RUANG VEKTOR FUZZY DARI MATRIKS FUZZY $m \times n$

SKRIPSI

oleh:
ALFI SAYYIDATIL MUFIDAH
NIM. 07610084

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

RUANG VEKTOR FUZZY DARI MATRIKS FUZZY $\boldsymbol{m \times n}$

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

oleh:
ALFI SAYYIDATIL MUFIDAH
NIM. 07610084

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

RUANG VEKTOR FUZZY DARI MATRIKS FUZZY $\boldsymbol{m \times n}$

SKRIPSI

oleh:
ALFI SAYYIDATIL MUFIDAH
NIM. 07610084

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 12 Agustus 2011

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

RUANG VEKTOR FUZZY DARI MATRIKS FUZZY $m \times n$

SKRIPSI

oleh:
ALFI SAYYIDATIL MUFIDAH
NIM. 07610084

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 24 Agustus 2011

Penguji utama:	**Drs. H. Turmudi, M.Si** **NIP. 19571005 198203 1 006**	**(…….………….)**
Ketua penguji:	**Abdussakir, M.Pd** **NIP. 19751006 200312 1 001**	**(…….………….)**
Sekretaris penguji:	**Hairur Rahman, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	**(………………..)**
Anggota penguji:	**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A** **NIP. 19731212 199803 1 001**	**(………………..)**

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001

MOTTO

Tidak ada orang pandai yang bisa mengalahkan

orang yang beruntung

Orang-orang yang berhenti belajar akan menjadi

pemilik masa lalu. Orang-orang yang masih terus

belajar, akan menjadi pemilik masa depan

PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan untuk orang-orang yang penulis sayangi:

Kedua Orang Tua penulis, yang telah merawat, membesarkan dan telah melimpahkan kasih sayangnya kepada penulis,

Adik-adik tercinta, Doni, Ma'ul, dan Zuzuk yang selalu memberi inspirasi, sehingga penulis selalu ingin menjadi yang terbaik sebagai panutan mereka,

Kakanda Septa Adi Pratiknyo tersayang yang selalu setia mendampingi dan memberi semangat kepada penulis.

Teman-teman jurusan matematika angkatan tahun 2007 yang penulis sayangi, terima kasih atas support dan bantuan kalian semua.

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: ALFI SAYYIDATIL MUFIDAH
NIM	: 07610084
Jurusan	: MATEMATIKA
Fakultas	: SAINS DAN TEKNOLOGI

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, Agustus 2011

Yang membuat pernyataan,

Alfi Sayyidatil Mufidah
NIM. 07610084

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT., karena atas limpahan Rahmat serta Hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Skripsi dengan Judul **" Ruang Vektor Fuzzy Dari Matriks Fuzzy $m \times n$".** Tidak lupa juga sholawat serta salam kepada Rosulullah SAW., yang dengan perantaranya dapat merasakan nikmatnya kehidupan.

Skripsi ini dapat diselesaikan tentu tidak lepas dari berbagai pihak yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, sumbangan pikiran, waktu dan tenaga serta perhatian, maka dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih yang kepada :

1. Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir. M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si dan Dr. H. Ahmad Barizi, M.A selaku dosen pembimbing skripsi yang telah memberikan pengarahan serta nasehat.

5. Seluruh dosen pengajar maupun staf administrasi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayahanda (Drs. H. Sukasdi) dan ibunda (Nuril Hidayah) tercinta yang senantiasa memberiksn do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Kakanda (Septa Adi Pratiknyo) dan Adinda (Doni, Ma'ul, Zuzuk) yang selalu memberikan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabat-sahabat yang telah memberikan semangat, kebersamaan dan kenangan terindah selama menempuh pendidikan di kampus UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Serta semua teman yang senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika 2007
10. Semua pihak yang membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis sangat berharap semoga skripsi ini berguna dan bermanfaat bagi pembaca serta perkembangan ilmu pengetahuan di bidang ilmu Matematika.

Malang, Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRACT

Mufidah, Alfi Sayyidatil. 2011. **Fuzzy Vector Space on Matrices Fuzzy $m \times n$.** Thesis. Mathematical Department, Faculty of Science and Technology of Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
Supervisor: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Dr. H. Barizi Ahmad, M.A

There is a difference between addition and multiplication operations in general vector spaces and vector spaces of fuzzy matrices. The definition of a fuzzy matrices is a matrices whose entries fuzzy numbers, i.e. numbers between 0 to 1. All the fuzzy matrices is a matrices, but not necessarily any matrices fuzzy matrices. In this study, the set of all $m \times n$ fuzzy matrices is denoted *by* $V_{m \times n}$.

On the fuzzy vector space, the addition operation use the supremum operation of the entries in the corresponding matrices. Clearly that difference from the sum of the general vector spaces. From these differences, the study aims to determine the properties of addition and multiplication operations on the vector space of fuzzy matrices.

Based on evidence from the operations of addition and multiplication of fuzzy matrices, then the conclusion that *the addition operation and scalar multiplication is a fuzzy vector space.*

Key words: addition and multiplication operation, fuzzy matrices, fuzzy vector space.

ABSTRAK

Sayyidatil, Alfi. 2011. **Ruang Vektor Fuzzy dari Matriks Fuzzy $m \times n$.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Terdapat perbedaan antara operasi penjumlahan dan perkalian pada ruang vektor umum dan ruang vektor dari matriks fuzzy. Yang dimaksud dengan matriks fuzzy adalah matriks yang entri-entrinya bilangan fuzzy, yakni bilangan antara 0 sampai 1. Semua matriks fuzzy merupakan matriks, namun sebarang matriks belum tentu matriks fuzzy. Pada penelitian ini, himpunan dari semua matriks fuzzy berordo $m \times n$ dilambangkan dengan $V_{m \times n}$.

Pada ruang vektor fuzzy, operasi penjumlahan merupakan supremum dari entri-entri pada matriks yang bersesuaian. Hal ini berbeda dengan penjumlahan pada ruang vektor umum.
Dari perbedaan tersebut, maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui sifat-sifat dari operasi penjumlahan dan perkalian pada ruang vektor dari matriks fuzzy $m \times n$.

Berdasarkan pada pembuktian dari operasi penjumlahan dan perkalian dari matriks fuzzy, maka diperoleh kesimpulan bahwa $V_{m \times n}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar maka $V_{m \times n}$ merupakan ruang vektor fuzzy.

Kata kunci: operasi penjumlahan dan perkalian, matriks fuzzy, ruang vektor fuzzy.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu merupakan bagian yang penting dalam kehidupan manusia. Sebagaimana yang terlihat di dalam Al-Qur’an yang menyebutkan kata “ilm” sebanyak 800 kali dalam bentuk kata dasar maupun kata turunannya. ilmu terbagi dalam beberapa kelompok, salah satunya adalah ilmu sains dan teknologi. Gambaran Al-Qur’an mengenai ilmu sains dan teknologi bisa dilihat pada ayat di bawah ini:

يَٰمَعۡشَرَ ٱلۡجِنِّ وَٱلۡإِنسِ إِنِ ٱسۡتَطَعۡتُمۡ أَن تَنفُذُواْ مِنۡ أَقۡطَارِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ
فَٱنفُذُواْۚ لَا تَنفُذُونَ إِلَّا بِسُلۡطَٰنٖ ٣٣

“Hai jamaah jin dan manusia, jika kamu sanggup menembus (melintasi) penjuru langit dan bumi, maka lintasilah. Kamu tidak dapat menembusnya melainkan dengan kekuatan (sains dan teknologi)” (QS. Ar-Rahman/ 55: 33)

Di dalam matematika dipelajari tentang vektor. Secara geometris, vektor dapat disajikan sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi-2 dan berdimensi-3, arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menentukan besarnya. Bila membahas mengenai arah, agama Islam tidak dapat terlepas dari arah, arah yang dimaksud dalam Islam adalah arah kiblat. Sebagaimana yang dijelaskan oleh ayat Al Qur’an di bawah ini:

سَيَقُولُ ٱلسُّفَهَآءُ مِنَ ٱلنَّاسِ مَا وَلَّىٰهُمْ عَن قِبْلَتِهِمُ ٱلَّتِى كَانُوا۟ عَلَيْهَا ۚ قُل لِّلَّهِ ٱلْمَشْرِقُ
وَٱلْمَغْرِبُ ۚ يَهْدِى مَن يَشَآءُ إِلَىٰ صِرَٰطٍ مُّسْتَقِيمٍ ﴿١٤٢﴾

Orang-orang yang kurang akalnya diantara manusia akan berkata: "Apakah yang memalingkan mereka (umat Islam) dari kiblatnya (Baitul Maqdis) yang dahulu mereka telah berkiblat kepadanya?" Katakanlah: ‘Kepunyaan Allah-lah timur dan barat; Dia memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya ke jalan yang lurus’. (QS. Albaqoroh/ 1:142)

Selain itu, suatu vektor $\mathbf{u} = u_1, u_2, \ldots, u_n$ dalam R^n bisa ditulis dalam notasi matriks sebagai suatu matriks baris atau matriks kolom. Bila terdapat vektor **u** dan **v** juga skalar k dan l pada suatu himpunan tak kosong V, dimana **u**, **v** dan skalar k,l memenuhi aksioma-aksioma tertentu mengenai penjumlahan dan perkalian skalar maka, V disebut sebagai ruang vektor.

Pada tahun 2010 Mahalingam memperkenalkan tentang ruang vektor fuzzy dari matriks fuzzy. Matriks fuzzy adalah matriks yang entri-entrinya adalah interval satuan pada rentang 0 dan 1. Pada ruang vektor dari matriks fuzzy, penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks fuzzy dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks fuzzy.

Penjumlahan pada matriks fuzzy tidak seperti penjumlahan pada matriks umum. Misalkan A dan B adalah matriks fuzzy $m \times n$, maka A+B didefinisikan sebagai supremum dari entri-entri yang bersesuaian dari matriks A dan matriks B.

Sedangkan pada ruang vektor umum, penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks.

Dari penjelasan mengenai perbedaan mengenai operasi penjumlahan dan perkalian pada ruang matriks umum dan matriks fuzzy tersebut, peneliti tertarik untuk meneliti tentang **"Ruang Vektor Fuzzy dari Matriks Fuzzy $m \times n$"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas, maka rumusan masalah yang dapat dikemukakan adalah apakah matriks fuzzy membentuk ruang vektor?

1.3 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah yang telah dikemukakan di atas, dapat diketahui tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah matriks fuzzy membentuk ruang vektor.

1.4 Batasan Masalah

Untuk menghindari penafsiran yang salah terhadap masalah yang diteliti, maka peneliti hanya membatasi masalah pada operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks fuzzy.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis

   a) Untuk mengembangkan pengetahuan terhadap ilmu ruang vektor fuzzy.

   b) Sebagai bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika.

2. Bagi pembaca

   a) Sebagai tambahan pengetahuan tentang ruang vektor fuzzy.

   b) Sebagai motivasi kepada para pembaca agar dapat mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika.

3. Bagi institusi

   a) Sebagai pengembangan ilmu pengetahuan tentang fuzzy dan vektor pada umumnya dan khususnya sebagai perbendaharaan perpustakaan yang diharapkan bisa bermanfaat bagi mahasiswa-mahasiswi selanjutnya.

   b) Untuk menambah khasanah keilmuan dan sebagai bahan acuan bagi yang berminat untuk mengadakan penelitian lebih lanjut.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (library research). Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah

   Sebelum melakukan penelitian, peneliti terlebih dahulu menyusun rencana penelitian yang berawal dari masalah tentang ruang vektor fuzzy.

2. Mengumpulkan referensi

   Mengumpulkan referensi-referensi yang berhubungan dengan himpunan fuzzy, ruang vektor, dan ruang vektor fuzzy dari buku-buku, jurnal, internet, artikel, dan sumber-sumber lain yang relevan.

3. Menganalisis

   Langkah-langkah dalam menganalisis pada penelitian ini adalah:

   a. Menjelaskan tentang matriks fuzzy.
   b. Menjelaskan tentang operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks fuzzy.
   c. Menunjukkan ruang vektor fuzzy $m \times n$.

4. Melaporkan

   Langkah terakhir dari penelitian ini adalah menyusun laporan dari penelitian yang telah dilakukan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah sehingga mudah untuk dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi dalam beberapa sub bab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain: Pendahuluan vektor, operasi-operasi pada vektor, sifat-sifat operasi vektor pada ruang berdimensi-n, definisi dan teorema mengenai norma vektor, definisi ruang vektor, himpunan fuzzy, derajat keanggotaan dalam himpunan fuzzy, operasi baku pada himpunan fuzzy, dan relasi fuzzy.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang matriks fuzzy, operasi penjumlahan dan perkalian dari matriks fuzzy, dan sifat-sifat dari ruang vektor fuzzy dari matriks fuzzy $m \times n$.

BAB IV PENUTUP

Pada bab penutup akan disajikan kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Pendahuluan Vektor

Vektor bisa disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi-3, arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menentukan besarnya. (Anton, 2000:153)

Bila dihubungkan dengan agama Islam, arah merupakan suatu bagian penting dalam kehidupan umat Islam. Arah yang dimaksud adalah arah kiblat, semua umat Islam pasti mengenal arah kiblat. Kiblat yang mempunyai pengertian arah, berarti identik dengan kata *jihah* dan *syathrah*, yang dalam bahasa latin dikenal dengan istilah *Azimuth*. Dalam ilmu falak, *Azimuth* diartikan sebagai arah yang posisinya diukur dari titik utara sepanjang lingkaran horizon searah jarum jam. (Murtadho, 2008:123)

Di dalam vektor terdapat istilah *curl* yakni ukuran kelengkungan suatu vektor di sekitar titik yang ditinjau. *Curl* medan magnet sangat penting yaitu untuk mengindikasi adanya arus listrik. Bila terdapat suatu kawat yang berarus listrik, maka terdapat medan magnet yang mengelilingi kawat tersebut. (Tazi, 2008:89)

Kalau dihubungkan dengan alam semesta ini, ibaratnya kawat yang bermuatan listrik adalah kiblat, dan medan magnetnya adalah seluruh umat Islam di dunia yang senantiasa menghadap ke arahnya. Arah kiblat merupakan simbol bersatunya seluruh umat Islam di dunia dalam menyembah Allah. (Tazi, 2008:90)

Dalam Al-Qur’an, kata kiblat digunakan dalam dua pengertian, yaitu arah dan tempat shalat. Demikian akan dijabarkan mengenai pengertian kiblat sebagai arah dan sebagai tempat shalat (Murtadho, 2008:124)

1. Kiblat yang berarti arah dapat dilihat dalam firman Allah SWT sebagai berikut:

سَيَقُولُ ٱلسُّفَهَآءُ مِنَ ٱلنَّاسِ مَا وَلَّىٰهُمۡ عَن قِبۡلَتِهِمُ ٱلَّتِي كَانُواْ عَلَيۡهَاۚ قُل لِّلَّهِ ٱلۡمَشۡرِقُ
وَٱلۡمَغۡرِبُۚ يَهۡدِي مَن يَشَآءُ إِلَىٰ صِرَٰطٖ مُّسۡتَقِيمٖ ١٤٢

“Orang-orang yang kurang akalnya diantara manusia akan berkata: "Apakah yang memalingkan mereka (umat Islam) dari kiblatnya (Baitul Maqdis) yang dahulu mereka telah berkiblat kepadanya?" Katakanlah: ‘Kepunyaan Allah-lah timur dan barat; Dia memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya ke jalan yang lurus’.” (QS. Al-Baqarah/ 1: 142)

2. Kiblat dapat berarti tempat shalat sebagaimana firman Allah SWT :

وَأَوۡحَيۡنَآ إِلَىٰ مُوسَىٰ وَأَخِيهِ أَن تَبَوَّءَا لِقَوۡمِكُمَا بِمِصۡرَ بُيُوتٗا وَٱجۡعَلُواْ بُيُوتَكُمۡ
قِبۡلَةٗ وَأَقِيمُواْ ٱلصَّلَوٰةَۗ وَبَشِّرِ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ ٨٧

“Dan Kami wahyukan kepada Musa dan saudaranya: ‘Ambillah olehmu berdua beberapa buah rumah di Mesir untuk tempat tinggal bagi kaummu dan Jadikanlah olehmu rumah-rumahmu itu tempat shalat dan dirikanlah olehmu sembahyang serta gembirakanlah orang-orang yang beriman’.” (QS. Yunus/ 10: 87)

Seorang ulama yakni *Muhyiddin Khozin*, mendefinisikan arah kiblat adalah arah atau jarak terdekat sepanjang lingkaran besar yang melewati

Ka’bah (Mekkah) dengan tempat kota yang bersangkutan. (Murtadho, 2008:126)

Dari definisi-definisi di atas dapat disimpulkan bahwa kiblat adalah arah terdekat dari seseorang menuju Ka’bah dan setiap muslim wajib menghadap ke arahnya saat mengerjakan shalat. Dengan kata lain, arah kiblat adalah suatu arah yang wajib dituju oleh umat Islam ketika melakukan ibadah shalat dan ibadah-ibadah yang lain.

Sebagaimana halnya dengan kiblat yang memiliki arah, manusia yang hidup di dunia ini juga memiliki arah tujuan. Berdasarkan atas firman Allah yang berbunyi *“Innalillahiwainna ilaihirojiun”*, yang artinya *“Sesungguhnya segala sesuatu berasal dari Allah dan akan kembali pada-Nya.”*dengan firman tersebut maka kita akan mengetahui asal manusia dan mengetahui tujuan hidup manusia di bumi ini adalah untuk kembali kepada Allah.

Untuk memahami tujuan hidup manusia harus diawali dari memahami kedudukan manusia dalam sistem penciptaan. Alam semesta diciptakan Allah bukan tanpa tujuan. Manusia yang merupakan bagian dari alam semesta itu pun diciptakan untuk suatu tujuan. Allah menegaskan tujuan penciptaan manusia dalam firman-Nya sebagai berikut:

وَمَاخَلَقۡتُ ٱلۡجِنَّ وَٱلۡإِنسَ إِلَّا لِيَعۡبُدُونِ ٥٦

Dan aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku.(QS. Al Dzariyat/ 51: 56)

Berdasarkan arti ibadah pada surat Al Dzariyat ayat 96 tersebut, kedudukan manusia dalam sistem penciptaannya adalah sebagai hamba

Allah *(‘abd li Allah)*. Kedudukan itu terkait dengan peranan ideal manusia yaitu melakukan ibadah kepada Allah.

Ibadah kepada Allah dapat dilakukan manusia melalui dua jalur, yaitu jalur khusus dan jalur umum. Yang dimaksud dengan ibadah jalur khusus adalah segala bentuk pengabdian langsung kepada Allah dengan syarat-syarat dan cara-cara (waktu dan tempat) yang telah ditentukan oleh Allah, seperti shalat, zakat, puasa, dan haji. Sedangkan ibadah umum adalah pengabdian kepada Allah dengan melakukan perbuatan-perbuatan yang bermanfaat bagi dirinya sendiri maupun masyarakat yang dilandasi dengan niat ikhlas dan mencari keridhaan Allah.

Karena perbuatan ibadah tidak terbatas pada shalat, puasa, dan zakat saja, tetapi meliputi segala perbuatan dalam menjalankan peranan manusia di muka bumi sebagai khalifah Allah, oleh karena itu manusia wajib bekerja dan beramal saleh, serta menjaga keseimbangan dan bumi yang didiaminya sesuai dengan tuntunan yang diberikan Allah melalui agama. Sebagaimana jelaskan oleh Allah SWT dalam firman-Nya:

وَإِذۡ قَالَ رَبُّكَ لِلۡمَلَٰٓئِكَةِ إِنِّي جَاعِلٞ فِي ٱلۡأَرۡضِ خَلِيفَةٗۖ قَالُوٓاْ أَتَجۡعَلُ فِيهَا مَن يُفۡسِدُ فِيهَا وَيَسۡفِكُ ٱلدِّمَآءَ وَنَحۡنُ نُسَبِّحُ بِحَمۡدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَۖ قَالَ إِنِّيٓ أَعۡلَمُ مَا لَا تَعۡلَمُونَ ٣٠

Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada Para Malaikat: "Sesungguhnya aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi." mereka berkata: "Mengapa Engkau hendak menjadikan (khalifah) di bumi itu orang yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, Padahal Kami Senantiasa bertasbih dengan memuji Engkau dan mensucikan Engkau?" Tuhan berfirman: "Sesungguhnya aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui."(QS. Albaqarah/ 1: 30)

Sebagai khalifah, manusia mempunyai tanggung jawab atas segala perbuatannya. Apabila amanah dan tanggung jawab tersebut dilaksanan dengan iman dan amal saleh menurut ketentuan Allah, maka manusia tersebut akan menjadi makhluk yang yang mulia dan sempurna di hadapan Allah.

2.2 Operasi-operasi Pada Vektor

Bila terdapat dua vektor, ada kemungkinan bahwa kedua vektor tersebut merupakan vektor yang sama. Dua vektor, dapat dikatakan sama apabila sesuai dengan definisi di bawah ini:

Definisi 2.2.1

Jika terdapat dua vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (\ f_1, v_2, \dots, v_n)$ dalam R^n dikatakan sama, jika $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$

(Anton, 2000:212)

Seperti halnya pada matriks, vektor juga dapat dioperasikan dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Di bawah ini akan dijelaskan mengenai operasi penjumlahan dan perkalian pada vektor.

Definisi 2.2.2

Jika dua vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dalam R^n, maka:

Jumlah $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Dan perkalian $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n)$$

(Anton, 2000:212)

2.3 Sifat-sifat Operasi Vektor pada Ruang Berdimensi-n

Salah satu hal yang penting pada vektor adalah sifat-sifat operasi pada vektor. Demikian akan dijelaskan mengenai sifat-sifat operasi pada vektor ruang berdimensi-n.

Definisi 2.3.1

Jika k adalah sebarang skalar, perkalian skalar $k\mathbf{u}$ didefinisikan sebagai:

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

(Anton, 2000:213)

Teorema 2.3.2

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor dalam R^n dan k adalah sebarang skalar, maka:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

c) $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ jika $\mathbf{v} = 0$

(Anton, 2000:214)

Bukti:

Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n).(w_1, w_2, \dots, w_n)\\ &= (u_1+v_1).w_1 + (u_2+v_2).w_2 + \cdots + (u_n+v_n).w_n\\ &= (u_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + \cdots + u_n \cdot w_n) +\\ &\quad (v_1\cdot w_1 + v_2\cdot w_2 + \cdots + v_n\cdot w_n)\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\end{aligned}$$

2.4 Norma Vektor

Dalam vektor terdapat norma atau panjang, karena vektor merupakan besaran yang memiliki nilai dan arah.

Definisi 2.4.1

Jika suatu vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ di dalam R^n, maka panjang atau norma vektor **u** didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\sum u_i^2}$$

(Cullen, 1992:164)

Definisi 2.4.2

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ maka jarak antara **u** dan **v** adalah

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \cdots + (u_n-v_n)^2}$$

(Cullen, 1992:164)

Contoh 2.4.3

Misal diberikan $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$ dan $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$. Tentukan norma vektor dari **u** dan norma vektor antara **u** dan **v**!

Jawab:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2 + 7^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (2-2)^2 + (7-2)^2}$$

$$= \sqrt{58}$$

Teorema 2.4.4

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor dalam R^n dan k adalah sebarang skalar, maka

a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$

b) $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = 0$

c) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$

d) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

(Anton, 2000: 217)

Bukti:

a) Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, maka $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \geq 0$

b) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = 0$

   jika dan hanya jika $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$

c) Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, maka $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$

$$k\mathbf{u} = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + \cdots + (ku_n)^2}$$

$$= |k|\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

$$= |k|\|\mathbf{u}\|$$

d) Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v})$$

$$= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$$

$$= \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

2.5 Ruang Vektor

Definisi 2.5.1

Himpunan V disebut ruang vektor (*vektor space*) jika terhadap operasi biner penjumlahan dan perkalian memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$,
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$,
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$,
4. Ada suatu objek $0 \in V$, yang disebut suatu vektor nol untuk V sedemikian sehingga $0 + \mathbf{u} = \mathbf{u} + 0$ untuk semua $\mathbf{u}$ dalam V.
5. Untuk setiap $\mathbf{u}$ dalam V, ada suatu objek $-\mathbf{u}$ dalam V, yang disebut negatif dari $\mathbf{u}$, sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0$
6. Jika k adalah sebarang skalar dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang objek dalam V, maka $k\mathbf{u} \in V$.

7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + \mathrm{k}\mathbf{v}$

8. $(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

(Anton, 2000:269)

Contoh 2.5.2:

Tunjukkan bahwa himpunan *V* dari semua matriks 2×2 dengan anggota bilangan real merupakan suatu ruang vektor jika penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks.

Untuk memeriksa aksioma-aksioma di atas, akan lebih mudah dengan urutan 1, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 5, dan 10.

Misalkan $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$

Untuk membuktikan aksioma 1, harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ adalah suatu objek dalam *V*, yaitu harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ adalah suatu matriks 2x2

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

dengan demikian aksioma 6 berlaku karena untuk sebarang bilangan real *k*, kita dapatkan:

$$k\mathbf{u} = k\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

Aksioma 2 terbukti karena

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Demikian juga aksioma 3, 7, 8, 9 terbukti dengan mengikuti pembuktian pada aksioma 2.

Untuk membuktikan aksioma 4, kita harus mencari suatu objek **0** dalam *V*. Hal ini bisa dilakukan dengan mendefinisikan **0** sebagai:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian:

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Untuk membuktikan aksioma 5, harus menunjukkan bahwa setiap objek $\mathbf{u}$ dalam *V* mempunyai suatu negatif $-\mathbf{u}$ yang bias didefinisikan dengan $-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$, dengan demikian, maka

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Selanjutnya adalah pembuktian aksioma 10, yaitu:

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Karena kesepuluh aksioma telah terpenuhi, maka *V* dapat dikatakan sebagai ruang vektor.

2.6 Himpunan Fuzzy

Dalam matematika terdapat dua himpunan yakni himpunan tegas (*crisp*) dan himpunan kabur (*fuzzy*). Himpunan tegas yaitu himpunan yang terdefinisi secara tegas dalam arti bahwa untuk setiap elemen dalam setiap elemen dalam semestanya selalu dapat ditentukan secara tegas apakah ia merupakan anggota dari himpunan itu atau tidak. Jika terdapat $a \in A$, maka nilai yang berhubungan dengan a adalah 1. Namun, jika $a \notin A$, maka nilai yang berhubungan dengan a adalah 0.

Namun pada kenyataannya tidak semua himpunan yang kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari terdefinisi secara tegas. Misalkan saja pada himpunan orang yang tinggi, tidak dapat ditentukan secara tegas apakah seseorang termasuk dalam orang yang tinggi atau tidak. Bila didefinisikan bahwa "orang tinggi" adalah orang yang memiliki tinggi badan $\geq$ 175 cm, maka orang yang memiliki tinggi bada 174 cm menurut definisi tersebut bukan termasuk dalam orang yang tinggi. Hal ini akan sulit diterima bahwa orang yang memiliki tinggi badan 174 cm bukan termasuk orang yang tinggi.

Dari permasalahan yang demikian itulah akhirnya muncul gagasan mengenai himpunan fuzzy. Yang mana di dalam himpunan fuzzy terdapat suatu fungsi keanggotaan yaitu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya, dan besarnya nilai fungsi tersebut disebut dengan derajat keanggotaan. Derajat keanggotaan pada himpunan fuzzy dinyatakan dengan suatu bilangan real dalam selang tertutup [0 1] dan disimbolkan dengan $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Untuk lebih jelas, di bawah ini akan diberikan definisi mengenai himpunan fuzzy, sebagai berikut:

Definisi 2.7.1

Jika X adalah koleksi dari obyek-obyek yang dinotasikan secara generik oleh x, maka suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$, dalam X adalah suatu himpunan pasangan berurutan:

$$\tilde{A} = \{(\mathrm{x}, \mu_{\tilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{x}))|\mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$$

Dengan $\mu_{\tilde{A}}(\mathrm{x})$ adalah derajat keanggotaan x yang memetakan X ke ruang keanggotaan M yang terletak pada rentang [0 1].

(Kusumadewi, Dkk, 2006:5)

Contoh:

Mmisalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy untuk usia parobaya, maka dapat dituliskan sebagai:

$$\tilde{A} = \{(\mathrm{x}, \mu_{\tilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{x}))|\mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$$

dengan

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} 0; x \leq 35 \text{ atau } x \geq 55 \\ \dfrac{(x-35)}{10}; 35 \leq x \leq 45 \\ \dfrac{55-x}{10}; 45 \leq x \leq 55 \end{cases}$$

2.7 Operasi Baku pada Himpunan Fuzzy

Seperti halnya pada himpunan tegas, dalam himpunan fuzzy terdapat berapa operasi yang didefinisikan secara khusus untuk mengkombinasi dan memodofikasi himpunan fuzzy. Nilai keanggotaan sebagai hasil dari operasi dua himpunan kabur sering disebut dengan nama *firestrength* atau $\alpha - predikat$. Menurut Cox pada buku Sri Kusumadewi

(2006: 21), ada 3 operator dasar yang diciptakan oleh Zadeh, yaitu irisan, gabungan, dan komplemen, seperti dijelaskan di bawah ini:

- Operasi irisan

  $\alpha - predikat$ sebagai hasil operasi dengan operator irisan diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terkecil antar elemen pada himpunan-himpunan yang bersangkutan.

$$\mu_{A \cap B} = \min\,(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

- Operasi gabungan

  $\alpha - predikat$ sebagai hasil operasi dengan operator gabungan diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terbesar antara elemen antara himpunan-himpunan yang bersangkutan.

$$\mu_{A \cup B} = \max\,(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

- Operasi Komplemen

  $\alpha - predikat$ sebagai hasil operasi dengan operator komplemen diperoleh dengan mengurangkan nilai keanggotaan elemen pada himpunan yang bersangkutan dari 1.

$$\mu_{A'} = 1 - \mu_A(x)$$

Contoh 2.7.1:

$$\tilde{A} = \left\{{}^{0.3}/_{1} + {}^{0.4}/_{2} + {}^{0.2}/_{3} + {}^{0.5}/_{4} + {}^{0.3}/_{5}\right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{{}^{0.5}/_{1} + {}^{0.3}/_{2} + {}^{0.1}/_{3} + {}^{0.4}/_{4} + {}^{0.2}/_{5}\right\}$$

Maka:

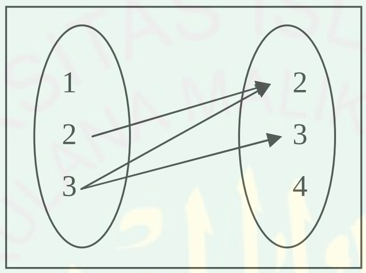
$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{{}^{0.3}/_{1} + {}^{0.3}/_{2} + {}^{0.1}/_{3} + {}^{0.4}/_{4} + {}^{0.2}/_{5}\right\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \left\{ {}^{0.5}/_{1} + {}^{0.4}/_{2} + {}^{0.2}/_{3} + {}^{0.5}/_{4} + {}^{0.3}/_{5} \right\}$$

$$\tilde{A}' = \left\{ {}^{0.7}/_{1} + {}^{0.6}/_{2} + {}^{0.8}/_{3} + {}^{0.5}/_{4} + {}^{0.7}/_{5} \right\}$$

$$\widetilde{B}' = \left\{ {}^{0.5}/_{1} + {}^{0.7}/_{2} + {}^{0.9}/_{3} + {}^{0.6}/_{4} + {}^{0.8}/_{5} \right\}$$

2.8 Relasi Fuzzy



Relasi R dari contoh di atas dapat disajikan dengan menggunakan matriks relasi, dimana pasangan elemen-elemen yang berelasi diberi tanda "1" dan yang tidak berelasi diberi tanda "0", sebagai berikut:

x \ y	2	3	4
1	0	0	0
2	1	0	0
3	1	1	0

Matriks tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Secara umum elemen-elemen dari $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berukuran $m \times n$ sebagai berikut:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sejalan dengan definisi relasi tegas yang diuraikan di atas akan didefinisikan konsep relasi kabur. Relasi kabur (biner) $\tilde{R}$ antara elemen-elemen dalam himpunan X dengan elemen-elemen dalam himpunan Y didefinisikan sebagai himpunan bagian kabur dari kurva kartesius $X \times Y$, yaitu himpunan kabur

$$\tilde{R} = \{((x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y)) | (x, y) \in X \times Y\}.$$

bila himpunan X dan Y keduanya berhingga, misalnya $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, y_3 \dots, y_n\}$, maka relasi kabur $\tilde{R}$ antara elemen-elemen dalam himpunan X dalam himpunan elemen-elemen Y dapat dinyatakan dalam bentuk suatu matriks berukuran mxn sebagai berikut:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dimana $a_{ij} = \mu_{\tilde{R}}(x_i, y_j)$ untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $y = 1,2,3, \dots, n$. Bila X=Y, maka relasi kabur $\tilde{R}$ dapat disajikan dengan matriks bujur sangkar. Matriks dari invers dari relasi kabur $\tilde{R}$, yaitu $\tilde{R}^{-1}$ adalah transpos matriks dari matriks relasi $\tilde{R}$.

Contoh 2.8.1:

Misalnya X={31, 78, 205}, Y={1, 27, 119}, dan $\tilde{R}$ adalah relasi kabur "jauh lebih besar" antara elemen-elemen dalam X dengan elemen-elemen dalam Y. maka relasi $\tilde{R}$ tersebut dapat disajikan sebagai:

$$\tilde{R} = 0.3/((31,1)\ ) + 0.1/31{,}27 + 0.5/(78,1) + 0.3/(78,27) + 0.9/(205,1) + 0.7/(205,27) + 0.4/(205,119)$$

atau dapat disajikan dalam bentuk matriks seperti dibawah ini:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Dengan elemen baris ke-i dan kolom ke-j dalam matriks pada contoh tersebut menyatakan derajat keanggotaan x_i, y_j dalam relasi $\tilde{R}$ tersebut, yaitu $\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_j)$, dimana $x_i \in X$ dan $y_j \in Y$.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Matriks Fuzzy

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai ruang vektor fuzzy, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai matriks fuzzy bersamaan dengan contoh dari matriks fuzzy dan bukan matriks fuzzy.

Dalam himpunan fuzzy dikenal istilah derajat keanggotaan, yaitu nilai dari fungsi kenggotaan yang bernilai pada selang tertutup [0, 1]. Derajat keanggotaan [0, 1] pada himpunan fuzzy merupakan suatu interval satuan yang merentang antara 0 dan 1. Apabila suatu $x \in [0,1]$ maka $0 \leq x \leq 1$. Interval satuan di sini dapat pula dikatakan sebagai interval fuzzy.

Misalkan $X = (0.6, 0.7, 0, 0.3, 1, 0.2, 0.004, 0.0031, 1, 0.102)$, X disebut sebagai suatu vektor baris. Dapat dilihat bahwa entri-entri dari vektor X tersebut merupakan interval satuan [0, 1]. Maka secara umum dapat dikatakan bahwa apabila terdapat $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in [0,1]$ dengan $1 \leq i \leq n$ maka X adalah matriks baris fuzzy atau vektor baris fuzzy.

Demikian halnya dengan $= \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.201 \\ 0.11 \\ 0.31 \\ 0 \\ 0.12 \end{bmatrix}$, V disebut sebagai suatu vektor kolom. Karena entri-entri pada vektor kolom V tersebut berada pada interval satuan [0, 1], maka V juga dapat dikatakan sebagai matriks kolom fuzzy atau vektor kolom fuzzy.

Secara umum, dapat dikatakan bahwa matriks fuzzy adalah matriks yang entri-entrinya berada pada interval satuan [0, 1]. Misalkan $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.01 & 0.5 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0.02 & 0.1 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.12 & 0.7 & 0.91 & 0.6 \end{bmatrix}$, maka $\mathbf{u}$ adalah matriks fuzzy berordo 4×5, karena setiap entri dari matriks A berada pada interval satuan [0, 1].

Semua matriks fuzzy merupakan matriks, namun tidak semua matriks merupakan matriks fuzzy. Seperti terlihat pada contoh dibawah ini:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 0.6 & 1 & 9 & 12 \\ 4 & 9 & 8 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 7 & 9 & 0.2 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Sebagaimana halnya dengan matriks umum, pada matriks fuzzy juga dapat dikenai operasi penjumlahan dan perkalian yang akan dijelaskan pada sub bab selanjutnya.

3.2 Operasi Penjumlahan dan Perkalian pada Matriks Fuzzy

Bila terdapat sebarang matriks fuzzy $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dapat dijumlahkan. Karena $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan matriks fuzzy, maka penjumlahan dari dua matriks fuzzy juga matriks fuzzy. Misal diberikan matriks fuzzy 2×2 seperti di bawah ini:

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$, bila $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dijumlahkan seperti penjumlahan matriks pada umumnya, maka didapatkan:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.3 & 1.4 \end{bmatrix}$$

Hasil dari $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ merupakan matriks, namun bukan matriks fuzzy. Dengan demikian penjumlahan matriks fuzzy tidak dapat didefinisikan sebagai penjumlahan matriks biasa. Di bawah ini akan dijelaskan tentang penjumlahan, perkalian, dan perkalian dengan skalar pada matriks fuzzy.

Misalkan $V_{m\times n}$ adalah himpunan semua matriks fuzzy $m \times n$, operasi penjumlahan dan perkalian didefinisikan sebagai berikut:

a) Operasi penjumlahan

Untuk sebarang dua anggota $\mathbf{u} = (\mathrm{u_{ij}})$ dan $\mathbf{v} = (\mathrm{v_{ij}}) \in \mathrm{V_{m\times n}}$ definisi $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \left(\sup\{\mathrm{u_{ij}}, \mathrm{v_{ij}}\}\right)$ untuk setiap $\mathrm{u_{ij}}, \mathrm{v_{ij}} \in [0,1]$. (Mahalingam, 2010:608)

Contoh:

Misalkan diberikan matriks 2×2 dengan anggota bilangan fuzzy seperti dibawah ini:

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$, maka

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \left[\sup\{u_{ij}, v_{ij}\}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{u_{11}, v_{11}\} & \sup\{u_{12}, v_{12}\} \\ \sup\{u_{21}, v_{21}\} & \sup\{u_{22}, v_{22}\} \end{bmatrix} \in \mathrm{V_{m\times n}}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{0.2,0.3\} & \sup\{0.1,0.5\} \\ \sup\{0.4,0.1\} & \sup\{0.7,0.2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

b) Operasi perkalian dengan skalar

Untuk sebarang anggota $\mathbf{u} = \mathrm{u_{ij}} \in \mathrm{V_{m\times n}}$ dan suatu skalar $\mathrm{k} \in [0,1]$ definisi $k\mathbf{u} = \left(\inf\{\mathrm{k}, \mathrm{a_{ij}}\}\right)$. (Mahalingam, 2010:608)

Contoh:

Jika $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ dan $k = 0.5$, maka

$$k\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \inf\{k, u_{11}\} & \inf\{k, u_{12}\} \\ \inf\{k, u_{21}\} & \inf\{k, u_{22}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{0.5,0.2\} & \inf\{0.5,0.1\} \\ \inf\{0.5,0.4\} & \inf\{0.5,0.7\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Akan diberikan contoh perkalian skalar dengan dua matriks fuzzy sebagai berikut:

Misalkan terdapat $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$, dan skalar $k = 0.5$

$$\text{Maka, } k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \inf\{k, \sup\{u_{11}, v_{11}\}\} & \inf\{k, \sup\{u_{12}, v_{12}\}\} \\ \inf\{k, \sup\{u_{21}, v_{21}\}\} & \inf\{k, \sup\{u_{22}, v_{22}\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{0.5, \sup\{0.2,0.5\}\} & \inf\{0.5, \sup\{0.1,0.1\}\} \\ \inf\{0.5, \sup\{0.4,0.2\}\} & \inf\{0.5, \sup\{0.7,0.3\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{0.5,05\} & \inf\{0.5,0.1\} \\ \inf\{0.5,0.4\} & \inf\{0.5,0.7\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

c) Operasi perkalian matriks fuzzy

Untuk sebarang dua anggota $\mathbf{u} = (\mathrm{u_{ij}})$ dan $\mathbf{v} = (\mathrm{v_{ij}}) \in \mathrm{V_{m\times n}}$ definisi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sup\,\{\inf\{\mathrm{u_{ik}}, \mathrm{v_{kj}}\}\}\right)$. (Mahalingam, 2010:609)

Contoh:

Misalkan $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$, maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sup\{\inf\{\mathrm{u_{ik}}, \mathrm{v_{kj}}\}\}\right)$$

karena *A* dan *B* adalah matriks berordo 2×2 maka hasil perkaliannya merupakan matriks dengan ordo 2×2

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

dimana,

$c_{11} = \sup\{\inf\{0.2,0.3\}, \inf\{0.1,0.1\}\}$

$= \sup\{0.2,0.1\} = 0.2$

$c_{12} = \sup\{\inf\{0.2,0.5\}, \inf\{0.1,0.2\}\}$

$= \sup\{0.2,0.1\} = 0.2$

$c_{21} = \sup\{\inf\{0.4,0.3\}, \inf\{0.7,0.1\}\}$

$= \sup\{0.3,0.1\} = 0.3$

$c_{22} = \sup\{\inf\{0.4,0.5\}, \inf\{0.7,0.2\}\}$

$= \sup\{0.4,0.2\} = 0.4$

Jadi, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$

3.3 Ruang Vektor Fuzzy

Pada sub bab ini akan dijelaskan definisi tentang ruang vektor fuzzy. Menurut Mahalingham (2010:610) definisi ruang vektor fuzzy adalah sebagai berikut:

Definisi 3.3.1:

Ruang vektor fuzzy adalah sistem pada himpunan fuzzy $V_{m\times n}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar matriks fuzzy dengan batasan skalar $k \in [0, 1]$

3.4 Sifat-sifat Ruang Vektor Fuzzy $\boldsymbol{m \times n}$

Berdasarkan pada definisi 3.3.1 berikut ini akan dibahas sifat-sifat yang berlaku pada system $V_{m\times n}$ dengan menggunakan acuan definisi ruang vektor matriks seperti yang dijelaskan pada definisi 2.5.1 . Dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada 3.2 ada beberapa sifat yang dipenuhi oleh $V_{m\times n}$. Dengan $V_{m\times n}$ adalah himpunan dari semua matriks fuzzy berordo $m \times n$.

Sifat 1 (operasi penjumlahan bersifat tertutup)

$$\text{Jika } \mathbf{u} = (\mathrm{u_{ij}}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\mathbf{v} = (\mathrm{v_{ij}}) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix} \text{adalah obyek-obyek dalam } V_{\mathrm{m\times n}}, \text{ maka}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{V_{m\times n}}$$

Bukti:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \sup\{u_{ij}, v_{ij}\}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{u_{11}, v_{11}\} & \sup\{u_{12}, v_{12}\} & \dots & \sup\{u_{1n}, v_{1n}\} \\ \sup\{u_{21}, v_{21}\} & \sup\{u_{22} v_{22}\} & \dots & \sup\{u_{2n}, v_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sup\{u_{m1}, v_{m1}\} & \sup\{u_{m2}, v_{m2}\} & \dots & \sup\{u_{mn}, v_{mn}\} \end{bmatrix}$$

Sifat 2 (operasi penjumlahan bersifat komutatif)

$$\text{Jika } \mathbf{u} = (\mathrm{u_{ij}}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\mathbf{v} = (\mathrm{v_{ij}}) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix} \text{adalah obyek-obyek dalam } V_{\mathrm{m\times n}}, \text{ maka}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

Bukti:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} \sup\{u_{11},v_{11}\} & \sup\{u_{12},v_{12}\} & \dots & \sup\{u_{1n},v_{1n}\} \\ \sup\{u_{21},v_{21}\} & \sup\{u_{22}v_{22}\} & \dots & \sup\{u_{2n},v_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sup\{u_{m1},v_{m1}\} & \sup\{u_{m2},v_{m2}\} & \dots & \sup\{u_{mn},v_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sup\{v_{11},u_{11}\} & \sup\{v_{12},u_{12}\} & \dots & \sup\{v_{1n},u_{1n}\} \\ \sup\{v_{21},u_{21}\} & \sup\{v_{22}u_{22}\} & \dots & \sup\{v_{2n},u_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sup\{v_{m1},u_{m1}\} & \sup\{v_{m2},u_{m2}\} & \dots & \sup\{v_{mn},u_{mn}\} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Sifat 3 (operasi penjumlahan bersifat assosiatif)

Jika $\mathbf{u}=(\mathrm{u_{ij}})=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{v}=(\mathrm{v_{ij}})=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix}$, dan

$\mathbf{w}=(\mathrm{w_{ij}})=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mn} \end{bmatrix}$ adalah obyek-obyek dalam $V_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$,

maka

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$$

Bukti:

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\begin{bmatrix} \sup\{u_{11},\sup\{v_{11},w_{11}\}\} & \sup\{u_{12},\sup\{v_{12},w_{12}\}\} & \dots & \sup\{u_{1n},\sup\{v_{1n},w_{1n}\}\} \\ \sup\{u_{21},\sup\{v_{21},w_{21}\}\} & \sup\{u_{22},\sup\{v_{22},w_{22}\}\} & \dots & \sup\{u_{2n},\sup\{v_{2n},w_{2n}\}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sup\{u_{m1},\sup\{v_{m1},w_{m1}\}\} & \sup\{u_{m2},\sup\{v_{m2},w_{m2}\}\} & \dots & \sup\{u_{mn},\sup\{v_{mn},w_{mn}\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{\sup\{u_{11}, v_{11}\}, w_{11}\} & \sup\{\sup\{u_{12}, v_{12}\}, w_{12}\} & \dots & \sup\{\sup\{u_{1n}, v_{1n}\}, w_{1n}\} \\ \sup\{\sup\{u_{21}, v_{21}\}, w_{21}\} & \sup\{\sup\{u_{22}, v_{22}\}, w_{22}\} & \dots & \sup\{\sup\{u_{2n}, v_{2n}\}, w_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sup\{\sup\{u_{m1}, v_{m1}\}, w_{m1}\} & \sup\{\sup\{u_{m2}, v_{m2}\}, w_{m2}\} & \dots & \sup\{\sup\{u_{mn}, v_{mn}\}, w_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= (\quad + \quad) +$$

Sifat 4 (sifat identitas)

Ada suatu obyek **0** dalam $V_{\mathrm{m\times n}}$, yang disebut suatu vektor nol untuk $V_{\mathrm{m\times n}}$, sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ untuk semua $\mathbf{u} \in V_{\mathrm{m\times n}}$

Bukti:

Misalkan $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \in V_{\mathrm{m\times n}}$, sehingga

$0 \le u_{ij} \le 1$, maka

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{0, \mathrm{u}_{11}\} & \sup\{0, \mathrm{u}_{12}\} & \cdots & \sup\{0, \mathrm{u}_{1n}\} \\ \sup\{0, \mathrm{u}_{21}\} & \sup\{0, \mathrm{u}_{22}\} & \cdots & \sup\{0, \mathrm{u}_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sup\{0, \mathrm{u}_{m1}\} & \sup\{0, \mathrm{u}_{m2}\} & \vdots & \sup\{0, \mathrm{u}_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{\mathrm{u}_{11}, 0\} & \sup\{\mathrm{u}_{12}, 0\} & \cdots & \sup\{\mathrm{u}_{1n}, 0\} \\ \sup\{\mathrm{u}_{21}, 0\} & \sup\{\mathrm{u}_{22}, 0\} & \cdots & \sup\{\mathrm{u}_{2n}, 0\} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sup\{\mathrm{u}_{m1}, 0\} & \sup\{\mathrm{u}_{m2}, 0\} & \vdots & \sup\{\mathrm{u}_{mn}, 0\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Sifat 5 (perkalian dengan skalar bersifat tertutup)

Jika suatu skalar $k \in [0,1]$, dan $\mathbf{u} = u_{ij} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$ maka

$$k\mathbf{u} \in \mathrm{V}_{\mathrm{m \times n}}$$

Bukti:

$k\mathbf{u} = \inf\{k, u_{ij}\}$, sehingga

$$k\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \inf\{k,u_{11}\} & \inf\{k,u_{12}\} & \cdots & \inf\{k,u_{1n}\} \\ \inf\{k,u_{21}\} & \inf\{k,u_{22}\} & \cdots & \inf\{k,u_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{k,u_{m1}\} & \inf\{k,u_{m2}\} & \cdots & \inf\{k,u_{mn}\} \end{bmatrix} \in \mathrm{V}_{\mathrm{m \times n}}$$

Sifat 6 (perkalian skalar menyebar terhadap operasi penjumlahan)

Jika $= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$ dan skalar $k \in [0,1]$, maka

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

Bukti:

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \inf\{k,\sup\{u_{11},v_{11}\}\} & \inf\{k,\sup\{u_{12},v_{12}\}\} & \ldots & \inf\{k,\sup\{u_{1n},v_{1n}\}\} \\ \inf\{k,\sup\{u_{21},v_{21}\}\} & \inf\{k,\sup\{u_{22},v_{22}\}\} & \ldots & \inf\{k,\sup\{u_{2n},v_{2n}\}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{k,\sup\{u_{m1},v_{m1}\}\} & \inf\{k,\sup\{u_{m2},v_{m2}\}\} & \ldots & \inf\{k,\sup\{u_{mn},v_{mn}\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{\inf\{k,u_{11}\},\inf\{k,v_{11}\}\} & \sup\{\inf\{k,u_{12}\},\inf\{k,v_{12}\}\} & \dots & \sup\{\inf\{k,u_{1n}\},\inf\{k,v_{1n}\}\} \\ \sup\{\inf\{k,u_{21}\},\inf\{k,v_{21}\}\} & \sup\{\inf\{k,u_{22}\},\inf\{k,v_{22}\}\} & \dots & \sup\{\inf\{k,u_{2n}\},\inf\{k,v_{2n}\}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sup\{\inf\{k,u_{m1}\},\inf\{k,v_{m1}\}\} & \sup\{\inf\{k,u_{m2}\},\inf\{k,v_{m2}\}\} & \dots & \sup\{\inf\{k,u_{mn}\},\inf\{k,v_{mn}\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{k,u_{11}\}+\inf\{k,v_{11}\} & \inf\{k,u_{12}\}+\inf\{k,v_{12}\} & \dots & \inf\{k,u_{1n}\}+\inf\{k,v_{1n}\} \\ \inf\{k,u_{21}\}+\inf\{k,v_{21}\} & \inf\{k,u_{22}\}+\inf\{k,v_{22}\} & \dots & \inf\{k,u_{2n}\}+\inf\{k,v_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{k,u_{m1}\}+\inf\{k,v_{m1}\} & \inf\{k,u_{m2}\}+\inf\{k,v_{m2}\} & \dots & \inf\{k,u_{mn}\}+\inf\{k,v_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

Sifat 7 (perkalian skalar menyebar terhadap operasi penjumlahan)

Jika $= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$ dan skalar $k, l \in [0,1]$, maka

$$(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

Bukti:

$$(k+l)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \inf\{\sup\{k,l\},u_{11}\} & \inf\{\sup\{k,l\},u_{12}\} & \dots & \inf\{\sup\{k,l\},u_{1n}\} \\ \inf\{\sup\{k,l\},u_{21}\} & \inf\{\sup\{k,l\},u_{22}\} & \dots & \inf\{\sup\{k,l\},u_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{\sup\{k,l\},u_{m1}\} & \inf\{\sup\{k,l\},u_{m2}\} & \dots & \inf\{\sup\{k,l\},u_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{\inf\{k,u_{11}\},\inf\{l,u_{11}\}\} & \sup\{\inf\{k,u_{12}\},\inf\{l,u_{12}\}\} & \dots & \sup\{\inf\{k,u_{1n}\},\inf\{l,u_{1n}\}\} \\ \sup\{\inf\{k,u_{21}\},\inf\{l,u_{21}\}\} & \sup\{\inf\{k,u_{22}\},\inf\{l,u_{22}\}\} & \dots & \sup\{\inf\{k,u_{2n}\},\inf\{l,u_{2n}\}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sup\{\inf\{k,u_{m1}\},\inf\{l,u_{m1}\}\} & \sup\{\inf\{k,u_{m2}\},\inf\{l,u_{m2}\}\} & \dots & \sup\{\inf\{k,u_{mn}\},\inf\{l,u_{mn}\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{k, u_{11}\} + \inf\{l, u_{11}\} & \inf\{k, u_{12}\} + \inf\{l, u_{12}\} & \dots & \inf\{k, u_{1n}\} + \inf\{l, u_{1n}\} \\ \inf\{k, u_{21}\} + \inf\{l, u_{21}\} & \inf\{k, u_{22}\} + \inf\{l, u_{22}\} & \dots & \inf\{k, u_{2n}\} + \inf\{l, u_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{k, u_{m1}\} + \inf\{l, u_{m1}\} & \inf\{k, u_{m2}\} + \inf\{l, u_{m2}\} & \dots & \inf\{k, u_{mn}\} + \inf\{l, u_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= k \quad + l$$

Sifat 8 (perkalian skalar bersifat assosiatif)

Jika $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$ dan skalar $k, l \in [0, 1]$, maka

$$k(l\mathbf{u}) = (kl)(\mathbf{u})$$

Bukti:

$$k(l\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \inf\{k, \inf\{l, u_{11}\}\} & \inf\{k, \inf\{l, u_{12}\}\} & \cdots & \inf\{k, \inf\{l, u_{1n}\}\} \\ \inf\{k, \inf\{l, u_{21}\}\} & \inf\{k, \inf\{l, u_{22}\}\} & \cdots & \inf\{k, \inf\{l, u_{2n}\}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{k, \inf\{l, u_{m1}\}\} & \inf\{k, \inf\{l, u_{m2}\}\} & \cdots & \inf\{k, \inf\{l, u_{mn}\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{\inf\{k, l\}, u_{11}\} & \inf\{\inf\{k, l\}, u_{12}\} & \cdots & \inf\{\inf\{k, l\}, u_{1n}\} \\ \inf\{\inf\{k, l\}, u_{21}\} & \inf\{\inf\{k, l\}, u_{22}\} & \cdots & \inf\{\inf\{k, l\}, u_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{\inf\{k, l\}, u_{m1}\} & \inf\{\inf\{k, l\}, u_{m2}\} & \cdots & \inf\{\inf\{k, l\}, u_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= (kl)\mathbf{u}$$

Sifat 9 (perkalian dengan skalar 1)

Misalkan $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & {}_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \in V_{m\times n}$ sehingga $0 \leq u_{ij} \leq 1$, dan 1

merupakan skalar, maka

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Bukti:

$$1\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \inf\{1, u_{11}\} & \inf\{1, u_{12}\} & \dots & \inf\{1, u_{1n}\} \\ \inf\{1, u_{21}\} & \inf\{1, u_{22}\} & \dots & \inf\{1, u_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{1, u_{31}\} & \inf\{1, u_{m2}\} & \cdots & \inf\{1, u_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{u_{11}, 1\} & \inf\{u_{12}, 1\} & \dots & \inf\{u_{1n}, 1\} \\ \inf\{u_{21}, 1\} & \inf\{u_{22}, 1\} & \dots & \inf\{u_{2n}, 1\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \inf\{u_{m1}, 1\} & \inf\{u_{m2}, 1\} & \cdots & \inf\{u_{mn}, 1\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Berdasarkan pada definisi ruang vektor yang dijelaskan pada definisi 2.5.1, sifat yang ke-5, yakni sifat invers tidak berlaku pada ruang vektor fuzzy karena terhalang oleh batasan skalar yang dibatasi pada interval satuan [0, 1], sehingga ruang vektor fuzzy hanya memenuhi sifat-sifat aljabar pada ruang vektor fuzzy yaitu 9 sifat seperti yang diuraikan di atas.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada hasil pembahasan, dapat disimpulkan bahwa pada system $V_{m\times n}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar dengan batasan $k = [0,1]$ secara bersamaan membentuk ruang vektor fuzzy dengan sifat-sifat sebagai berikut:

Untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_{m\times n}$ dan $k = [0,1]$ maka:

1. **Sifat 1 (operasi penjumlahan bersifat tertutup)**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{V}_{\mathrm{m\times n}}$$

2. **Sifat 2 (operasi penjumlahan bersifat komutatif)**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

3. **Sifat 3 (operasi penjumlahan bersifat assosiatif)**

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

4. **Sifat 4 (sifat identitas)**

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

5. **Sifat 5 (perkalian dengan skalar bersifat tertutup)**

$$k\mathbf{u} \in \mathrm{V}_{\mathrm{m\times n}}$$

6. **Sifat 6 (perkalian skalar menyebar terhadap operasi penjumlahan)**

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

7. **Sifat 7 (perkalian skalar menyebar terhadap operasi penjumlahan)**

$$(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

8. **Sifat 8 (perkalian skalar bersifat assosiatif)**

$$k(l\mathbf{u}) = (kl)(\mathbf{u})$$

9. **Sifat 9 (perkalian dengan skalar 1)**

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

4.2 Saran

Dalam penelitian ini masih banyak kekurangan dalam pembahasan. Peneliti membatasi pembahasan pada penjumlahan dan perkalian saja. Untuk para pembaca dapat meneruskan penelitian ini lebih lanjut seperti mencari sifat-sifat ruang vektor fuzzy yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2006. *Dasar-dasar Aljabar Linear Edisi ke 7*. Batam: Interlaksana

Assauri, Sofyan. 1980. *Aljabar Linear Dasar Ekonometri Edisi Ke 2*. Jakarta: Rajawali

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear Dengan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka

http://zaki. web. ugm. ac. id

Kusumadewi, Sri. 2002. *Analisis Desain System Fuzzy Menggunakan Toolbox Matlab*. Yogjakarta: Graha Ilmu

Kusumadewi, Sri. 2006. *Fuzzy Multi-Atribute Decision Making*. Yogjakarta: Graha Ilmu

Murtadho, Moh. 2008. *Ilmu Falak Praktis*. Malang: UIN Malang Pres

Susilo SJ, Frans. 2006. *Himpunan Dan Logika Kabur Serta Aplikasinya*. Yogjakarta: Graha Ilmu

Tazi, imam. 2008. *Matematika Untuk Sains & Tekneik*. Malang: UIN Malang Pres

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345
Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Alfi Sayyidatil Mufidah
NIM : 07610084
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Ruang Vektor Fuzzy dari Matriks Fuzzy $m \times n$

Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1.	1 Juli 2011	Revisi proposal (Bab I& II)	1	
2.	4 Juli 2011	Konsultasi Bab I		2.
3.	5 Juli 2011	Proposal Keagamaan	3.	
4.	10 Juli 2011	ACC Bab I Konsultasi Bab II		4.
5.	11 Juli 2011	Bab II Keagamaan	5.	
6.	12 Juli 2011	Revisi Bab II		6.
7.	17 Juli 2011	Revisi Bab I& II keagamaan	7.	
8.	18 Juli 2011	ACC Bab II		8.
9.	25 Juli 2011	Konsultasi Bab III	9.	
10.	26 Juli 2011	Konsultasi Bab III Keagamaan		10.
11.	26 Juli 2011	Revisi Bab III	11.	
12.	2 Agustus 2011	ACC Keagamaan Bab I & II		12.
13.	9 Agustus 2011	ACC Bab III Konsultasi Bab IV	13.	
14.	10 Agustus 2011	ACC Keseluruhan		14.
15.	10 Agustus 2011	ACC Keseluruhan Keagamaan	15.	

Malang, 12 Agustus 2011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001