RANK MINIMUM MATRIKS HERMITE
YANG DIGAMBARKAN GRAF G

SKRIPSI

Oleh:
MOHAMAD SYAFI'I
NIM. 07610085

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

RANK MINIMUM MATRIKS HERMITE YANG DIGAMBARKAN GRAF G

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MOHAMAD SYAFI'I
NIM. 07610085

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

RANK MINIMUM MATRIKS HERMITE YANG DIGAMBARKAN GRAF G

SKRIPSI

Oleh:
MOHAMAD SYAFI'I
NIM. 07610085

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 12 Maret 2011

Pembimbing I,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Pembimbing II,

Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

RANK MINIMUM MATRIKS HERMITE
YANG DIGAMBARKAN GRAF G

SKRIPSI

Oleh:
MOHAMAD SYAFI'I
NIM. 07610085

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 24 Maret 2011

Susunan Dewan Penguji			**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	:	**Evawati Alisah, M.Pd** **NIP. 19720604 199903 2 001**	( )
2. Ketua	:	**Wahyu Henky Irawan, M.Pd** **NIP. 19710420 200003 1 003**	( )
3. Sekretaris	:	**Abdussakir, M.Pd** **NIP. 19751006 200312 1 001**	( )
4. Anggota	:	**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A** **NIP. 19731212 199803 1 001**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Mohamad Syafi'i

NIM : 07610085

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Februari 2011

Yang membuat pernyataan

<u>Mohamad Syafi'i</u>

NIM. 07610085

MOTTO

مَا وَدَّعَكَ رَبُّكَ وَمَا قَلَىٰ ۝٣ وَلَلْأَخِرَةُ خَيْرٌ لَّكَ مِنَ ٱلْأُولَىٰ ۝٤ وَلَسَوْفَ يُعْطِيكَ رَبُّكَ فَتَرْضَىٰٓ ۝٥

"Tuhanmu tiada meninggalkan kamu dan tiada (pula) benci kepadamu; dan Sesungguhnya hari kemudian itu lebih baik bagimu daripada yang sekarang (permulaan); dan kelak Tuhanmu pasti memberikan karunia-Nya kepadamu , lalu (hati) kamu menjadi puas. (QS. Ad Dhuha:3-5)"

أذكروا مقاصدكم من البيت

"Ingat-ingatlah tujuan kalian dari rumah"

"Penemuan terhebat dari masa ke masa adalah bahwa kita dapat mengubah masa depan kita hanya dengan mengubah sikap kita"
(Oprah Winfrey)

HALAMAN PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayah, ibu dan keluarga penulis, yang telah memberikan segalanya.

Seluruh guru penulis, yang telah memberikan ilmu dan nasihatnya .

Teman-teman, yang telah memberikan semangat dan pengertian.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika dan dosen pembimbing 1 yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
4. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing II, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
5. Abdul Aziz, M.Si selaku dosen wali, yang telah memberikan pengarahan-pengarahan dan nasihat-nasihat yang sangat penulis butuhkan.

6. Seluruh dosen jurusan Matematika, terimakasih atas seluruh ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak, Ibu, dan keluarga tercinta, yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Seluruh guru penulis terutama Alm. K.H. Abdul Manan Syukur, yang telah memberikan ilmu dan nasihatnya.
9. Sahabat-sahabat tercinta, yang telah memberikan pengalaman dan kenangan dalam hidup.
10. Teman-teman Pondok Pesantren Al Qur'an Nurul Huda, yang selalu memberikan saran dan do'a kepada penulis.
11. Teman-teman Matematika angkatan 2007, terima kasih atas do'a serta kenangan yang kalian berikan.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. Amien.

Malang, 22 Februari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$A(G)$ = Matriks *adjacency* dari graf G.

$R(H_G)$ = Rank dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf G.

$mr(H_G)$ = Rank minimum dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf G.

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Syafi'i, Mohamad. 2011. **Rank Minimum Matriks Hermite Yang Digambarkan Graf G** . Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Abdussakir, M.Pd.
II. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

Kata Kunci: Rank Minimum, Matriks Hermite, Graf.

Rank minimum dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf G didefinisikan dengan rank terkecil dari matriks Hermite dimana unsur-unsur ke-*ij* dalam matriks tersebut adalah:

i. Untuk $i \neq j$ adalah taknol, jika (*i*,*j*) adalah sisi di G.
ii. Untuk $i = j$ nilainya diabaikan.
iii. 0 untuk yang lainnya.

Pada skripsi hanya menentukan rank minimum yang digambarkan oleh graf komplit, graf lintasan, graf sikel, graf bipartisi komplit, dan graf star. Dalam menentukan rank minimum yang digambarkan graf tersebut dengan cara graf yang digambarkan dibentuk dalam matriks *adjacency*, kemudian dikembangkan menjadi beberapa matriks Hermite, setelah itu dicari rank dari beberapa matriks tersebut, sehingga diperoleh rank minimum. Dalam mencari rank matriks digunakan operasi baris elementer dan dengan bantuan program Matlab.

Hasil penelitian ini diperoleh :

1. $mr(H_{K_n}) = 1, n \in \mathrm{N}\ dan\ n \geq 2$
2. $mr(H_{P_n}) = n-1, n \in \mathrm{N}\ dan\ n \geq 2$
3. $mr(H_{C_n}) = n-2, n \in \mathrm{N}\ dan\ n \geq 3$
4. $mr(H_{K_{m,n}}) = 2, m, n \in \mathrm{N}$
5. $mr(H_{S_n}) = 2, n \in \mathrm{N}$

ABSTRACT

Syafi'i, Mohamad. 2011. **The Minimum Rank of Hermitian Matrices Described by a Graph**. Thesis. Mathematics Department Science and Technology Faculty State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Advisor: I. Abdussakir, M.Pd.
II. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

Keywords: Minimum Rank, Hermitian Matrices, Graf.

The minimum rank of Hermitian matrices described by a graph is defined to be the smallest rank over all Hermitian matrices whose entries *ij*-th of its matrices are:

i. For $i \neq j$ is nonzero whenever (*i*,*j*) is an edge in G
ii. For $i = j$ is ignored
iii. Zero, for otherwise

This thesis only determiniation of minimum rank described by complete graph, path graph, cycle graph, bipartite complete graph, and star graph. The method Determination of minimum rank described a graph is from a graph, then finding the adjacency matrix, then developed into a Hermitian matrices, after that lookfor rank from its to get the rank minimum. In determination rank matrices using elementary row operations and Matlab Program.
The result this thesis are :

1. $mr(H_{K_n}) = 1,\ n \in \mathrm{N}\ and\ n \geq 2$
2. $mr(H_{P_n}) = n-1,\ n \in \mathrm{N}\ and\ n \geq 2$
3. $mr(H_{C_n}) = n-2,\ n \in \mathrm{N}\ and\ n \geq 3$
4. $mr(H_{K_{m,n}}) = 2,\ m, n \in \mathrm{N}$
5. $mr(H_{S_n}) = 2, n \in \mathrm{N}$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Ilmu adalah pengetahuan tentang sesuatu bidang yang disusun secara bersistem menurut metode-metode tertentu yang dapat digunakan untuk menerangkan gejala-gejala tertentu di bidang (pengetahuan) itu (Kamus Besar Bahasa Indonesia, 1989). Ibnu Khaldun membagi kelompok ilmu ke dalam dua kelompok yaitu :

1. Ilmu yang merupakan suatu yang alami pada manusia, yang ia bisa menemukannya karena kegiatan berpikir.
2. Ilmu yang bersifat tradisional (naqli) (Rachman, 2006:257).

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan, bahkan Carl Friedrich Gauss mengatakan matematika sebagai "Ratunya Ilmu Pengetahuan". Menurut Kerami dan Sitanggang (2003:156) matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk dan lambang-lambang. Berkaitan dengan definisi tersebut, matematika seringkali dibagi menjadi tiga cabang, yaitu aljabar, analisis dan geometri. Aljabar membahas tentang bilangan dan pengabstrakannya, analisis membahas kekonvergenan dan limit, sedangkan geometri membahas tentang bentuk dan konsep-konsep yang berkaitan. Dalam perkembangan selanjutnya, cabang matematika menjadi semakin banyak dan salah satunya adalah teori graf. Teori graf berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih dahulu berkembang.

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut ilmu hitung atau *ilmu Al-hisab*. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Dalam hal ini Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 202:

أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٢٠٢

Artinya : "*Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya*".(QS Al-Baqarah: 202).

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Teori graf mempunyai banyak aplikasi dalam biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik, informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu-ilmu sosial. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan (Abdussakir, Azizah, dan Nofandika, 2009:1).

Suatu Graf G adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, bersama dengan himpunan (kemungkinan kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di G yang disebut sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan V(G), sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G) (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Misalkan terdapat suatu graf G, dari suatu graf tersebut dibentuk menjadi matriks *adjacency* atau matriks keterhubungan. Matriks *adjacency* suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur nol dan satu, dan memuat nilai nol pada diagonal utamanya. Bernilai satu jika antara titik satu dengan titik lainnya terhubung langsung, sedangkan bernilai nol jika titik yang satu dengan titik lainnya tidak terhubung langsung (Abdussakir, Azizah, dan Nofandika, 2009: 73-74).

Dari matriks *adjacency* graf tersebut dapat dicari ranknya. Dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut rank dari A dan dinyatakan sebagai rank(A) (Anton dan Rorres, 2004:294).

Matriks *adjacency* merupakan matriks simetri. Jika dari matriks *adjacency* dirubah menjadi matriks Hermite, yang mana unsur-unsurnya adalah bilangan kompleks tak nol jika antar titik dalam graf tersebut terhubung langsung dan nol jika antar titik dalam graf tersebut tidak terhubung langsung, sedangkan untuk unsur diagonalnya diabaikan. Setelah dibentuk menjadi beberapa matriks Hermite, maka dapat dicari rank dari matriks Hermite tersebut, karena pemberian unsur-unsur bilangan kompleks bersifat *random*, maka dapat diperoleh rank minimum dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf G.

Penelitian sebelumnya tentang rank minimum dari matriks yang digambarkan graf G hanya dikaji dalam bentuk matriks *adjacency*, matriks simetri yang unsur-unsurnya modulo Z_n, dan matriks simetri real. Oleh karena itu penulis ingin mengembangkan dan meneliti tentang rank minimum dari matriks Hermite yang digambarkan graf G, karena matriks Hermite juga merupakan matriks simetri dengan semesta bilangan kompleks.

Dari latar belakang di atas, penulis ingin membahas rank minimum matriks Hermite yang digambarkan Graf G. Oleh karena itu penulis memberi judul pada skripsi ini **"Rank Minimum Matriks Hermite yang Digambarkan Graf G".**

1.2. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana pola rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf G?

1.3. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitan ini adalah penulis hanya membatasi pada graf komplit (K_n), graf lintasan (P_n), graf sikel (C_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), graf bintang (S_n).

1.4. Tujuan Penelitian

Menentukan dan membuktikan pola umum dari rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf G.

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah :

1. Jurusan Matematika

   Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2. Peneliti

   Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

3. Pengembangan ilmu pengetahuan

Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika khususnya dalam perkembangan teori graf dan aljabar linier elementer.

1.6. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep rank, teori graf : definisi graf, graf terhubung, graf kompilt (K_n), graf lintasan (P_n), graf sikel (C_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), graf bintang (S_n), matriks *adjacency*, matriks Hermite.
4. Membuat contoh-contoh graf baik untuk graf lintasan (P_n), graf kompilt (K_n), graf sikel (C_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), graf bintang (S_n).
5. Membentuk contoh-contoh graf tersebut menjadi matriks *adjacency*.
6. Membentuk matriks *adjacency* menjadi beberapa matriks Hermite

7. Menggunakan operasi baris elementer dan program Matlab untuk menghitung rank dari matriks-matriks Hermite tersebut.
8. Menentukan pola umum rank minimum matriks Hermite yang dari graf-graf tersebut.
9. Membuktikan pola umum rank minimum matriks Hermite yang dari graf-graf tersebut.
10. Membuat kesimpulan dari penelitian ini.

1.7. Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, graf terhubung, graf komplit, graf lintasan, graf sikel, graf bipartisi komplit, graf bintang, graf terdukung, matriks, matriks Hermite, eliminasi Gauss-Jordan, rank matriks, hubungan graf dan matriks, matriks *adjacency*, rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf, serta kajian Al Qur’an tentang graf.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang menentukan pola umum rank minimum dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf komplit (K_n), graf lintasan (P_n), graf sikel (C_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), graf bintang (S_n).

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini disajikan tentang kesimpulan dari pembahasan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Teori Graf dalam Al Qur'an

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur’an, salah satunya adalah matematika. Teori graf yang merupakan salah satu cabang matematika. Graf adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sisi.

Suatu graf superstar tergambar pada susunan tata surya di ruang angkasa. Para ahli perbintangan telah menjelaskan bahwa matahari dikelilingi oleh sekumpulan benda angkasa yang terdiri dari planet, bulan, dan komet yang selalu mengikuti matahari dan tunduk terhadap kekuatan gravitasi matahari (Abdushshamad, 2003:29).

Nicoulas Copernicus membuat model dari geosentris Ptolomeus dengan menjadikan matahari sebagai pusat jagad raya. Johanes Kepler merupakan astronom pertama yang menerima dan menindaklanjuti gagasan heliosentris dan menggunakannya untuk menganalisis data-data posisi planet yang dihimpun Tycho Brahe. Pengamatan dan penggunaan metode paralaks tidak memberikan hasil sampai akhirnya astronom Friedrich Wilhelm Bessel dengan teleskop buatannya berhasil mengamati perubahan posisi bintang Cygnus 61 pada tahun 1838. Keberhasilan ini kemudian diikuti oleh pengamatan lain: Paralaks bagi bintang Alfa Centauri oleh Henderson dan bintang Vega oleh Struve. Sehingga Heliosentris menjadi kokoh, planet bergerak mengitari matahari (Purwanto, 2009:237).

Dari uraian tersebut maka graf superstar dapat diasumsikan sebagai susunan dari tata surya, dengan titik center diasumsikan sebagai matahari dan titik-titik lainnya diasumsikan sebagai benda-benda langit yang mengelilingi matahari sesuai dengan garis edarnya dan berjalan pada dimensi yang tetap dalam kelompoknya.

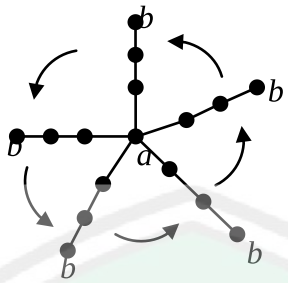
Allah berfirman dalam Al-Qur'an

لَا ٱلشَّمۡسُ يَنۢبَغِي لَهَآ أَن تُدۡرِكَ ٱلۡقَمَرَ وَلَا ٱلَّيۡلُ سَابِقُ ٱلنَّهَارِۚ وَكُلّٞ فِي فَلَكٖ يَسۡبَحُونَ ٤٠

Artinya: Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang. dan masing-masing beredar pada garis edarnya (QS. Yasiin: 40).

Menurut 'Abdullah bin Muhammad bin 'Abdurrahman bin Ishaq Alu Syaikh dalam kitab *lubabuttafsir* menjelaskan bahwa ayat و كل فى فلك يسبحون ....“ *Dan masing-masing beredar pada garis edarnya.”* Yakni malam, siang, matahari dan bulan semuanya beredar, yaitu berputar pada garis edar langit. Pendapat yang dikemukakan oleh Ibnu 'Abbas, 'Ikrimah, adh-Dhahhak, al-Hasan, Qatadah, 'Atha' al-Khurasani. Ibnu 'Abbas dan selainnya dari kaum salaf lebih dari satu orang berkata: “Garis edarnya seperti putaran alat pemintal benang.” Mujahid berkata: “Garis edarnya bagaikan besi putar atau bagaikan putaran alat pemintal benang, yang mana alat pemintal tidak akan berputar kecuali dengan putaran tersebut dan putaran tersebur tidak akan berputar kecuali dengan alat pemintal tersebut ('Abdullah, 2007:650).

Pada Surat Yasiin Ayat 40 di atas menunjukkan tentang gerakan kumpulan benda angkasa yang ada di sekeliling matahari. Artinya, matahari, bulan, dan bumi yang diumpamakan dengan malam dan siang masing-masing mesti beredar bersama-sama mengelilingi matahari. Sehingga dengan pengaitan pada graf superstar akan terilustrasi seperti pada Gambar 2.1

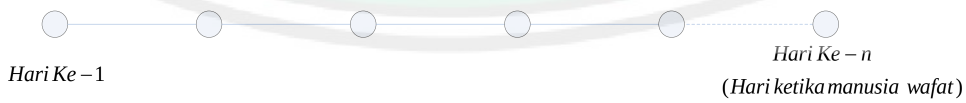


Gambar 2.1 Representasi Tata Surya pada Graf Superstar

dengan asumsi, a adalah matahari dan b adalah benda-benda langit yang mengelilingi matahari.

Misalkan suatu graf yang menggambarkan kehidupan manusia dilihat dari sisi amal perbuatan, dimana titik adalah waktu dalam hal ini satuannya adalah hari, dimana titik awal ketika manusia terlahir di dunia sampai dengan titik akhir dimana manusia menghembuskan nafas terakhir (meninggal dunia). Garis adalah proses perjalanan manusia tersebut. Manusia yang tercipta di muka bumi pastilah memiliki perbedaan.

Jika kehidupan manusia dianalogikan dalam teori graf, dalam hal ini dikaitkan dengan segala amal perbuatan manusia yang dilakukan selama di dunia. Jika diasumsikan titik adalah hari dan sisi adalah kehidupan manusia, maka dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.2 Representasi Kehidupan Manusia pada Graf Lintasan

tentunya seluruh amal pebuatan manusia yang dilakukan selama di dunia akan dipertanggungjawabkan di akhirat nanti.

Dalam Al Qur'an surat Al Zilzalah ayat 7 dan 8 :

فَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُۥ ﴿٧﴾ وَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُۥ ﴿٨﴾

Artinya : Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya. Dan Barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya pula.(Q.S. Al Zalzalah :7-8).

Adapun amal yang diterima oleh Allah Adalah

عَنْ أَمِيْرِ الْمُؤْمِنِيْنَ أَبِيْ حَفْصٍ عُمَرَ بْنِ الْخَطَّاب رَضِيَ اللهُ عَنْهُ قَالَ : سَمِعْتُ رَسُوْلَ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ يَقُوْلُ :((إِنَّمَا اْلأَعْمَالُ بالنِّيَّاتِ وَإِنَّمَا لِكُلِّ امْرِئٍ مَا نَوَى . فَمَنْ كَانَتْ هِجْرَتُهُ إِلَى اللهِ وَرَسُوْلِهِ فَهِجْرَتُهُ إِلَى اللهِ وَرَسُوْلِهِ، وَمَنْ كَانَتْ هِجْرَتُهُ لِدُنْيَا يُصِيْبُهَ أَوْ امْرَأَةٍ يَنْكِحُهَا فَهِجْرَتُهُ إِلَى مَا هَاجَرَ إِلَيْهِ)). رواه البخاري مسلم

Dari Amirul Mukminin, Umar bin Khathab r.a., ia berkata, "Aku mendengar Rasulullah saw. bersabda, "Sesungguhnya segala amal perbuatan bergantung kepada niatnya dan tiap orang akan mendapatkan apa yang ia niatkan. Barang siapa yang hijrahnya kepada Allah dan Rasul-Nya, maka ia akan mendapatkan pahala hijrah karena Allah dan Rasulullah. Barang siapa yang hijrahnya karena faktor duniawi yang akan ia dapatkan atau karena wanita yang akan ia nikahi, maka ia dalam hijrahnya itu ia hanya akan mendapatkan apa yang ia niatkan." (H.R. Bukhari-Muslim).

Para ulama fiqih menegaskan bahwa niat adalah pembeda antara ibadah dan adat, membedakan antara satu ibadah dengan ibadah lainnya. Ikhlas merupakan sifat dari sebuah niat. Karena sesungguhnya niat itu berkaitan dengan pekerjaan suatu ibadah , sedangkan keikhlasan niat dalam ibadah itu dengan cara menyandarkan ibadah tersebut kepada Allah SWT. Jadi, peran niat adalah untuk membedakan antara ibadah dengan pekerjaan lainnya atau diharapkan dengan niat seseorang akan mengarahkan pekerjaan hanya kepada Allah (Sulaiman, 2005:11).

Dalam Al Qur'an surat Al Mulk ayat 2:

ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلْمَوْتَ وَٱلْحَيَوٰةَ لِيَبْلُوَكُمْ أَيُّكُمْ أَحْسَنُ عَمَلًا ۚ وَهُوَ ٱلْعَزِيزُ ٱلْغَفُورُ ﴿٢﴾

Artinya: Yang menjadikan mati dan hidup, supaya Dia menguji kamu, siapa di antara kamu yang lebih baik amalnya. dan Dia Maha Perkasa lagi Maha Pengampun (QS. Al Mulk: 2).

Menurut 'Aidh Al Qarni dalam kitab Tafsir Muyassar menjelaskan bahawa ayat di atas adalah Dia-lah Allah, yang menciptakan kematian dan kehidupan. Dia menghidupkan makhluk dari ketiadaan. Dia-lah yang mematikan manusia untuk menguji siapa di antara mereka yang lebih ikhlas dan benar dalam beramal. Iman adalah ujian bagi manusia, apakah dia menaati Allah ataukah mengikuti jejak langkah setan. Allah Maha Perkasa, tidak ada sesuatu pun yang sulit bagi-Nya ataupun yang tidak mampu dilakukan-Nya. Maka Dia yang Maha Perkasa dapat memaksa siapa saja. Dia akan mengampuni semua dosa orang yang bertaubat dan akan memaafkan semua kesalahan orang yang kembali kepada-Nya. Ayat ini mengandung motivasi untuk menaati Allah dan menghindari perbuatan maksiat (Al Qarni, 2007:377).

Menurut Teungku Muhammad Hasbi Ash Shiddiqiey dalam kitab Tafsir Al Qur'anul Majid An Nuur Ayat ليبلو كم أيكم أحسن عملا... menjelaskan bahwa Allah menetapkan yang demikian itu untuk menguji keadaanmu, untuk mengetahui kebajikan dan kejahatanmu, dan untuk mengetahui siapa di antara kamu yang lebih baik amalannya, lebih banyak keikhlasannya, lebih jauh dari segala yang diharamkan, dan lebih cepat kepada ketaatan. Ringkasnya, hidup ini adalah tempat ujian, sedangkan mati adalah masa pembalasan (Ash Shiddiqiey, 2000:4289).

Amal perbuatan manusia tidak selamanya dicatat malaikat, hal itu terjadi jika manusia berada dalam lima keadaan: ketika manusia belum beranjak aqil baligh, ketika dalam keadan terpaksa atau membahayakan jiwa, ketika manusia menjadi gila, ketika sedang tertidur, ketika dalam keadaan lupa.

Sebenarnya seseorang itu terhenti amalnya tatkala datang kematiannya. Tetapi ada beberapa amalan yang dilakukan pada saat hidupnya dan manfaatnya terus-menerus dipakai, maka pahalanya akan terus mengalir kepada pelakunya meskipun temponya berlangsung lama. Itu berbentuk segala usaha kebaikan yang dapat bermanfaat bagi manusia ataupun binatang ternak; seperti wakaf-wakaf untuk kebaikan, pohon-pohon berguna yang berbuah, sumber-sumber air minum, membangun masjid-masjid dan madrasah, anak keturunan yang shalih, mengajarkan ilmu bermanfaat dan mengarang kitab-kitab yang berfaedah.

عن أبي هريرة رضى الله عنه أن رسول الله صل الله عليه و سلم قال:إذا مات ابن آدم انقطع عمله إلا من ثلاث, صدقة جارية او علم ينتفع به او ولد صالح يدعوله (رواه أبو داود)

diriwayatkan dari Abu Hurairah Radhiyallahu'anhu bahwa Rasulullah Shallallahu'alaihi wasallam bersabda :"Apabila seorang anak Adam meninggal, maka akan terputus amalannya kecuali tiga perkara : shadaqoh jariyah, atau ilmu yang bermanfaat, atau anak shalih yang mendoakan kepadanya" (H.R. Abu Dawud).

Jika amal perbuatan manusia direpresentasikan dalam suatu persamaan matematika, maka diperoleh :

$$
\begin{aligned}
H_1 &= A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} + \ldots + A_{1n} \\
H_2 &= A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} + \ldots + A_{2n} \\
H_3 &= A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} + \ldots + A_{3n} \\
&\vdots \\
H_n &= A_{n1} + A_{n2} + A_{n3} + A_{n4} + \ldots + A_{nn}
\end{aligned}
$$

Tentunya sebagai manusia tidak kuasa untuk menentukan nilai amal atau jumlah pahala dan dosa yang dilakukan setiap hari, hanya Allah SWT yang Maha Kuasa, Maha Melihat atas apa yang terjadi di dunia.

Setidaknya setiap manusia meyakini bahwa setiap amalan yang diperbuat selama di dunia pasti tercatat dan terdefinisi, dan harus dipertanggungjawabkan kelak pada *yaumul Hisab*, sehingga dari contoh persamaan matematika mengenai amal perbuatan manusia pasti akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{bmatrix}$$

Dari hasil eselon baris di atas menunjukkan bahwa apa yang dilakukan manusia pasti terdefinisi dan diketahui oleh Allah SWT, karena sesungguhnya Allah SWT Maha Melihat dan Maha Kuasa.

2.2 Graf

2.2.1 Definisi Graf

> Graf G adalah pasangan (V(G), E(G)) dengan V(G) adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E(G) adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V(G) yang disebut sebagai sisi. Banyaknya unsur di V(G) disebut order dari G dan dilambangkan dengan p(G) dan banyaknya unsur di E(G) disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan q(G). Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p,q). (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:4-5).

Menurut Johnsonbough dan Schaefer (2004: 68) suatu graf (graf tak berarah) G terdiri dari himpunan V yang terdiri dari titik-titik (node) dan himpunan E yang terdiri dari sisi-sisi (arcs) sedemikian hingga setiap sisi e $\in$ E terhubung dengan pasangan terurut suatu titik.

Secara matematis graf didefinisikan sebagai berikut, Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), yang mana dalam hal ini :

V = himpunan tidak kosong dari titik (vertices atau node)

= $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$

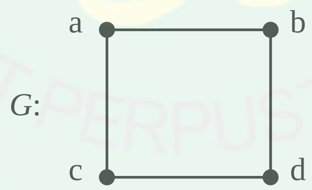
E = himpunan sisi (edges) yang menghubungkan sepasang titik

= $\{ e_1, e_2, e_3, ..., e_m\}$

atau G = (V,E).

Himpunan titik (V) tidak boleh kosong, sedangkan sisi (E) boleh kosong. Jadi, suatu graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang mempunyai satu titik tanpa sisi dinamakan graf trivial (Munir, 2003 :291).

Contoh:



Gambar 2.3 Graf G Berorder 4

Pada Gambar 2.3 Graf G memuat himpunan titik $V(G)$ dan sisi $E(G)$ yaitu:

V(G) = {a, b, c, d}

E(G) = {(a, b), (b, d), (d, c), (c, a)}

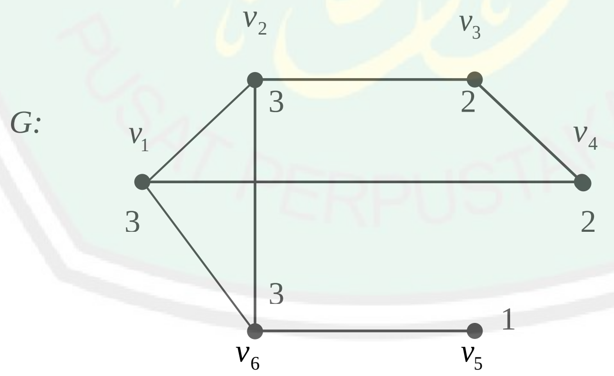
Graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $p = 4$. Graf G mempunyai 4 sisi sehingga size graf G adalah $q = 4$.

2.2.2 Derajat Titik

Definisi

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vértices*) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:



Gambar 2.4 Graf dengan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.4, diperolah bahwa:

$deg_G(v_1) = 3$

$deg_G(v_2) = 3$

$deg_G\,(v_3) = 2$

$deg_G\,(v_4) = 2$

$deg_G\,(v_5) = 1$

$deg_G\,(v_6) = 3$

2.2.3 Jalan, Trail, Lintasan, Sirkuit, dan Sikel

Misalkan G graf, Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). **Jalan u-v** pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling.

$W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_n, v_n = v$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$e_1 = v_{i-1}v_i \qquad\qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n$

adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik v_1, v_2, ..., v_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:49).

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut **trail**. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut **lintasan**. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan. Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut **sirkuit**. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut **sikel** (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:51).

2.2.4 Graf Terhubung

Definisi

Suatu graf G disebut terhubung *(connected)* jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan jika terdapat dua titik pada graf G yang tidak dihubungkan oleh suatu lintasan, maka graf G disebut graf tak terhubung *(disconnected)* (Chartrand and Oellerman, 1993 :21).

Sebagai contoh gambar 2.5 (a) adalah graf terhubung dan 2.5 (b) adalah graf tak terhubung karena tidak ada lintasan yang menghubungkan antara v_4 dan v_5

Contoh:

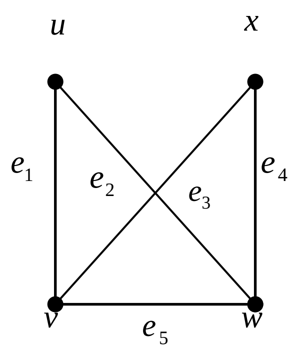
(a) (b)

Gambar 2.5. (a) Graf Terhubung (b) Graf Tak Terhubung

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:

G:



Gambar 2.6. Graf G yang *Incident* dan *Adjacent*

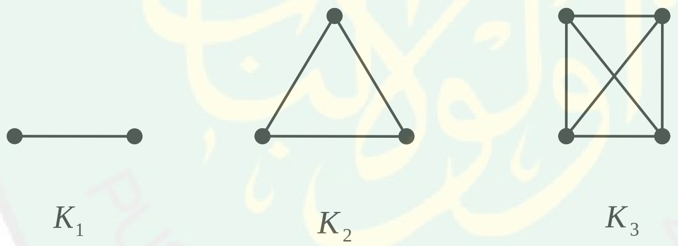
Dari Gambar 2.6 tersebut, titik u dan e_1 serta e_1 dan v adalah *incident* (terkait langsung) dan titik u dan v adalah *adjacent* (terhubung langsung).

2.2.5 Graf Komplit/ *Complete Graph* (K_n)

Definisi

Graf G adalah komplit jika setiap titik terhubung langsung ke setiap titik yang lain, graf komplit dengan n-titik dinyatakan dengan K_n (Lipschutz dan Lipson, 2002:29).

Contoh:



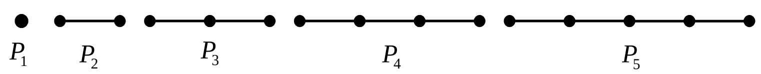
Gambar 2.7 Graf Komplit

2.2.6 Graf Lintasan/*Path Graph* (P_n)

Definisi

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan graf lintasan order n dan ditulis P_n (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:53).

Contoh:



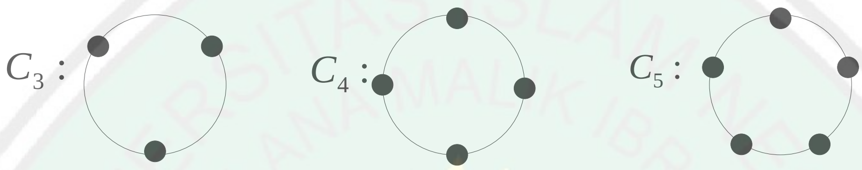
Gambar 2.8. Beberapa Bentuk Graf Lintasan

2.2.7 Graf Sikel/*Cycle Graph* (C_n)

Definisi

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak n, $n \geq 3$, disebut graf sikel dan ditulis C_n (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:55).

Contoh: :



Gambar 2.9 Graf Sikel C_3, C_4, dan C_5

2.2.8 Graf Bipartisi Komplit

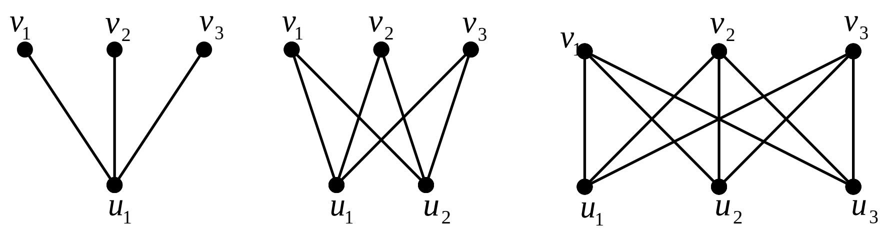
Definisi

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong *X* dan *Y* sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di *X* dan satu titik di *Y; X* dan *Y* disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Definisi

Suatu graf G disebut bipartisi komplit jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$ (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:22).

Contoh:



$K_{1,3}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Gambar 2.10. Graf Bipartisi Komplit $K_{1,3,}$ $K_{2,3}$, $K_{3,3}$

2.2.9 Graf Bintang/Star Graph (S_n)

Definisi

Graf bintang *(Star Graph)* adalah graf bipartit komplit yang berbentuk $K_{1,n}$. Graf $K_{1,n}$ ditulis dengan S_n (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:22).

Contoh:

$K_{1,3}$ $K_{1,4}$

Gambar 2.11 Graf Bintang $K_{1,3}$ *dan* $K_{1,4}$

2.2.10 Subgraf

Definisi

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H

adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

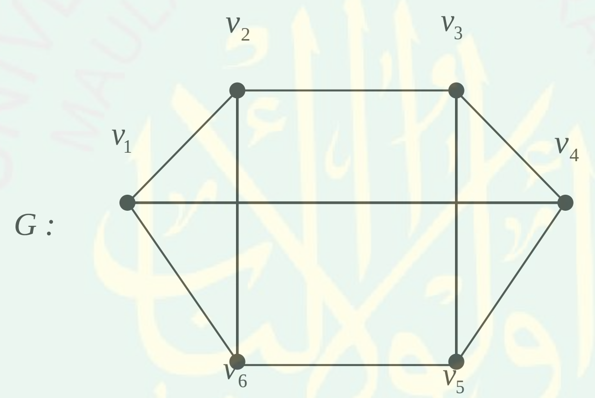
Contoh:

Graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini:

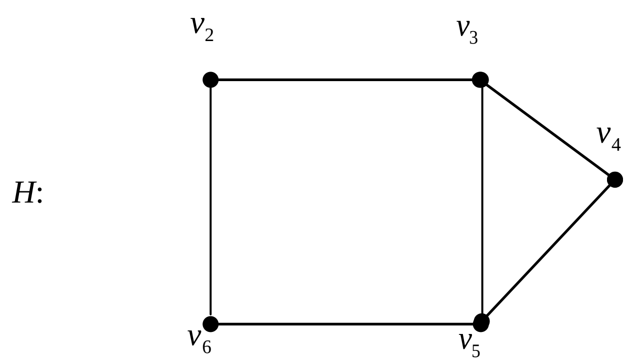
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(G) = \{ v_1 v_2, v_1 v_6, v_1 v_4, v_2 v_3, v_2 v_6, v_3 v_4, v_3 v_5, v_4 v_5, v_5 v_6\}$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.12 Graf G



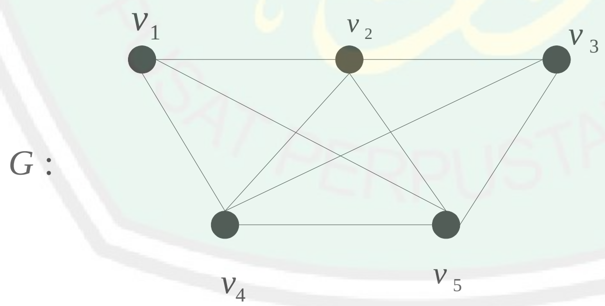
Gambar 2.13 *H* Subgraf dari *G*

Gambar 2.12 dan 2.13 menunjukkan dua graf *G* dan *H* dan menunjukkan bahwa *H* subgraf *G*.

2.2.11 Subgraf Terdukung

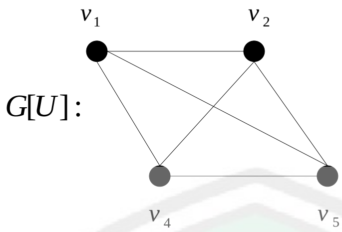
Misalkan G graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Misalkan U adalah himpunan bagian tak kosong dari V(G). Subgraf di G yang terdukung oleh himpunan U, dinotasikan dengan G[U], adalah graf dengan himpunan titik U dan memuat semua sisi di G yang terkait langsung dengan dua titik di U. Jadi sisi di graf G[U] adalah semua sisi uv di G dengan syarat $u, v \in U$. Graf H disebut subgraf terdukung titik (atau disebut terdukung) di G, dinotasikan dengan $H \prec G$, jika $H \cong G[U]$, untuk suatu $U \subseteq V(G)$ dan $U \neq \emptyset$ (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:43).

Sebagai contoh misalkan graf G sebagai berikut:



Gambar 2.14 Graf G

Diketahui $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Misalkan $U = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$, maka subgraf terdukung G[U] di G terlihat pada gambar berikut:



Gambar 2.15 G[U] Merupakan Subgraf Terdukung Oleh U di Graf G

2.3 Matriks

2.3.1 Konsep Dasar Matriks

Definisi

Bentuk yang paling umum dari sebuah matriks adalah susunan bilangan yang berbentuk persegi panjang yang dapat digambarkan sebagai berikut

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}),\ i=1,2,\ldots,m \text{ dan } j=1,2,\ldots,n \qquad (2.1)$$

Bilangan-bilangan $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ yang menyusun rangkaian itu disebut *elemen* atau *unsur* dari matriks itu. Indeks pertama dari elemen menunjukkan baris dan indeks kedua menunjukkan kolom dimana elemen itu berada. Untuk menuliskan matriks beserta elemen-elemennya dipergunakan tanda kurung siku seperti yang diperlihatkan pada persamaan (2.1), sedangkan suatu huruf dicetak tebal (misalnya, A) dapat digunakan juga untuk menyatakan suatu matriks. Penyajian lain untuk suatu matriks adalah dengan menuliskan elemen umumnya dalam suatu kurung siku, maka matriks A pada persamaan (2.1) dapat juga ditulis $[a_{ij}]$ atau [A] (Gere dan Weaver,1987:13).

Susunan matriks persegi panjang disebut matriks *m* kali *n* (*ditulis* $m \times n$) karena memiliki *m baris* dan *n* kolom. Suatu matriks pada umumnya merupakan susunan bilangan-bilangan yang berdimensi dua, maka diperlukan dua subkrip yang menyatakan setiap elemennya (*isi elemen-elemen matriks*). Dengan perjanjian, subkrip pertama berkaitan dengan barisan, dan kedua di kolom. Maka a_{23} berkaitan dengan baris kedua dan kolom ketiga; dan a_{ij} berkaitan dengan elemen di baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Tidak perlu ada hubungan antara jumlah baris dan jumlah kolom. Sebuah matriks, misalkan, dapat memiliki 100 baris dan 10 kolom atau 1 baris dan 1000 kolom. Setiap matriks yang memiliki jumlah baris dan jumlah kolom yang sama disebut matriks bujur sangkar. Matriks bujur sangkar dengan *n* baris dan *n* kolom sering disebut matriks berordo-*n*. Setiap matriks yang berordo-*n* sesuai dengan definisi adalah matriks bujur sangkar (Naipospos dan Soemartoyo, 1983:51).

2.3.2 Matriks Simetri

Definisi

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka tranpos dari A (*tranpose of A*), dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004(a):67).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Definisi

Suatu matriks bujur sangkar A disebut *matriks simetri* jika matriks tersebut sama dengan transposenya $(A = A^T)$ (Anton dan Rorres, 2004(a):78).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Matriks Hermite

Dalam matriks dengan unsur riil, matriks bujur sangkar A dikatakan matriks ortogonal jika $A^{-1} = A^T$. A dikatakan simetris jika $A = A^T$. Matriks ortogonal dan matriks simetris memiliki peran penting dalam diagonalisasi matriks dengan unsur real. Sedangkan matriks uniter, matriks Hermite, matriks normal memiliki peranan penting dalam diagonalisasi matriks dengan unsur kompleks.

Jika A merupakan matriks dengan unsur kompleks, maka tranpose sekawan A, yang dinyatakan oleh A^*, didefinisikan oleh:

$$A^* = \overline{A}^T$$

Contoh:

Misal diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}$,

maka

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix}$$

sehingga

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Matriks simetrik memainkan peranan mendasar dalam masalah pendiagonalan matriks secara ortogonal dengan unsur real. Analog kompleks yang paling alamiah dari matriks real simetrik adalah Hermite .

Definisi

Matriks bujur sangkar A dengan unsur kompleks disebut *Hermite*, jika A = A^* (Anton dan Rorres , 2004(b):118).

Untuk memudahkan mengenali matriks Hermite, misalkan M=[m_{ij}] adalah suatu matriks m x n dengan $m_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$ untuk setiap i dan j. Sehingga M dapa dituliskan dalam bentuk

$$M = A + iB$$

Dengan $A=[a_{ij}]$ dan $B=[b_{ij}]$ mempunyai entri bilangan real. Didefinisikan matriks sekawan dengan

$$\overline{M}=A-iB$$

Jadi $\overline{M}$ adalah matriks yang terbentuk dengan mengambil kompleks sekawan dari setiap entri M. Transpose dari $\overline{M}$ dilambangkan dengan M^H, jadi suatu matriks M disebut Hermite, jika M = M^H.

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix},$$

maka

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -5 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$A^*=\overline{A}^T=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}=A$$

yang berarti bahwa A adalah matriks Hermite.

2.3.4 Eliminasi Gauss Jordan

Thomas (dalam Anton dan Rorres, 2004(a):13) mengatakan bahwa setiap matriks memiliki bentuk eselon baris tereduksi yang unik, artinya kita akan memperoleh bentuk eselon baris tereduksi yang sama untuk matriks tertentu bagaimanapun variasi operasi baris yang dilakukan.

Langkah-langkah operasi baris yang dikemukakan oleh Gauss dan disempurnakan oleh Jordan sehingga dikenal dengan Eliminasi Gauss-Jordan, sebagai berikut:

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan ini disebut 1 utama .
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah dari matriks.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom memiliki 1 utama dan memiliki nol pada tempat lain (Anton dan Rorres, 2004(a):9).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 1 : Perhatikan kolom paling kiri yang tidak seluruhnya terdiri dari nol.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Kolom tak nol paling kiri

Langkah 2 : Jika perlu, pertukarkan baris paling atas dengan baris lain untuk menempatkan entri taknol pada puncak kolom yang diperoleh pada langkah 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris pertama dan kedua pada matriks sebelumnya dipertukarkan

Langkah 3 : Jika entri yang kini berada pada puncak kolom yang kita peroleh pada langkah 1 adalah a, kalikan dengan baris pertama dengan $\frac{1}{a}, a \neq 0$ sehingga terbentuk 1 utama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris pertama dari matriks sebelumnya dikalikan dengan $\frac{1}{2}$

Langkah 4 : Tambahkan kelipatan yang sesuai dari baris paling atas ke baris-baris di bawahnya sehingga semua entri dibawah 1 utam menjadi nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-2 kali baris pertama matriks sebelumnya ditambahkan ke baris ketiga

Langkah 5 : Sekarang tutuplah baris paling atas dari matriks dan mulailah lagi dengan langkah 1 pada submatriks yang tersisa. Lanjutkan langkah ini hingga seluruh matriks berada dalam bentuk eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Kolom tak nol paling kiri dalam submatriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris pertama submatriks dikalikan dengan $\frac{1}{2}$ untuk memperoleh 1 utama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-5 kali baris pertama submatriks ditambahkan ke baris kedua submatriks untuk memperoleh nol dibawah 1 utama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris paling atas submatriks ditutup dan kita kembali ke langkah 1

Kolom tak nol paling kiri dalam Submatriks baru

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris pertama (dan satu-satunya) dalam submatriks baru dikalikan dengan 2 untuk memperoleh 1 utama

Keseluruhan matriks kini berada dalam bentuk eselon baris. Untuk memperoleh bentuk eselon baris tereduksi kita membutuhkan langkah tambahan berikut.

Langkah 6 : Mulai dengan baris taknol terakhir dan bergerak ke atas, tambahan kelipatan yang sesuai dari tiap baris ke baris di atasnya untuk memperoleh nol di atas 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

$\frac{7}{2}$ kali baris ketiga dari matriks sebelumnya ditambahkan ke baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ -6 kali baris ketiga ditambahkan ke baris pertam

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ 5 kali baris kedua ditambahkan ke baris pertama

Matriks terakhir di atas berada dalam bentuk eselon baris tereduksi.

Jika kita hanya menggunakan 5 langkah pertama, prosedur di atas akan menghasilkan bentuk eselon baris disebut eliminasi gauus, dengan melakukan prosedur sampai langkah keenam maka prosedur di atas akan menghasilkan matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi dan disebut eliminasi gauss jordan (Anton dan Rorres, 2004(a):13).

2.4 Ruang Vektor dan Subruang

Definisi:

Misalkan V adalah suatu himpunan takkosong dari objek-objek sebarang, di mana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi objek u, v, w pada V dan semua skalar k dan l, maka disebut ruang vektor dan objek-objek pada V adalah vektor.

1. Jika u dan v adalah objek-objek pada V, maka u + v berada pada V.
2. **u** + **v** = **v** + **u**.
3. **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**.
4. Di dalam V terdapat suatu objek 0, yang disebut vektor nol untuk V, sedemikian rupa sehingga 0 + **u** = **u** + 0 = **u** untuk semua **u** pada V.

5. Untuk setiap **u** pada V, terdapat suatu objek –**u** pada V, yang disebut sebagai negatif dari u, sedemikian rupa sehingga **u** + (-**u**) = (-**u**) + **u** = 0.
6. Jika *k* adalah skalar sebarang dan **u** adalah objek sebarang pada V, maka *k***u** terdapat pada V.
7. *k*(**u** + **v**) = *k***u** + *k***v**.
8. (*k* + *l*)**u** = *k***u** + *l***u**.
9. *k*(*l***u**) = (*kl*)(**u**).
10. l**u** = **u** (Anton dan Rorres, 2004(a):228).

Contoh:

Himpunan semua matriks 2 x 2 berbentuk $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ dengan penjumlahan dan perkalian skalar matriks adalah ruang vektor.

Bukti:

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a & 0 \\ 0 & b+b \end{bmatrix} \in V$

b. $k\mathbf{u} = k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{bmatrix} \in V$

c. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

d. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

e. $0 + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \mathbf{u}$

f. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = 0$

g. $1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \mathbf{u}$

h. $(k + l)\mathbf{u} = (k + l)\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{u}$

i. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

j. $k(l\mathbf{u}) = k\left(l\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = kl\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = (kl)(\mathbf{u})$

Karena matriks $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ memenuhi semua aksioma maka matriks $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ dengan penjumlahan dan perkalian skalar matriks adalah ruang vektor.

Definisi:

Suatu subhimpunan W dari suatu ruang vektor V disebut subruang (*subspace*) dari V, jika W itu sendiri merupakan suatu ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V (Anton dan Rorres, 2004(a):236).

Definisi:

Suatu vektor w disebut kombinasi linier (*linier combination*) dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_r$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r$

dengan $k_1, k_2, \cdots, k_r$ adalah skalar (Anton dan Rorres, 2004(a):241).

Perhatikan vektor-vektor **u** = (-1, 2, 1) dan **v** = (8, 3, 4) pada R^3, maka **w** = (15, 2, 9) adalah suatu kombinasi linier dari **u** dan **v**, maka harus terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikian rupa sehingga $\mathbf{w} = k_1\,\mathbf{u} + k_2\,\mathbf{v}$, yaitu:

$$(15, 2, 9) = k_1\,(-1, 2, 1) + k_2\,(8, 3, 4)$$

atau

$$(15, 2, 9) = (-k_1 + 8k_2, 2k_1 + 3k_2, k_1 + 4k_2)$$

dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian diperoleh

$$-k_1 + 8k_2 = 15$$

$$2k_1 + 3k_2 = 2$$

$$k_1 + 4k_2 = 9$$

dengan menyelesaikan sistem ini akan menghasilkan $k_1 = -2$, $k_2 = 2$, sehingga

$$\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}.$$

Jadi **w** = (15, 2, 9) adalah suatu kombinasi linier dari **u** dan **v**.

Definisi:

Jika S = { $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ } adalah himpunan vektor-vektor taknol, maka persamaan vektor $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Jika ini satu-satunya solusi, Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan bebas linier (*linearly independent*). Jika terdapat solusi-solusi lain, maka S disebut sebagai himpunan tidak bebas linier (*linearly dependent*) (Anton dan Rorres, 2004(a):249).

Contoh:

Perhatikan vektor-vektor **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) pada R^3. Persamaan vektor dalam bentuk komponen-komponennya

$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_n\mathbf{k} = \mathbf{0}$

menjadi

$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$

atau secara ekuivalen,

$(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$

ini mengimplikasikan bahwa $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$, sehingga himpunan S = {**i**, **j**, **k**} bebas linier.

2.5 Basis dan Dimensi

Definisi:

Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan S = { $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ } adalah suatu himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut basis untuk V jika dua syarat berikut berlaku:

a. S bebas linier

b. S merentang V (Anton dan Rorres, 2004(a):260).

Telah ditunjukkan bahwa jika **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) maka S = {**i**, **j**, **k**} adalah suatu himpunan bebas linier pada R^3. Himpunan ini juga merentang R^3 karena vektor sebarang **v** =(a, b, c) pada R^3 dapat ditulis sebagai

v = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a**i** + b**j** + c**k**

Jadi, S adalah basis untuk R^3 dan disebut sebagai *basis stándar* untuk R^3.

Definisi:

Dimensi dari ruang vektor V yang berdimensi terhingga, dinotasikan dengan dim(V), didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada suatu basis untuk V (Anton dan Rorres, 2004(a):269).

2.6 Ruang Baris, Ruang Kolom dan Ruang Null

Definisi:

Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka subruang dari R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris dari A disebut ruang baris (*row space*) dari A, dan subruang dari R^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom disebut ruang kolom (*column space*) dari A. Ruang solusi dari sistem persamaan yang homogen $Ax = 0$, yang merupakan subruang dari R^n, disebut ruang null (*null space*) dari A (Anton dan Rorres, 2004(a):278).

Contoh:

a. Diketahui matriks A berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vektor baris dari A adalah:

$r_1 = (1,2,3), r_2 = (-2,1,0), r_3 = (3,1,1)$, dan $r_4 = (5,0,-1)$

Sedangkan vektor kolom dari A adalah

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{dan } c_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b. Misalkan $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Ruang null dari matriks B terdiri dari vektor $(x, y, z) \in R^3$ yang memenuhi

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka dapat ditulis sistem persamaan linier homogen meliputi x, y dan z.

$$2x + 4y + 5z = 0$$

$$-4x + 2y + 3z = 0$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan eselon baris tereduksi didapatkan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka dapat diperoleh:

$$x = (0.1)z$$

$$y = (-1.3)z$$

Ruang nul (solusi Bx=0) dalam z, dimana z adalah skalar, adalah

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 0.1 \\ -1.3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definisi:

Kernel dari matriks A, dinotasikan dengan ker(A), adalah himpunan dari semua solusi persamaan homogen $Ax = 0$. *Kernel* dari matriks A disebut juga dengan ruang null dari A dan dimensinya disebut *nullitas* dari A, dinotasikan dengan null(A) (Hogben, 2007: 2-6(57)).

Contoh:

Tentukan rank dan *nullitas* dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat tiga baris taknol (atau secara ekuivalen, tiga 1 utama), ruang baris dan ruang kolom ketiganya berdimensi tiga, sehingga Rank(A) = 3. Untuk menentukan *nullitas* dari A, maka ditentukan dimensi dari ruang solusi sistem linier Ax = 0. Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$x_1 + x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_2 - x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 - x_5 = 0$$

Atau, untuk menyelesaikan variabel-variabel utama,

$$x_1 = -x_4 - 2x_5$$

$$x_2 = x_5$$

$$x_3 = x_4 + x_5$$

Maka solusi umum dari sistem tersebut adalah

$x_1 = -s - 2t$

$x_2 = t$

$x_3 = s + t$

$x_4 = s$

$x_5 = t$

Atau secara ekuivalen,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kedua vektor pada ruas kanan di atas merupakan basis untuk ruang solusi, sehingga *nullitas*(A) = 2.

2.7 Rank

Definisi

Rank dari suatu matriks A adalah dimensi dari ruang baris dari A (Leon, 2001:144).

Untuk menentukan rank dari suatu matriks, dengan mereduksikan matriks yang bersangkutan menjadi bentuk eselon baris. Baris-baris taknol dari matriks eselon baris akan membentuk basis untuk ruang barisnya.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi A menjadi bentuk eselon baris, maka kita peroleh matriks

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat dua baris tak nol, jelas bahwa (1, -2, 3) dan (0, 1, 5) membentuk baris untuk ruang baris dari U. Sehingga rank dari A adalah 2.

2.8 Hubungan Matriks dan Graf

2.8.1 Matriks *Adjacency*

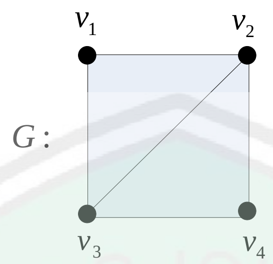
Misal G graf dengan order $p(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $v(G) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$. Matriks keterhubungan (*Matriks Adjacency*) dari graf G, dinotasikan dengan A(G), adalah matriks (p x p) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j, dan bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j (Abdussakir,Azizah, dan Nofandika, 2009: 73-74).

Matriks Adjcency dapat ditulis $A(G) = \lfloor a_{ij} \rfloor 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \ jika v_1 v_2 \in E(G) \\ 0 \ jika v_1 v_2 \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsure 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.

Contoh:



Gambar 2.16 Graf G

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.8.2 Rank Minimum dari Matriks Hermite yang Digambarkan Graf G

Suatu himpunan dari matriks Hermite berukuran n x n dinotasikan dengan H_n. Misalkan $A \in H_n$, sebuah graf yang digambarkan oleh matriks Hermite A dinotasikan $g(A)$. $g(A)$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik {1, 2, …, n} dan sisinya adalah $\{\{i, j\} \mid a_{ij} \neq 0 \; dan \; i \neq j\}$, dan elemen-elemen diagonal utama A diabaikan. Himpunan matriks Hermite dari graf G dinotasikan H(G), sehingga $H(G) = \{A \in H_n : g(A) = G\}$ (Fallat dan Hogben, 2007:19).

Dengan melihat adanya keterhubungan antara matriks dengan graf pada subbab 2.8.1, maka dapat dikembangkan dengan mensubtitusi element dari matriks *Adjacency* dengan elemen bilangan kompleks dan memenuhi matriks Hermite. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

1. Diketahui graf G, Karena pada penulisan skripsi ini dibatasi pada graf Lintasan (P_n), graf Komplit (K_n), graf Sikel (C_n), graf Star(S_n), graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$)**.** Maka dapat diambil dari contoh-contoh graf tersebut.

2. Membentuk matriks *adjacency* dari graf tersebut.
3. Membentuk matriks *adjacency* menjadi matriks Hermite.

Dengan aturan :

I. Elemen diagonal diabaikan nilainya.
II. Unsur nol selain di diagonal utama harus nol.
III. Unsur tak nol pada matriks dirubah dengan unsur tidak boleh nol dengan semesta bilangan komplek dan diberikan secara random (Fallat dan Hogben, 2007: 1).

Dari langkah-langkah di atas maka terdapat banyak kemungkinan matriks Hermite. Matriks-matriks tersebut memiliki rank masing-masing, sehingga dapat ditentukan rank minimum yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

Rank minimum dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf G dapat didefinisikan:

$$mr(H_G) = \min\{ rank(A) : A \in H(G)\}$$

Teorema 2.1

Diberikan suatu graf G dan titik $v \in V(G)$,

$$mr(G) - 2 \leq mr(G - v) \leq mr(G)$$

Bukti:

Akan dibuktikan:

$(i)\ \ mr(G)-2 \le mr(G-v)$
$(ii)\ \ mr(G-v) \le mr(G)$

$(i)\ \ mr(G)-2 \le mr(G-v)$

Untuk membuktikan pertidaksamaan yang pertama, perlu diperhatikan bahwa pertambahan baris pada suatu matriks dapat menambah rank matriks tersebut paling banyak 1, dan pertambahan kolom pada sebuah matriks dapat menambah rank matriks tersebut paling banyak 1, sehingga pertambahan titik pada suatu graf, dapat menaikkan rank minimum paling banyak 2.

Sehingga diperoleh

$mr(G+v) \le mr(G)+2$

Secara analog apabila pengurangan baris pada suatu matriks dapat mengurangi rank matriks tersebut paling banyak 1, dan pengurangan kolom pada sebuah matriks dapat mengurangi rank matriks tersebut paling banyak 1, sehingga perngurangan titik pada suatu graf, dapat menurunkan rank minimum paling banyak 2.

Sehingga diperoleh

$mr(G-v) \ge mr(G)-2$

$(ii)\ \ mr(G-v) \le mr(G)$

Mengurangi satu titik pada suatu graf, berarti mengurangi satu baris dan satu kolom pada suatu matriks. Keterangan pada (i), bahwa pengurangan titik pada suatu graf, tidak dapat menaikkan rank pada matriks tersebut. Sehingga tidak mungkin

$mr(G-v) > mr(G)$

Sehingga kemungkinan yang diperoleh

$mr(G-v) \leq mr(G)$

Dari (i) dan (ii) maka diperoleh

$mr(G)-2 \leq mr(G-v) \leq mr(G)$

Sehingga terbukti apabila diberikan suatu graf G dan titik $v \in V(G)$, maka $mr(G)-2 \leq mr(G-v) \leq mr(G)$ (Chenette dan Droms, 2006:6).

Akibat dari Teorema 2.1: jika H merupakan subgraf terdukung dari graf G, maka $mr(H) \leq mr(G)$

Lemma 1

Untuk setiap field F dan graf G dengan order n, maka $mr(G) \leq |G|-1$ (Chenette dan Droms, 2006:6).

Bukti:

Misalkan A adalah matriks *adjacency* dari G. Ubah entri diagonal dari A dengan cara sebagai berikut misal

$$a_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ki}$$

Untuk setiap entri diagonal $a_{ii}, 1 \leq i \leq n$. Sehingga diperoleh matriks baru, sebut A^B. Kemudian ingat bahwa jumlah dari baris A^B adalah vektor nol, sehingga keseluruhan vektor 1 adalah ker A^B, dan diperoleh $rank(A^B) \leq n-1$.

Sehingga

$mr(G) \leq rank(A^B) \leq n-1$

$mr(G) \leq n-1$

Karena $|G| = n$

Maka dapat disimpulkan bahwa $mr(G) \leq |G| - 1$ (Chenette dan Droms, 2006:7).

Teorema 2.2

Untuk Sebarang field F, $mr(P_n) = n - 1$

Bukti:

Matriks Adjacency dari graf P_n

$$A(P_n) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

adalah matriks tridiagonal. Jika dihapus kolom pertama dan baris terakhir diperoleh,

$$A^B(P_n) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A^B(P_n)$ merupakan matriks segitiga bawah dan diagonalnya tidak nol, sehingga

$\det(A^B(P_n)) \neq 0$

Sehingga rank $A^B(P_n) = n - 1$

Berdasarkan Teorema 2.1, diperoleh

$mr^F(P_n) \geq n - 1$..1

Dari Lemma 1 diperoleh $mr^F(P_n) \le n-1$..2

Sehingga dari 1 dan 2, maka untuk sebarang field F diperoleh $mr^F(P_n) = n-1$ (Chenette dan Droms, 2006:7).

Teorema 2.3

Untuk graf G dengan order n maka $mr(G) \ge diam(G)$ (Fallat dan Hogben, 2007: 5).

Bukti :

Pilih titik u dan v sedemikian sehingga d(u,v) = diam(G). Buatlah lintasan terdukung antara titik u dan titik v, sebut P_d dengan d = diam(G)+1. Sesuai Teorema 2.2 $mr(P_d) = d-1$.

Maka diperoleh

$$mr(P_d) = d-1$$
$$mr(P_d) = (diam(G)+1)-1$$
$$mr(P_d) = diam(G)$$

Perhatikan juga pertambahan titik v_i pada graf G bukan pada P_d. Menurut Teorema 2.1 bahwa setiap pertambahan titik v_i pada graf G tidak dapat menurunkan minimum rank dari G.

Sehingga diperoleh

$$mr(G) \ge mr(P_d + v) \ge mr(P_d) = diam(G)$$
$$mr(G) \ge diam(G)$$

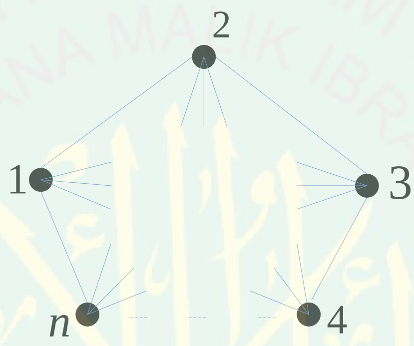
Sehingga terbukti bahwa untuk graf G dengan order n maka $mr(G) \ge diam(G)$ (Chenette dan Droms, 2006:7).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Rank Minimum Matriks Hermite yang Digambarkan Graf K_n

Graf komplit (K_n) dengan n titik, dengan $n \in N, n \geq 2$, dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf K_n

Matriks *adjacency* graf komplit (K_n) tersebut, sebagai berikut:

$$A_{K_n} : \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan matriks *adjacency* tersebut dibentuk matriks Hermite dengan cara :

i. Unsur diagonal diabaikan nilainya.

ii. Unsur nol selain di diagonal utama harus nol.

iii. Unsur tak nol pada matriks diganti dengan konstanta tak nol secara random.

Karena tujuan penulis adalah mencari rank minimum maka dari matriks Hermite yang diperoleh ditentukan ranknya dan dipilih yang terkecil atau minimum. Selain itu dalam mencari rank minimum juga berpedoman pada Teorema 2.3.

Adapun beberapa kemungkinan-kemungkinan bentuk matriks Hermite yang digambarkan graf K_n adalah sebagai berikut :

1. Matriks Hermite bentuk 1

   Matriks Hermite bentuk 1, setiap unsur matriksnya tidak sama.

$$H_{K_n}: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a+bi & c+di & e+fi & \cdots & x+zi \\ c-di & g+hi & j+ki & \cdots & l+mi \\ e-fi & j-ki & n+oi & \cdots & p+qi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-zi & l-mi & p-qi & \cdots & r+si \end{bmatrix} \end{array}$$

   dengan $a,b,c,d,e,f,g,h,j,k,l,m,n,o,p,q,\cdots,r,s \in \Re$ yang semuanya berbeda, dan $i=\sqrt{-1}$.

   Untuk memperoleh rank matriks Hermite bentuk 1, digunakan eliminasi Gauss-Jordan.

   Pada matriks

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di & e+fi & \cdots & x+zi \\ c-di & g+hi & j+ki & \cdots & l+mi \\ e-fi & j-ki & n+oi & \cdots & p+qi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-zi & l-mi & p-qi & \cdots & r+si \end{bmatrix}$$

   baris pertama dibagi $a+bi$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c+di}{a+bi} & \frac{e+fi}{a+bi} & \cdots & \frac{x+zi}{a+bi} \\ c-di & g+hi & j+ki & \cdots & l+mi \\ e-fi & j-ki & n+oi & \cdots & p+qi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-zi & l-mi & p-qi & \cdots & r+si \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris kedua dikurangi $c-di$ kali baris pertama, baris ketiga dikurangi $e-fi$ kali baris pertama, begitu seterusnya hingga baris ke-n, baris ke-n dikurangi $x-zi$ kali baris pertama, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c+di}{a+bi} & \frac{e+fi}{a+bi} & \cdots & \frac{x+zi}{a+bi} \\ 0 & g+hi-(c-di)\frac{c+di}{a+bi} & j+ki-(c-di)\frac{e+fi}{a+bi} & \cdots & l+mi-(c-di)\frac{x+zi}{a+bi} \\ 0 & j-ki-(e-fi)\frac{c+di}{a+bi} & n+oi-(e-fi)\frac{e+fi}{a+bi} & \cdots & p+qi-(e-fi)\frac{x+zi}{a+bi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l-mi-(x-zi)\frac{c+di}{a+bi} & p-qi-(x-zi)\frac{e+fi}{a+bi} & \cdots & r+si-(x-zi)\frac{x+zi}{a+bi} \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris kedua dibagi $g+hi-(c-di)\frac{c+di}{a+bi}$.

Misalkan:

$$g+hi-(c-di)\frac{c+di}{a+bi}=\alpha_1+\beta_1 i \qquad n+oi-(e-fi)\frac{e+fi}{a+bi}=\alpha_5+\beta_5 i$$
$$j+ki-(c-di)\frac{e+fi}{a+bi}=\alpha_2+\beta_2 i \qquad p+qi-(e-fi)\frac{x+zi}{a+bi}=\alpha_6+\beta_6 i$$
$$l+mi-(c-di)\frac{x+zi}{a+bi}=\alpha_3+\beta_3 i \qquad l-mi-(x-zi)\frac{c+di}{a+bi}=\alpha_7+\beta_7 i$$
$$j-ki-(e-fi)\frac{c+di}{a+bi}=\alpha_4+\beta_4 i \qquad p-qi-(x-zi)\frac{e+fi}{a+bi}=\alpha_8+\beta_8 i$$

$$r + si - (x - zi)\frac{x + zi}{a + bi} = \alpha_9 + \beta_9\, i$$
$$\frac{c + di}{a + bi} = \alpha_{10} + \beta_{10}\, i$$
$$\frac{e + fi}{a + bi} = \alpha_{11} + \beta_{11}\, i$$
$$\frac{x + zi}{a + bi} = \alpha_{12} + \beta_{12}\, i$$

dengan $\alpha_n, \beta_n \in \Re, n \in \mathrm{N}$.

Dari pemisalan di atas diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{10} + \beta_{10}\, i & \alpha_{11} + \beta_{11}\, i & \cdots & \alpha_{12} + \beta_{12}\, i \\ 0 & \alpha_1 + \beta_1\, i & \alpha_2 + \beta_2\, i & \cdots & \alpha_3 + \beta_3\, i \\ 0 & \alpha_4 + \beta_4\, i & \alpha_5 + \beta_5\, i & \cdots & \alpha_6 + \beta_6\, i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_7 + \beta_7\, i & \alpha_8 + \beta_8\, i & \cdots & \alpha_9 + \beta_9\, i \end{bmatrix}$$

Baris kedua dibagi dengan $\alpha_1 + \beta_1\, i$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{10} + \beta_{10}\, i & \alpha_{11} + \beta_{11}\, i & \cdots & \alpha_{12} + \beta_{12}\, i \\ 0 & \alpha_1 + \beta_1\, i & \dfrac{\alpha_2 + \beta_2\, i}{\alpha_1 + \beta_1\, i} & \cdots & \dfrac{\alpha_3 + \beta_3\, i}{\alpha_1 + \beta_1\, i} \\ 0 & \alpha_4 + \beta_4\, i & \alpha_5 + \beta_5\, i & \cdots & \alpha_6 + \beta_6\, i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_7 + \beta_7\, i & \alpha_8 + \beta_8\, i & \cdots & \alpha_9 + \beta_9\, i \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 + \beta_1\, i \neq 0$, karena diperoleh dari unsur-unsur yang berbeda.

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol, sehingga baris pertama dikurangi $\alpha_{10} + \beta_{10}\, i$ kali baris kedua, baris ketiga dikurangi $\alpha_4 + \beta_4\, i$ kali baris kedua, begitu seterusnya hingga baris ke-n, baris ke-n dikurangi $\alpha_7 + \beta_7\, i$ kali baris pertama, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_{11}+\beta_{11}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} & \cdots & \alpha_{12}+\beta_{12}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} \\ 0 & 1 & \dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} & \cdots & \dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} \\ 0 & 0 & \alpha_5+\beta_5\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} & \cdots & \alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_8+\beta_8\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} & \cdots & \alpha_9+\beta_9\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris ketiga dibagi dengan $\alpha_5+\beta_5\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_{11}+\beta_{11}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} & \cdots & \alpha_{12}+\beta_{12}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} \\ 0 & 1 & \dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} & \cdots & \dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_8+\beta_8\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} & \cdots & \alpha_9+\beta_9\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\dfrac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i} \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol, sehingga baris kedua dikurangi $\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}$ kali baris ketiga, baris pertama dikurangi $\alpha_{11}+\beta_{11}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}$ kali baris ketiga, begitu seterusnya hingga baris ke-n, baris ke-n dikurangi $\alpha_8+\beta_8\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\dfrac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}$ kali baris ketiga, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \left(\alpha_{12}+\beta_{12}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)-\left(\alpha_{11}+\beta_{11}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\frac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)\left(\frac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}\right) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \left(\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)-\left(\frac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)\left(\frac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\alpha_9+\beta_9\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)-\left(\alpha_8+\beta_8\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\frac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)\left(\frac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}\right) \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah operasi baris elementer, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, hal ini terjadi pada setiap baris sampai baris ke-n, maka baris ke-n dibagi dengan

$$\left(\alpha_9+\beta_9\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)-\left(\alpha_8+\beta_8\,i-(\alpha_7+\beta_7\,i)\frac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)\left(\frac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}\right)$$ sehingga

diperoleh,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \left(\alpha_{12}+\beta_{12}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)-\left(\alpha_{11}+\beta_{11}\,i-(\alpha_{10}+\beta_{10}\,i)\frac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)\left(\frac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}\right) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \left(\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)-\left(\frac{\alpha_2+\beta_2\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}\right)\left(\frac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}}{\alpha_6+\beta_6\,i-(\alpha_4+\beta_4\,i)\frac{\alpha_3+\beta_3\,i}{\alpha_1+\beta_1\,i}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga dengan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh matriks eselon baris sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi rank pada matrik Hermite bentuk 1 adalah n atau $R(H_{K_n}) = n$.

2. Matriks Hermite Bentuk 2

Matriks Hermite yang mempunyai dua baris yang elemennya sama.

$$H_{K_n} : \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a-bi & \cdots & a-bi \\ a+bi & a-bi & a-bi & \cdots & a-bi \\ a+bi & a+bi & c+di & \cdots & e+fi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+bi & a+bi & e+fi & \cdots & g+hi \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a, b, c, d, e, f, \cdots, g, h \in \Re$ yang semuanya berbeda, dan $i = \sqrt{-1}$.

Untuk memperoleh rank matriks Hermite bentuk 2, digunakan eliminasi Gauss-Jordan.

Pada matriks

$$\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a-bi & \cdots & a-bi \\ a+bi & a-bi & a-bi & \cdots & a-bi \\ a+bi & a+bi & c+di & \cdots & e+fi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+bi & a+bi & e+fi & \cdots & g+hi \end{bmatrix}$$

baris pertama dibagi dengan $a+bi$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a-bi}{a+bi} & \frac{a-bi}{a+bi} & \cdots & \frac{a-bi}{a+bi} \\ a+bi & a-bi & a-bi & \cdots & a-bi \\ a+bi & a+bi & c+di & \cdots & e+fi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+bi & a+bi & e+fi & \cdots & g+hi \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris kedua dikurangi $a+bi$ kali baris pertama, baris ketiga dikurangi $a+bi$ kali baris pertama, begitu seterusnya hingga baris ke-n, baris ke-n dikurangi $a+bi$ kali baris pertama, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a-bi}{a+bi} & \frac{a-bi}{a+bi} & \cdots & \frac{a-bi}{a+bi} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2bi & -a+c+(b+d)i & \cdots & -a+e+(b+f)i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2bi & -a+e+(b-f)i & \cdots & -a+e+(b+h)i \end{bmatrix}.$$

Karena baris kedua semua unsurnya adalah nol maka baris kedua dipindahkan ke baris n dan baris ke-n dipindahkan ke baris dua, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a-bi}{a+bi} & \frac{a-bi}{a+bi} & \cdots & \frac{a-bi}{a+bi} \\ 0 & 2bi & -a+e+(b-f)i & \cdots & -a+e+(b+h)i \\ 0 & 2bi & -a+c+(b+d)i & \cdots & -a+e+(b+f)i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris kedua dibagi dengan $2bi$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a-bi}{a+bi} & \frac{a-bi}{a+bi} & \cdots & \frac{a-bi}{a+bi} \\ 0 & 1 & \frac{-a+e+(b-f)i}{2bi} & \cdots & \frac{-a+e+(b+h)i}{2bi} \\ 0 & 2bi & -a+c+(b+d)i & \cdots & -a+e+(b+f)i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris pertama dikurangi $\frac{a-bi}{a+bi}$ kali baris kedua, baris ketiga dikurangi $2bi$ kali baris kedua, begitu seterusnya hingga baris ke-n+1, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a-bi}{a+bi}-\left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)\left(\frac{-a+e+(b-f)i}{2bi}\right) & \cdots & \frac{a-bi}{a+bi}-\left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)\left(\frac{-a+e+(b+h)i}{2bi}\right) \\ 0 & 1 & \frac{-a+e+(b-f)i}{2bi} & \cdots & \frac{-a+e+(b+h)i}{2bi} \\ 0 & 0 & (-a+c+(b+d)i)-(2bi)\left(\frac{-a+e+(b-f)i}{2bi}\right) & \cdots & (-a+e+(b+f)i)-(2bi)\left(\frac{-a+e+(b+h)i}{2bi}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Misalkan :

$$\frac{a-bi}{a+bi}-\left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)\left(\frac{-a+e+(b-f)i}{2bi}\right)=\mu_1+\delta_1 i$$
$$\frac{-a+e+(b-f)i}{2bi}=\mu_2+\delta_2 i$$
$$(-a+c+(b+d)i)-(2bi)\left(\frac{-a+e+(b-f)i}{2bi}\right)=\mu_3+\delta_3 i$$
$$\frac{a-bi}{a+bi}-\left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)\left(\frac{-a+e+(b+h)i}{2bi}\right)=\mu_4+\delta_4 i$$
$$\frac{-a+e+(b+h)i}{2bi}=\mu_5+\delta_5 i$$
$$(-a+e+(b+f)i)-(2bi)\left(\frac{-a+e+(b+h)i}{2bi}\right)=\mu_6+\delta_6 i$$

dengan $\mu_n,\delta_n \in \Re, n \in \mathrm{N}$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu_1+\delta_1\, i & \cdots & \mu_4+\delta_4\, i \\ 0 & 1 & \mu_2+\delta_2\, i & \cdots & \mu_5+\delta_5\, i \\ 0 & 0 & \mu_3+\delta_3\, i & \cdots & \mu_6+\delta_6\, i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris ketiga dibagi dengan $\mu_3+\delta_3\, i$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu_1+\delta_1\, i & \cdots & \mu_4+\delta_4\, i \\ 0 & 1 & \mu_2+\delta_2\, i & \cdots & \mu_5+\delta_5\, i \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{\mu_6+\delta_6\, i}{\mu_3+\delta_3\, i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\mu_3+\delta_3\, i \neq 0,$ karena diperoleh dari unsur-unsur yang berbeda.

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Baris kedua dikurangi $\mu_2+\delta_2\, i$ kali baris ketiga, baris pertama dikurangi $\mu_1+\delta_1\, i$ kali baris ketiga, begitu seterusnya hingga baris ke-n+1, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu_1+\delta_1\, i & \cdots & (\mu_4+\delta_4\, i)-(\mu_1+\delta_1\, i)\left(\dfrac{\mu_6+\delta_6\, i}{\mu_3+\delta_3\, i}\right) \\ 0 & 1 & \mu_2+\delta_2\, i & \cdots & (\mu_5+\delta_5\, i)-(\mu_2+\delta_2\, i)\left(\dfrac{\mu_6+\delta_6\, i}{\mu_3+\delta_3\, i}\right) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{\mu_6+\delta_6\, i}{\mu_3+\delta_3\, i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari proses eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh bahwa rank matriks Hermite bentuk 2 adalah n-1, atau $R(H_{K_n}) = n-1$.

3. Matriks Hermite Bentuk 3

$$H_{K_n} : \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & -ai & -ai & \cdots & -ai \\ ai & a & a & \cdots & a \\ ai & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ai & a & a & \cdots & a \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a \in \Re, a \neq 0, dan\ i = \sqrt{-1}$

Untuk memperoleh rank matriks Hermite bentuk 3, digunakan eliminasi Gauss-Jordan.

Pada matriks

$$\begin{bmatrix} a & -ai & -ai & \cdots & -ai \\ ai & a & a & \cdots & a \\ ai & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ai & a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$$

baris pertama dibagi dengan a, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -i & -i & \cdots & -i \\ ai & a & a & \cdots & a \\ ai & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ai & a & a & \cdots & a \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris kedua dikurangi ai kali baris pertama, baris ketiga dikurangi ai kali baris pertama, begitu seterusnya hingga baris ke-n, baris ke-n dikurangi ai kali baris pertama, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -i & -i & \cdots & -i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari proses eliminasi Gauss-Jordan di atas, diperoleh bahwa rank pada matriks Hermite bentuk 3 adalah 1, atau $R(H_{K_n}) = 1$.

Masih terdapat banyak lagi bentuk matriks Hermite yang memenuhi matriks *adjacency* yang digambarkan oleh graf K_n. Tetapi dari 3 macam tipe matriks di atas sudah diperoleh minimum rank dari matriks Hermite yang digambarkan graf K_n, hal ini dikuatkan dengan Teorema 2.3, karena diam (K_n) = 1, maka diperoleh $mr(H_{K_n}) = 1$ sehingga didapat teorema:

Teorema 3.1

Jika K_n graf komplit dengan n titik, dengan $n \in \mathrm{N}, dan\, n \geq 2$, maka $mr(H_{K_n}) = 1$.

Bukti :

Diketahui : Graf komplit (K_n) dengan n titik dengan $n \in \mathrm{N}, dan\, n \geq 2$.

Maka matriks *adjacency* dari graf K_n adalah :

$$A_{K_n} : \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{array}$$

Akan dibuktikan : $mr(H_{K_n}) = 1$

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh $mr(K_n) \geq diam(K_n) = 1$

Sehingga $mr(K_n) \geq 1$

Cukup ditunjukkan bahwa $mr(K_n) \leq 1$

Ambil matriks Hermite:

$$H_{K_n}: \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} a & -ai & -ai & \cdots & -ai \\ ai & a & a & \cdots & a \\ ai & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ai & a & a & \cdots & a \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a \in \Re, a \neq 0, dan\ i = \sqrt{-1}$

Dengan menggunakan Eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh rank dari matriks Hermite tersebut adalah 1.

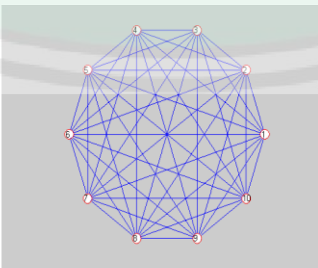
Jadi $mr(K_n) \leq 1$

Karena $mr(K_n) \geq 1$ dan $mr(K_n) \leq 1$, maka $mr(H_{K_n}) = 1$

Sehingga Teorema 3.1 terbukti.

Contoh:

K_{10} :



Gambar 3.2 Graf K_{10}

Bentuk matriks *adjacency* dari K_{10} adalah

$$A_{K_{10}}:\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

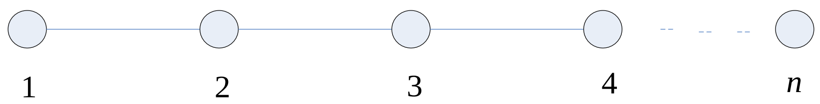
salah satu kemungkinan matriks Hermite dari matriks *adjacency* yang digambarkan graf K_{10} adalah

$$H_{K_{10}}:\begin{bmatrix} 7 & -7i & -7i & -7i & -7i & -7i & -7i & -7i & -7i & -7i \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7i & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Menggunakan program MATLAB, diperoleh $R(H_{K_{10}})=1$

3.2 Rank Minimum Matriks Hermite yang Digambarkan Graf P_n

Graf Lintasan (P_n) dengan n titik, dengan $n \in N, n \geq 2$, dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf P_n

Matriks *adjacency* graf Lintasan (P_n) tersebut, sebagai berikut:

$$A_{P_n}: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan matriks *adjacency* tersebut dibentuk matriks Hermite dengan cara :

i. Unsur diagonal diabaikan nilainya.

ii. Unsur nol selain di diagonal utama harus nol.

iii. Unsur tak nol pada matriks diganti dengan konstanta tak nol secara random.

Karena tujuan penulis adalah mencari rank minimum maka dari matriks Hermite yang diperoleh ditentukan ranknya dan dipilih yang terkecil atau minimum. Selain itu dalam mencari rank minimum juga berpedoman pada Teorema 2.3.

Adapun beberapa kemungkinan-kemungkinan bentuk matriks Hermite yang digambarkan graf lintasan (P_n) adalah sebagai berikut :

1. Matriks Hermite bentuk 1

   Matriks Hermite bentuk 1, setiap unsur matriks tak nol tidak boleh sama

$$H_{P_m}: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a+bi & c+di & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-di & e+fi & g+hi & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g-hi & j+ki & l+mi & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l-mi & o+pi & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q+ri & s+ti \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s-ti & u+vi \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a,b,c,d,e,f,g,h,j,k,l,m,n,o,p,\cdots,q,r,s,u,v \in \Re,$, yang semuanya berbeda dan $i=\sqrt{-1}$.

Untuk memperoleh rank matriks Hermite pada bentuk 1, digunakan eliminasi Gauss-Jordan.

Pada matriks

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-di & e+fi & g+hi & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g-hi & j+ki & l+mi & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l-mi & o+pi & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q+ri & s+ti \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s-ti & u+vi \end{bmatrix}$$

baris pertama dibagi dengan $a+bi$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c+di}{a+bi} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-di & e+fi & g+hi & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g-hi & j+ki & l+mi & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l-mi & o+pi & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q+ri & s+ti \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s-ti & u+vi \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris kedua dikurangi $c-di$ kali baris pertama, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c+di}{a+bi} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (e+fi)-(c-di)\left(\frac{c+di}{a+bi}\right) & g+hi & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g-hi & j+ki & l+mi & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l-mi & o+pi & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q+ri & s+ti \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s-ti & u+vi \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris kedua dibagi dengan $(e+fi)-(c-di)\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c+di}{a+bi} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(g+hi)}{\left((e+fi)-(c-di)\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)\right)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g-hi & j+ki & l+mi & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l-mi & o+pi & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q+ri & s+ti \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s-ti & u+vi \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris pertama dikurangi $(\frac{c+di}{a+bi})$ kali baris kedua, begitu juga baris ketiga dikurangi $g-hi$ kali baris kedua, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)\left(\frac{(g+hi)}{\left((e+fi)-(c-di)\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)\right)}\right) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(g+hi)}{\left((e+fi)-(c-di)\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)\right)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (j+ki)-(g-hi)\left(\frac{(g+hi)}{\left((e+fi)-(c-di)\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)\right)}\right) & l+mi & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l-mi & o+pi & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q+ri & s+ti \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s-ti & u+vi \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris ketiga dibagi dengan

$$(j+ki)-(g-hi)\left(\frac{(g+hi)}{\left((e+fi)-(c-di)\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)\right)}\right),$$

karena setiap baris mempunyai unsur yang berbeda maka dengan cara yang analog pada baris pertama dan kedua, maka akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh rank pada matriks Hermite bentuk 1 adalah n.

2. Matriks Hermite bentuk 2

$$H_{P_m}: \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-2 \\ n-1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} ai & ai & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -ai & 0 & ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ai & 0 & ai & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a \in \Re, i = \sqrt{-1}, dan\ a \neq 0$,

Untuk memperoleh rank matriks Hermite pada bentuk 1, digunakan eliminasi Gauss-Jordan.

Pada matriks

$$\begin{bmatrix} ai & ai & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -ai & 0 & ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ai & 0 & ai & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}$$

baris pertama dibagi dengan ai, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -ai & 0 & ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ai & 0 & ai & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris kedua dikurangi $-ai$ kali baris pertama, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ai & ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ai & 0 & ai & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris kedua dibagi dengan ai, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ai & 0 & ai & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris pertama dikurangi 1 kali baris kedua. Begitu juga baris ketiga dikurangi $-ai$ kali baris kedua, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ai & ai & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris ketiga dibagi dengan ai,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama adalah nol. Oleh karena itu, baris kedua dikurangi 1 kali baris ketiga, baris pertama dikurangi -1 kali baris ketiga, dan baris keempat dikurangi $-ai$ kali baris ketiga, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ai & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}.$$

Sehingga dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan sampai dengan baris ke-n-2 akan diperoleh,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}$$

dengan $\alpha = \pm 1$.

Perhatikan pada baris ke-n-1 dan baris ke-n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris ke-n-1 dibagi dengan ai, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris ke-m dikurangi $-ai$ kali baris ke-n-1, begitu juga dengan baris pertama sampai baris ke-n-2 dapat dibuat nol, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $\alpha = \pm 1$.

Sehingga diperoleh rank matriks Hermite bentuk 2 adalah n-1.

Masih terdapat banyak lagi bentuk matriks Hermite yang memenuhi matriks *adjacency* yang digambarkan oleh graf P_n. Tetapi dari 2 macam tipe matriks di atas sudah diperoleh minimum rank dari matriks Hermite yang digambarkan graf P_n, hal ini dikuatkan dengan Teorema 2.3, karena diam (P_n) = n-1, maka diperoleh $mr(H_{P_n}) = n-1$ sehingga didapat teorema:

Teorema 3.2

Jika P_n graf lintasan dengan n titik, dengan $n \in \mathrm{N}, dan\, n \geq 2$, maka $mr(H_{P_n}) = n-1$.

Bukti :

Diketahui : Graf P_n dengan n titik dengan $n \in \mathrm{N}, dan\, n \geq 2$

maka matriks *adjacency* dari graf P_n adalah :

$$A_{P_n}: \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Akan dibuktikan : $mr(H_{P_n}) = n-1$

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh $mr(P_n) \geq diam(P_n) = n-1$

Sehingga $mr(P_n) \geq n-1$

Ambil Matriks Hermite:

$$H_{P_m}: \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-2 \\ n-1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} ai & ai & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -ai & 0 & ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ai & 0 & ai & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai & 0 & ai \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ai & -ai \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a \in \Re, a \neq 0, dan\ i = \sqrt{-1}$

dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh rank dari matriks Hermite tersebut adalah n-1.

Jadi $mr(H_{P_n}) \leq n-1$

Karena $mr(H_{P_n}) \geq n-1$ dan $mr(H_{P_n}) \leq n-1$, maka $mr(H_{P_n}) = n-1$

Sehingga Teorema 3.2 terbukti.

Contoh 1 (Untuk n genap)**:**

P_8 :

Gambar 3.4 Graf P_8

Bentuk matriks *adjacency* dari P_8 adalah

$$A_{P_8} : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

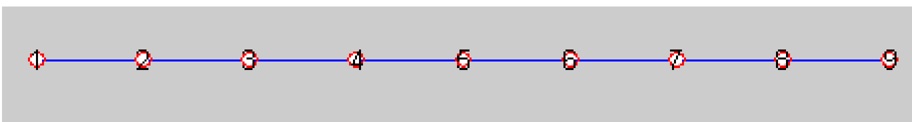
salah satu kemungkinan matriks Hermite dari matriks *adjacency* yang digambarkan graf P_8 adalah

$$H_{P_8} : \begin{bmatrix} 4i & 4i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4i & 0 & 4i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4i & 0 & 4i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4i & 0 & 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4i & 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4i & 0 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4i & 0 & 4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4i & -4i \end{bmatrix}$$

Menggunakan program MATLAB, diperoleh $R(H_{P_8}) = 7$

Contoh 2 (Untuk n ganjil):

P_9 :



Gambar 3.5 Graf P_9

Bentuk matriks *adjacency* dari P_9 adalah

$$A_{P_9}:\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

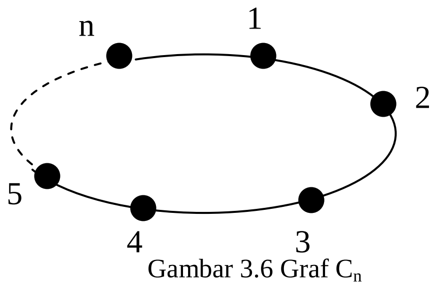
salah satu kemungkinan matriks Hermite dari matriks *adjacency* yang digambarkan graf P_9 adalah

$$H_{P_9}:\begin{bmatrix} 2i&2i&0&0&0&0&0&0&0\\ -2i&0&2i&0&0&0&0&0&0\\ 0&-2i&0&2i&0&0&0&0&0\\ 0&0&-2i&0&2i&0&0&0&0\\ 0&0&0&-2i&0&2i&0&0&0\\ 0&0&0&0&-2i&0&2i&0&0\\ 0&0&0&0&0&-2i&0&2i&0\\ 0&0&0&0&0&0&-2i&0&2i\\ 0&0&0&0&0&0&0&-2i&-2i \end{bmatrix}$$

Menggunakan program MATLAB, diperoleh $R(H_{P_9})=8$

3.3 Rank Minimum Matriks Hermite yang Digambarkan Graf C_n

Graf Sikel (C_n) dengan n titik, dengan $n\in N, n\geq 3$, dapat digambarkan sebagai beikut:



Gambar 3.6 Graf C_n

Matriks *adjacency* graf Sikel (C_n) tersebut, sebagai berikut:

$$A_{C_n}: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan matriks *adjacency* tersebut dibentuk matriks Hermite dengan cara :

i. Unsur diagonal diabaikan nilainya.

ii. Unsur nol selain di diagonal utama harus nol.

iii. Unsur tak nol pada matriks diganti dengan konstanta tak nol secara random.

Karena tujuan penulis adalah mencari rank minimum maka dari matriks Hermite yang diperoleh ditentukan ranknya dan dipilih yang terkecil atau minimum. Selain itu dalam mencari rank minimum juga berpedoman pada Teorema 2.1.

Ada beberapa kemungkinan-kemungkinan bentuk matriks Hermite yang digambarkan graf sikel (C_n), matriks *adjacency* yang digambarkan oleh graf Sikel (C_n) adalah salah satu kemungkinan matriks Hermite dengan unsur tak nol dalam matriks tersebut memenuhi a+bi dan sekawannya a-bi, dengan a=1 dan b=0. Disini penulis mengambil kemungkinan bentuk matriks Hermite dari matriks *adjacency* langsung dan hanya merandom unsur diagonal utama.

Adapun beberapa kemungkinan bentuk matriks Hermite dari matriks *adjacency* langsung dan hanya merandom unsur diagonal utama adalah:

$$H_{C_4}:\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&-1&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_4})=2$

$$H_{C_8}:\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&1\\1&-1&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_8})=6$

$$H_{C_{12}}:\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\1&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_{12}})=10$

$$H_{C_5}:\begin{bmatrix}-1&1&0&0&1\\1&-1&1&0&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_5})=3$

$$H_{C_6}:\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\\1&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_6})=4$

$$H_{C_9}:\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0&0&0&0&1\\1&-1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&-1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_9})=7$

$$H_{C_7}:\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_7})=5$

$$H_{C_{10}}:\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_{10}})=8$

$$H_{C_{13}}:\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

menggunakan program MATLAB diperoleh $R(H_{C_{13}})=11$

Masih terdapat banyak lagi bentuk matriks Hermite yang memenuhi matriks *adjacency* yang digambarkan oleh graf C_n. Tetapi dari macam-macam tipe matriks di atas sudah diperoleh minimum rank dari matriks Hermite yang digambarkan graf C_n. Hal ini dikuatkan dengan Teorema 2.1, $mr(C)=n-2,$ dengan P_n adalah subgraf lintasan terdukung dari graf C_n, maka diperoleh $mr(H_{C_n})=n-2$ sehingga didapat teorema:

Teorema 3.3

Jika C_n graf sikel dengan n titik, dengan $n \in \mathrm{N}, dan\, n \geq 3$, maka $mr(H_{C_n}) = n-2$.

Bukti :

Diketahui : Graf C_n dengan n titik dengan $n \in \mathrm{N}, dan\, n \geq 3$

maka matriks *adjacency* dari graf C_n adalah :

$$A_{C_n} : \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Akan dibuktikan : $mr(H_{C_n}) = n-2$

Graf sikel (C_n) bukan merupakan graf lintasan (P_n). Akan tetapi graf sikel (C_n) memuat subgraf lintasan terdukung dengan lintasan n-1 titik (P_{n-1}), berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh

$$mr(C_n) \geq mr(P_{n-1})$$

$$mr(C_n) \geq (n-1)-1$$

$$mr(C_n) \geq n-2$$

Sehingga diperoleh $mr(H_{C_n}) \geq n-2$.

Sehingga cukup dibuktikan $mr(H_{C_n}) \leq n-2$

Ambil matriks Hermite, untuk:

untuk n = 3, karena $C_3 = K_3$ maka diperoleh $mr(H_{C_3}) = 1$

untuk $n \geq 4$, ambil matriks *Adjacency* dari graf sikel atau A_{C_n}, dengan untuk :

i $\quad n \equiv 0 \bmod 4,\ maka\ pilih\ matriks A_{C_n} + diag(0,-1,0,1,0,-1,0,1,\cdots,0,-1,0,1)$

ii $\quad n \equiv 1 \bmod 4,\ dan\ n \geq 5, maka\ \ pilih\ \ matriks\ \ A_{C_n} + diag(-1,-1,-1,0,0,0,\cdots,0)$

iii $\quad n \equiv 2 \bmod 4,\ dan\ n \geq 6, maka\ \ pilih\ \ matriks\ \ A_{C_n} + diag(1,1,1,1,1,1,0,0,0,\cdots,0)$

iv $\quad n \equiv 3 \bmod 4,\ dan\ n \geq 7, maka\ \ pilih\ \ matriks\ \ A_{C_n} + diag(1,1,1,0,0,0,\cdots,0)$

Dengan menggunakan program MATLAB, maka diperoleh Rank dari matriks-matriks tersebut adalah n-2.

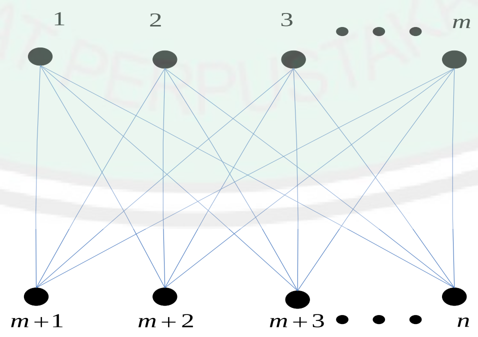
Jadi $mr(H_{C_n}) \leq n-2$

Karena $mr(H_{C_n}) \geq n-2$ dan $mr(H_{C_n}) \leq n-2$, Maka $mr(H_{C_n}) = n-2$

Sehingga Teorema 3.3 terbukti.

3.4 Rank Minimum Matriks Hermite yang Digambarkan Graf $K_{m,n}$

Graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan m + n titik, dengan $m, n \in N$, dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf $K_{m,n}$

Matriks *adjacency* graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$) tersebut, sebagai berikut:

$$A_{K_{m,n}}: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ m+2 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan matriks *adjacency* tersebut dibentuk matriks Hermite dengan cara :

i. Unsur diagonal diabaikan nilainya.

ii. Unsur nol selain di diagonal utama harus nol.

iii. Unsur tak nol pada matriks diganti dengan konstanta tak nol secara random.

Karena tujuan penulis adalah mencari rank minimum maka dari matriks Hermite yang diperoleh ditentukan ranknya dan dipilih yang terkecil atau minimum. Selain itu dalam mencari rank minimum juga berpedoman pada Teorema 2.3.

Adapun salah satu kemungkinan-kemungkinan bentuk matriks Hermite yang digambarkan graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) adalah sebagai berikut :

$$H_{K_{m,n}}: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ m+2 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a \in \Re,\ i = \sqrt{-1}, dan\, a \neq 0$, untuk memperoleh rank matriks Hermite tersebut, digunakan eliminasi Gauss-Jordan.

Pada matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

baris ke-m+1 ditukar ke baris ke-1, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Baris pertama dibagi dengan $-ai$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris ke-m+2 dikurangi $-ai$ kali baris pertama, hal ini juga berlaku pada baris ke-m+3 sampai baris ke-n, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan, jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi, maka baris kedua dibagi dengan ai,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Jika pada suatu kolom terdapat 1 utama maka unsur pada kolom yang sama selain 1 utama dapat dibuat nol. Oleh karena itu, baris ketiga dikurangi ai kali baris kedua, hal ini juga berlaku pada baris ke-4 sampai baris ke-n

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh rank matriks Hermite bentuk di atas adalah 2.

Masih terdapat banyak lagi bentuk matriks Hermite yang memenuhi matriks *adjacency* yang digambarkan oleh graf $K_{m,n}$. Tetapi bentuk matriks Hermite di atas sudah diperoleh minimum rank dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf $K_{m,n}$. Hal ini dikuatkan dengan Teorema 2.3, karena diam ($K_{m,n}$) = 2, maka diperoleh $mr(H_{K_{m,n}}) = 2$ sehingga didapat teorema:

Teorema 3.4

Jika $K_{m,n}$ graf bipartisi komplit dengan n+m titik, dengan $m,n \in N$, maka $mr(H_{K_{m,n}}) = 2$.

Bukti :

Diketahui : Graf $K_{m,n}$ graf bipartisi komplit dengan n+m titik, dengan $m,n \in N$.

maka matriks *adjacency* dari graf $K_{m,n}$ adalah :

$$A_{K_{m,n}} : \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ m+2 \\ \vdots \\ m+n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & m+n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Akan dibuktikan : $mr(H_{K_{m,n}}) = 2$

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh $mr(H_{K_{m,n}}) \geq diam(K_{m,n}) = 2$

Sehingga $mr(H_{K_{m,n}}) \geq 2$

Cukup ditunjukkan $mr(H_{K_{m,n}}) \leq 2$

Ambil Matriks Hermite:

$$H_{K_{m,n}} : \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ m+2 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ai & ai & \cdots & ai \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ai & -ai & \cdots & -ai & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a \in \Re,\ i = \sqrt{-1}, dan\, a \neq 0$,

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh rank dari matriks Hermite tersebut adalah 2.

Jadi $mr(H_{K_{m,n}}) \leq 2$

Karena $mr(H_{K_{m,n}}) \geq 2$ dan $mr(H_{K_{m,n}}) \leq 2$, maka $mr(H_{K_{m,n}}) = 2$

Sehingga Teorema 3.4 terbukti.

Karena graf bintang (S_n) sama dengan graf bipartisi komplit dengan bentuk $K_{1,n}$ maka dari Teorema 3.4 akan berakibat Teorema 3.5

Teorema 3.5

Jika S_n graf bintang dengan $n \in \mathrm{N}$, maka $mr(H_{S_n}) = 2$.

Bukti :

Diketahui : Graf bintang (S_n) memuat n + 1 titik,

maka matriks *Adjacency* dari graf S_n adalah :

$$A_{S_n}: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \vdots \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Akan dibuktikan : $mr(H_{S_n}) = 2$

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh $mr(H_{S_n}) \geq diam(S_n) = 2$

Sehingga $mr(H_{S_n}) \geq 2$

Cukup ditunjukkan $mr(H_{S_n}) \leq 2$

Ambil Matriks Hermite:

$$H_{S_n}: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \vdots \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & ai & ai & ai & ai & ai & \cdots & ai \\ -ai & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -ai & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -ai & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -ai & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -ai & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ai & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $a \in \Re,\ i = \sqrt{-1}, dan\, a \neq 0$,

dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh rank dari matriks Hermite tersebut adalah 2.

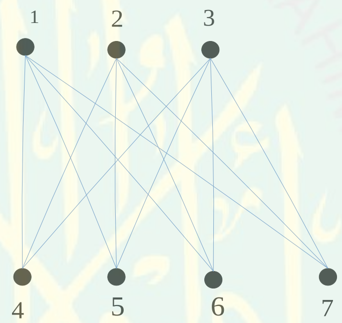
Jadi $mr(H_{S_n}) \leq 2$

Karena $mr(H_{S_n}) \geq 2$ dan $mr(H_{S_n}) \leq 2$, maka $mr(H_{S_n}) = 2$

Sehingga Teorema 3.5 terbukti.

Contoh:

$K_{3,4}$:



Gambar 3.8 Graf $K_{3,4}$

Bentuk matriks *adjacency* dari $K_{3,4}$ adalah:

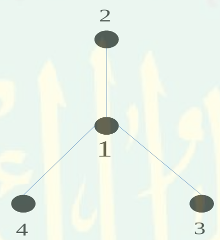
$$A_{K_{3,4}} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

salah satu kemungkinan matriks Hermite dari matriks *adjacency* yang digambarkan graf $K_{3,4}$ adalah

$$H_{K_{3,4}}:\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5i & 5i & 5i & 5i \\ 0 & 0 & 0 & 5i & 5i & 5i & 5i \\ 0 & 0 & 0 & 5i & 5i & 5i & 5i \\ -5i & -5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5i & -5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5i & -5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5i & -5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Menggunakan program MATLAB, diperoleh $R(H_{K_{3,4}})=2$

S_3 :



Gambar 3.9 Graf S_3

Bentuk matriks *adjacency* dari S_3 adalah

$$A_{S_3}:\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Salah satu kemungkinan matriks Hermite dari matriks *adjacency* yang digambarkan graf P_8 adalah

$$H_{S_3}:\begin{bmatrix} 0 & 10i & 10i & 10i \\ -10i & 0 & 0 & 0 \\ -10i & 0 & 0 & 0 \\ -10i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Menggunakan program MATLAB, diperoleh $R(H_{S_3})=2$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan tentang rank minimum dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf G, diperoleh kesimpulan:

a. Rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf K_n (graf komplit dengan n titik, $n \geq 2$) adalah 1 atau $mr(H_{K_n}) = 1$.

b. Rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf P_n (graf lintasan dengan n titik, $n \geq 2$) adalah n-1 atau $mr(H_{P_n}) = n-1$.

c. Rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf C_n (graf sikel dengan n titik, $n \geq 3$) adalah n-2 atau $mr(H_{C_n}) = n-2$.

d. Rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf $K_{m,n}$ (graf bipartisi komplit dengan m + n titik, $m, n \in \mathbb{N}$) adalah 2 atau $mr(H_{K_{m,n}}) = 2$.

e. Rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf S_n (graf bintang dengan n + 1 titik, $n \in \mathbb{N}$) adalah 2 atau $mr(H_{S_n}) = 2$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah rank minimum matriks Hermite yang digambarkan oleh graf K_n, graf P_n, graf C_n, graf $K_{m,n}$, dan graf S_n. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih lanjut dengan pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

‘Abdullah bin Muhammad bin ‘Abdurrahman bin Ishaq Alu Syaikh. 2007. *Lubaabut Tafsiir Min Ibni Katsir*. Kairo: Mu-assasah Daar al-Hilaal Kairo.

Abdussakir, Azizah, Nilna N. dan Nofandika, Fifi Framelia. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Al Qarni, ‘Aidh. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Prees.

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2004(a). *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid I*. Jakarta: Erlangga.

__________. 2004(b). *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid II*. Jakarta: Erlangga.

As Shiddiqiey, Muhammad Hasbi. 2000. *Tafsir Al Qur’anul Majid An Nuur*. Semarang: Pustaka Rizki Putra.

Ayres, Frank. 1985. *Teori dan Soal-Soal Matriks*. Jakarta: Erlangga.

Chartrand, Gary dan Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chartrand, Gary dan Oellermann Ortrud R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Canada: McGraw-Hill Inc.

Chenette, Nathan L dan Droms, Sean V. Minimum Rank of a Graph over an Arbitrary: *Field Linear Algebra and Its Applications*, 206: 191-215, 2006.

Fallat, S. M. dan Hogben, Leslie. The Minimum *Rank* of Symmetric Matrices Described by a Graph: A Survey, *Linear Algebra and Its Applications*, 426: 558-582, 2007.

Gere, James W. dan Weaver, Wiliam. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Jakarta: Erlangga.

Hasanah, Syifaul. 2008. Digraf Dari Tabel Cayley Grup Dihedral. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Program Sarjana Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika.

Hogben, Leslie. 2007. *Handbook of Linier Algebra*. Boca Raton: Chapman & hall/CRC Taylor & Francis Group.

Jonhsonbaugh, Richard dan Marcus Schaefer. 2004. *Algorithms.* Newyork: Personed education international.

Kerami, Djati dan Sitanggang, Cormentyna. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya.* Jakarta: Erlangga.

Lipschutz, Seymor dan Lipson, Marc Lars. 2002. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Penerbit Salemba Teknika.

Naipospos dan Soemartoyo, Noeniek. 1983. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Purwanto, Agus. 2009. *Ayat-Ayat Semesta.* Bandung: Mizan.

Rahman, Subhan MA, Tradisi dan Inovasi Keilmuan Islam Masa Klasik: *Innovation*, vol 5 nomer 10: 249-274, 2006.

Sulaiman, Umar. 2005. *Fiqih Niat Dalam Ibadah.* Jakarta: Gema Insani Press.

Tim Penyusun Kamus Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa. 1989. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. Jakarta: Balai Pustaka.

Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs an Introductory Approach*: *A First Course in Discrete Mathematic.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

DAFTAR LAMPIRAN

Program MATLAB untuk Rank Minimum Matriks Hermite yang Digambarkan oleh

1. Graf Komplit

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik:');
a=input('batasan nilai:');
k=graph
complete(k,n)
ndraw(k)
A=a*ones(n);
for i=1:n-1;
   A(1,i+1)=-a*sqrt(-1);
   A(i+1,1)=a*sqrt(-1);
   i=i+1;
end
A
rank(A)
```

2. Graf Lintasan

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik:');
a=input('batasan nilai:');
p=graph
path(p,n)
ndraw(p)
A=zeros(n);
for i=1:n-1;
    A(i,i+1)=a*sqrt(-1);
    A(i+1,i)=-a*sqrt(-1);
    A(1,1)=a*sqrt(-1);
    A(n,n)=-a*sqrt(-1);
    %A(4*i-2,4*i-2)=-1;
    %A(4*i,4*i)=1;
    i=i+1;
end
A
rank(A)
```

3. Graf Sikel

```
% untuk n=0 mod 4, n=4,8,12,16,20,...
clear
clc
n=input('banyaknya titik:');
c=graph
cycle(c,n)
ndraw(c)
A=zeros(n);
for i=1:n-1;
   A(i,i+1)=1;
   A(i+1,i)=1;
   A(1,n)=1;
   A(n,1)=1;
   %A(4*i-2,4*i-2)=-1;
   %A(4*i,4*i)=1;
   i=i+1;
end
for j=1:n;
   if mod(j,4)==2
      A(j,j)=-1;
   end
end
```

```
for k=1:n;
    if mod(k,4)==0
        A(k,k)=1;
    end
end
A
rank(A)
```

% untuk n=3 mod 4, n=7,11,15,19,23,...

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik:');
c=graph
cycle(c,n)
ndraw(c)
A=zeros(n);
for i=1:n-1;
    A(i,i+1)=1;
    A(i+1,i)=1;
    A(1,n)=1;
    A(n,1)=1;
    A(1,1)=1;
    A(2,2)=1;
    A(3,3)=1;
    i=i+1;
end
A
rank(A)
```

```
% untuk n=1 mod 4, n=5,9,13,17,21,25,29...
clear
clc
n=input('banyaknya titik:');
c=graph
cycle(c,n)
ndraw(c)
A=zeros(n);
for i=1:n-1;
    A(i,i+1)=1;
    A(i+1,i)=1;
    A(1,n)=1;
    A(n,1)=1;
    A(1,1)=-1;
    A(2,2)=-1;
    A(3,3)=-1;
    i=i+1;
end
A
rank(A)
```

% untuk n=2 mod 4, n=6,10,14,18,22,26...

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik:');
c=graph
cycle(c,n)
ndraw(c)
A=zeros(n);
for i=1:n-1;
   A(i,i+1)=1;
   A(i+1,i)=1;
   A(1,n)=1;
   A(n,1)=1;
   A(1,1)=1;
   A(2,2)=1;
   A(3,3)=1;
   A(4,4)=1;
   A(5,5)=1;
   A(6,6)=1
   i=i+1;
end
A
rank(A)
```

 % untuk n=6

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik:');
c=graph
cycle(c,n)
ndraw(c)
A=zeros(n);
for i=1:n-1;
    A(i,i+1)=1;
    A(i+1,i)=1;
    A(1,n)=1;
    A(n,1)=1;
    A(1,1)=1;
    A(2,2)=1;
    A(3,3)=2;
    A(4,4)=1;
    A(5,5)=1;
    A(6,6)=0
    i=i+1;
end
A
rank(A)
```

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mohamad Syafi'i
Nim : 07610085
Fakultas/ jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Rank Minimum Matriks Hermite Yang Digambarkan Graf G
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	9 November 2010	Konsultasi BAB III	1.	
2	28 Desember 2010	Konsultasi Kajian Agama		2.
3	30 Desember 2010	Konsultasi BAB I, II	3.	
4	30 Desember 2010	Konsultasi Kajian Agama		4.
5	27 Januari 2011	Konsultasi BAB III	5.	
6	1 Februari 2011	Konsultasi BAB III		6.
7	2 Februari 2011	Konsultasi BAB III	7.	
8	18 Februari 2011	Konsultasi BAB III		8.
9	1 Maret 2011	Konsultasi BAB I, II, III	9.	
10	4 Maret 2011	Konsultasi Kajian Agama		10.
11	5 Maret 2011	Konsultasi Keseluruhan	11.	

Malang, 10 Maret 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001