SPEKTRUM LAPLACE GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
AMALIA INTIFAADA
NIM. 09610090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

SPEKTRUM LAPLACE GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
AMALIA INTIFAADA
NIM. 09610090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

SPEKTRUM LAPLACE GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
AMALIA INTIFAADA
NIM. 09610090

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 14 Nopember 2013

Dosen Pembimbing I,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197501006 200312 1 001

Dosen Pembimbing II,

Fachrur Rozi, M.Si
NIP.19800527200801 1 012

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SPEKTRUM LAPLACE GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
AMALIA INTIFAADA
NIM. 09610090

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 9 Januari 2014

Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M. Si NIP. 19571005 198203 1 006	________________
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	________________
Sekretaris Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Amalia Intifaada

NIM : 09610090

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Spektrum Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Januari 2014
Yang membuat pernyataan,

Amalia Intifaada
NIM. 09610090

MOTTO

Tidak ada yang lebih utama (mulia) di sisi Allah dari pada do'a
[HR. Ahmad]

HALAMAN PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Teriring do'a dan rasa syukur atas nikmat, rahmat, berkah, dan karunia Allah, maka penulis persembahkan karya tulis ini kepada:

Ayah dan Ibu Tercinta

(Ayah Herwin dan Ibu Sukarni Wati)

Adik Tersayang

(Khalida Kumalasari)

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur *alhamdulillah* Penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah, dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, pengarahan, dan bimbingan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun doa, dan restu. Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus pembimbing skripsi yang telah memberikan motivasi dan bimbingan.
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberikan bimbingan mulai semester satu hingga akhir.

5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan bimbingan dengan baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Aizzaty, Nafi', Marissa, Fitri, Lusi, Ria, Fafa dan teman-teman kos yang tidak bisa penulis sebut semua, terima kasih atas segala bantuannya baik berupa waktu, tenaga maupun pikiran.
8. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika 2009, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut mendukung kelancaran penyempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi Penulis secara pribadi. Amin *Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Intifaada, Amalia. 2014. **Spektrum Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd.
(II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: Spektrum, Graf *Commuting*, Grup Dihedral.

Graf merupakan suatu himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut. Graf *commuting* adalah salah satu bagian dari graf yang membahas mengenai graf yang dibangun dari grup yang anggotanya memenuhi sifat komutatif. Misal G grup terbatas dan X adalah subset dari G, graf *commuting* $C\left(G,X\right)$ adalah graf dengan X sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda dari X menjadi terhubung langsung jika mereka elemen yang komutatif dari G.

Perkembangan graf didukung dengan berkembangnya salah satu cabang ilmu lain dalam matematika yaitu aljabar linier. Kedua cabang ilmu ini, dapat dihubungkan dengan mengkaji suatu graf melalui sifat-sifat aljabar yaitu dari representasi graf dalam suatu matriks. Teori spektrum graf merupakan penghubung yang mempertemukan teori graf dan aljabar linier. Pada teori spektrum graf membahas hubungan polinomial karakteristik, nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar linier. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui pola polinomial pada graf *commuting* dari grup dihedral serta menentukan bentuk umum spektrum Laplace graf *commuting.*

Berdasarkan pembahasan, maka dapat diperoleh kesimpulan yaitu:

1. Polinomial karakteristik matrik Laplace dari graf commuting grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil yaitu:
   $p(\lambda)=-1(-n+\lambda)^{n-2}(-1+\lambda)^{n}(-2n+\lambda)\lambda$ sedangkan polinomial karakteristik matrik Laplace dari graf *commuting* grup dihedral D_{2n} untuk n genap yaitu:
   $p(\lambda)=-1(-n+\lambda)^{n-2}(\lambda^{2}-6\lambda+8)^{\frac{n}{2}}((2n+\lambda)\lambda)$
2. Spektrum Laplace graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil yaitu:
   $Spec_L(D_{2n})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & n & 2n \\ 1 & n & n-2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berdasarkan pembahasan, maka penulis menyarankan agar pembaca bisa melanjutkan penelitian ini yakni misalkan mengkaji spektrum *adjacency*, spektrum Detour dan spektrum Signness Laplace pada graf *commuting* dari grup lain.

ABSTRACT

Intifaada, Amalia. 2014. **Laplace Spectrum of Commuting Graphs on Dihedral Group**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Abdussakir, M. Pd.
(II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Spectrum, Commuting graphs, Dihedral Group.

graph is a representation of a set of objects where some pairs of objects are connected by links. Commuting graphs is one part of the graph discussing about graphs who built from groups whose members meet the anti-commutative property. The commuting graph *C(G;X)*, where G is a group and *X* is a subset of *G*, is the graph with vertex set X and distinct vertices being joined by an edge whenever they commute.

Development of graphs backed with the development of one of the other branch of science in mathematics, linear algebra. The both branch of this science, can be connected by examining a graph through the algebraic properties of matrix a in the graph representation. Spectral theory of graphs a liaison to meet by graph theory and linear algebra. On the theory of graph spectra characteristic polynomial relations, discusses the value of eigen and eigen vectors in linear algebra. The purpose of this research is to know the pattern of polynomials on dihedral group commuting graph and determine the general form of the spectrum of the Laplace commuting graphs. Based on the discussion, then a conclusion can be obtained as follows:

1. characteristics of the Laplace matrix Polynomial of the dihedral group D_{2n} commuting graph for n odd, i.e:

   $p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(-1+\lambda)^{n}(-2n+\lambda)\lambda$, the characteristic polynomial of matrix and Laplace of the dihedral group D_{2n} commuting graph for n even, i.e.

   $$p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - 6\lambda + 8)^{\frac{n}{2}}((2n+\lambda)\lambda)$$

2. the spectrum of the Laplace commuting graphs from the dihedral group D_{2n} with n odd, i.e:

   $$Spec_L(D_{2n}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n & 2n \\ 1 & n & n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

Based on the discussion, the authors recommend that readers can continue this research that examines the spectrum of the Adjacency, the spectrum of the Detour and the spectrum of the Laplace Signless on another group of commuting graph.

الملخص

إينت فادى، أماليا. ٢٠١٤. **لابلاس الطيف من التنقل غراف ثنائي السطح المجموعة**. الأطروحة. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة ولاية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرف :(١) عبد الشاكر، الماجستير.
(٢) فخر الرازى، الماجستير.

الكلمات الرئيسية : الطيف ، غراف التنقل وقطعها نائي السطح

غراف هي مجموعة غير فارغ من عناصر تسمى نقاط و مجموعة من حواف توصيل النقاط. غراف قطعها هو جزء واحد من الرسم البياني أن ناقش الرسم البياني شيدت من مجموعة الخصائص التي تلبي تبادلي أعضاء. لنفترض مجموعة محدودة و مجموعة فرعية من، الانتقال الرسم البياني هو الرسم البياني مع مجموعة الرأس واثنين من عناصر مختلفة من أن يكون متصلا مباشرة إذا كانت عناصر تبادلي.

ويدعم الرسم البياني التنمية من خلال تطوير واحدة من فرع آخر من فروع الرياضيات التي هي الجبر الخطي، ويمكن أن يعزى كل من هذه التخصصات لدراسة الرسم البياني من خلال الخصائص التي جبرية ل تمثيل الرسم البياني لل مصفوفة. نظرية الرسم البياني الطيفية هو الرابط الذي يجمع نظرية الرسم البياني و الجبر الخطي. في نظرية الرسم البياني لمناقشة متعدد الحدود سمة العلاقة الطيف، القيم الذاتية و المتجهات الذاتية في الجبر الخطي. وكان الغرض من هذه الدراسة لتحديد نمط التنقل الاسمية بولي الرسم البياني للجماعات ثنائي السطح و تحديد الشكل العام من الطيف من الرسم البياني التنقل لابلاس.

استنادا إلى المناقشة ، فإنه يمكن استنتاج أن:

لابلاس مصفوفة كثيرة الحدود المميزة من الرسم البياني التنقل مجموعة ثنائي السطح D_{2n} ل n ونيف، وهي:

$$p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(-1+\lambda)^{n}(-2n+\lambda)\lambda$$

١ .في حين أن لابلاس مصفوفة متعدد الحدود المميزة ل رسم بياني التنقل مجموعة ثنائي السطح D_{2n} ل n هو حتى

، وهما $p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(\lambda^{2}-6\lambda+8)^{\frac{n}{2}}((2n+\lambda)\lambda)$

٢. لابلاس الطيف التنقل الرسم البياني للفريق ثنائي السطح D_{2n} مع n ونيف، وهي:

$$\mathrm{SpecL}\,(D_{2n}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n & 2n \\ 1 & n & n-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

استنادا إلى المناقشة، يقترح المؤلفان أن القارئ يمكن أن تستمر هذه الدراسة بفحص الطيف من مثل الجوار، و التفاف الطيف من الرسم البياني التنقل لابلاس سينليس من مجموعة أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk dan lambang-lambang. Berkaitan dengan definisi tersebut, matematika seringkali dibagi menjadi tiga cabang, yaitu: aljabar, analisis, dan geometri. Aljabar membahas tentang bilangan dan pengabstrakannya, analisis membahas kekonvergenan dan limit, sedangkan geometri membahas tentang bentuk dan konsep-konsep yang berkaitan (Kerami, 2003).

Hakikatnya, matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan oleh masyarakat dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika juga merupakan ilmu yang tidak terlepas dari agama. Pandangan ini dengan jelas dapat diketahui kebenarannya dari ayat-ayat Al-Qur'an yang berkaitan dengan matematika, di antaranya adalah ayat-ayat yang berbicara mengenai bilangan, operasi bilangan, dan adanya penghitungan.

Hal ini dapat dilihat pada QS. Maryam:93-94.

إِن كُلُّ مَن فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ إِلَّآ ءَاتِي ٱلرَّحۡمَٰنِ عَبۡدٗا ٩٣

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya: *"tidak ada seorangpun di langit dan di bumi, kecualiakan datang kepada Tuhan yang Maha Pemurah selaku seorang hamba. Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti"* (QS. Maryam: 93-94).

Ayat ini menyatakan bahwa “Tidak ada seorangpun di langit dan di bumi, kecuali akan datang pada Tuhan Yang Maha Pemurah selaku seorang hamba. Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti”. Allah juga menyatakan bahwa penciptaan matahari dan bulan serta peredarannya menggunakan penghitungan yang cermat dan teliti. Ini dapat dilihat pada QS. Ar-Rahman ayat 5. Hingga Allah menyebut hari kiamat (*yaum al-qiyamah*) dengan sebutan hari penghitungan amal (*yaum al-hisab*). Ayat-ayat Al-Qur’an yang disebutkan di atas hanya sebagian kecil dari ayat-ayat Al-Qur’an lainnya yang mengandung bilangan, operasi bilangan dan konsep matematika yang lain.

Salah satu cabang matematika adalah mengenai aljabar yang berkaitan dengan graf. Graf merupakan suatu himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut. Penggunaan istilah dalam teori graf belum sepenuhnya bersifat baku. Misalkan untuk menyatakan suatu titik digunakan istilah node, dan untuk menyatakan suatu sisi digunakan istilah busur atau garis. Istilah-istilah dalam teori graf dapat diterima jika digunakan secara konsisten.

Graf *commuting* adalah salah satu bagian dari graf yang membahas mengenai graf yang dibangun dari grup yang anggotanya memenuhi sifat komutatif. Misal G grup berhingga dan X adalah subset dari G, graf *commuting* $C(G,X)$ adalah graf dengan X sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda di X terhubung langsung jika keduanya komutatif di G (Nawawi dan Peter, 2012).

Banyak kajian-kajian maupun penelitian graf *commuting* yang dilakukan terkait dengan grup, grup simetri maupun grup dihedral. Pada grup simetri diantaranya *"A Note on Commuting Graphs for Symmetric Groups"* ditulis oleh C. Bates, D. Bundy, S. Hart dan P. Rowley tahun 2012. Untuk penelitian mengenai graf *commuting* pada grup dihedral mulai dikembangkan dalam beberapa tahun terakhir ini, di antaranya *"On Commuting Graphs for Elements of Order 3 in Symmetric Groups"* yang ditulis oleh Athirah Nawawi dan Peter Rowley dan diterbitkan bulan Mei 2012, *"Commuting Graphs on Dihedral Group"* yang merupakan penelitian dari T.T. Amizh Chelvam, dkk tahun 2011.

Perkembangan graf ternyata didukung dengan berkembangnya salah satu cabang ilmu lain dalam matematika yaitu aljabar linier. Kedua cabang ilmu ini, dapat dihubungkan dengan mengkaji suatu graf melalui sifat-sifat aljabar yaitu dari representasi graf dalam suatu matriks. Teori spektrum graf merupakan penghubung yang mempertemukan teori graf dan aljabar linier. Pada teori spektrum graf membahas hubungan polinomial karakteristik, nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar linier. Spektrum Laplace dari graf G adalah matriks $L(G)=D(G)-A(G$ dengan $D(G)$ adalah diagonal matriks dimana enterinya adalah derajat titik dari G dan $A(G)$ adalah matriks Adjacency graf G (Biyikoglu dkk, 2007).

Misalkan G adalah graf dengan titik-titik v_1, v_2, ...,v_n (n berhingga). Matriks keterhubungan graf G adalah matriks $A=(a_{ij})$ dengan a_{ij} menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik v_i dengan v_j; i,j=1, 2, …, n. Karena banyak sisi yang menghubungkan titik v_i dengan v_j selalu sama dengan jumlah sisi yang menghubungkan v_i dengan v_j maka jelas bahwa matriks keterhubungan selalu merupakan matriks yang simetris. Matrik Laplace dari G adalah matriks $L(G)=D(G)-A(G)$. Dengan $D(G)$ adalah diagonal matriks dimana enterinya adalah derajat titik dari G dan $A(G)$ adalah matriks Adjacency graf G (Biyikoglu, dkk, 2007).

Spektrum sebelumnya pernah diteliti oleh ilmuwan. Di antaranya Shuhua Yin (2006) yang meneliti spektrum Adjacency dan spektrum Laplace graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l. Kemudian Abdussakir, dkk (2009) yang meneliti spectrum Adjacency pada graf Komplit (K_n) graf Star (S_n), graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$) dan graf Lintasan (P_n).

Berdasarkan uraian tersebut dalam penelitian ini penulis mengambil judul skripsi **"Spektrum Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas maka rumusan masalah yang diberikan dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimanakah bentuk umum polinomial Laplace graf *commuting*?
2. Bagaimana bentuk umum spektrum Laplace graf *commuting*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Bagaimanakah bentuk umum polinomial Laplace graf *commuting*?
2. Bagaimana bentuk umum spektrum Laplace graf *commuting*?

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan member manfaat sebagai berikut:

1. Untuk menambah pemahaman tentang konsep yang ada dalam matematika, khususnya teori graf.
2. Mengetahui pola polinomial graf *commuting* untuk grup dihedral.
3. Memberikan informasi mengenai spektrum suatu graf sehingga dapat menjadi acuan peneliti lain untuk menentukan spektrum graf-graf yang lain yang belum dikaji dalam penelitian ini.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini menggunakan studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan material yang terdapat di ruang perpustakaan. Jurnal utama yang digunakan dalam skripsi ini adalah jurnal yang berjudul *Commuting Graph on Dihedral Group*, oleh T.T. Chelyam, K. Selvakumar dan S. Raja (2011).

1. Menentukan grup dihedral dari D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}.
2. Menggambarkan Tabel Cayley dari grup dihedral D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}.
3. Menggambarkan graf *commuting* dari grup dihedral D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}.
4. Menentukan matriks Laplace.
5. Menentukan polinomial karakteristik.
6. Mencari nilai eigen dari matriks Laplace.
7. Mencari vektor eigen dari matriks Laplace.

8. Menentukan spektrum dari masing-masing graf yang telah terbentuk.
9. Mengamati dan menentukan pola yang terbentuk pada graf *commuting*.
10. Membuktikan pola yang terbentuk.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisannya adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Pada bab ini membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Pada bab ini menyajikan tentang penjabaran materi graph, dihedral grup.

BAB III Pembahasan

Bab ini membahas tentang simulasi hasil dari penelitian yang dilakukan dan representasi hasil yang didapat dari penelitian yang dilakukan.

BAB IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf merupakan salah satu banyak cabang ilmu matematika yang aplikasinya banyak digunakan dalam kehidupan kita, namun dalam teori graf masih banyak sekali kajian di dalamnya. Graf G terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik *(vertex)* dalam penulisan ini disimbolkan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi *(edge)* disimbolkan dengan $E(G)$dan seterusnya menggunakan istilah titik dan sisi.

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

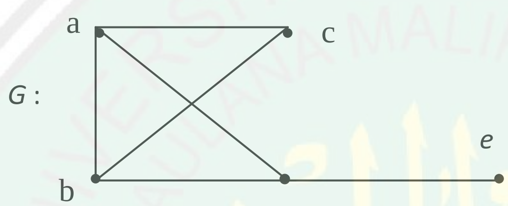
Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$.

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut



Gambar 2.1 Graf G

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 6 sisi sehingga size graf G adalah $q = 6$.

Graf G dengan

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d),$ `111$(b, c), (d, e)\}$

Dapat juga ditulis dengan

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

dengan

$e_1 = (a, b)$

$e_2 = (a, c)$

$e_3 = (a, d)$

$e_4 = (b, d)$

$e_5 = (b, c)$

$e_6 = (d, e)$

Definisi 2

Graf *trivial* adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Contoh:

Gambar 2.2 Graf *Trivial* dan *Non Trivial*

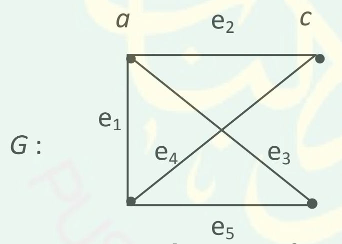
Berdasarkan gambar 2.2, G_1 merupakan graf *trivial* karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf *non trivial* karena berorder lebih dari satu.

2.1.2 Derajat Titik

Derajat dari titik v_i dalam graf G, dinotasikan dengan d_i atau "deg v_i", adalah banyaknya sisi yang terkait langsung (*incident)* dengan v_i. Karena setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik-titik, hal ini dapat memperbesar jumlah derajat titik-titik sebanyak 2 kali. Isitilah *deg* berasal dari kata *degree* yang berarti derajat, sehingga penulis menggunakan istilah *der* yang berasal dari kata *derajat*.

Derajat titik v pada graf G adalah banyaknya sisi dari graf G yang *terkait* dengan v. Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $der_G(v)$ atau secara sederhana dapat juga dinotasikan dengan $der(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap *(even vertices)* dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices)* titik yang berderajat nol disebut *(isolated vertices)* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices)* (Chartrand & Lesniak, 1986).

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.3Graf *G*

Berdasarkan gambar, diperolah bahwa

deg(a) = 3

deg(b) = 3

deg(c) = 2

deg(d) = 2

Titik a dan b adalah titik ganjil, titik c dan d adalah titik genap. Karena tidak ada yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, ..., v_p\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan size q dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

Definisi 3

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari definisi di atas, maka dapat digambarkan sebagai berikut :

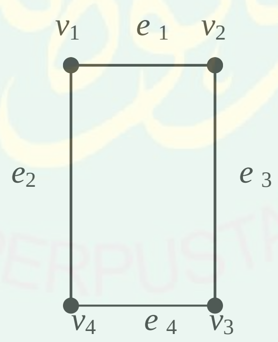
Gambar 2.4 Sisi $e = (u, v)$ yang Menghubungkan Titik u dan v

Karena $e = (u, v)$ sisi di G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan e dan u serta e dan v disebut terkait langsung (*incident*).

Definisi 4

Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Contoh :



Gambar 2.5 Graf G dengan Order 4 dan Size 4

2.2 Graf Terhubung

Definisi 5

Sebuah jalan (*walk*) u-v di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk i = 1, 2, . . ., n adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, u_1, u_2, ..., u_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 6

Jalan *u-v* disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Definisi 7

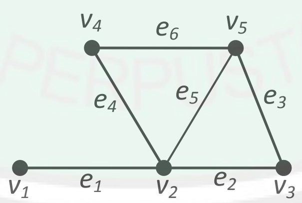
Jalan *u-v* yang semua sisinya berbeda disebut *trailu-v* (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Definisi8

Jalan *u-v* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) *u-v*. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Contoh:

G:



Gambar 2.6 Jalan pada Graph

Dari graph di atas v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3 disebut sebagai *trail*, sedangkan v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4 disebut sebagai *path* (lintasan).

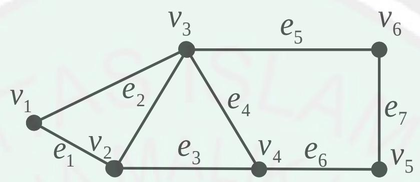
Definisi 9

Suatu titik u yang membentuk lintasan (*path*) *u-u* disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Definisi 10

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Contoh:



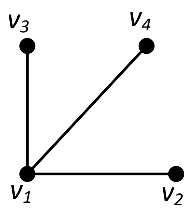
Gambar 2.7 Jalan, Lintasan, Trail, dan Sikel

Dari Gambar 2.7 $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2, v_1$ disebut jalan tertutup dengan panjang 6 dan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1, v_2$ disebut jalan terbuka dengan panjang 7. $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2$ adalah trail tetapi bukan lintasan, sedangkan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2$ disebut sebagai *path* (lintasan) dan v_1, v_2, v_3, v_1 adalah sikel.

Definisi 11

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Contoh:



G

Gambar 2.8 Graf Terhubung (*connected*)

Untuk suatu graf terhubung G, maka *jarak* (*distance*) $d(u,v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka didefinisikan jarak $d(u,v) = \infty$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

2.3 Grup

Definisi 12

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \phi$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} di sebut invers dari a)

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a*b = b*a$ untuk semua $a,b \in G$ (Dummit dan Foote, 1991).

Contoh:

Selidiki apakah (Z, □) grup, Z adalah himpunan bilangan bulat dan □ didefinisikan dengan a □ b = a – 2ab + 1, di mana $a,b \in Z$.

Jawab:

1. Untuk setiap $a,b \in Z$ maka a □ b = a – 2ab + 1 ∈ Z

2. Untuk setiap $a,b,c \in Z$ maka

$(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$

Untuk $(a \square b) \square c = (a - 2ab + 1) \square c$

$= (a - 2ab + 1) - 2(a - 2ab + 1)c + 1$

$= a - 2ac - 2ab + 4abc - 2c + 2$

Untuk $a \square (b \square c) = a \square (b - 2bc + 1)$

$= a- 2a(b - 2bc + 1) + 1$

$= a - 2ab + 4abc - 2a + 1$

Karena $(a \square b) \square c \neq a \square (b \square c)$, maka (Z, $\square$) bukan grup.

2.3.1 Grup Dihedral

Defnisi 13

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* adalah anggota bilangan bulat positif, $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s,t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi). Jika s,t akibat permutasi titik berturut-turut σ,τ, maka *st* akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$

adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua i.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$$

yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991).

2.4 Graf *Commuting*

Misal G adalah grup terbatas dan X adalah subset dari G, graf *commuting* $C(G, X)$ adalah graf dengan X sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda dari X menjadi sisi jika mereka elemen yang komutatif dari G (Nawawi dan Peter, 2012).

Contoh:

Misalkan untuk $n = 3$, maka D_6 merupakan grup dihedral dengan 6 elemen.

Adapun penyajian D_6 dalam tabel 2.1 adalah sebagai berikut:

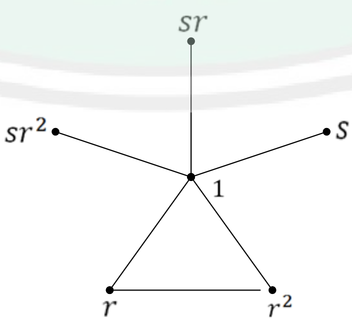
Tabel 2.1 Tabel Cayley D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa :

1. 1 komutatif dengan setiap elemen D_6 (sifat elemen identitas) sehingga 1 bertetangga dengan setiap elemen D_6.
2. $r \;.\; r^2 = r^{2\circ} r = 1$ merupakan elemen-elemen yang komutatif sehingga elemen-elemen tersebut bertetangga satu sama lain.
3. Sebagian elemen-elemen yang tidak komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak bertetangga.

Secara geometri graf *commuting* pada D_6 dapat disajikan sebagai berikut.



Gambar 2.9 Graf *Commuting* pada D_6

2.4.1 Sifat-sifat Graf *Commuting* pada Grup Dihedral

Teorema 2

Misal $G = \mathcal{C}(D_{2n}, \Omega)$ adalah graf *commuting*, di mana Ω adalah subset dari D_{2n} dan $n \geq 3$, berikut ini adalah benar:

(i) Jika Ω adalah abelian subgrup dari D_{2n}, maka diam(G)= 1.

(ii) Jika Ω adalah subgrup dari D_{2n}, maka diam(G)= 2.

(iii) Jika $\Omega = D_{2n} - Z(D_{2n}) = \infty$.

Teorema 3

Misal $G = \mathcal{C}(D_{2n}, \Omega)$, di mana Ω adalah subset dari D_{2n}, maka:

(i) Jika n ganjil dan $\Omega = \{r^1, sr^j$, untuk setiap $1 \leq i \leq$ n-1 dan $1 \leq j \leq$ n$\}$ maka diam(G)= ∞.

(ii) Jika n genap dan $\Omega = \{r^1, sr^j$, untuk setiap $1 \leq i \leq$ n-1, $i \neq \frac{n}{2}$ dan $1 \leq j \leq$ n$\}$ maka diam(G)= ∞ (Chelvam dkk, 2011).

2.5 Matriks

2.5.1 Definisi 14

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Matriks pertama pada contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis 3×2). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran 1×3, 2×2, 1×1 (Anton, 1997).

2.5.2Operasi Matriks

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa ditambahkan (Anton, 1997).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Maka $A+B$ adalah:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+(-4) & 1+3 & 0+5 \\ -1+2 & 0+2 & 2+0 \\ 4+3 & -2+2 & 7+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c (Anton, 1997).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka 2A adalah

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 4 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \\ 2\times -1 & 2\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah matriks $m\times n$ dan B adalah matriks $r\times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m\times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris$i$ dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan (Anton,1997).

2.5.3 Macam-Macam Matriks

Definisi 15

Misalkan A adalah matriks $n\times n$. Jika terdapat B matriks $n\times n$, seperti $AB= I = BA$, dimana I adalah matriks identitas $n\times n$, maka disebut *inverse* dari A, dan A disebut sebagai *invertible*. Matriks *invertible* juga dapat disebut sebagai *nonsingular* (Janin dan Gunawadena, 2004).

Catatan:

Inverse dari matriks *A* dinotasikan dengan A^{-1} (tidak dengan 1/*A*).

Definisi 16

Identitas matriks adalah matriks persegi yang memiliki 1 pada diagonal utama, dan 0 untuk yang lain (Ron dan David, 2009).

Jika ditulis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definisi 17

Matriks persegi adalah matriks dimana banyaknya baris dan banyaknya kolom sama. Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen kecuali diagonal utama adalah nol. Matriks persegi yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks persegi yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segita atas. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga (Anton dan Rorres, 2004).

Definisi 18

Jika *A* adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari *A*, dinyatakan dengan A^T. Didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan pertukaran baris dan kolom dari *A*, kolom kedua adalah baris kedua dari *A*, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004).

Contoh:

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Maka A^T adalah:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Definisi 19

Suatu matriks persegi A disebut matriks simetri jika matriks tersebut sama dengan transposnya $(A)=A^T$ (Anton dan Rorres, 2004).

2.5.4 Determinan

Untuk setiap matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen bilangan riil, terdapat tepat satu nilai yang berhubungan dengan matriks tersebut. Satu nilai riil ini disebut determinan.

Definisi 20

Determinan matriks persegi $A=|A|$ atau det A adalah jumlah semua perkalian elementer matriks A. Bila inversinya genap tanda +, bila inversinya ganjil tanda – (Gazali, 2005).

Hasil kali elementer jika A adalah matriks $n\times n$, maka hasil kali elementer dari matriks A adalah perkalian dariunsur-unsur yang berasal dari baris dan kolom yang berbeda dari matriks A.

Contoh:

Diberikan matriks:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Maka determinan dari *A* adalah det(*A*)= $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Definisi 21

Jika matriks berukuran $n \times n$, determinan matriks *A* didefinisikan sebagai:

$$\text{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{1+j}\det(M_{ij}) \text{ dan } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(Cullen, 1993).

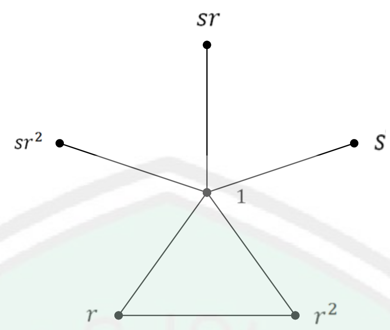
2.5.5 Matriks Laplace

Misalkan *G*(*V*, *E*) adalah graf dengan himpunan titik *V* dan himpunan sisi *E*, dikonversi menjadi |*V*|=*n* dan |*E*|=*m*. Jadi, *G* adalah graf dengan *n* titik dan *m* sisi.

Matrik Laplace dari *G* adalah matriks *L(G)=D(G)-A(G)*. Dengan *D(G)* adalah diagonal matriks dimana enterinya adalah derajat titik dari *G* dan *A(G)* adalah matriks Adjacency graf *G* (Biyikoglu, dkk, 2007).

Contoh:

Diketahui graf *commuting* sebagai berikut



Gambar 2.10 Graf *Commuting* D_6

Matriks Laplace dari graf tersebut adalah

$$A=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\quad
D=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen merupakan nilai karakteristik suatu matriks. Nilai eigen merupakan bilangan real, yang berarti dapat bernilai nol, negatif dan juga positif. Secara sederhana, nilai eigen merupakan nilai yang mempresentasikan suatu matriks dalam perkalian dengan suatu vektor.

Definisi22

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; $Ax = \lambda x$ untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton & Rorres, 2004).

Teorema 4

Misalkan Amatriks $n \times n$. Bilangan λ adalah nilai eigen jika dan hanya jika:

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$$

Dimana I notasi dari matriks $n \times n$ (Jain & Gunawardena, 2004).

Sedangkan menurut Anton (1994) untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dituliskan kembali $Ax = \lambda Ix$ sebagai:

$$Ax = \lambda Ix$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada selesaian tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan di atas akan mempunyai selesaian tak nol jika dan hanya jika det $(\lambda I - A) = 0$. Persamaan di atas dinamakan persamaan karakteristik A dan scalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A (Anton, 1994).

Contoh

Tentukan nilai eigen dari:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & -17 & 8\end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik A adalah

$$\text{Det}(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -4 & 17 & \lambda-8\end{bmatrix}=\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-4$$

kemudian diperoleh persamaan karakteristik:

$$\det(A-\lambda I)=(\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+1)=0$$

sehingga nilai-nilai eigennya adalah:

$\lambda=4,\ \ \lambda=2+\sqrt{3},$ dan $\lambda=2-\sqrt{3}.$

Teorema

Jika A adalah suatu matriks dengan n kolom, maka:

rank(A) + nulitas(A) = n

Bukti

Karena A memiliki n kolom, maka sistem linier homogen $Ax=0$ memiliki n faktor yang tidak diketahui (variabel). Variabel ini terbagi dalam dua kategori, variabel utama dan variabel bebas. Jadi,

(Banyaknya variabel utama) + (Banyaknya variabel bebas)=n

Tetapi banyaknya variabel utama adalah sama dengan banyaknya 1 utama dalam matriks eselon baris tereduksi dari A, dan angka ini merupakan rank dari A. Jadi,

rank(A) + (Banyaknya variabel bebas)=n

Banyaknya variabel bebas adalah sama dengan nulitas dari *A*. Hal ini terjadi karena nulitas dari *A* adalah dimensi ruang solusi dari *Ax=0*, yang sama artinya dengan banyaknya variabel bebas. Jadi,

$$rank(A) + nulitas(A) = n$$

(Anton dan Rorres, 2004).

2.6 Polinomial Karakteristik

Definisi 23 (Polinomial Karakteristik)

Polinomial $p(\lambda)$= det(A-λI) disebut polinomial karakteristik. Akar dari $p(\lambda)$ = 0 adalah nilai eigen dari *A* (Demmel, 1997).

Contoh:

Misal $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\left[\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\right]=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$= p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$
$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 = (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$$

Akar dari $p(\lambda)$ = 0 adalah -1 dan 2, sehingga nilai eigennya adalah -1 dan 2.

2.7 Spektrum Graf

Misalkan $f_n(\lambda) = \det(I\lambda - A(G))$ adalah polinomial karakteristik dari matriks *adjacency* graf *G*, maka spektrum dari graf *G* dengan *n* titik yang dinotasikan dengan *Sp(G)* adalah *Sp(G)*$=[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_i]$ dimana λ_i merupakan akar-akar dari $f_n(\lambda) = 0$, (λ_i adalah nilai-nilai eigen dari matriks *A(G))* (Cvetkovik dan Doob, 1980).

Matriks keterhubungan langsung *(adjacency)* banyak digunakan untuk membahas karakteristik graf karena matriks keterhubungan merupakan matriks persegi. Berikut ini merupakan suatu perluasan pembahasan matriks keterhubungan langsung *(adjacency)* suatu graf dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier.

Misalkan *G* graf berorder *p* dan *A* adalah matriks keterhubungan langsung *(adjacency)* dari graf *G*. Suatu vektor tak nol *x* disebut vektor eigen (*eigen vector)* dari *A* jika *Ax* adalah suatu kelipatan skalar dari *x*; yakni, *Ax*= λx, untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value)* dari *A*, dan *x* disebut sebagai vektor eigen dari matriks *A*, persamaan *Ax*= λx ditulis kembali dalam bentuk:

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

Dengan *I* adalah matriks identitas berordo (1×*p*). Persamaan ini akan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika:

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Persamaan $det(A - \lambda I) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variabel λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks *A*. Skalar-skalar λ yang memenuhi persmaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai-nilai eigen dari matriks *A*.

Misal $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari *A*, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_n maka matrik berordo (2 x *n)* yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spectrum graf *G* dan dinotasikan dengan Spec(*G*)*.* Jadi, spektrum graf *G* dapat ditulis

$$(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \ldots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$ (Biggs, 1973).

2.8 Inspirasi *Adjacent* dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an merupakan kalam Allah yang di dalamnya berupa ilmu-ilmu Allah yang perlu dikaji lebih mendalam. Al-Qur'an tidak hanya berisi mengenai halal haram, surga dan neraka serta aturan-aturan peribadahan untuk umat-Nya. Tetapi juga berisi berbagai ilmu pengetahuan yang ada di muka bumi ini, baik yang telah kita kenal selama ini maupun ilmu-ilmu pengetahuan yang masih belum kita kenal. Teori graf merupakan salah satu contoh ilmu yang perlu dikaji lebih dalam lagi. Salah satu kajian tetntang graf adalah graf *commuting*. Graf *commuting* adalah himpunan titik dengan dua titik yang berbeda dalam himpunan tersebut dikatakan bertetangga (*adjacent)* jika dua simpul tersebut komutatif.

Islam adalah agama yang sangat menjunjung tinggi keadilan. Allah SWT juga memiliki nama lain yang berhubungan dengan keadilan seperti *Al-'Adl* (Yang Maha Adil) atau *Al-Hakim* (Yang Maha Menghakimi). Di dalam Al-Qur'an sendiri juga dijelaskan bahwa segala perbuatan, baik ataupun buruk, sekecil apapun, pasti akan mendapat ganjaran dari Sang Maha Kuasa.

فَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٍ خَيۡرٗا يَرَهُۥ ٧ وَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٖ شَرّٗا يَرَهُۥ ٨

Artinya: *“ Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya. Dan Barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya pula*”(QS. Az Zalzalah: 7-8).

Dalam ayat-ayat ini Allah memperincikan balasan amal masing-masing. Maka barangsiapa beramal baik, walaupun amalnya itu seberat atom niscaya akan diterima balasannya, begitu pula yang beramal jahat walaupun seberat atom akan merasakan balasannya. Amal kebajikan orang-orang kafir tidak dapat menolongnya dan melepaskannya dari siksa kekafirannya. Mereka akan tetap sengsara selama-lamanya di dalam neraka. Adapun keterangan ayat yang menyatakan bahwa pahala amal perbuatan mereka tidak berguna, maksudnya tidak dapat melepaskan mereka dari siksa kekafiran, walaupun ada keringanan dari siksa kejahatannya selain azab kekafiran. Adapun siksa kekafiran tidak akan dikurangi sedikitpun, sebagaimana firman Allah:

وَنَضَعُ ٱلۡمَوَٰزِينَ ٱلۡقِسۡطَ لِيَوۡمِ ٱلۡقِيَٰمَةِ فَلَا تُظۡلَمُ نَفۡسٞ شَيۡـٔٗاۖ وَإِن كَانَ مِثۡقَالَ حَبَّةٖ مِّنۡ
خَرۡدَلٍ أَتَيۡنَا بِهَاۗ وَكَفَىٰ بِنَا حَٰسِبِينَ ٤٧

Artinya: *“Kami akan memasang timbangan yang tepat pada hari kiamat, Maka Tiadalah dirugikan seseorang barang sedikitpun. dan jika (amalan itu) hanya seberat biji sawipun pasti Kami mendatangkan (pahala)nya. dan cukuplah Kami sebagai Pembuat perhitungan”* (QS. Al Anbiyaa’: 47)

Tidak ada dusta dan pengurangan atau penambahan atas balasan perbuatan manusia. Apapun perbuatan yang manusia lakukan maka balasannyapun akan sama dengan perbuatannya tersebut. Penjelasan tentang terhubung langsung (*adjacent)* dari dua titik yang berbeda yang ada di dalam graf *commuting* digunakan untuk menggambarkan hubungan antara perbuatan baik terhadap balasannya atau perbuatan buruk terhadap balasannya.

Manusia, baik laki-laki maupun perempuan, akan menerima balasan di akhirat sesuai perbuatannya di dunia. Islam mendorong umatnya untuk berlomba-lomba dalam berbuat kebaikan dan taqwa, dan balasan bagi segala perbuatan baik itu ada yang langsung dibalaskan di dunia, dan ada juga yang ditangguhkan untuk dibayarkan di akhirat. Seperti dalam firman-Nya, *"Berlomba-lombalah kamu dalam berbuat kebaikan. Di mana saja kamu berada pasti Allah akan mengumpulkan kamu sekalian pada hari kiamat. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"*(QS. Al-Baqarah [2]:148).

Berbuat baik itu tidak mengenal usia, ras ataupun golongan. Kita diperintahkan untuk berbuat kebaikan kepada semua orang. Dalam salah satu ayat Al-Qur'an, *"Dan berbuat baiklah kepada ibu-bapak, karib kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, teman sejawat, ibnu sabil (orang yang bepergian) dan hamba sahayamu (pembantu)"* (QS. An-Nisa [4]:36).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas mengenai spektrum graf *commuting* yang terbentuk dari grup dihedral berdasarkan tabel Cayley.

3.1 Spektrum Laplace Graf *Commuting* Dihedral

Seperti yang telah diketahui bahwa grup dihedral merupakan grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan. Di sini grup dihedral akan dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu:

i) $x = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian rotasi;

ii) $y = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian refleksi atau dapat dituliskan sebagai $x \subset D_{2n}$ dan $y \subset D_{2n}$. Hasil operasi komposisi pada grup dihedral akan diberikan dalam bentuk tabel Cayley.

3.1.1 Spektrum Laplace Graf *Commuting* Grup Dihedral D_6

Hasil operasi komposisi pada grup dihedral berbentuk tabel Cayley sebagai berikut:

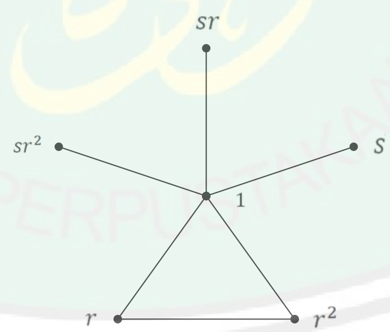
Tabel 3.1 Tabel Cayley D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari tabel Cayley 3.1, hasil operasi komposisi grup dihedral akan digambarkan ke dalam bentuk graf *commuting*. Berdasarkan tabel Cayley berikut dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif disajikan dalam bentuk daftar seperti berikut:

$r \circ 1 = 1 \circ r$	$1 \circ 1 = 1 \circ 1$
$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$	$r \circ r = r \circ r$
$s \circ 1 = 1 \circ s$	$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$	$s \circ s = s \circ s$
$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$	$sr \circ sr = sr \circ sr$
$r \circ r^2 = r^2 \circ r$	$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$

Elemen-elemen dari grup dihedral yang komutatif didapatkan graf sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf *Commuting* D_6

Untuk graf *commuting* D_6 dengan graf tersebut menghasilkan matriks Laplace sebagai berikut:

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

Det(L- λ I)=0

$$det\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Eliminasi Gauss yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} -1 & 2-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\lambda & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-6+\lambda)\,\lambda \end{bmatrix}$$

Karena det($L-\lambda I$) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\mathrm{Det}(L-\lambda I)= -1(-3+\lambda)(-1+\lambda)^3((-6+\lambda)\lambda)$$

Karena det($L-\lambda I$)=0, maka

$$\mathrm{Det}(L-\lambda I)= -1(-3+\lambda)(-1+\lambda)^3((-6+\lambda)\lambda)=0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$\lambda=0$, $\lambda=3$, $\lambda=1$, $\lambda=6$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det($L-\lambda I$)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5-0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-0 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=0$ sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk $\lambda_2=3$ disubtitusikan ke dalam ($L-\lambda I$)=diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5-3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=3$ adalah 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk $\lambda_3=1$ disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)=$ diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=1$ adalah 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk $\lambda_4=6$ disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)=0$ diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5-6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-6 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=6$ adalah 1.

Jadi spektrum Laplace untuk graf *commuting* $D_6 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3.1.2 Spektrum Laplace Graf *Commuting* Grup Dihedral D_8

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_8 yaitu $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_8 sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel Cayley D_8

	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_8 dengan operasi $\circ$. Pada tabel di atas, elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_8:

$1\circ 1 = 1\circ 1$ $\quad r\circ r = r\circ r$ $\quad r^2\circ sr = sr\circ r^2$ $\quad sr^2\circ sr^2 = sr^2\circ sr^2$

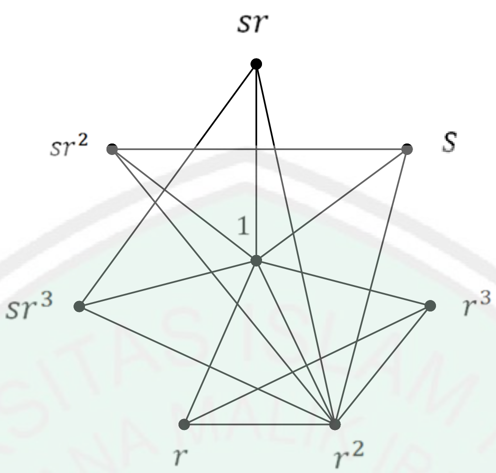
$1\circ r = r\circ 1$ $\quad r\circ r^2 = r^2\circ r$ $\quad r^2\circ sr^2 = sr^2\circ r^2$ $\quad sr^3\circ sr^3 = sr^3\circ sr^3$

$1\circ r^2 = r^2\circ 1$ $\quad r\circ r^3 = r^3\circ r$ $\quad r^2\circ sr^3 = sr^3\circ r^2$ $\quad 1\circ sr^2 = sr^2\circ 1$

$1\circ sr^3 = sr^3\circ 1$ $\quad 1\circ r^3 = r^3\circ 1$ $\quad r^2\circ r^2 = r^2\circ r^2$ $\quad r^3\circ r^3 = r^3\circ r^3$

$1\circ s = s\circ 1$ $\quad r^2\circ r^3 = r^3\circ r^2$ $\quad 1\circ sr = sr\circ 1$ $\quad r^2\circ s = s\circ r^2$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_8, maka didapatkan graf *commuting* pada D_8 tersebut:



Gambar 3.2 Graf *Commuting* D_8

Graf tersebut menghasilkan matriks Laplace sebagai berikut:

$$L=\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

Det(L- λ I)=0

$$det\left(\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Eliminasi Gauss yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} -1 & 3-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4+\lambda & 8-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8+\lambda & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3+\lambda & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4+\lambda & -\dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} & \dfrac{-4+\lambda}{-3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} & -\dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-8+\lambda)\lambda \end{bmatrix}$$

Karena det(A-λI) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\text{Det}(L-\lambda I)=-1(-4+\lambda)(-4+\lambda)(\lambda-2)(8-6\lambda+\lambda^2)((-8+\lambda)^2\lambda)$$

Karena det(L-λI)=0, maka

$$\text{Det}(L-\lambda I)= -1(-4+\lambda)(-4+\lambda)(\lambda-2)(8-6\lambda+\lambda^2)((-8+\lambda)^2\lambda)=0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$$\lambda=0,\ \lambda=2,\ \lambda=4, \lambda=8$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det(L- λ I)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 7-0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7-0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3-0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3-0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3-0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3-0 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=0$ sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk $\lambda_2=2$ disubtitusikan ke dalam (L- λ I)=0 diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=2 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 2 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=2 adalah 2. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk λ_3=4 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$=diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda=4$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 3 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=4$ adalah 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk $\lambda_4=8$ disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$=diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=8 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 2 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=8 adalah 2. Jadi spektrum Laplace untuk graf *commuting* D_8=$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.1.3 Spektrum Laplace Graf *Commuting* Grup Dihedral D_{10}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{10} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{10}.

Tabel 3.3 Tabel Cayley D_{10}

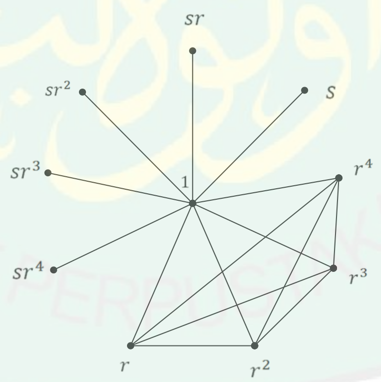
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{10} dengan operasi $\circ$. Pada tabel di atas, elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{10} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{10}, disajikan kedalam daftar berikut:

$r \circ 1 = 1 \circ r$ | $r \circ r^2 = r^2 \circ r$ | $1 \circ 1 = 1 \circ 1$

$r \circ 1 = 1 \circ r$	$r \circ r^2 = r^2 \circ r$	$1 \circ 1 = 1 \circ 1$
$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$	$r \circ r^3 = r^3 \circ r$	$r \circ r = r \circ r$
$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$	$r \circ r^4 = r^4 \circ r$	$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$
$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$	$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$	$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$
$s \circ 1 = 1 \circ s$	$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$	$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$	$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$	$s \circ s = s \circ s$
$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$	$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$	$sr \circ sr = sr \circ sr$
$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$		$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$
$sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$		$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{10}, maka didapatkan graf *commuting* pada D_{10} tersebut:



Gambar 3.3 Graf *Commuting* pada D_{10}

Graf tersebut menghasilkan matriks Laplace sebagai berikut:

$$L=\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

Det(L- λ I)=0

$$det\left(\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$det\begin{bmatrix} 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}=0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Eliminasi Gauss yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-10+\lambda)\lambda \end{bmatrix}$$

Karena det($L-\lambda I$) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\text{Det}(L-\lambda I) = (-5+\lambda)^3(\lambda-1)^5(-10+\lambda)\lambda$$

Karena det($L-\lambda I$)=0, maka

$$\text{Det}(L-\lambda I) = (-5+\lambda)^3(\lambda-1)^5(-10+\lambda)\lambda = 0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$$\lambda=0,\ \lambda=10,\ \lambda=5,\ \lambda=1$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det($L-\lambda I$)= diperoleh

$$\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk λ_2=1 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\begin{bmatrix} 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ 0&0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ 0&0&0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ 0&0&0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda=1$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 5 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=1$ adalah 5. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk λ_3=5 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&-4&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&-4&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&-4&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0&-4&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0&0&-4 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda=5$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 3 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=5$ adalah 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk λ_4=10 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda=10$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=10$ adalah 1. Jadi spektrum Laplace untuk graf *commuting* D_{10}=$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

3.1.4 Spektrum Laplace Graf *Commuting* Grup Dihedral D_{12}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{12} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{12}.

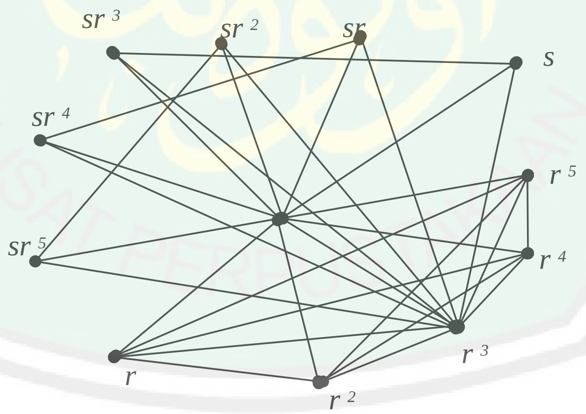
Tabel 3.4 Tabel Cayley D_{12}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{12} dengan operasi $\circ$. Pada tabel di atas, elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{12} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{12}, disajikan sebagai berikut

$r \circ 1 = 1 \circ r$	$r \circ r^2 = r^2 \circ r$	$1 \circ 1 = 1 \circ 1$
$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$	$r \circ r^3 = r^3 \circ r$	$r \circ r = r \circ r$
$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$	$r \circ r^4 = r^4 \circ r$	$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$
$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$	$r \circ r^5 = r^5 \circ r$	$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$
$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$	$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$	$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$
$s \circ 1 = 1 \circ s$	$sr^5 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^5$	$r^5 \circ r^5 = r^5 \circ r^5$
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$	$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$	$s \circ s = s \circ s$
$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$	$r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$	$sr \circ sr = sr \circ sr$
$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$	$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$	$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$
$sr^4 \circ \; = 1 \circ sr^4$	$r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$	$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$
$sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$	$r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$	$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{12}, maka didapatkan graf *commuting* pada D_{12} tersebut:



Gambar 3.4 Graf *Commuting* pada D_{12}

Untuk graf *commuting* D_{12} dengan graf tersebut mengahsilkan matriks Laplace sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

Det(L- λ I)=0

$$det\left(\begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) -$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Eliminasi Gauss yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} -1 & 5-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6+\lambda & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6+\lambda & 12-\lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12+\lambda & 6-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6+\lambda & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 3-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & -\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & 0 & \frac{\lambda-4}{\lambda-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & -\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & -\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-12+\lambda)\lambda \end{bmatrix}$$

Karena det(A- λ I) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\text{Det}(L-\lambda I) = -1(-6+\lambda)^3(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8)^2((-12+\lambda)^2\lambda)$$

Karena det(L- λ I)=0, maka

$$\text{Det}(L-\lambda I) = -1(-6+\lambda)^3(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8)^2((-12+\lambda)^2\lambda) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$$\lambda=0,\ \lambda=12, \lambda=6,\ \lambda=4,\ \lambda=2$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det(L-λI)=0 diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=2$ disubtitusikan ke dalam det (L-λI)=0 diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ sebanyak 3. Untuk $\lambda = 4$ disubtitusikan ke dalam det(L-λI)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3= 4 sebanyak 3. Untuk λ =6 disubtitusikan ke dalam det(L-λI)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = 6$ sebanyak 3. Untuk $\lambda = 12$ disubtitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I)$=diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -7 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_5= 12 sebanyak 3. Jadi spektrum Laplace graf *commuting*

D_{12}=$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3.1.5 Spektrum Laplace Graf *Commuting* D_{14}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{14} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{14}.

Tabel 3.5 Tabel Cayley D_{14}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{14} dengan operasi $\circ$ sebagai berikut:

$r \circ 1 = 1 \circ r$

$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$

$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$

$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$

$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$

$r^6 \circ 1 = 1 \circ r^6$

$s \circ 1 = 1 \circ s$

$sr \circ 1 = 1 \circ sr$

$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$

$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$

$sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$

$sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$

$sr^6 \circ 1 = 1 \circ sr^6$

$r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$

$r \circ r^3 = r^3 \circ r$

$r \circ r^4 = r^4 \circ r$

$r \circ r^5 = r^5 \circ r$

$r \circ r^6 = r^6 \circ r$

$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$

$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$

$r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$

$r^2 \circ r^6 = r^6 \circ r^2$

$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$

$r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$

$r^3 \circ r^6 = r^6 \circ r^3$

$r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$

$r^4 \circ r^6 = r^6 \circ r^4$

$1 \circ 1 = 1 \circ 1$

$r \circ r = r \circ r$

$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$

$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$

$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$

$r^5 \circ r^5 = r^5 \circ r^5$

$r^6 \circ r^6 = r^6 \circ r^6$

$s \circ s = s \circ s$

$sr \circ sr = sr \circ sr$

$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$

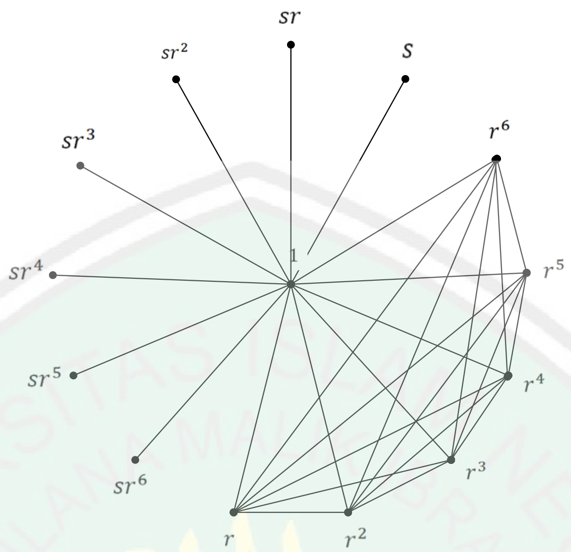
$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$

$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$

$sr^5 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^5$

$sr^6 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^6$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{14}, maka didapatkan graf *commuting* pada D_{14} tersebut



Gambar 3.5 Graf *Commuting* pada D_{14}

Untuk graf *commuting* D_{14} dengan graf tersebut mengahsilkan matriks Laplace sebagai berikut:

$$L=\begin{bmatrix} 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

Det(L- λ I)=0

$$
\det\left(\begin{bmatrix}
13-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda
\end{bmatrix}\right) =
$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Eliminasi Gauss yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-14+\lambda)\lambda
\end{bmatrix}
$$

Karena det(L-λI) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\text{Det}(L-\lambda I) = (-7+\lambda)^5(\lambda-1)^7(-14+\lambda)\lambda$$

Karena det(L-λI)=0, maka

$$\text{Det}(L-\lambda I) = (-7+\lambda)^5(\lambda-1)^7(-14+\lambda)\lambda = 0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$$\lambda=0,\ \lambda=1, \lambda=7, \lambda=14$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det(L-λI)=diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk λ_2=1 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=2 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 7 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=2 adalah 7. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk λ_3=7 disubtitusikan ke dalam det(L- λ I)=diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix}
5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6
\end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda=7$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 5 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=7$ adalah 5. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk λ_4=14 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ =14 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ =14 adalah 1. Jadi spektrum Laplace untuk graf *commuting* D_{14}=$\begin{pmatrix} 14 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

3.1.6 Spektrum Laplace Graf *Commuting* D_{16}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{16} yaitu $\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6,sr^7\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{16}.

Tabel 3.6 Tabel Cayley D_{16}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{r^6}$	$\boldsymbol{r^7}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$	$\boldsymbol{sr^6}$	$\boldsymbol{sr^7}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^6}$	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
$\boldsymbol{r^7}$	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^6}$	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
$\boldsymbol{sr^7}$	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{16} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{16} sebagai berikut:

$r \circ 1 = 1 \circ r$
$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$
$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$
$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$
$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$
$r^6 \circ 1 = 1 \circ r^6$
$r^7 \circ 1 = 1 \circ r^7$
$s \circ 1 = 1 \circ s$
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$
$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$
$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$
$r \circ r^3 = r^3 \circ r$
$r \circ r^4 = r^4 \circ r$
$r \circ r^5 = r^5 \circ r$
$r \circ r^6 = r^6 \circ r$
$r \circ r^7 = r^7 \circ r$
$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$
$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$
$r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$
$r^2 \circ r^6 = r^6 \circ r^2$
$r^2 \circ r^7 = r^7 \circ r^2$

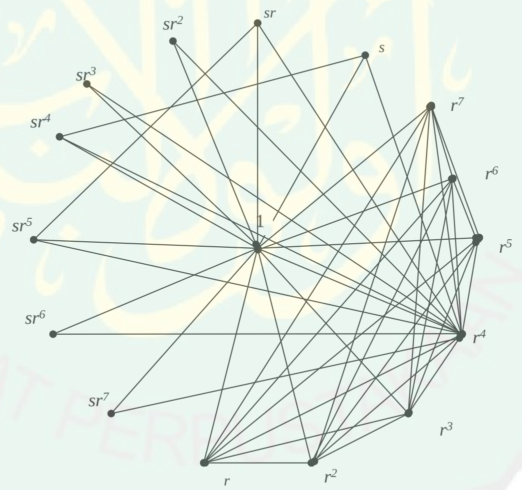
$1 \circ 1 = 1 \circ 1$
$r \circ r = r \circ r$
$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$
$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$
$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$
$r^5 \circ r^5 = r^5 \circ r^5$
$r^6 \circ r^6 = r^6 \circ r^6$
$r^7 \circ r^7 = r^7 \circ r^7$
$s \circ s = s \circ s$
$sr \circ sr = sr \circ sr$
$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$

$sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$
$sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$
$sr^6 \circ 1 = 1 \circ sr^6$
$sr^7 \circ 1 = 1 \circ sr^7$
$r^4 \circ s = s \circ r^4$
$r^4 \circ sr = sr \circ r^4$
$r^4 \circ sr^2 = sr^2 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^3 = sr^3 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^5 = sr^5 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^6 = sr^6 \circ r^4$

$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$
$r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$
$r^3 \circ r^6 = r^6 \circ r^3$
$r^3 \circ r^7 = r^7 \circ r^3$
$r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$
$r^4 \circ r^6 = r^6 \circ r^4$
$r^4 \circ r^7 = r^7 \circ r^4$
$r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5$
$r^5 \circ r^7 = r^7 \circ r^5$
$r^6 \circ r^7 = r^7 \circ r^6$

$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$
$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$
$sr^5 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^5$
$sr^6 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^6$
$sr^7 \circ sr^7 = sr^7 \circ sr^7$
$s \circ sr^4 = sr^4 \circ s$
$sr \circ sr^5 = sr^5 \circ sr$
$sr^2 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^2$
$sr^3 \circ sr^7 = sr^7 \circ sr^3$
$r^4 \circ sr^7 = sr^7 \circ r^4$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{16} , maka didapatkan graf *commuting* pada D_{16} tersebut



Gambar 3.6 Graf *Commuting* pada D_{16}

Graf tersebut menghasilkan matriks Laplace sebagai berikut:

$$L=\begin{bmatrix}
15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

Det(L- λ I)=0

$$det\begin{bmatrix}
15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{bmatrix}$$

$$
-\begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix} = 0
$$

$$
det\begin{bmatrix}
15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda
\end{bmatrix}
$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Eliminasi Gauss yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix}
-1 & 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -8+\lambda & 8-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -8+\lambda & 8-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -8+\lambda & 16-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -16+\lambda & -8+\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8+\lambda & 8-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8+\lambda & 8-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & -\frac{2(\lambda-4)}{\lambda-3} & \frac{54\lambda-22+\lambda^3-19\lambda^2}{\lambda-3} & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & \frac{(\lambda-4)(\lambda-2)}{\lambda-3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & 2-\lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (16+\lambda)\lambda
\end{bmatrix}$$

Karena det(L-λI) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\text{Det}(L-\lambda I) = -1(-8+\lambda)^5(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda^2-6\lambda+8)^3((-16+\lambda)^2\lambda)$$

Karena det(L-λI)=0, maka

$$\text{Det}(L-\lambda I) = -1(-8+\lambda)^5(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda^2-6\lambda+8)^3((-16+\lambda)^2\lambda) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$$\lambda=0,\ \lambda=2, \lambda=4, \lambda=16$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det(L-λI)=0 diperoleh

$$\begin{bmatrix}
15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk λ_2=2 disubtitusikan ke dalam (L- λ I)= diperoleh

$$\begin{bmatrix} 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=2 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 4 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=2 adalah 4. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk λ_3=4 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)=0$ diperoleh

$$\begin{bmatrix}
11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2
\end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=4 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 4 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=4 adalah 4. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk λ_4=8 disubtitusikan ke dalam (L-λ I)=diperoleh

$$\begin{bmatrix}
7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6
\end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=8 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 5 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=8 adalah 5. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_5. Untuk λ_5=16 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$=0 diperoleh

$$\begin{bmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -9 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -9 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -14
\end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=16 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 2 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ =16 adalah 2. Jadi spektrum Laplace untuk graf *commuting* D_{16}=$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dan Spektrum dari Graf D_{2n}

Tabel 3.7 Pola Polinomial Karaketristik Matriks Laplce Graf *Commuting*

No	Graf *Commuting*	Polinomial Graf *Commuting*
1	Graf *commuting* D_6	$-1(-3+\lambda)(-1+\lambda)^3((-6+\lambda)\lambda)$
2	Graf *commuting* D_8	$-1(-4+\lambda)(8-6\lambda+\lambda^2)^2((-8+\lambda)^2\lambda)$
3	Graf *commuting* D_{10}	$-1(-5+\lambda)^3(\lambda-1)^5(-10+\lambda)\lambda$
4	Graf *commuting* D_{12}	$-1(-6+\lambda)^3(\lambda^2-6\lambda+8)^3((-12+\lambda)^2\lambda)$
5	Graf *commuting* D_{14}	$-1(-7+\lambda)^5(\lambda-1)^7(-14+\lambda)\lambda$
6	Graf *commuting* D_{16}	$-1(-8+\lambda)^5(\lambda^2-6\lambda+8)^4((-16+\lambda)^2\lambda)$

Dari tabel di atas dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf *commuting* D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$D_{2n} = -1(-n+\lambda)^{n-2}(-1+\lambda)^n(-2n+\lambda)\lambda$$

dan bentuk umum polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf *commuting* D_{2n} untuk n genap adalah

$$-1(-n+\lambda)^{n-2}(\lambda^2-6\lambda+8)^{\frac{n}{2}}((2n+\lambda)\lambda)$$

Sehingga dapat diberikan:

Teorema 3.1

Jika graf *commuting* D_{2n} dengan n ganjil dan $n \geq 3$, maka polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf *commuting* D_{2n} dengan n ganjil adalah:

$$-1(-n+\lambda)^{n-2}(-1+\lambda)^{n}(-2n+\lambda)\lambda$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Karena n ganjil, maka $sr^i \neq r^i s, i = 1, 2, \ldots, n-1$ dan $r^i = r^{-i}$, artinya selain s dan r^i saling terhubung langsung di graf *commuting* D_{2n}. Maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dan matriks derajat:

$$D(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 2n-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka matriks Laplace graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n} adalah:

$$
= \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
2n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara $det\big(L(D_{2n}) - \lambda I\big)$=0 dan diperoleh matriks segitiga atas dari $L(D_{2n}) - \lambda I$ sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{vmatrix}
-1 & n-1-\lambda & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -n+\lambda & n-\lambda & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
0 & 0 & -n+\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -n+\lambda & n-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-1 & 1+\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-1 & 1+\lambda & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-1 & 1+\lambda \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-14+\lambda)\lambda
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik dari $L(D_{2n}) - \lambda \mathrm{I}$ adalah $\det(L(D_{2n}) - \lambda \mathrm{I})$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(-1+\lambda)^{n}(-2n+\lambda)\lambda \, .$$

Teorema 3.2:

Jika graf *commuting* D_{2n} dengan n genap, maka polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf *commuting* D_{2n} dengan n genap adalah:

$-1(-n+\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - 6\lambda + 8)^{\frac{n}{2}}((2n+\lambda)\lambda)$, sehingga nilai eigennya yaitu:

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Karena n genap, maka $sr^i = r^{-i}s,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$, artinya $\{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ dan selain s dan r^i saling terhubung langsung di graf *commuting* D_{2n}. Maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^3 & sr^4 & sr^5 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dan matriks derajat:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & r & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^3 & sr^4 & sr^5 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array}$$

$$D(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 2n-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n-1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & n-1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 3 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka matriks Laplace graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n}adalah:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & r & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^3 & sr^4 & sr^5 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array}$$

$$L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 2n-1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & n-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \ddots & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & n-1 & \ddots & -1 & -1 & -1 & \ddots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & -1 & 0 & \ddots & n-1 & 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 3 & 0 & \ddots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 & 3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara $det(L(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I)=0$ dan diperoleh matriks segitiga atas dari $L(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I$ sebagai berikut:

$$L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n+\lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n+\lambda & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n+\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-3 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & \ddots & 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda-2 & 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \lambda-4 & 0 & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 & \frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & 0 & \cdots & \frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & (2n+\lambda)\lambda \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $L(D_{2n}) - \lambda I$ adalah $\det(L(D_{2n}) - \lambda I)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - 6\lambda + 8)^{\frac{n}{2}}((2n+\lambda)\lambda)$$

Teorema 3.3:

Spektrum Laplace $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n ganjil diperoleh:

$$Spec_L(D_{2n}) = \begin{pmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{pmatrix}$$

Bukti :

Dari teorema 3.1, diperoleh bahwa

$$p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(-1+\lambda)^n(-2n+\lambda)\lambda$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 2n, \lambda_2 = n, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Karena multiplisitas itu sama dengan basis ruang vektor eigen yang besesuaian dengan λ_i, dan basis merupakan baris nol pada matriks, subtitusikan λ_i ke $L(D_{2n}) - \lambda_i I$ dengan mereduksi matriks menggunakan meode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi. Dengan melihat basis pada matriks tersebut diperoleh:

Untuk $\lambda_1 = 2n$ setelah disubtitusikan ke $L(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_1 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan n baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_1 = 2n$ memiliki multiplisitas sebanyak 1. Untuk $\lambda_2 = n$ setelah disubtitusikan ke $L(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_1 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan $n-2$ baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_2 = n$ memiliki multiplisitas sebanyak $n-2$. Untuk $\lambda_3 = 1$ setelah disubtitusikan ke $L(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_1 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan 1 baris yang n. Jadi untuk $\lambda_3 = 1$ memiliki multiplisitas sebanyak n. Untuk $\lambda_4 = 0$ setelah disubtitusikan ke $L(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_1 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan 1 baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_4 = 0$ memiliki multiplisitas sebanyak 1.

Sehingga diperoleh:

$$Spec_L(D_{2n}) = \begin{pmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Keteraturan Pola dalam Al-Qur'an

Di alam semesta, miliaran bintang dan galaksi yang tak terhitung jumlahnya bergerak dalam orbit yang terpisah. Meskipun demikian, semuanya berada dalam keserasian. Bintang, planet, dan bulan beredar pada sumbunya masing-masing dan dalam sistem yang ditempatinya masing-masing. Terkadang galaksi yang terdiri atas 200-300 miliar bintang bergerak melalui satu sama lain. Selama masa peralihan dalam beberapa contoh yang sangat terkenal yang diamati oleh para astronom, tidak terjadi tabrakan yang menyebabkan kekacauan pada keteraturan alam semesta.

Di seluruh alam semesta, besarnya kecepatan benda-benda langit ini sangat sulit dipahami bila dibandingkan dengan standar bumi. Jarak di ruang angkasa sangatlah besar bila bandingkan dengan pengukuran yang dilakukan di bumi dengan ukuran raksasa yang hanya mampu digambarkan dalam angka saja oleh ahli matematika, bintang dan planet yang bermassa miliaran atau triliunan ton, galaksi, dan gugus galaksi bergerak di ruang angkasa dengan kecepatan yang sangat tinggi.

Kecepatan orbital bumi mengitari matahari kurang-lebih enam kali lebih cepat dari peluru, yakni 108.000 km/jam. Namun, angka-angka ini baru mengenai bumi saja. Tata surya bahkan lebih menakjubkan lagi. Kecepatan tata surya mencapai tingkat di luar batas logika manusia. Di alam semesta, meningkatnya ukuran suatu tata surya diikuti oleh meningkatnya kecepatan. Tata surya beredar mengitari pusat galaksi dengan kecepatan 720.000 km/jam.

Kecepatan yang luar biasa ini menunjukkan bahwa hidup berada di ujung tanduk. Biasanya, pada suatu sistem yang sangat rumit, kecelakaan besar sangat sering terjadi. Namun, seperti diungkapkan Allah sistem ini tidak memiliki "cacat" atau "tidak seimbang". Alam semesta, seperti juga segala sesuatu yang ada di dalamnya, tidak dibiarkan "sendiri" dan sistem ini bekerja sesuai dengan keseimbangan yang telah ditentukan Allah (Subsafan, 2008). Dalam Al-Quran surat Al-Mulk ayat 3-4 dijelaskan:

ٱلَّذِى خَلَقَ سَبۡعَ سَمَٰوَٰتٖ طِبَاقٗاۖ مَّا تَرَىٰ فِي خَلۡقِ ٱلرَّحۡمَٰنِ مِن تَفَٰوُتٖۖ فَٱرۡجِعِ
ٱلۡبَصَرَ هَلۡ تَرَىٰ مِن فُطُورٖ ٣ ثُمَّ ٱرۡجِعِ ٱلۡبَصَرَ كَرَّتَيۡنِ يَنقَلِبۡ إِلَيۡكَ ٱلۡبَصَرُ خَاسِئٗا
وَهُوَ حَسِيرٞ ٤

Artinya*: "Yang Telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka Lihatlah berulang-ulang, Adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?.K emudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah"* QS. Al-Mulk: 3-4).

Manusia misalnya, telah ada kadar yang ditetapkan Allah baginya. Selaku jenis makhluk ia dapat makan, minum, dan berkembang biak melalui sistem yang ditetapkan-Nya. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggung jawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan rasul untuk membimbing mereka. Akal pun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan akurat yang telah ditetapkan sistem dan kadar bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang. Bahkan semuanya saling bersesuaian dan seimbang. Tidak ada pertentangan, benturan, ketidakcocokan, kekurangan, aib, dan kerusakan. Ayat diatas berarti bahwa jika engkau melihat secara berulang-ulang sebanyak mungkin, niscahya pandanganmu itu akan kembali yakni tidak menemukan cacat atau kerusakan. Tidak lagi bertenaga karena karena terlalu banyak mengulang dan dia tidak melihat adanya kekurangan. Dia menjelaskan kesempurnaan dan hiasannya (Abdullah, 2007).

Teorema adalah pernyataan yang dapat ditunjukkan kebenarannya. Teorema dapat ditunjukkan kebenarannya dengan serangkaian pernyataan yang membentuk sebuah argumen, disebut bukti. Pembuktian pada teorema berperan sebagai jaminan kebenaran. Untuk mengkontruksi bukti, metode-metode diperlukan untuk memperoleh pernyataan-pernyataan baru dari pernyataan-pernyataan lama. Pernyataan-pernyataan yang digunakan dalam sebuah bukti dapat meliputi aksioma atau postulat, yaitu pernyataan dasar yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya, hipotesis dari teorema yang dibuktikan, dan teorema yang telah dibuktikan sebelumnya (Rosen, 2003).

Untuk spektrum graf *commuting* dicari matriks Laplace sehingga ditemukan pola umum spektrum graf *commuting*. Kemudian pola tersebut akan dibuktikan kebenarannya. Ini juga merupakan salah satu ukuran yang diciptakan oleh Allah SWT yang kemudian harus diperhatikan, dipikirkan, dipahami, dan dibuktikan kebenaran teorema-teoremanya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab III, maka dapat diperoleh kesimpulannya yaitu:

1. Polinomial karakteristik matrik Laplace dari graf *commuting* grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil yaitu:

   $p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(-1+\lambda)^{n}(-2n+\lambda)\lambda$ sedangkan polinomial karakteristik matrik Laplace dari graf *commuting* grup dihedral D_{2n} untuk n genap yaitu:

   $p(\lambda) = -1(-n+\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - 6\lambda + 8)^{\frac{n}{2}}((2n+\lambda)\lambda)$.

2. Spektrum Laplace graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil yaitu:

   $Spec_L(D_{2n}) = \begin{pmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{pmatrix}$. Sedangkan spektrum Laplace graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap tidak berpola.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan yang sudah penulis lakukan, maka penulis menyarankan agar pembaca bias melanjutkan penelitian ini yakni misalkan mengkaji spektrum Adjacency, spektrum Detour dan spektrum Signless Laplace graf *commuting* dari grup lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H.. 1994. *Elemetary Linier Algebra, 7th Edition.* New York: John Willey & Sons, Inc.

Anton, H.. 1997. *Aljabar Linear Elementer Edisi 5*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Elementary Linier Algebra, 8th Edition.* New York: JohnWilley&Sons, Inc.

Biggs, N.. 1974. *Algebraic Graph Theory*. London: Cambridge University Press.

Biyikoglu, T., Leydold, J., dan Stadler, P.F.. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs & Digraphs.* California: Wadsword, inc.

Chartrand, G. dan Lesniak, L.. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chelvam, T.T., Selvakumar, K., dan Raja, S.. 2011. Commuting Graphs on Dihedral Groups. *The Journal of Mathematics and Computer Science*. Vol 2, No 2, Hal: 402-406.

Cullen, C.G.. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Cvetkovic, D.M., Doob, M., dan Sachs, H.. 1980. *Spectra of Graphs Theory and Application.* New York: Academic Press.

Demmel, W.J.. 1997. *Applied Numerical Linier Algebra*. California: Siam.

Dummit, D.S. dan Richard, M.F.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Gazali, W.. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Jain, S.K.. 2004. *Linier Algebra: An Interactive Approach.* Australia: Thomson Learning.

Kerami, D. dan Cormentyna, S.. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Muhammad, A.. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8.* Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Munir, R.. 2007. *Matematika Diskrit*. Bandung: INFORMATIKA.

Nawawi, A. dan Peter, R.. 2012. *On Commuting Graphs for Elements of Order 3 in Symetry Groups.* Manchester: The MIMS Secretary.

Rosen, K.H.. 2003. *Discrete Mathemathics and Its Application Fifth Edition*. Singapura: McGraw Hill.