-38)

Teorema 2.5.5

Jika pada ruang hasil kali dalam, $x_n \rightarrow x$ dan $y_n \rightarrow y$, maka $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ (Kreyszig, 1978:138).

Bukti:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \end{aligned}$$

Karena $(y_n - y) \rightarrow 0$ dan $(x_n - x) \rightarrow 0$ dimana $n \rightarrow \infty$

Terbukti bahwa $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

2.6 Ruang Hilbert**Definisi 2.6.1**

Ruang hasil kali dalam yang komplet disebut ruang Hilbert. Sedangkan ruang hasil kali dalam biasanya disebut ruang pre-Hilbert (Reed, 1980:39).

Contoh 2.6.2

Tunjukkan bahwa \mathbb{R} dengan hasil kali dalam ini

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^k x_n \bar{y}_n$$

merupakan ruang Hilbert

Selesaian:

Ruang hasil kali dalam yang komplet maka memenuhi;

Akan ditunjukkan setiap barisan Chauchy adalah konvergen

Barisan pada ruang hasil kali dalam konvergen Cauchy

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_m \rangle + \langle x_n, y_m \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_m \rangle| + |\langle x_n, y_m \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y_m \rangle| + |\langle x_n - x_m, y_m \rangle| \end{aligned}$$

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\| \|y_m\|$$

Terbukti bahwa barisan pada ruang hasil kali dalam konvergen Cauchy, sehingga

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^k x_n \bar{y}_n$$

merupakan ruang Hilbert

Definisi 2.6.3 (Orthogonality)

Diberikan X ruang hasil kali dalam. vektor $x, y \in X$ disebut orthogonal

jika

$$\langle x, y \rangle = 0$$

(Rynne & Youngson, 2008:60)

Definisi 2.6.4

Diberikan X ruang hasil kali dalam pada A subset dari X . komplemen

orthogonal dari A jika vector $x, y \in X$ disebut orthogonal atau

$$\langle x, y \rangle = 0$$

$A^\perp = \{x \in X : \langle x, a \rangle = 0\}$ untuk setiap $a \in A$ (Rynne & Youngson, 2008:65).

Contoh 2.6.5

Jika $X = \mathbb{R}^3$ dan $A = \{(a_1, a_2, 0), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ maka $A^\perp = \{(0, 0, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$

Selesaian:

Berdasarkan Definisi 2.6.4, diperoleh vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ pada A^\perp jika dan hanya jika untuk setiap $a = (a_1, a_2, 0)$ dengan $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\langle x, a \rangle &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 \\ &= 0a_1 + 0a_2 + x_3 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ambil $x_1 = a_1$ dan $x_2 = a_2$

Maka diperoleh $x_1 = x_2 = 0$

Oleh karena itu $x \in A^\perp$

Teorema 2.6.6 (Teorema Riesz-Frechet)

Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert dan $f \in \mathcal{H}'$

Terdapat sesuatu yang unik $y \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga

$$f(x) = f_y(x) = \langle x, y \rangle$$

$\forall x \in \mathcal{H}$. maka $\|f\| = \|y\|$

Bukti:

a) Jika $f(x) = 0 ; \forall x \in \mathcal{H}$ maka $y = 0$

Selain itu, $\text{Ker } f = \{x \in \mathcal{H} : f(x) = 0\}$ merupakan proper subspace tertutup pada \mathcal{H} sehingga $(\text{Ker } f)^\perp \neq \{0\}$

Jadi terdapat $z \in (\text{Ker } f)^\perp$ maka $f(z) = 1$.

Oleh karena itu, $z \neq 0$

Ambil $y = \frac{z}{\|z\|^2}$

Misalkan $x \in \mathcal{H}$, maka f linier sehingga

$$f(x - f(x)z) = f(x) - f(x)f(z) = 0$$

Dan karena $x - f(x)z \in \text{Ker } f$

dimana $z \in (\text{Ker } f)^\perp$ maka

$$\langle x - f(x)z, z \rangle = 0$$

Oleh karena itu, $\langle x, z \rangle - f(x)\langle z, z \rangle = 0$

Jadi $\langle x, z \rangle = f(x)\|z\|^2$

maka

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, \frac{z}{\|z\|^2} \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Jika $\|x\| \leq 1$ maka berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\langle x, y \rangle| \\ &\leq \|x\| \|y\| \\ &\leq \|y\| \end{aligned}$$

sehingga $\|f\| \leq \|y\|$

Di lain pihak, jika $x = \frac{y}{\|y\|}$ maka $\|x\| = 1$ dan

$$\|f\| \geq |f(x)|$$

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \frac{|f(y)|}{\|y\|} \\ &= \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} \end{aligned}$$

$$= \frac{\|y\|^2}{\|y\|}$$

$$= \|y\|$$

sehingga $\|f\| \geq \|y\|$

karena $\|f\| \leq \|y\|$ dan $\|f\| \geq \|y\|$

jadi $\|f\| = \|y\|$

2.7 Operator Linier

Definisi 2.7.1

Operator linier T merupakan operator dari domain X ruang vektor dan mengikuti aksioma berikut ini:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$; untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$
2. $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$; untuk setiap $\mathbf{u} \in X, \alpha \in \mathbb{R}$

Dapat ditulis menjadi

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Reddy, 1997:134)

Definisi 2.7.2

Diberikan $T: X \rightarrow Y$ operator linier, T dikatakan terbatas jika terdapat $k > 0$ sedemikian sehingga

$$\|T\mathbf{u}\| \leq k\|\mathbf{u}\| \text{ ; untuk setiap } \mathbf{u} \in X$$

Untuk $\mathbf{u} \neq 0$ maka

$$k \geq \frac{\|T\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

Sehingga himpunan $\{k: k \geq \frac{\|T\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \mathbf{u} \neq 0\}$ terbatas di bawah dan terbatas di atas, untuk setiap anggota \mathbf{u} pada X .

Diperoleh

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \mathbf{u} \neq 0 \right\}$$

dan dapat juga ditulis

$$\|T\mathbf{u}\| \leq \|T\| \|\mathbf{u}\|$$

(Reddy, 1997:146-147).

Definisi 2.7.3 (bentuk sesquilinear)

Diberikan X dan Y ruang vector atas field \mathbb{R} . Maka bentuk sesquilinear h pada $X \times Y$ merupakan pemetaan

$$h: X \times Y \rightarrow K$$

dimana untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ dan $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in Y$ dan skalar α, β

1. $h(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + h(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$
2. $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$
3. $h(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
4. $h(\beta\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\beta} h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Karena h bersifat linier dan linier conjugate, jika X dan Y bilangan real

($K = \mathbb{R}$) maka Bagian 4 menjadi

$$h(\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \beta\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \dots\dots\dots 2.3$$

dan h disebut **bilinier**

Jika X dan Y ruang norm dan bilangan real k sedemikian sehingga untuk setiap \mathbf{x}, \mathbf{y} maka

$$|h(x, y)| \leq k\|x\|\|y\| \dots\dots\dots 2.4$$

Maka h disebut terbatas

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|}$$

$$\|h\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x, y)| \dots\dots\dots 2.5$$

disebut norm h

Berdasarkan Persamaan 2.4 dan Persamaan 2.5 maka

$$|h(x, y)| \leq \|h\|\|x\|\|y\|$$

(Kreyszig, 1978:191-192)

Teorema 2.7.4

Diberikan $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ruang Hilbert dan

$$h: \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{K}$$

bentuk sesquilinear terbatas. Maka h dapat dibentuk menjadi

$$h(x, y) = \langle Tx, y \rangle$$

dimana $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ operator linier terbatas. T unik pada h dan bernorm

$$\|T\| = \|h\|$$

(Kreyszig, 1978:192)

Bukti:

Karena $\overline{h(x, y)}$ berarti y linier. Maka

$$\overline{h(x, y)} = \langle y, z \rangle \dots\dots\dots 2.6$$

Sehingga

$$h(x, y) = \langle z, y \rangle \dots\dots\dots 2.7$$

karena $z \in \mathcal{H}_1$ unik tentu saja $x \in \mathcal{H}_1$. Berdasarkan definisi operator

$$T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

Diperoleh

$$z = Tx$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan 2.7 pada Persamaan 2.6 sehingga T

linier maka

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) \\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) \\ &= \alpha \langle Tx_1, y \rangle + \beta \langle Tx_2, y \rangle \\ &= \langle \alpha Tx_1, y \rangle + \langle \beta Tx_2, y \rangle \end{aligned}$$

Untuk setiap y di \mathcal{H}_2 berlaku

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2$$

Akan ditunjukkan T terbatas. Jika $T = 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Tx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \\ \|h\| &\geq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Tx \neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx \rangle|}{\|x\| \|Tx\|} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|^2} \\ &= \|T\| \end{aligned}$$

Terbukti T terbatas.

Akan ditunjukkan T unik

Disisi lain $\|h\| \geq \|T\|$

$$\begin{aligned}
\|h\| &= \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Tx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \\
&\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\| \|y\|}{\|x\| \|y\|} \\
&= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \\
\|h\| &= \|T\|
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti T unik. Diasumsikan bahwa operator linier $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}_1$ dan $y \in \mathcal{H}_2$ diperoleh

$$h(x, y) = \langle Tx, y \rangle$$

Terbukti bahwa $\|T\| = \|h\|$

Teorema 2.7.5

Diberikan T operator linier dan $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Range T dinotasikan dengan $\text{Ran}(T)$ dan didefinisikan

$$\text{Ran}(T) = \{y \in \mathcal{H}_2; Tx = y \text{ dimana } x \in \mathcal{H}_1\}$$

operator T bersifat invertible jika untuk setiap $y \in \text{Ran}(T)$ terdapat sesuatu yang unik $x \in \mathcal{H}_1$ sedemikian sehingga $Tx = y$. Invers operator T dinotasikan T^{-1} merupakan

$$T^{-1}: \text{Ran}(T) \rightarrow \mathcal{H}_1$$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Operator Adjoint

Sebelum membahas tentang operator *self-adjoint*, operator normal dan operator uniter pada ruang Hilbert, harus terlebih difahami tentang operator *adjoint*.

Definisi 3.1.1

Jika $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ operator linier terbatas, dimana \mathcal{H} dan \mathcal{K} ruang Hilbert kompleks. Maka operator adjoint pada ruang Hilbert T^* dari T didefinisikan

$$T^*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$$

Dimana untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ dan $y \in \mathcal{K}$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

Contoh 3.1.2

Untuk setiap $k \in \mathbb{C}[0,1]$ dan $T_k \in B(L^2[0,1])$ didefinisikan

$$(T_k g)(t) = k(t)g(t)$$

Jika $f \in \mathbb{C}[0,1]$ dengan $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$

Selesaian

Andaikan $g, h \in L^2[0,1]$ dan $k = (T_f)^* h$ maka $(T_f g, h) = (g, k)$

berdasarkan definisi adjoint maka

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}dt &= \int_0^1 g(t)f(t)\overline{h(t)}dt \\ &= \int_0^1 g(t)\overline{k(t)}dt \end{aligned}$$

Persamaan ini benar jika $\overline{k(t)} = \overline{h(t)} f(t)$

Sehingga

$$\begin{aligned} k(t) &= \overline{\overline{k(t)}} \\ &= \overline{\overline{h(t)} f(t)} \\ &= \overline{\overline{h(t)} \overline{f(t)}} \\ &= h(t) \overline{f(t)} \end{aligned}$$

Karena sifat unik dari *adjoint* maka dapat disimpulkan

$$\begin{aligned} (T_f)^* h(t) &= k(t) \\ &= \overline{f(t)} h(t) \\ &= T_{\overline{f}} h(t) \end{aligned}$$

Karena $(T_f)^* h(t) = T_{\overline{f}} h(t)$

maka $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$.

Teorema 3.1.3

Diberikan \mathcal{H}, \mathcal{K} ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Terdapat operator unik $T^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ Sedemikian sehingga:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad ; \forall x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$$

Bukti:

Andaikan $y \in \mathcal{K}$ dan $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ dengan

$$f(x) = \langle Tx, y \rangle$$

Maka f transformasi linier dan berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz

dan terbatas di T berakibat

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\langle Tx, y \rangle| \\ &\leq \|Tx\| \|y\| \\ &\leq \|T\| \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

Maka f terbatas

Berdasarkan teorema Riesz-Frechet terdapat yang unik

$$z \in \mathcal{H}$$

sehingga

$$f(x) = \langle x, z \rangle \quad ; \forall x \in \mathcal{H}$$

Didefinisikan $T^*(y) = z$

maka $T^*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$

sehingga

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \dots\dots\dots 3.1.1$$

$\forall x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$.

Jadi T^* suatu fungsi yang memenuhi persamaan dalam Teorema 3.1.3

Akan ditunjukkan T^* transformasi linier. Andaikan $y_1, y_2 \in \mathcal{K}, \lambda, \mu \in$

\mathbb{C} dan $x \in \mathcal{H}$ maka berdasarkan Persamaan 3.1.1 diperoleh

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\lambda y_1 + \mu y_2) \rangle &= \langle Tx, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle \\ &= \langle Tx, \lambda y_1 \rangle + \langle Tx, \mu y_2 \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\mu} \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle x, T^*y_1 \rangle + \bar{\mu} \langle x, T^*y_2 \rangle \\ &= \langle x, \lambda T^*y_1 + \mu T^*y_2 \rangle \end{aligned}$$

karena $\langle x, T^*(\lambda y_1 + \mu y_2) \rangle = \langle x, \lambda T^*y_1 + \mu T^*y_2 \rangle$

Maka $T^*(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda T^* y_1 + \mu T^* y_2$

Jadi T^* transformasi linier.

Akan ditunjukkan T^* terbatas

Dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz maka

$$\begin{aligned} \|T^* y\|^2 &= \langle T^* y, T^* y \rangle \\ &= \langle TT^* y, y \rangle && \text{Definisi 3.1.1} \\ &\leq \|TT^* y\| \|y\| && \text{ketaksamaan Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|T\| \|T^* y\| \|y\| && T \text{ terbatas} \end{aligned}$$

Jika $\|T^* y\| > 0$

maka ketaksamaan tersebut dapat di bagi dengan $\|T^* y\|$

sehingga diperoleh

$$\|T^* y\| \leq \|T\| \|y\|$$

Tetapi jika $\|T^* y\| = 0$ maka trivialnya $\|T^* y\| \leq \|T\| \|y\|$. Karena

$\forall y \in \mathcal{K}$

$$\|T^* y\| \leq \|T\| \|y\|$$

maka T^* terbatas dan $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Akan ditunjukkan T^* unik

Andaikan \mathcal{B}_1 dan \mathcal{B}_2 di $B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ dan $\forall x \in \mathcal{H}$ dan $y \in \mathcal{K}$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, \mathcal{B}_1 y \rangle = \langle x, \mathcal{B}_2 y \rangle$$

sehingga

$$\mathcal{B}_1 y = \mathcal{B}_2 y \quad ; \forall y \in \mathcal{K}$$

maka $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ dan T^* unik

Contoh 3.1.4

Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks. Jika I operator identitas pada \mathcal{H} maka $I^* = I$

Selesaian

Jika $x, y \in \mathcal{H}$ maka

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, I^*y \rangle$$

Dan

$$\langle x, Iy \rangle = \langle x, y \rangle = \langle I^*x, y \rangle$$

Karena $\langle x, I^*y \rangle = \langle x, Iy \rangle$ maka $I^* = I$

Teorema 3.1.5

Diberikan \mathcal{H}, \mathcal{K} dan \mathcal{L} ruang Hilbert kompleks, $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dan $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$.

Sedangkan $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ maka

$$a) (\mu\mathcal{R} + \lambda\mathcal{S})^* = \bar{\mu}\mathcal{R}^* + \bar{\lambda}\mathcal{S}^*$$

$$b) (T\mathcal{R})^* = \mathcal{R}^*T^*$$

Bukti

$$\begin{aligned} a) \langle (\mu\mathcal{R} + \lambda\mathcal{S})^*y, x \rangle &= \langle y, (\mu\mathcal{R} + \lambda\mathcal{S})x \rangle \\ &= \langle y, (\mu\mathcal{R})x \rangle + \langle y, (\lambda\mathcal{S})x \rangle \\ &= \langle y, \mu(\mathcal{R}x) \rangle + \langle y, \lambda(\mathcal{S}x) \rangle \\ &= \bar{\mu}\langle y, \mathcal{R}x \rangle + \bar{\lambda}\langle y, \mathcal{S}x \rangle \\ &= \bar{\mu}\langle \mathcal{R}^*y, x \rangle + \bar{\lambda}\langle \mathcal{S}^*y, x \rangle \\ &= \langle \bar{\mu}\mathcal{R}^*y, x \rangle + \langle \bar{\lambda}\mathcal{S}^*y, x \rangle \\ &= \langle (\bar{\mu}\mathcal{R}^* + \bar{\lambda}\mathcal{S}^*)y, x \rangle \end{aligned}$$

Maka $(\mu\mathcal{R} + \lambda\mathcal{S})^*y = (\bar{\mu}\mathcal{R}^* + \bar{\lambda}\mathcal{S}^*)y$

Terbukti bahwa $(\mu\mathcal{R} + \lambda\mathcal{S})^* = \bar{\mu}\mathcal{R}^* + \bar{\lambda}\mathcal{S}^*$

$$\begin{aligned} \text{b) } \langle (T\mathcal{R})^*y, x \rangle &= \langle y, (T\mathcal{R})x \rangle \\ &= \langle y, Tx \rangle \langle y, \mathcal{R}x \rangle \\ &= \langle T^*y, x \rangle \langle \mathcal{R}^*y, x \rangle \\ &= \langle (T^*\mathcal{R}^*)y, x \rangle \end{aligned}$$

Maka $(T\mathcal{R})^*y = (T^*\mathcal{R}^*)y$

Terbukti bahwa $(T\mathcal{R})^* = \mathcal{R}^*T^*$

Teorema 3.1.6

Diberikan \mathcal{H}, \mathcal{K} ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$

- $(T^*)^* = T$
- $\|T^*\| = \|T\|$
- Fungsi $f: B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ didefinisikan dengan $f(R) = R^*$ kontinu
- $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Bukti

- Akan ditunjukkan bahwa *adjoint* dari *adjoint* adalah operator *original*

$$\begin{aligned} \langle y, (T^*)^*x \rangle &= \langle T^*y, x \rangle && \text{definisi } (T^*)^* \\ &= \overline{\langle x, T^*y \rangle} && \text{definisi ruang hasil kali dalam} \\ &= \overline{\langle Tx, y \rangle} && \text{definisi } T^* \\ &= \langle y, Tx \rangle && \text{definisi ruang hasil kali dalam} \end{aligned}$$

Karena $\langle y, (T^*)^*x \rangle = \langle y, Tx \rangle$

maka $(T^*)^*x = Tx \quad ; \forall x \in \mathcal{H}$

Jadi $(T^*)^* = T$

b) Dari Teorema 3.1.3 didapat $\|T^*\| \leq \|T\|$ dengan menerapkannya hasil

$(T^*)^*$ dan bagian a) maka

$$\|T\| = \|(T^*)^*\|$$

$$\leq \|T^*\|$$

$$\leq \|T\|$$

Sehingga $\|T^*\| = \|T\|$

c) Misalkan $\varepsilon > 0$ dan $\delta = \varepsilon$ maka $\|R - S\| < \delta$

$$\|f(R) - f(S)\| = \|R^* - S^*\|$$

$$= \|(R - S)^*\|$$

$$\|f(R) - f(S)\| = \|R - S\|$$

$$< \delta$$

$$= \varepsilon$$

Berdasarkan bagian b) maka f kontinu

d) Pada bagian b) $\|T\| = \|T^*\|$ sehingga

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\|$$

$$= \|T\| \|T\|$$

$$= \|T\|^2$$

Di samping itu

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle$$

$$= \langle T^*Tx, x \rangle$$

definisi T^*

$$\leq \|T^*Tx\| \|x\|$$

ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\leq \|T^*T\| \|x\| \|x\|$$

$$= \|T^*T\| \|x\|^2$$

$$\text{Karena } \|Tx\|^2 \leq \|T^*T\| \|x\|^2$$

$$\text{Berakibat } \|T\|^2 \leq \|T^*T\|$$

Teorema 3.1.7

Jika \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$ invertible maka T^* invertible dan

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Bukti

Karena $T \in B(\mathcal{H})$ invertible

maka

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

Jika diambil adjointnya maka

$$(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^*$$

dan

$$(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$$

Jadi T^* invertible dan $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Teorema 3.1.8 (Sifat Operator Adjoint)

Diberikan \mathcal{H}, \mathcal{K} ruang Hilbert kompleks, $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ dan $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ operator linier terbatas dan α skalar.

Maka:

$$a) \langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad ; x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$$

$$b) (S + T)^* = S^* + T^*$$

$$c) (\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$$

Bukti:

a) Berdasarkan Definisi 2.4.3 maka

$$\begin{aligned}\langle T^*y, x \rangle &= \overline{\langle x, T^*y \rangle} && \text{Definisi 2.5.3} \\ &= \overline{\langle Tx, y \rangle} && \text{Definisi 3.1.1} \\ &= \overline{\langle y, Tx \rangle} && \text{Definisi 2.5.3}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$

$$\begin{aligned}b) \langle x, (S + T)^*y \rangle &= \langle (S + T)x, y \rangle && \text{Bagian a)} \\ &= \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle && \text{Definisi 2.8.3} \\ &= \langle x, S^*y \rangle + \langle x, T^*y \rangle && \text{Definisi 3.1.1} \\ &= \langle x, (S^* + T^*)y \rangle && \text{Definisi 2.8.3}\end{aligned}$$

Karena $(S + T)^*y = (S^* + T^*)y$

Terbukti bahwa $(S + T)^* = S^* + T^*$

$$\begin{aligned}c) \langle (\alpha T)^*y, x \rangle &= \langle y, (\alpha T)x \rangle && \text{Bagian a)} \\ &= \langle y, \alpha(Tx) \rangle && \text{Definisi 2.8.3} \\ &= \bar{\alpha} \langle y, Tx \rangle && \text{Definisi 2.8.3} \\ &= \bar{\alpha} \langle T^*y, x \rangle && \text{Definisi 3.1.1}\end{aligned}$$

$$\langle (\alpha T)^*y, x \rangle = \langle \bar{\alpha}T^*y, x \rangle$$

Karena $(\alpha T)^*y = \bar{\alpha}T^*y$

Terbukti bahwa $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$

3.2 Operator Normal**Definisi 3.2.1**

Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$ maka T **operator normal** jika

$$TT^* = T^*T$$

Contoh 3.2.2

Misalkan $T_k \in B(L^2[0,1])$ yang didefinisikan pada Contoh 3.1.2 untuk setiap $k \in \mathbb{C}[0,1]$, jika $f \in \mathbb{C}[0,1]$ maka T_f operator normal

Selesaian:

Pada Contoh 3.1.3 diperoleh bahwa $(T_f)^* = T_{\bar{f}}; \forall g \in L^2[0,1]$

$$\begin{aligned} (T_f(T_f)^*)(g) &= T_f((T_f)^*(g)) \\ &= T_f(T_{\bar{f}}(g)) \\ &= T_f(\bar{f}g) \\ &= f\bar{f}g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((T_f)^*T_f)(g) &= (T_f)^*(T_f(g)) \\ &= T_{\bar{f}}(T_f(g)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((T_f)^*T_f)(g) &= T_{\bar{f}}(fg) \\ &= \bar{f}fg \\ &= f\bar{f}g \end{aligned}$$

karena $(T_f(T_f)^*)(g) = ((T_f)^*T_f)(g)$

maka $T_f(T_f)^* = (T_f)^*T_f$

Jadi terbukti bahwa T_f operator normal

Contoh 3.2.3

Jika \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks, I operator identitas pada \mathcal{H} , $\lambda \in \mathbb{C}$ dan

$T \in B(\mathcal{H})$ operator normal maka $T - \lambda I$ juga operator normal

Selesaian:

$$(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I$$

Berdasarkan Definisi 3.2.1 yaitu

$$TT^* = T^*T$$

Maka

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)(T - \lambda I)^* &= (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda}I) \\ &= TT^* - \lambda IT^* - \bar{\lambda}IT + \lambda I\bar{\lambda}I \\ &= TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + \lambda\bar{\lambda}I \\ &= (T^* - \bar{\lambda}I)(T - \lambda I) \\ &= (T - \lambda I)^*(T - \lambda I) \end{aligned}$$

Karena $(T - \lambda I)(T - \lambda I)^* = (T - \lambda I)^*(T - \lambda I)$

Maka $T - \lambda I$ operator normal

Teorema 3.2.4

Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks

$T \in B(\mathcal{H})$ normal dan $\alpha > 0$ maka berlaku

1. $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$; $\forall x \in H$
2. *Jika $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$ maka $\text{Ker } T^* = \{0\}$; $\forall x \in H$*

Bukti:

1. Misalkan $x \in \mathcal{H}$ dan $T \in B(\mathcal{H})$ operator normal

Berdasarkan definisi operator normal bahwa $TT^* = T^*T$ maka

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle - \langle T^*x, T^*x \rangle \\ &= \langle T^*Tx, x \rangle - \langle TT^*x, x \rangle \\ &= \langle TT^*x, x \rangle - \langle TT^*x, x \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle TT^*x - TT^*x, x \rangle \\
 &= \langle 0, x \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

karena $\|T(x)\|^2 = \|T^*(x)\|^2$

Jadi terbukti bahwa $\|T(x)\| = \|T^*(x)\| \quad ; \forall x \in H$

2. Misalkan $y \in \text{Ker } T^*$

Maka $T^*y = 0$

Berdasarkan bagian 1 maka

$$\|Ty\| = \|T^*y\|$$

$$\|Ty\| = 0$$

Karena $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$

Sehingga $\|Ty\| \geq \alpha\|y\|$

Oleh karena itu $0 = \|Ty\| \geq \alpha\|y\|$

Hal ini berarti $\|y\| = 0$

Sehingga $y = 0$

Jadi $\text{Ker } T^* = \{0\}$

3.3 Operator Self-Adjoint

Definisi 3.3.1

Jika \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$ maka T operator self-adjoint jika

$$T = T^*$$

Contoh 3.3.2

Misalkan $T_k \in B(L^2[0,1])$ yang didefinisikan pada Contoh 3.1.2 $\forall k \in \mathbb{C}[0,1]$, jika $f \in \mathbb{C}[0,1]$ bernilai real maka T_f operator *self-adjoint*

Selesaian:

Pada Contoh 3.1.1 diperoleh bahwa $(T_f)^* = T_{\bar{f}}; \forall g \in L^2[0,1]$

$f \in \mathbb{C}[0,1]$ nilainya real, hal ini berarti $\bar{f} = f$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } (T_f)^* &= T_{\bar{f}} \\ &= T_f \end{aligned}$$

Jadi terbukti T_f operator *self-adjoint*

Teorema 3.3.3

Misalkan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan S himpunan dari operator *self-adjoint* di $B(\mathcal{H})$

1. Jika $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ (bilangan real) dan $T_1, T_2 \in S$ maka $\alpha T_1 + \beta T_2 \in S$
2. S himpunan bagian tertutup dari $B(\mathcal{H})$

Bukti:

1. $T_1, T_2 \in S$ dan S himpunan dari operator *self-adjoint* di $B(\mathcal{H})$

T_1, T_2 operator *self-adjoint*

Maka

$$\begin{aligned} (\alpha T_1 + \beta T_2)^* &= \alpha T_1^* + \beta T_2^* \\ &= \alpha T_1 + \beta T_2 \end{aligned}$$

maka

$$\alpha T_1 + \beta T_2 \in S$$

2. Andaikan $\{T_n\}$ barisan di S yang konvergen ke $T \in B(\mathcal{H})$

Maka berdasarkan Teorema 3.1.5 $\{T_n^*\}$ konvergen ke T^*

Oleh karena itu $\{T_n\}$ konvergen ke T^*

Dimana $T_n^* = T_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Sehingga $T = T^*$ dan $T \in S$

Jadi S merupakan himpunan bagian tertutup

Teorema 3.3.4

Misalkan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$

1. T^*T dan TT^* operator *self-adjoint*
2. $T = R + iS$ dimana R, S operator *self-adjoint*

Bukti:

1. Berdasarkan Definisi 3.3.1 bahwa

$$T = T^*$$

Sehingga

$$\begin{aligned} (T^*T)^* &= T^{**}T^* \\ &= TT^* \end{aligned}$$

maka TT^* operator *self adjoint*

Berdasarkan Definisi 3.3.1 maka T^*T operator *self-adjoint*

Jadi terbukti TT^* dan T^*T operator *self-adjoint*

2. Andaikan $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$

$$\text{Dan } S = \frac{1}{2}(T - T^*)$$

Berdasarkan Definisi 3.3.1 maka $T = R + iS$

$$R^* = \frac{1}{2}(T + T^*)^*$$

$$= \frac{1}{2}(T^* + T^{**})$$

$$R^* = \frac{1}{2}(T^* + T)$$

$$= \frac{1}{2}(T + T^*)$$

$$R^* = R$$

Jadi R operator *self-adjoint*

$$S^* = \frac{-1}{2i}(T - T^*)^*$$

$$= \frac{-1}{2i}(T^* - T^{**})$$

$$= \frac{-1}{2i}(T^* - T)$$

$$= \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

$$= S$$

Jadi S operator *self-adjoint*

Terbukti bahwa $T = R + iS$ dengan R dan S operator *self-adjoint*

3.4 Operator Uniter

Definisi 3.4.1

Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$ maka T operator *uniter* jika

$$TT^* = T^*T = I$$

Contoh 3.4.2

Misalkan $T_k \in B(L^2[0,1])$ yang didefinisikan pada Contoh 3.1.2 $\forall k \in \mathbb{C}[0,1]$, jika $f \in \mathbb{C}[0,1]$ sehingga $|f(t)| = 1 ; \forall t \in [0,1]$ maka T_f operator *uniter*

Selesaian:

Pada Contoh 3.1.2 diperoleh bahwa $(T_f)^* = T_{\bar{f}} ; \forall g \in L^2[0,1]$ untuk

$$\begin{aligned} ((T_f)^* T_f)g(t) &= ((T_f)^* f)g(t) \\ &= ((T_f)^* f)(t)g(t) \\ &= \overline{f(t)}f(t)g(t) \\ &= |f(t)|^2 g(t) \end{aligned}$$

Karena $|f(t)| = 1$ maka $|f(t)|^2 = 1$

Sehingga $((T_f)^* T_f)g(t) = g(t)$

maka $T_f^* T_f(g) = g$

Jadi $T_f^* T_f = I$

untuk

$$\begin{aligned} (T_f(T_f)^*)g(t) &= (T_f \bar{f})g(t) \\ &= (f\bar{f})(t)g(t) \\ &= f(t)\overline{f(t)}g(t) \\ &= |f(t)|^2 g(t) \end{aligned}$$

Karena $|f(t)| = 1$ maka $|f(t)|^2 = 1$

Sehingga $(T_f(T_f)^*)g(t) = g(t)$

maka $T_f T_f^*(g) = g$

Sehingga $T_f T_f^* = I$

Oleh karena itu $T_f^* T_f = T_f T_f^* = I$

Jadi T_f operator uniter

Teorema 3.4.3

Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan diberikan $T, U \in B(\mathcal{H})$ maka

1. $T^* T = I$ jika dan hanya jika T isometri
2. U operator uniter jika dan hanya jika U isometri dari \mathcal{H} ke \mathcal{H}

Bukti:

1. a) Karena $T^* T = I$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \|Tx\|^2 &= (Tx, Tx) \\ &= (T^* T x, x) \\ &= (Ix, x) \end{aligned}$$

$$\|Tx\|^2 = \|x\|^2$$

Jadi T isometri

- b) Maka $(T^* T x, x) = (Tx, Tx)$

$$\begin{aligned} &= \|Tx\|^2 \\ &= \|x\|^2 \\ &= (Ix, x) \end{aligned}$$

Jadi $T^* T = I$

2. a) Karena U operator uniter

Maka U isometri berdasarkan bagian 1

Misalkan $y \in \mathcal{H}$ maka $y = U(U^* y)$

Sehingga $y \in \text{Im } U$

Maka $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Jadi U isometri dari \mathcal{H} ke \mathcal{H}

b) Karena U isometri dari \mathcal{H} ke \mathcal{H}

Maka berdasarkan definisi $U^*U = I$

Jika $y \in \mathcal{H}$, dimana $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Maka $\exists x \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga

$$Ux = y$$

Oleh karena itu

$$UU^*y = UU^*(Ux)$$

$$= U(U^*Ux)$$

$$= UIx$$

$$= Ux$$

$$= y$$

$$\text{Jadi } U^*U = I \quad \dots\dots\dots 3.4.1$$

$$(U^*U)^* = UU^*$$

$$= I$$

$$\text{Jadi } UU^* = I \quad \dots\dots\dots 3.4.2$$

Berdasarkan Persamaan 3.4.1 dan Persamaan 3.4.2 maka

$$U^*U = UU^* = I$$

jadi U operator uniter

3.5 Kajian Agama

Menuntut ilmu hukumnya wajib bagi seluruh muslim, hal itu telah dijelaskan dalam hadits berikut:

طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ وَ مُسْلِمَةٍ

Artinya: *“Menuntut Ilmu merupakan kewajiban bagi kaum muslimin laki-laki dan perempuan.”*

Pada hadits di sudah sangat jelas perintah untuk menuntut ilmu. Pada hadits tersebut juga tidak ada perbedaan antara laki-laki dan perempuan dalam kaitannya menuntut ilmu. Ilmu tidak hanya ilmu agama melainkan ilmu duniapun juga wajib hukumnya untuk dipelajari. Hal tersebut dijelaskan hadits berikut ini:

أَطْلُبُ الْعِلْمَ وَلَوْ بِالصَّيْنِ

Artinya: *“Tuntutlah ilmu walau ke negeri cina” (Anas Ibnu Malik)*

Pada hadits tersebut diperintahkan menuntut ilmu walaupun sampai ke negeri seberang (negeri Cina). Apabila dicermati secara mendalam, tidak mungkin mencari ilmu agama di negeri Cina. Sehingga menuntut ilmu sampai ke negeri cina, ilmu yang di pelajari di negeri Cina adalah ilmu dunia.

Dijelaskan juga dalam hadits berikut:

أَطْلُبُ الْعِلْمَ وَلَوْ بِالصَّيْنِ فَإِنْ طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ وَ مُسْلِمَةٍ

Artinya: *“Carilah ilmu meskipun di negeri Cina karena mencari ilmu itu wajib bagi setiap muslim”*

(Yaqub, 2008:1)

Orang yang menuntut ilmu sangat mulia sekali di hadapan Allah, hal tersebut dijelaskan dalam Al-Qur'an surat Al-Mujadillah ayat 11 sebagai berikut:

يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۗ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١٢﴾

Artinya: “ ... niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan”

Allah akan mengangkat derajat orang yang menuntut ilmu. Sungguh mulia sekali kedudukan orang yang menuntut ilmu.

Ilmu dunia banyak sekali macamnya, salah satunya ilmu matematika. Cabang dari ilmu matematika di antaranya kalkulus, analisis fungsional, statistika, analisis real dan masih banyak lagi. Pada analisis fungsional banyak sekali dijelaskan tentang ruang vector, ruang norm, ruang metriks, ruang Hilbert dan masih banyak lagi. Pada penelitian ini membahas tentang operator pada ruang Hilbert.

Pada ruang Hilbert terdapat operator *adjoint*, operator normal, operator *self-adjoint* dan operator uniter. Berdasarkan definisi *operator normal* di atas sesuai dengan hadits berikut:

إذا أكل أحدكم طعاما فليذكر "بسم الله تعالى" فإن نسي أن يذكر اسم الله في أوله فليقل "بسم الله على أوله وأخره" (رواه الترمذی)

Artinya: “Ketika salah satu dari kalian memakan makanan maka ucapkanlah akan nama Allah namun bila pada awalnya lupa mengucapkan nama Allah maka, ucapkanlah dengan menyebut nama Allah dari awal sampai akhir”(Riwayat Tirmidzi)

(Al-Hasyim, 999:12)

Pada hadits di atas maka apabila menjadi dasar dari operator *normal* maka menyebutkan nama Allah ketika memulai atau mengawali makan berlaku atau dinotasikan dengan T^*T sedangkan menyebutkan nama Allah ketika di tengah atau di akhir makan berlaku atau dinotasikan dengan TT^* . Berdasarkan dari pahala yang didapat ketika menyebut nama Allah adalah sama-sama mendapatkan pahala. Hal tersebut dijelaskan kaidah fiqh sebagai berikut:

لَا تُؤَابَ إِلَّا بِالنِّيَّةِ

Artinya: “Tidak ada pahala kecuali dengan niat” (Djazuli, 2006:196)

Dari kaidah fiqh di atas menyebut nama Allah diartikan dengan niat. Maka mengucapkan niat di awal maupun di tengah-tengah ataupun di akhir sama-sama mendapatkan pahala. Berdasarkan kaidah fiqh tersebut maka dapat dikatakan bahwa mengucapkan niat baik di awal ataupun ditengah-tengah bahkan di akhir sama-sama mendapatkan pahala, hal tersebut sesuai dengan definisi operator *normal* yaitu

$$TT^* = T^*T$$

Berdasarkan definisi atau pengertian dari *self-adjoint* di atas sesuai dengan kaidah fiqh sebagai berikut:

الاصل بقاء ماكان على ماكان

Artinya: “Asal hukum sesuatu sebagaimana hukum yang ada sebelumnya”

(Mubarak, 2002:20)

Pada kaidah fiqh tersebut di atas maka apabila menjadi dasar dari operator *self-adjoint* maka hukum atau aturan yang berlaku pada T^* sesuai dengan hukum

yang telah berlaku sebelumnya, yaitu hukum yang berlaku pada T . Sehingga berdasarkan kaidah fiqih tersebut maka dapat dikatakan bahwa asal hukum sesuatu sesuai dengan hukum yang telah berlaku sebelumnya hal ini sesuai dengan definisi operator *self-adjoint* yaitu

$$T^* = T$$

Berdasarkan hadits dan kaidah fiqih pada operator *normal* $TT^* = T^*T$ yaitu menyebut nama Allah di awal ataupun di tengah bahkan di akhir sama-sama mendapatkan pahala. Berdasarkan surat Al-Baqarah ayat 261 disebutkan:

... وَاللَّهُ يُضَعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ ...

Artinya: "... Allah melipat gandakan (*ganjara*) bagi siapa yang Dia kehendaki ..."

Pada surat Al-Baqarah ayat 261 dijelaskan bahwa pahala yang diberikan Allah karena menyebut nama Allah di awal, di tengah dan di akhir sesuai dengan kehendak Allah. Maka berdasarkan hadits dan kaidah fiqih yang berlaku pada operator normal ditambah dengan penjelasan dari Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 261, menjadi dasar dari operator *uniter*. Mengawali makan dengan menyebut nama Allah berlaku atau dinotasikan dengan T^*T , menyebut nama Allah pada saat di tengah makan atau di akhir maka berlaku atau dinotasikan dengan TT^* sama-sama mendapatkan pahala, tetapi pahala yang di dapatkan sesuai dengan kehendak Allah berlaku atau dinotasikan dengan I . Hal tersebut sesuai dengan definisi operator uniter yaitu:

$$T^*T = TT^* = I$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Sifat dari operator Hilbert antara lain:

- a. Diberikan \mathcal{H}, \mathcal{K} dan \mathcal{L} ruang Hilbert kompleks, $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dan $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$. dimana $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ maka
 - 1) $(\mu\mathcal{R} + \lambda\mathcal{S})^* = \bar{\mu}\mathcal{R}^* + \bar{\lambda}\mathcal{S}^*$
 - 2) $(T\mathcal{R})^* = \mathcal{R}^*T^*$
 - 3) $(T^*)^* = T$
 - 4) $\|T^*\| = \|T\|$
 - 5) Fungsi $f: B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ yang didefinisikan $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^*$ merupakan fungsi kontinu
 - 6) $\|T^*T\| = \|T\|^2$
- b. Diberikan \mathcal{H}, \mathcal{K} ruang Hilbert kompleks, $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ dan $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ operator terbatas dan α skalar, maka:
 - 1) $\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$; $x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$
 - 2) $(S + T)^* = S^* + T^*$
 - 3) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$
- c. Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks, $T \in B(\mathcal{H})$ operator normal, dan $\alpha > 0$ dimana $x \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga:
 - 1) $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$
 - 2) jika $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$ maka $\text{Ker } T^* = \{0\}$

- d. Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks, S operator *self adjoint* di $B(\mathcal{H})$
3. jika $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ (bilangan real) dan $T_1, T_2 \in S$ maka $\alpha T_1 + \beta T_2 \in S$
 4. S subset tertutup di $B(\mathcal{H})$
- e. Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$
- 1) T^*T dan TT^* operator *self adjoint*
 - 2) $T = R + iS$ dimana R, S operator *self adjoint*
- f. Diberikan \mathcal{H} ruang Hilbert kompleks dan $T, U \in B(\mathcal{H})$ maka
- 1) $T^*T = I$ jika dan hanya jika T isometri
 - 2) U operator uniter jika dan hanya jika U isometri dari \mathcal{H} ke \mathcal{H}

4.2 Saran

Dari penelitian ini perlu pengembangan pembahasan agar lebih mendalam. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya lebih dikembangkan pembahasannya tidak hanya pada fungsi saja dan pada ruang yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusussyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Al-Hasyimi, Sayid Ahmad. 1999. *Mukhtarul Ahadits An-Nabawiyah wa Al-Hikam Al Muhammadiyah*. Semarang: Maktabah Al Hidayah
- Bartle & Sherbert. 1994. *Introduction to Real Analysis*. Singapore: John Willey & Sons. INC
- Bishop & Bridges. 1985. *Constructive Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
- Djazuli, A. 2006. *Kaidah-Kaidah Fikih (Kaidah-Kaidah Hukum Islam dalam Menyelesaikan Masalah-Masalah yang Praktis)*. Jakarta: Prenada Media Group
- Goffman & Pedrick. 1974. *First Course in Functional Analysis*. Prentice-Hall of India Private Limited New Delhi
- Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Metodologi penelitian dan aplikasinya*. Jakarta: Ghalia Indonesia
- Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory functional analysis with applications*. Singapura: Republic of Singapore
- Mubarak, Jaih. 2002. *Kaidah Fiqh (sejarah dan kaidah asasi)*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada
- Negoro & Harahap. 1998. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia
- Phillips, Esther R., 1984. *An Introduction to Analysis and Integration Theory*. Canada: General Publishing Company
- Purwanto. 1997. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang
- Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press
- Reddy, B.D., 1997. *Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. Verlag New York: Springer

- Reed, Michael. 1980. *Functional Analysis*. San Diego New York Boston: Academic Press
- Rudin, Walter. 1991. *Functional Analysis*. United States of America: McGraw-Hill
- Rynne & Youngson, Martin A. 2008. *Linier Functional Analysis (second edition)*. Springer-Verlag London
- Yaqub, Ali Mustofa. 2008. *Hadits-Hadits Bermasalah*. Jakarta: Pustaka Firdaus





**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Faridhatun Nasikah
Nim : 07610086
Fakultas/ jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Operator pada Ruang Hilbert
Pembimbing I : Hairur Rahman, M. Si
Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	26 Oktober 2010	Konsultasi BAB I dan II	1.
2	4 November 2010	Konsultasi BAB I dan II	2.
3	5 November 2010	Konsultasi BAB I dan II	3.
4	20 November 2010	Konsultasi Kajian Agama	4.
5	21 November 2010	ACC Proposal	5.
6	13 Desember 2010	Konsultasi BAB III	6.
7	20 Desember 2010	Konsultasi BAB III	7.
8	3 Januari 2011	Konsultasi Kajian Agama	8.
9	4 Januari 2011	Revisi BAB I dan II	9.
10	5 Januari 2011	Konsultasi BAB III	10.
11	5 Januari 2011	Konsultasi Kajian Agama	11.
12	11 Januari 2011	Konsultasi BAB III	12.
13	13 Januari 2011	Konsultasi BAB III	13.
14	14 Januari 2011	Revisi Kajian Agama	14.
15	14 Januari 2011	ACC Keseluruhan	15.

Malang, 14 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001