# MATRIKS INTERVAL ATAS ALJABAR MIN-PLUS

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**MALIK UMAR**
**NIM.09610080**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2014**

# MATRIKS INTERVAL ATAS ALJABAR MIN-PLUS

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

**Oleh:**
**MALIK UMAR**
**NIM. 09610080**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2014**

**MATRIKS INTERVALATAS ALJABAR MIN-PLUS**

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**MALIK UMAR**
**NIM. 09610080**

Telah Diperiksa danDisetujuiuntukDiuji:
Tanggal:04April 2014

| Pembimbing I | Pembimbing II |
| --- | --- |
| H. WahyuHenkyIrawan, M.Pd | Abdul Aziz, M.Si |
| NIP. 19710420 200003 1 003 | NIP. 19760318 200604 1 002 |

Mengetahui,
KetuaJurusanMatematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**MATRIKSINTERVAL ATAS ALJABAR MIN-PLUS**

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**MALIK UMAR**
**NIM. 09610080**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 23 Mei 2014

| | | |
|---|---|---|
| Penguji Utama: | Evawati Alisah, M.Pd<br>NIP.19720604199903 2 001 | ____________________ |
| Ketua Penguji: | Dr. Abdussakir, M.Pd<br>NIP.19751006 200312 1 001 | ____________________ |
| Sekretaris Penguji: | H. Wahyu H. Irawan, M.Pd<br>NIP. 19710420 200003 1 003 | ____________________ |
| Anggota Penguji: | Abdul Azis, M.Si<br>NIP. 19760318 200604 1 002 | ____________________ |

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : Malik Umar |
| NIM | : 09610080 |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Sains dan Teknologi |
| Judul Penelitian | : Matriks Interval Atas Aljabar Min-Plus |

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juli2014
Yang membuat pernyataan,

Malik Umar
NIM. 09610080

**MOTTO**

***"Sabar itu cantik"***

***"Barang siapa yang bersungguh-sungguh, maka akan sukses"***

## PERSEMBAHAN

*Untuk:*

*" IbundatersayangSiti Maryamdan Ayah tercintaChamdani*

*yangtiadahentimemberi kasihsayangtakterhingga,do'ayang*

*selalumengalir, menebarkanmotivasisebagaipelipurhatiuntukpenulis.*

*Semogamerekaselalumenjadihamba yang dicintaioleh Allah SWT danRasul-Nya.*

*Amin"*

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

*Alhamdulillah*, segala puji kehadirat Allah SWT yang telah memberikan segala rahmat dan ridha-Nya sehingga peneliti mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penelitian skripsi dengan judul "Matriks Interval Atas Aljabar Min-Plus" dengan baik. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga dan para sahabat beliau.

Dengan rasa syukur peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul M, M.Si,selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd dan Abdul Azis,M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan bimbingan dengan baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd selaku dosen wali penulis, serta seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan ilmu kepada penulis.

6. Kedua orang tua penulis Chamdan dan Siti Maryam, yang mengajarkan kerja keras, sabar, mengalah dan tawakkal. Berkat do’a dan ridho mereka Allah memberi kemudahan kepada penulis.
7. Saudara penulis, Siti Aisyah, M. Luthfi, Ahmad Ali Thohir, dan Rofa’ul Khusnia yang telah memberikan dukungan, do’a, motivasi serta keceriaan selama ini.
8. Segenap dewan pengasuh PP. Sabilurrosyad Gasek, KH. Drs. Marzuki Mustamar, M.Ag, Lc, KH. Murtadho Amin, M.Hi, Ust. Ir. H. Ahmad Warsito, M.T, dan Ust. Abd. Aziz Husein, M.Ag beserta keluarga yang telah membimbing dalam kebenaran.
9. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008 dan 2009, khususnya Avief Ragil Artaberi, Moh. Irfan Kamil, Yudis Verdika, Moch Subadar, Lukman Hakim dan Ulyatun Nisa’.
10. Seluruh Santri PP. Sabilurrosyad, khususnya Fauzan Tamami, Miskad, Roshifuliman, Yuzliyan, Firman,Ahmad Rohim, Totok dan Bangkit Alfan.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual, penulis ucapkan *jazakumullah khoiron katsiron*.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi, *amin.*

*Wassalamu’alaikum Wr. Wb.*

Malang, Juli 2014

Penulis

**DAFTAR ISI**

**HALAMAN JUDUL**
**HALAMAN PENGAJUAN**
**HALAMAN PERSETUJUAN**
**HALAMAN PENGESAHAN**
**HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**
**HALAMAN MOTTO**
**HALAMAN PERSEMBAHAN**
**KATA PENGANTAR** ........ viii
**DAFTAR ISI** ........ x
**ABSTRAK** ........ xiv
**ABSTRACT** ........ xv
ملخص ........ xvi

**BAB I PENDAHULUAN**
1.1 Latar Belakang ........ 1
1.2 Rumusan Masalah ........ 4
1.3 Batasan Masalah ........ 4
1.4 Tujuan Penelitian ........ 5
1.5 Manfaat Penelitian ........ 5
1.6 Metode Penelitian ........ 5
1.7 Sistematika Penulisan ........ 6

**BAB II KAJIAN PUSTAKA**
2.1 Grup dan Semi-grup ........ 8
2.2 Ring dan Semi-ring ........ 14
2.3 *Field* dan Semi-*field* ........ 17
2.4 Konsep Dasar Teori Matriks atasAljabar Min-plus ........ 19
2.5 Matriks ........ 22
2.6 Kajian Matriks dalam Islam ........ 28
2.7 Kajian Aljabar dalam Islam ........ 28

**BAB III PEMBAHASAN**
3.1 Bentuk Matriks Interval atas Aljabar Min-plus ........ 30
3.2 Sifat-sifat Operasi Aljabar Min-plus pada Matriks Interval ........ 39
3.3 Sifat-sifat Operasi Aljabar Min-plus pada Skalar Interval dan Matriks ........ 53
3.4 Integrasi Matriks atas Aljabar Min-plus Interval dengan Al-Qur'an... 62

**BAB IV PENUTUP**
4.1 Kesimpulan ........ 66
4.2 Saran ........ 68

**DAFTAR PUSTAKA** ........ 69

## ABSTRAK

Umar, Malik. 2014. ***Matriks Interval Atas Aljabar Min-Plus.*** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Abdul Azis M.Si

**Kata Kunci:** Aljabar min-plus, Matriks Interval, Semi-grup, Semi-*field*

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat berpengaruh pada disiplin lain. Salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika adalah aljabar min-plus. Himpunan semua bilangan real $\mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ dilengkapi dengan $\oplus$ sebagai operasi minimum dan $\otimes$ sebagai bentuk operasi penambahan struktur aljabar disebut semi-ring idempoten, dan oleh karena itu penulis tertarik untuk mengkaji matriks interval atas aljabar min-plus.

Dalam kajian ini, penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan *(library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data (berupa definisi atau teorema) yang berkenaan dengan pembahasan masalah tersebut. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana sifat-sifat matriks interval atas aljabar min plus.

Berdasarkan hasil pembahasan dari penelitian ini adalah matriks interval atas aljabar min-plus merupakan semi-ring idempoten untuk setiap $A, B, C \in \mathrm{I}(\mathrm{R})_{min}^{mxm}$ dan $\forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{I}(\mathrm{R})_{min}$, berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

a. Sifat assosiatif pada operasi $\overline{\oplus}$
b. Sifat komutatif pada operasi $\overline{\oplus}$
c. Idempoten terhadap operasi $\overline{\oplus}$
d. Terdapat elemen identitas terhadap $\overline{\oplus}$
e. Sifat assosiatif pada operasi $\otimes$
f. Terdapat elemen identitas terhadap $\overline{\otimes}$, misal $e$ adalah identitas terhadap operasi $\overline{\otimes}$
g. Operasi $\overline{\otimes}$ distributif terhadap operasi $\overline{\oplus}$
h. Operasi $\overline{\oplus}$ distributif terhadap operasi $\overline{\otimes}$
i. Sifat assosiatif pada operasi $\overline{\otimes}$ antara skalar α dengan operasi $\overline{\otimes}$ pada (β $\overline{\otimes}$ A)
j. Sifat assosiatif pada operasi $\overline{\otimes}$ antara skalar α dengan operasi $\overline{\otimes}$ pada (A $\overline{\otimes}$ B)
k. Operasi distributif $\overline{\oplus}$ terhadap operasi $\overline{\otimes}$ pada dua skalar dan satu matriks interval
l. Operasi distributif $\overline{\otimes}$ terhadap operasi $\overline{\oplus}$ pada satu skalar dan dua matriks interval.

## ABSTRACT

Umar, Malik. 2014. ***Matriks Interval on Min-Plus Algebra***. Theses. Depertemen of Matematik Faculty of Science and Technology State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor:
(I) H. Wahyu Henky Irawan, M. Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si


**Keywords**: Min-plus algebra, Matriks interval, Semi-Group, Semi-Field

Mathematics is one of the disciplines that are very influential in other disciplines. One branch of mathematical disciplines is min-plus algebra. The set of all real numbers $\mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ equipped with $\oplus$ as the minimum operations and $\otimes$ as addition operations forms algebraic structure called idempotent semi-ring. Algebra is often connected with the matrix. With the above matrix algebra these authors min plus interest to study how the shape of the matrix and how the properties of matrix interval on min-plus algebra.

In this study, the author used the method library the study of literature, which is doing research to obtain data (in the form of definitions or theorems) concerning the discussion of the issue.

Based on the discussion of this research we obtain that the matrix interval of the min-plus algebra is an idempotent of semi ring and every $A, B, C \in \mathrm{I}(\mathrm{R})_{min}^{mxm}$ and $\forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{I}(\mathrm{R})_{\min}$ meets the following properties:

a. Associative of $\overline{\oplus}$
b. Commutativity of $\overline{\oplus}$
c. Idempotent of the operation $\overline{\oplus}$
d. Identity element of $\overline{\oplus}$
e. Associative of $\overline{\otimes}$
f. There is identity elements of $\overline{\otimes}$, $e$ is the identity of the $\overline{\otimes}$ operation
g. Distributive operation of $\overline{\otimes}$ respect to $\overline{\oplus}$
h. Distributive operation of $\overline{\oplus}$ respect to $\overline{\otimes}$
i. Associativity of $\overline{\otimes}$ between scalar α with operation $\overline{\otimes}$ on (β $\overline{\otimes}$ A)
j. Associative $\overline{\otimes}$ between scalar α with operation $\overline{\otimes}$ on (A $\overline{\otimes}$ B)
k. Distributive $\overline{\oplus}$ on the operation $\overline{\otimes}$ on two scalar and a matrix interval
l. Distributive operation $\overline{\otimes}$ on the operation $\overline{\oplus}$ on one scalar and two interval matrix

## الملخص

**عمر** ، مالك. ٢٠١٤. **مصفوفة الفترة في الجبر مين بلوس أطروحة،** قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج
**المشرف:**
وحيه هنكي إروان
الماجستر
عبد العزيز الماجستر

**كلمات البحث**: الجبر مين بلوس ، فاصل مصفوفة ، مجموعة نصف، حقل الربيع

الرياضيت هي واحدة من التخصصات مؤثرة في التخصصات الأخرى. فرع واحد من التخصصات الرياضية هي الجبر مين بلوس. أعداديت $R \cup \{+\infty\}$ مكتفي ب $\oplus$ كعماليت الحد الدنى و $\otimes$ كعماليت الزيادة اشكن الهيكل الخبرية يسمى بشبه رييغ إدمفوتين.
في هذه الدراسة، المؤلف طريقة الدراسة المكتبية باقمات ابحاث للحصول على بيانات (في تعرفيات او انظريات) يتعلق بالمسالت في هذ البحث غالب، ارتبط الجبر بمصفوفة، فلذا المؤلف سيقيم بالبحس عن الشكل من مصفوفة و صفات عمليات مين بلوس في مصفوفة الفترة.
من هذا البحس نحصل على ان مصفوفة من الجبر مين بلوس $I\ (R)_{min}^{mxm}$ هي إدمفوتين من شبه رييغ وكن $A, B, C\ \in I\ (R)_{min}^{mxm}$ و $\forall\ \alpha, \beta \in\ I(R)_{min}$ فقا بل الصفات التاليت:

أ. النقابي ل $\overline{\oplus}$
ب. تبديليه ل $\overline{\oplus}$
ت. $\overline{\oplus}$ إدمفوتين العملية
ث. عنصر هوية $\overline{\oplus}$
ج. هناك عناصر هوية $e$ هوية العملية
ح. العملية $\overline{\oplus}$ التوزيع من $\overline{\otimes}$
خ. العملية $\overline{\otimes}$ التوزيع من $\overline{\oplus}$
د. النقابي ل $\overline{\otimes}$ بين الترابط α و بعمليت $\overline{\otimes}$ في $\left(\beta \overline{\otimes} A\right)$
ذ. النقابي ل $\overline{\otimes}$ بين الترابط α و بعمليت $\overline{\otimes}$ في $\left(A \overline{\otimes} B\right)$
ر. عملية التوزيعي $\overline{\oplus}$ لعملية $\overline{\otimes}$ قيمتين و مصفوفت الفترة
ز. عملية التوزيعي $\overline{\otimes}$ لعملية $\overline{\oplus}$ في قيمت و مصفوفتين الفترة

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Al-Qur’an adalah wahyu Allah SWT yang diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW melalui perantara malaikat Jibril. Al-Qur’an berisi petunjuk menuju kebenaran haqiqi, di dalamnya mencakup tata cara hidup berperilaku, bersikap baik, beribadah kepada Allah SWT, serta kewajiban menuntut ilmu dan lain sebagainya. Kewajiban menuntut ilmu dalam Al-Qur’an sangat dianjurkan agar kita diberi derajat yang tinggi di sisi Allah SWT, firman Allah dalam surat Al-Mujadalah ayat 11 yang berbunyi

يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰتٍۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya:
*Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah maha mengetahui apa yang kamu kerjakan”*. (QS. Al-Mujadalah:11).

Ayat Al-Qur’an di atas menerangkan bahwa Allah SWT akan meninggikan derajat orang yang berilmu. Dengan ilmu manusia dapat mengetahui hal baik dan buruk, dari apa yang diperoleh dan akhirnya dapat menunjukkan kepada manusia untuk menjadi insan yang berakhlaqul karimah sesuai dengan tuntunan agama sehingga diangkat derajat di sisi Allah SWT karena termasuk orang-orang berilmu.

Allah menciptakan segala sesuatu mempunyai kemaslahatan tersendiri, dari ciptaan-Nya itulah manusia dianjurkan untuk mengetahuinya, ilmu merupakan salah satu cara agar manusia dapat mendapatkan *ibroh* dari ciptaan Allah tersebut. Allah SWT banyak sekali memberikan macam ilmu mulai dari ilmu dunia hingga ilmu agama. Ilmu agama menjadi bekal agar hidup di dunia bahagia dan juga di akhirat kelak, dan ilmu dunia sebagai bekal untuk ibadah kepada Allah SWT.

Salah satu ilmu di dunia yang sering dipelajari adalah ilmu hitung atau matematika. Matematika mempunyai peranan penting dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai bentuk simbol digunakan untuk membantu perhitungan, pengukuran, penilaian, dan peramalan. Matematika adalah ratunya ilmu pengetahuan, sehingga matematika tidak dapat dilepaskan dari berbagai ilmu yang ada. Dari ilmu matematika muncullah ilmu-ilmu lain yang merupakan cabang dari matematika, di antaranya adalah kalkulus, aljabar abstrak, aljabar linier, teori bilangan, geometri, teori graf, dan sebagainya (Athar, 2010:71).

Aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika. Sedangkan cabang dari ilmu aljabar itu sendiri antara lain aljabar abstrak dan aljabar linier. Aljabar abstrak memiliki banyak materi yang dapat dibahas dan dikembangkan (Anonim, 2011:5).

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, ring, *field*, modul, dan ruang vektor. Pada dasarnya aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan suatu himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol (Anonim, 2011:5).

Bagian dari aljabar abstrak dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu dikenal dengan grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa salah satu dari tanda-tanda kekuasaan-Nya diciptakan manusia secara berpasang-pasangan. Firman Allah SWT dalam surat Ad-Dzariyaat ayat 49

وَمِن كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya:

*"Dan segala sesuatu kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah".*

Ayat di atas menjelaskan Allah menciptakan berpasang-pasangan salah satunya pada konsep matematika seperti ada plus dan minus, perkalian dan pembagian, serta koordinat $x$ dan $y$. Dalam aljabar ada aljabar max-plus dan pasangannya yaitu aljabar min-plus dan lain sebagainya.

Aljabar min-plus merupakan himpunan $R \cup \{+\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi minimum, dinotasikan dengan $\oplus$, dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $\otimes$. Selanjutnya $(R \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan $R_{min}$. (Mustofa, 2011:1).

Aljabar min-plus memiliki beberapa aplikasi antara lain dalam memodelkan jaringan telekomunikasi, lalu lintas, dan *video smoothing*. Sebagai contoh diketahui dua bus tranportasi umum berangkat dari terminal keberangkatan yang berbeda, tetapi menuju suatu terminal tujuan yang sama. Selanjutnya dari terminal tujuan ini, akan berangkat bus ketiga setelah salah satu dari dua bus tersebut tiba. Jika waktu keberangkatan kedua bus tersebut berturut-turut adalah

$x_1$, $x_2$ dan lama perjalanan berturut-turut adalah $a_1$ dan $a_2$, maka waktu keberangkatan bus ketiga $(x_3)$ dapat disajikan sebagai $x_3 = \min(x_1 + a_1,\ x_2 + a_2)$. Dalam aljabar min-plus, persamaan ini dapat disajikan sebagai $x_3 = (x_1 \otimes a_1) \oplus (x_2 \otimes a_2)$, dengan $\oplus$ menyatakan operasi minimum dan $\otimes$ menyatakan operasi penjumlahan. Persamaan tersebut analog dengan persamaan $x_3 = ax_1 + a_2x_2$ dalam aljabar linear (Mustofa, 2011:1).

Dalam aljabar sering terhubung dengan matriks, begitu juga dengan aljabar min-plus, matriks pada dasarnya memberikan kemudahan di dalam pembuatan analisis-analisis yang mencakup hubungan antara variabel-variabel (Anonim, 2009:5).

Pada pengembangannya matriks interval atas aljabar min-plus dengan elemen-elemennya berupa operasi minimum dan penjumlahan di dalamnya. Untuk itu penelitian ini memfokuskan pada perluasan dari operasi-operasi pada aljabar min-plus interval dengan mengangkat judul **"Matriks Interval atas Aljabar Min-plus"**.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka penulis akan membahas tentang matriks atas aljabar min-plus interval. Oleh karena itu, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah apa saja sifat-sifat matriks interval atas aljabar min-plus?

## 1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini adalah hanya mengkaji matriks berordo $m \times m$.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan pembahasan penelitian ini adalah menjelaskan sifat-sifat matriks interval atas aljabar min-plus.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini, penulis berharap pembahasan skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai kalangan, di antaranya:

1) Bagi penulis

   Untuk lebih mengenal, mempelajari, memahami dan pengembangan disiplin ilmu yang dipelajari mengenai matriks interval atas aljabar min-plus.

2) Bagi pembaca

   Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang matriks interval atas aljabar min-plus.

3) Bagi instansi

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk perkuliahan Aljabar.

## 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang aljabar min-plus karangan Mustofa yang diterbitkan tahun 2011 dan hasil penelitian yang dilakukan oleh Rudhito tahun 2010.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep himpunan, grup, semi-grup, ring, semi-ring, *field*, semi-*field*, dan matriks interval.
4. Merumuskan sifat-sifat yang berkaitan dengan matriks interval atas aljabar min-plus.
5. Membuktikan sifat-sifat yang terdapat dalam matriks interval atas aljabar min-plus.
6. Memberi contoh-contoh yang sesuai dalam definisi yang berkaitan dengan matriks interval atas aljabar min-plus.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca dan pemberian gambaran secara umum tentang masalah yang diangkat dalam skripsi ini, maka diberikan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Merupakan pendahuluan, yang berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan.

Bab III Pembahasan

Pada bagian ini berisi pembahasan tentang sifat-sifat yang terkait matriks interval atas aljabar min-plus.

BAB IV Kesimpulan

Merupakan penutup skripsi, yang berisi kesimpulan dari keseluruhan pembahasan skripsi dan saran.

# BAB II

# KAJIAN PUSTAKA

## 2.1. Grup dan Semi-grup

### 2.1.1 Grup

Salah satu sistem aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup.

**Definisi 2.1 (Operasi Biner)**

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $*$ pada elemen-elemen S disebut sebagai operasi biner apabila setiap dua elemen $a, b \in S$, maka $(a * b) \in S$ atau dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke $S$. Operasi $*$ pada $S$ merupakan operasi biner dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ pada $S$ bersifat tertutup (Sukirman, 2005:35).

**Contoh :**

Misalkan $B$ merupakan himpunan semua bilangan bulat. Operasi $+$ pada $B$ merupakan operasi biner, sebab operasi $+$ merupakan suatu pemetaan dari $B \times B \to B$, yaitu $\forall (a, b) \in B \times B$, maka $(a + b) \in B$. Jumlah dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula. Operasi ":" atau pembagian pada $B$ bukan merupakan operasi biner pada $B$.

Misalkan operasi $*$ pada $S$ adalah suatu operasi biner, yaitu:

a. Apabila $\forall a, b \in S$ berlaku $a * \mathrm{b} = \mathrm{b} * a$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada $S$ bersifat komutatif.

b. Apabila $\forall\, a, b \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (\mathrm{b} * c)$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada $S$ bersifat asosiatif.

c. Jika ada $e \in S$ sedemikian sehingga $\forall a \in S$ berlaku $a * e = e * a = a$, maka $e$ disebut elemen identitas terhadap operasi $*$.

d. Jika $\forall a \in S, \exists\, b \in S$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$, maka $b$ disebut invers dari $a$ terhadap operasi $*$ dan invers dari $a$ ditulis $a^{-1}$ (Sukirman, 2005:36).

### 2.1.2 Teori Grup

**Definisi 2.2 (Grup)**

Suatu grup merupakan pasangan terurut $(G,*)$ dimana $G$ adalah suatu himpunan dengan $*$ adalah operasi biner pada $G$ yang memenuhi aksioma berikut:

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$ (asosiatif)

(ii) Ada elemen $e$ di G sehingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$ ($e$ adalah identitas dari G)

(iii) $\forall\, a \in$ 齡 ada elemen $a^{-1}$ pada G, sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ ($a^{-1}$ adalah invers dari $a$) (Dummit & Foote, 1991:17-18).

**Definisi 2.3**

Grup $(G,*)$ disebut grup Komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Fraleigh, 1994:39).

**Contoh:**

Selidiki apakah (Z, +) merupakan grup *abelian*.

**Bukti:**

Misalkan $a, b, c \in Z$ dengan + merupakan operasi biner pada $Z_o$.

Akan dibuktikan bahwa $(Z, +)$ adalah grup *abelian* jika diketahui:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu operasi + bersifat assosiatif ).
2. Untuk semua $a \in Z$ ada suatu elemen 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut identitas di Z).
3. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $(-a)$ di $Z$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $(-a$ disebut invers dari $a$).
4. Untuk semua $a, b \in Z$ maka $a + b = b + a$ (komutatif).

   Jadi $(Z, +)$ adalah grup komutatif.

### 2.1.3 Semi-grup

**Definisi 2.4**

Misalkan $S$ adalah himpunan tidak kosong, $S$ dikatakan semi-grup jika pada $S$ dikenai operasi biner sedemikian sehingga untuk semua $a, b, c \in S$ sehingga $(a * b) * c = a * (b * c)$, yang dinotasikan dengan $(S,*)$ adalah semi-grup (Kandasamy, 2002:7).

Untuk syarat tertutup sudah terpenuhi pada operasi biner.

**Contoh:**

$N$ adalah himpunan bilangan asli

Akan dibuktikan $(N, +)$ adalah semi-grup

i. $+$ adalah operasi biner di $N$

   $\forall x, y \in N$, maka $x + y \in N$

   Jadi, operasi $+$ biner di $N$.

ii. Bersifat assosiatif di $N$

$\forall x, y \in N$, maka $(x + y) + z = x + (y + z)$

Jadi, operasi $+$ bersifat assosiatif di $N$.

**Definisi 2.5**

Jika semi-grup $(S,*)$ dikatakan semi-grup komutatif jika memenuhi $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in S$ (Kandasamy, 2002:7).

Jika banyaknya anggota dalam semi-grup $S$ adalah berhingga maka $S$ adalah semi-grup berhingga atau semi-grup order berhingga. Jika semi-grup $S$ memuat elemen $e$ sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$, untuk semua $\forall a \in S$ maka $S$ adalah semi-grup dengan elemen identitas $e$ atau sebuah monoid. Sebuah elemen $x \in S$, $S$ yang monoid dikatakan inversibel atau mempunyai invers di $S$ jika terdapat $y \in S$ sedemikian sehingga $xy = yx = e$.

**Definisi 2.6**

Misalkan $(S,*)$ adalah semi-grup. Subset $H$ yang tidak kosong dari $S$ dikatakan subsemi-grup dari $S$ jika $H$ itu sendiri adalah semi-grup di bawah operasi dari $S$ (Kandasamy, 2002:7).

## 2.2. Ring dan Semi-ring

Suatu sistem matematika yang yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi dinamakan grup. Sistem matematika tersebut belum cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring.

### 2.2.1 Ring

**Definisi 2.7**

$R$ adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$ (disebut penjumlahan/operasi pertama dan perkalian/operasi kedua) disebut ring jika memenuhi pernyataan berikut:

1. $(R, +)$ adalah grup abelian
2. Operasi $\times$ bersifat assosiatif:

   $(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in R$
3. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap $+$ di $R$: $\forall\ a, b, c \in R$

   $a\ \times\ (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ distributif kiri

   $(b + c)\ \times a\ = (b \times a) + (c \times a)$ distributif kanan

   (Dummit dan Foote, 1991:225).

**Definisi 2.8**

Ring $(R, +, \times)$ dikatakan mempunyai unsur identitas jika ada suatu elemen $1 \in R$ dengan $1 \times a = a \times 1 = a, \forall\ a \in R$ (Dummit dan Foote, 1991:225).

**Contoh:**

Selidiki apakah $(R, +, \times)$ dengan $R$ bilangan real adalah merupakan ring dengan unsur satuan?

Jawab:

$(R, +, \times)$ adalah sebuah ring

operasi $\times$ mempunyai unsur identitas di $R$

$\forall\ a \in R, \exists\ 1 \in R$, sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$

jadi, $(R, +, \times)$ merupakan ring satuan.

**Definisi 2.9**

Misalkan $R$ adalah ring, asumsikan $R$ identitas $1 \neq 0$. Invers elemen $u$ dari $R$ disebut unit di $R$ jika ada suatu $v$ di $R$ sedemikian sehingga $uv = vu = 1$ (Dummit dan Foote, 1991:228).

**Contoh:**

Selidiki apakah $(R, +, \times)$ dengan $R$ bilangan real adalah merupakan ring dengan elemen invers untuk operasi $\times$?

Jawab:

Misalkan $a \in R, a \neq 0$, sehingga

$$a \times b = b \times a = 1$$

$$a \times b = 1$$

$$b = \frac{1}{a}$$

$$\forall a \in R, a \neq 0, \exists\ a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Jadi, $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$

### 2.2.2 Semi-ring

**Definisi 2.10**

Suatu semi-ring $(S, +, \times)$ adalah sutau himpunan tak kosong $S$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $+$ dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut:

i. $(S, +)$ adalah semi-ring komutatif dengan elemen netral 0, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku: $(a + b) + c = a + (b + c)$

$$a + b = b + a$$

$$a + 0 = 0 + a$$

ii. $(S,\times)$ adalah semi-ring dengan satuan 1, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

iii. Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap $\times$, yaitu jika $a \in S$, berlaku: $a \times 0 = 0 \times a = 0$

iv. Operasi $\times$ distributif terhadap operasi $+$, yaitu $a, b, c \in S$, maka:

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (Rudhito, 2004:2).

**Definisi 2.11**

Suatu semi-ring $(S, +,\times)$ dikatakan komutatif jika operasi $\times$ bersifat komutatif, yaitu $\forall\, a, b \in S$, berlaku $a \times b = b \times a$ (Rudhito, 2004:3).

**Contoh:**

$R$ adalah himpunan bilangan real

misal $(R, +,\times)$ adalah semi-ring

$\forall\, x, y \in R$, sehingga $x \times y = y \times x$

Jadi, $(R, +,\times)$ semi-ring komutatif terhadap operasi $\times$

**Definisi 2.12**

Suatu semi-ring $(S, +,\times)$ disebut semi-*field* jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\times$, yaitu $\forall\, a \in S\backslash\{0\}\ \exists\, a^{-1} \in S$, sehingga $a \times a^{-1} = 1$ (Rudhito, 2004:3).

**Contoh:**

Semi-ring komutatif $(S, +,\times)$ $R$ adalah himpunan bilangan real, disebut semi-*field*, karena untuk setiap $x \in R$ terdapat $x^{-1} \in R$, sehingga $x \times \frac{1}{x} = 1$.

## 2.3. *Field* dan Semi-*field*

Field adalah ring komutatif dengan identitas $1 \neq 0$, dimana setiap unsur selain identitas operasi pertama adalah unit.

### 2.3.1 *Field*

**Definisi 2.13**

*Field* adalah suatu sistem aljabar dengan dua operasi yang dinamakan "addisi" (dinotasikan $+$) dan "multiplikasi" (dinotasikan $\cdot$), yang memenuhi aksioma-aksima berikut ini:

1. Terhadap addisi:
   a. Tertutup
   b. Assosiatif
   c. Terdapat elemen netral
   d. Setiap elemen mempunyai invers
   e. Komutatif
2. Terhaadap multiplikasi:
   a. Tertutup
   b. Assosiatif
   c. Terdapat elemen satuan
   d. Setiap elemen tak nol mempunyai invers
   e. Komutatif

Sebagai contoh struktur aljabar yang merupakan *field* yang sering dijumpai yaitu:

a. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan himpunan bilangan riil terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan real.

b. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ merupakan himpunan bilangan kompleks terhadap penjumlahan dan perkalian bialangan kompleks.

c. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ merupakan himpunan bialangan rasional terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan rasional (Lestari, 2012:2).

### 2.3.2 Semi-*field*

**Definisi 2.14**

Sebuah semi-*field* $(S, +, \times)$ adalah himpunan yang dikenai dengan operasi biner $+$ dan $\times$ sedemikian hingga:

a. Operasi $+$ assosiatif, komutatif dan memiliki elemen netral 0.

b. Operasi $\times$ membentuk grup abelian dan memiliki elemen identitas 1.

c. Memiliki sifat distributif $\times$ terhadap $+$ (Baccelli, 2001:101).

Sehingga yang dimaksud semi-*field* adalah

a. Idemponten jika operasi pertama adalah idemponten sehingga, jika $\forall\, a \in S, a + a = a$.

b. Komulatif jika grupnya adalah komutatif.

## 2.4. Konsep Dasar Teori Matriks atas Aljabar Min-Plus

### 2.4.1 Notasi pada Aljabar Min-plus

Untuk menekankan analogi dengan kalkulus konvensional, “min” dinotasikan $\oplus$ , dan $+$ dinotasikan $\otimes$.

**Contoh:**

| Notasi $R_{min}$ | Notasi konvensional | $=$ |
|---|---|---|
| $4 \oplus 7$ | $\min(4,7)$ | 4 |
| $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5$ | $\mathrm{Min}(1,2,3,4,5)$ | 1 |

Notasi konvensional $(a + b)$ berarti penjumlahan $a$ dan $b$, tanda $'' + ''$ dinotasikan dengan ⊗, maka dinotasikan $R_{min}$ menjadi $a \otimes b$

**Contoh:**

| Notasi $R_{min}$ | Notasi konvensional | = |
|---|---|---|
| $4 \otimes 5$ | $4 + 5$ | 9 |
| $1 \otimes 2 \otimes 3 \otimes 4 \otimes 5$ | $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ | 15 |

Digunakan $\varepsilon$ dan $e$, elemen netral dari ⊕ dan ⊗ masing-masing adalah $+\infty$ dan 0. Diberikan tabel:

| Notasi $R_{min}$ | Notasi konvensional | = |
|---|---|---|
| $4 \oplus \varepsilon$ | $\mathrm{Min}(4, +\infty)$ | 4 |
| $4 \otimes \varepsilon$ | $+\infty + 4$ | $+\infty$ |
| $e \otimes 5$ | $0 + 5$ | 5 |

### 2.4.2 Definisi Aljabar Min-plus

**Definisi 2.15**

Notasi $R_{\min}$ merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana $R$ adalah anggota bilangan real, didefinisikan $\varepsilon := +\infty$ dan e: = 0. Untuk $a, b \in R_{min}$, didefinisikan operasi ⊕ dan ⊗

$a \oplus b :=$ min $(a, b)$ dan $a \otimes b := a + b$ (Mustofa, 2011:2).

Himpunan $R_{\min}$ dengan operasi ⊕ dan ⊗ disebut Aljabar Min-plus dan dinotasikan dengan

$$R_{\min} = (R_{\min}, \oplus, \otimes)$$

Seperti dalam aljabar konvensional, dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurung tidak dituliskan), operasi ⊗ mempunyai prioritas yang lebih besar dari pada operasi ⊕.

**Contoh:**

$$3 \otimes -9 \oplus 5 \otimes 3$$

Harus dipahami sebagai

$$(3 \otimes -9) \oplus (5 \otimes 3)$$

perhatikan bahwa $(3 \otimes -9) \oplus (5 \otimes 3) = (3 + (-9)) \oplus (5 + 3)$

$$= \min(3 + (-9)), (5 + (3))$$

$$= \min(-6, 8)$$

$$= -6$$

sedangkan $3 \otimes (-9 \oplus 5) \otimes 1 = 3 + (-9 \oplus 5) + 1$

$$= 3 + \min(-9, 5) + 1$$

$$= 4 + (-9)$$

$$= -5$$

perluasan operasi untuk $\{+\infty\}$:

$\min(a, +\infty) = \min(+\infty, a)$ dan $a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty$, untuk setiap $a \in R_{\min}$, sehingga

$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ dan $a \otimes a = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$.

**Contoh:** $9 \oplus 2 = \min(9, 2) = 2$

$$\varepsilon \oplus 2 = \min(+\infty, 2) = 2$$

$$\varepsilon \otimes 2 = (+\infty) + 2 = (+\infty) = \varepsilon$$

$$e \oplus 9 = \min(0,9) = 0 = e.$$

## 2.5 Matriks

**Definisi 2.16**

Suatu matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton, 2000:22).

Penulisan matriks dapat menggunakan tanda kurung siku [ ] atau tanda kurung biasa ( ). Huruf besar digunakan untuk menyatakan matriks, sedangkan huruf-huruf kecilnya digunakan untuk menyatakan entri-entri matriks. Entri-entri matriks yang berbeda pada garis horizontal membentuk baris, sedangkan entri-entri yang ada pada garis vertikal membentuk kolom.

Adapun bentuk umum dari matriks adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Penulisan matriks dapat disederhanakan menjadi $= (a_{1j})$. $a_{ij}$ yang terletak pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Dimana indeks *I* adalah baris ke-*i* dan indeks *j* adalah kolom ke- *j*.

Jadi $a_{ij}$ adalah entri baris ke-*i* kolom ke-*j*.

Dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

$j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Indeks inilah yang menentukan ukuran atau ordo suatu matriks. Sedangkan matriks yang terdiri dari *m* baris dan *n* kolom dinamakan matriks berukuran *m x n*. Dikatakan $A = B$ jika dan hanya jika $(a_{ij}) = (b_{ij})$ atau setara $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua *i* dan *j*.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks diatas memiliki 3 baris dan 2 kolom, maka ukurannya adalah $3 \times 2$ atau bisa ditulis $A_{3\times 2}$.

### 2.5.1 Operasi pada Matriks

Aturan-aturan operasi matriks (seperti penjumlahan dan perkalian) untuk matris agak intuitif dan telah dirumuskan sedemikian agar berguna untuk perhitungan-perhitungan praktis.

1. Penjumlahan matriks

Dalam notasi matriks, jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ mempunyai ukuran yang sama, maka dapat dilangsungkan operasi penjumlahan ataupun operasi selisih semisal, jika $A$ dan $B$ adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota $B$ dengan anggota-anggota $A$ yang berpadan, dan selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota $A$ dengan anggota-anggota $B$ yang bepadanan. Matriks yang berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ mempunyai ukuran yang sama, yakni $m \times n$, maka

$A_{m\times n} + B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times ń} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$ dan

$A_{m\times n} - B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} - (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

Contoh:

Diket $A\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

dinyatakan: 1. $A_{3\times3} + B_{3\times3}$, dan

2. $A_{3\times3} - B_{3\times3}$

Misalkan:

1. $A_{3\times3} + B_{3\times3} = C_{3\times3}$,

dimana $A_{3\times3} + B_{3\times3} = (a_{ij})_{3\times3} + (b_{ij})_{3\times3}$,

$= (a_{ij} + b_{ij})_{3\times3}$

dan $C_{3\times3} = (c_{ij})_{3\times3}$, maka $(a_{ij})_{3\times3} = (a_{ij} + b_{ij})_{3\times3}$

dimana $A_{3\times3} + B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+(-4) & 0+3 & 3+1 \\ -1+2 & 2+0 & 4+2 \\ 4+3 & 7+2 & 0+5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

Jadi $A_{3\times3} + B_{3\times3} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

2. $A_{3\times3} - B_{3\times3} = C_{3\times3}$,

dimana $A_{3\times3} - B_{3\times3} = (a_{ij})_{3\times3} - (b_{ij})_{3\times3}$

$= (a_{ij} - b_{ij})_{3\times3}$

dan $C_{3\times3} = (c_{ij})_{3\times3}$, maka $(c_{ij})_{3\times3} = (a_{ij} - b_{ij})_{3\times3}$

dimana $A_{3\times3} - B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2-(-4) & 0-3 & 3-1 \\ -1-2 & 2-0 & 4-2 \\ 4-3 & 7-2 & 0-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Jadi, $A_{3\times 3} - B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$.

2. Perkalian matriks

Jika $A$ adalah matriks $m \times r$ dan $B$ adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali $AB$ adalah matriks $m \times n$ yang anggota-anggotanya didiefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris $i$ dan kolom $j$ dari $AB$, pilih baris $i$ dari matriks $A$ dan kolom $j$ dari matriks $B$. Kalikan anggota-anggota yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya (Anton, 2000:49).

Jadi misalkan baris $i$ dan matriks $A$ adalah $[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ir}]$

dan kolom $j$ dari matriks $B$ adalah $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$

$A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$, dan $A \cdot B = C$ dengan $C = (c_{ij})$, dengan $c_{ij}$ merupakan elemen baris $i$ dan kolom $j$ dari $AB$ yang merupakan ordo $m \times n$. Dengan demikian

$$c_{ij} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ir}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

Sehinngga $AB = (\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj})$

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

Contoh:

Diketahui dua buah matriks, yakni $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{maka: } A_{2\times 2} \times B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\cdot 1) + (2\cdot 0) & (1\cdot 1) + (2\cdot 2) & (1\cdot 1) + (2\cdot 0) \\ (3\cdot 1) + (4\cdot 0) & (3\cdot 0) + (4\cdot 2) & (3\cdot 1) + (4\cdot 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, $AB_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Perkalian matriks dengan skalar

Apabila $A$ adalah matriks yang berukuran $m \times n$ dan $c$ adalah bilangan skalar, keduanya dapat dikenakan operasi perkaliandengan aturan setiap entri matriks dikalikan dengan bilangan $c$ Seperti yang telah didefinisikan, jika $A$ adalah matriks sebarang dan $c$ adalah skalar sebarang, maka hasil kali $cA$ adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks $A$ dengan bilangan $c$. Matriks $cA$ disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari $A$.

Dalam notasi matriks, jika $A$ adalah matriks dengan ordo $m \times n$, dikalikan dengan skalar $k$, maka:

$$C_{m\times n} = kA_{m\times n}$$

$$= (k \cdot a_{ij})_{m\times n}$$

dengan $C$ adalah hasil kali matriks $A$ dengan bilangan skalar $k$.

Contoh: terdapat $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

maka: 1. $2A$

2. $\frac{1}{2}A$

Jawab: 1. $2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 16 & 4 \\ 12 & 16 & 10 \end{bmatrix}$$

2. $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 12 & 16 & 10 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

### 2.5.2 Macam-macam Matriks

1. Matris bujur sangkar

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks dimana banyak baris sama dengan banyak kolom (Gazali, 2005:3).

Apabila matriks bujur sangkar $A$ dengan ordo $m \times n$, yakni $(A_{m\times n})$, dengan $m = n$, maka dapat ditulis $A_{m\times n} = A_n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$A$ adalah matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$. Diagonal utama $A$ adalah $a_{11}$ 揮$_{22}$ $\cdots$ $a_{nn}$.

Contoh: $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Matriks segitiga atas

Matriks segitiga atas adalah suatu matriks bujur sangkar yang setiap unsur dibawah diagonal utamanya sama dengan nol atau $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ (Gazali, 2005:7).

Jadi bentuk matriks ini adalah: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Contoh matriks segitiga atas: $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. Matriks segitiga bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang setiap unsur di atas diagonal utamanya sama dengan nol (Gazali, 2005:8).

Maka $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh matriks segitiga bawah: $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

4. Matriks diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang mempunyai elemen-elemen nol kecuali elemen-elemen pada diagonal utamanya (Gere, 1987:22).

Maka $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} \neq 0$ untuk $i = j$.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{11} \end{bmatrix}$$

Contoh matriks diagonal adalah: $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Matriks identitas

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya masing-masing adalah satu, sedangkan elemen-elemen yang lain adalah nol (Gazali, 2005:4).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Merupakan sebuah matriks identitas jika dan hanya jika:

$a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$a_{ij} = 1$ untuk $i = j$

Matriks identitas dinyatakan dengan $I$. $I_n$ melambangkan matriks identitas berukuran $n \times n$. Apabila ada matriks $A$ berukuran $n \times n$ dikenakan operasi perkalian dengan $I$ yang berukuran $m \times n$, maka $AI = AI = A$.

### 2.5.3 Bentuk Matriks atas Aljabar Min-plus

Untuk menentukan bentuk matriks atas aljabar min-plus diperlukan definisi berikut:

**Definisi 2.17**

Notasi $(R_{\min})^{n\times n}$ didefinisikan sebagai himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri elemen $R_{\min}$, untuk $A, B \in (R_{\min})^{n\times n}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dengan

$(A \oplus B) = C$, maka $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$

dan $(A \otimes B) = D$, maka $d_{ij} = \underset{k}{\otimes}(a_{ik} \otimes b_{kj})$

dengan $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ (Mustofa, 2011:4).

**Contoh:**

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

maka $A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \oplus -3 & 3 \oplus 4 \\ -5 \oplus 4 & 1 \oplus 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(1,-3) & \min(3,4) \\ \min(-5,4) & \min(1,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

dan $A \otimes B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right)$

sehingga,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + (-3)) \oplus (3+4) & (1+4) \oplus (3+2) \\ (-5 + (-3)) \oplus (1+4) & (-5+4) \oplus (1+2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \oplus 7 & 5 \oplus 5 \\ -8 \oplus 5 & -1 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(-2,7) & \min(5,5) \\ \min(-8,5) & \min(-1,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$$

## 2.6 Kajian Matriks dalam Islam

Dalam Islam dikaji berbagai disiplin ilmu salah satunya yaitu ilmu matematika. Dari Al-Qur'an dan Hadits telah banyak dikaji tentang konsep matematika. Hadits nabi yang menceritakan tentang pembagian umat terbagi menjadi tiga bagian, sebagai berikut:

عَنْ عَطَاءِبْنِ يَسَارِ عَنْ كَعْبِ ٱلَاحْبَارِقَالَ : قَالَ رَسُولُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وسَلّمَ
ثُلُثٌ يَدْخُلُنَ الْجَنَّةَ بِغَيْرِ حِسابٍ وَثُلُثٌ يَأْتُونَ بِذُنُوبِهِمْ وَخطَايَاهُمْ فَيُغْفَرُهُمْ
وَثُلُثٌ يَأْتُونَ بِذُنُوْبِهِمْ وَ خَطَايَا عِظَامِ ( رَوَاهُ اِبْنُ مَاجَهْ)

Artinya:
*"Dari Atha' bin Yasar dari Ka'ab Al-Ahbar telah berkata: Rasulullah SAW bersabda sepertiga dari mereka masuk surga tanpa dihisab, sepertiga lagi datang dengan dosa-dosanya, lalu diampuni. Dan yang sepertiga lainnya datang dengan dosa-dosa dan kesalahan-kesalahan besar" (H.R Ibnu Majah)*(Bhusiri, 2010:38).

Mengenai pembagian umat, Nabi Muhammad SAW sendiri telah membaginya ke dalam tiga bagian. Dari Hadits yang diriwayatkan oleh Atha' bin Yasar ini dapat diambil pelajaran agar senantiasa menjadi umat pada bagian yang masuk surga tanpa hisab, dan berharap menjadi bagian kedua seandainya tidak mampu menjadi pertama.

Dari dalil ini Islam telah menciptakan konsep matriks yang disimbolkan dengan tiga bagian umat yang kelak akan dihisab di akhirat. Dalam matematika konsep seperti ini dikenal dengan sebutan pembagian kesatuan matriks yang didalamnya terkandung unsur-unsur pembangun (elemen) matriks.

## 2.7 Kajian Aljabar dalam Islam

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Diketahui bahwa kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qur'an. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan suatu himpunan karena himpunan itu sendiri adalah merupakan kumpulan-kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam Al-Qur'an surat An-Nisa' ayat 171 disebutkan.

*Wahai ahli kitab (yahudi dan nasrani) janganlah kamu melampaui batas dalam perkara agama kamu, dan janganlah kamu mengatakan sesuatu terhadap Allah melainkan yang benar, sesungguhnya Al-masih Isa ibn Maryam itu hanya pesuruh Allah dan kalimah Allah yang disampaikan-Nya kepada Maryam, dan (ia juga tiupan) roh daripada-Nya. Maka berimanlah kamu kepada Allah dan Rosul-rosul-Nya, dan janganlah kamu mengatakan:"(Tuhan itu) tiga". Berhentilah (daripada mengatakan yang demikian), supaya menjadi kebaikan bagi kamu. Sesungguhnya Allah ialah Tuhan Yang Maha Esa, Maha Suci Allah daripada mempunyai anak. Bagi Allah jualah segala yang ada di langit dan yang ada di bumi. Dan cukuplah Allah sebagai pelindung.* (Q. S. An-Nisa': 171).

Dalam ayat 171 surat An-Nisa' ini dijelaskan bahwa di alam semesta digolongkan menjadi dua kelompok, yaitu satu kelompok yang berada di langit dan satu kelompok lagi berada di bumi (Hamzah, 2003:187).

# BAB III

# PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan membahas tentang matriks interval atas aljabar min-plus, mulai dari penjabaran definisi, teorema dan bukti, beserta contohnya. Dalam menyelesaikan matriks interval atas aljabar min-plus ini yang merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu semi-*field* idempoten $R_{\min}$ (himpunan bilangan real dengan operasi min dan plus). Tujuannya adalah untuk mendefinisikan tentang matriks interval atas aljabar min-plus dan menjabarkan sifat-sifatnya kemudian memberikan bukti pada tiap-tiap sifatnya.

## 3.1 Bentuk Matriks Interval atas Aljabar Min-Plus

**Definisi 3.1**

Didefinisikan interval (tertutup) dalam $R_{min}$ adalah suatu himpunan bagian dari $R_{min}$ yang berbentuk x = $[\underline{x}, \overline{x}] = \{ x \in R_{min} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$. Bilangan $x \in R_{min}$ dapat dinyatakan sebagai interval x = $[x,\ x]$. Interval dalam $R_{min}$ misalnya [2, 3], [-4, 1], [0, 0] = 0 dan $[\varepsilon,\ \varepsilon] = \varepsilon$ (Litvinov & Sobolevskii, 2001).

Contoh: $[-1, 1] \ \overline{\oplus}\ [1, 3] = [-1 \oplus 1, 1 \oplus 3]$

$= [\min(-1, 1), \min(1, 3)]$

$= [-1, 1]$

dan $[-1, 1] \ \overline{\otimes}\ [1, 3] = [(-1 + 1), (1 + 3)]$

$= [0, 4]$.

**Definisi 3.2**

Didefinisikan I (R) $^{mxm}_{min}$: = $\{A=(A_{ij}) \mid A_{ij} \in I(R)_{min}$, untuk $i$ = 1, 2, …, m, $j$ = 1, 2, …, n$\}$. Matriks anggota I (R) $^{mxn}_{min}$ disebut matriks interval min-plus.

Contoh: $\quad A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$

Untuk mempermudah dalam pengoperasian matriks berikut ini diberikan definisi mengenai operasi-operasi dalam matriks.

**Definisi 3.3**

Diketahui $\alpha \in \mathrm{I(R)}_{min}$, dan A, B $\in$ $\mathrm{I\,(R)}_{min}^{mxm}$. Didefinisikan operasi perkalian skalar $\overline{\otimes}$ dengan α $\overline{\otimes}$ A adalah matriks yang unsur ke-*ij*-nya: $(\alpha \,\overline{\otimes}\, A)_{ij} = \alpha \,\overline{\otimes}\, A_{ij}$.

Contoh: α $\overline{\otimes}$ A

Misal $\alpha = [2,5]$ dan $A = \begin{bmatrix} [0,2] & [5,7] \\ [-1,3] & [3,4] \end{bmatrix}$, maka $\alpha \,\overline{\otimes}\, A =$

$$[2,5] \,\overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,2] & [5,7] \\ [-1,3] & [3,4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2,5] & \overline{\otimes} & [0,2] & [2,5] & \overline{\otimes} & [5,7] \\ [2,5] & \overline{\otimes} & [-1,3] & [2,5] & \overline{\otimes} & [3,4] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(2,5)+(0,2)] & [(2,5)+(5,7)] \\ [(2,5)+(-1,3)] & [(2,5)+(3,4)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [2,7] & [7,12] \\ [1,8] & [5,9] \end{bmatrix}$$

**Definisi 3.4**

Didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dengan A $\overline{\oplus}$ B adalah matriks yang unsur ke-*ij*-nya: $(A \,\overline{\oplus}\, B)_{ij} = A_{ij} \,\overline{\oplus}\, B_{ij}$ untuk *i* = 1, 2, …, m dan *j* = 1, 2, …, n.

Misalnya $A = \begin{bmatrix} [0,2] & [5,7] \\ [-1,3] & [3,4] \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} [2,3] & [3,5] \\ [1,4] & [7,9] \end{bmatrix}$

Contoh: $(A \,\overline{\oplus}\, B)$

Maka: $(A \,\overline{\oplus}\, B) = \left( \begin{bmatrix} [0,2] & [5,7] \\ [-1,3] & [3,4] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,3] & [3,5] \\ [1,4] & [7,9] \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{pmatrix} [0,2]\,\overline{\oplus}\,[2,3] & [5,7]\,\overline{\oplus}\,[3,5] \\ [-1,3]\,\overline{\oplus}\,[1,4] & [3,4]\,\overline{\oplus}\,[7,9] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [0,2] & [3,5] \\ [-1,3] & [3,4] \end{bmatrix}$$

**Definisi 3.5**

Diketahui A ∈ I (R) $^{mxm}_{min}$, B ∈ I (R) $^{mxm}_{min}$. Didefinisikan operasi $\overline{\otimes}$ dengan A $\overline{\otimes}$ B adalah matriks yang unsur ke-*ij*-nya: $(A\,\overline{\otimes}\,B)_{ij} = \overline{\underset{k\,=\,1}{\oplus}}\,(\,A_{ik}\ \overline{\otimes}\ B_{kj})$ untuk *i* = 1, 2, … , m dan *j* = 1, 2, …, n.

Contoh: $(A\,\overline{\otimes}\,B) =$

$$(A\,\overline{\otimes}\,B)_{ij} = \overline{\underset{k\,=\,1}{\oplus}}\,(\,A_{ik}\ \overline{\otimes}\ B_{kj})$$

$$= \begin{matrix} \alpha_{11}\,\overline{\otimes}\,b_{11} \\ \alpha_{11}\,\overline{\otimes}\,b_{12} \\ \alpha_{21}\,\overline{\otimes}\,b_{11} \\ \alpha_{21}\,\overline{\otimes}\,b_{12} \end{matrix}$$ memasukkan nilai 1-2 (disusun sedemikian)

$$= \begin{bmatrix} [\alpha_{11}\,\overline{\otimes}\,b_{11}] & [\alpha_{11}\,\overline{\otimes}\,b_{12}] \\ [\alpha_{21}\,\overline{\otimes}\,b_{11}] & [\alpha_{21}\,\overline{\otimes}\,b_{12}] \end{bmatrix}$$ (disusun dalam bentuk matriks)

$$= \begin{bmatrix} [\alpha_{11} + b_{11}] & [\alpha_{11} + b_{12}] \\ [\alpha_{21} + b_{11}] & [\alpha_{21} + b_{12}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [c_{11}] & [c_{21}] \\ [c_{21}] & [c_{22}] \end{bmatrix}$$

A = $[[-2,1]\quad[1,1]]$, B = $\begin{bmatrix} [4,7] \\ [1,3] \end{bmatrix}$

A $\overline{\otimes}$ B $=[[-2,1]\quad[1,1]]\ \overline{\otimes}\ \begin{bmatrix} [4,7] \\ [1,3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-2,1]\overline{\otimes}[4,7] & [1,1]\overline{\otimes}[4,7] \\ [-2,1]\overline{\otimes}[1,3] & [1,1]\overline{\otimes}[1,3] \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} [-2,1]+[4,7] & [1,1]+[4,7] \\ [-2,1]+[1,3] & [1,1]+[1,3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [2,8] & [5,8] \\ [2,4] & [2,4] \end{bmatrix}.$$

Untuk mempermudah dalam mengoperasikan matriks interval berikut diberikan definisi untuk pengoperasian matriks interval.

**Definisi 3.6**

Untuk setiap matriks interval $A \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A_{ij}}) \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$ dan $\overline{A} = (\overline{A_{ij}}) \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$, yang berturut-turut disebut matriks batas bawah dan matris batas atas interval $A$.

Contoh

Diberikan matriks interval $A = \begin{bmatrix} [-1, 1] & [0,0] \\ [3, 5] & [6, 8] \end{bmatrix}$, maka $\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ dan $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

**Definisi 3.7**

Diberikan matriks interval A $\in$ I (R) $_{min}^{mxm}$, dengan $\underline{A}$ dan dan $\overline{A}$ berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan interval matriks dari $A$ yaitu $[\underline{A} \quad \overline{A}]$ = $\{ A |\ \underline{A} \leq \overline{A}\}$ dan I (R) $_{min}^{mxm}$ = $\{ [\underline{A} \quad \overline{A}] \mid \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$ $\}$.

Contoh

Diberikan matriks interval A =$\begin{bmatrix} [-1, 1] & [0,0] \\ [3, 5] & [6, 8] \end{bmatrix}$.

Interval matriks dari A adalah $[\underline{A} \quad \overline{A}]$ = $\left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\right]$.

**Definisi 3.8**

Berdasarkan sifat kekonsistenan relasi urutan $\leq$ dalam matriks, didefinisikan operasi-operasi interval matriks berikut.

1. Diketahui $\alpha \in \mathrm{I(R)}_{min}$, $[\underline{A} \quad \overline{A}]$ dan $[\underline{B} \quad \overline{B}] \in$ (I (R) $_{min}^{mxm}$).

Didefinisikan $\alpha \overline{\otimes} [\underline{A} \quad \overline{A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A},\ \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan $[\underline{A} \quad \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B} \quad \overline{B}] =$

$[\underline{A} \oplus \underline{B} \quad \overline{A} \oplus \overline{B}]$.

2. Diketahui $[\underline{A} \quad \overline{A}]$ dan $[\underline{B} \quad \overline{B}] \in \left(\mathrm{I}\ (\mathrm{R})\ ^{mxm}_{min}\right)$. Didefinisikan $[\underline{A} \quad \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B} \quad \overline{B}]$ $= [\underline{A} \otimes \overline{A} \quad \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Contoh 1: Jika $\alpha = [2,5]$ $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$

$$\alpha \overline{\otimes} [\underline{A} \quad \overline{A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A},\ \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$$

$$[2,5] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \otimes \begin{matrix} 0 & 6 \\ 3 & 2 \end{matrix}, 5 \otimes \begin{matrix} 0 & 8 \\ 5 & 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 & 13 \\ 5 & 4 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [2,5] & [8,13] \\ [5,10] & [4,7] \end{bmatrix}$$

$$[\underline{A} \quad \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B} \quad \overline{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B} \quad \overline{A} \oplus \overline{B}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & \oplus & 2 & 0 \\ 3 & 2 & & -2 & 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 8 & \oplus & 6 & 2 \\ 5 & 2 & & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] & [0,2] \\ [-2,-1] & [2,2] \end{bmatrix}.$$

Contoh 2: $[\underline{A} \quad \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B} \quad \overline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B} \quad \overline{A} \otimes \overline{B}]$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & \otimes & 2 & 0 & 0 & 8 & \otimes & 6 & 2 \\ 3 & 2 & & -2 & 4 & 5 & 2 & & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(2,10) & \min(0,10) & \min(6,7) & \min(2,13) \\ \min(5,0) & \min(3,6) & \min(11,1) & \min(7,7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [0,1] & [3,7] \end{bmatrix}.$$

**Definisi 3.9**

Notasi I (R) $_{min}^{mxm}$ sebagai himpunan semua matriks berukuran $m \times m$ dengan entri-entri elemen $R_{\min}$, didefinisikan å $\coloneqq +\infty$ dan $e \coloneqq 0$. Untuk $A, B \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$

$(A \overline{\oplus} B) = C$, maka $c_{ij} = a_{ij} \overline{\oplus} b_{ij}$

dan $(A \overline{\otimes} B) = D$, maka $d_{ij} = \underset{k}{\overline{\otimes}}(a_{ik} \overline{\otimes} b_{kj})$

Dengan $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$.

**Contoh:**

$(A \overline{\oplus} B) = C$, maka $c_{ij} = a_{ij} \overline{\oplus} b_{ij}$ untuk $i$ = 1, 2, …, m dan $j$ = 1, 2, …, n.

$$= a_{ij} \overline{\oplus} b_{ij}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} [\min(a_{11}, b_{11})] & [\min(a_{12}, b_{12})] \\ [\min(a_{21}, b_{21})] & [\min(a_{22}, b_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$, dan C $= \begin{bmatrix} [0,0] & [0,2] \\ [-2,-1] & [2,2] \end{bmatrix}$

$$(A \overline{\oplus} B) = \left(\begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} [\min([0,0],[6,8])] & [\min([2,6],[0,2])] \\ [\min([3,5],[2,2])] & [\min([-2,-1],[4,5]] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] & [0,2] \\ [-2,-1] & [2,2] \end{bmatrix}$$

$(A \overline{\otimes} B) = D$, maka $d_{ij} = \underset{k}{\overline{\oplus}}$ ( $\mathrm{A}_{ik} \overline{\otimes} \mathrm{B}_{kj}$) untuk $i$ = 1, 2, …, m dan $j$ = 1, 2, ., n.

$$(A \overline{\otimes} B) = \underset{k}{\overline{\oplus}} (\mathrm{A}_{ik} \overline{\otimes} \mathrm{B}_{kj})$$

$$= \overline{\underset{k\,=\,1}{\oplus}}\,(\mathrm{A}_{ik} \overline{\otimes} \mathrm{B}_{kj}) \overline{\oplus} \overline{\underset{k\,=\,2}{\oplus}}\,(\mathrm{A}_{ik} \overline{\otimes} \mathrm{B}_{kj})$$

$$= \begin{matrix} \alpha_{11} \overline{\otimes} b_{11} \overline{\oplus} \alpha_{12} \overline{\otimes} b_{21} \\ \alpha_{11} \overline{\otimes} b_{12} \overline{\oplus} \alpha_{12} \overline{\otimes} b_{22} \\ \alpha_{21} \overline{\otimes} b_{11} \overline{\oplus} \alpha_{22} \overline{\otimes} b_{21} \\ \alpha_{21} \overline{\otimes} b_{12} \overline{\oplus} \alpha_{22} \overline{\otimes} b_{22} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(\alpha_{11} \overline{\otimes} b_{11}) \overline{\oplus} (\alpha_{12} \overline{\otimes} b_{21})] & [(\alpha_{11} \overline{\otimes} b_{12}) \overline{\oplus} (\alpha_{12} \overline{\otimes} b_{22})] \\ [(\alpha_{21} \overline{\otimes} b_{11}) \overline{\oplus} (\alpha_{22} \overline{\otimes} b_{21})] & [(\alpha_{21} \overline{\otimes} b_{12}) \overline{\oplus} (\alpha_{22} \overline{\otimes} b_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(\alpha_{11} + b_{11}) \overline{\oplus} (\alpha_{12} + b_{21})] & [(\alpha_{11} + b_{12}) \overline{\oplus} (\alpha_{12} + b_{22})] \\ [(\alpha_{21} + b_{11}) \overline{\oplus} (\acute{n}_{22} + b_{21})] & [(\alpha_{21} + b_{12}) \overline{\oplus} (\alpha_{22} + b_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(c_{11}) \overline{\oplus} (c_{12})] & [(c_{11}) \overline{\oplus} (c_{12})] \\ [(c_{21}) \overline{\oplus} (c_{22})] & [(c_{21}) \overline{\oplus} (c_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [min(c_{11}), (c_{12})] & [min(c_{11}), (c_{12})] \\ [min(c_{21}), (c_{22})] & [min(c_{21}), (c_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}, \text{dan C} = \begin{bmatrix} [0,0] & [0,2] \\ [-2,-1] & [2,2] \end{bmatrix}$$

$$\left(A \overline{\otimes} B\right) = D$$

$$\left(\begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} [0,0] \overline{\otimes} [2,6] \overline{\oplus} [6,8] \overline{\otimes} [-2,-1] & [0,0] \overline{\otimes} [0,2] \overline{\oplus} [6,8] \overline{\otimes} [4,5] \\ [3,5] \overline{\otimes} [2,6] \overline{\oplus} [2,2] \overline{\otimes} [-2,-1] & [3,5] \overline{\otimes} [0,2] \overline{\oplus} [2,2] \overline{\otimes} [4,5] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] + [2,6] \overline{\oplus} [6,8] + [-2,-1] & [0,0] + [0,2] \overline{\oplus} [6,8] + [4,5] \\ [3,5] + [2,6] \overline{\oplus} [2,2] + [-2,-1] & [3,5] + [0,2] \overline{\oplus} [2,2] + [4,5] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [2,6] \overline{\oplus} [4,7] & [0,2] \overline{\oplus} [10,13] \\ [8,11] \overline{\oplus} [0,1] & [3,7] \overline{\oplus} [6,7] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min[2,6],[4,7] & \min[0,2],[10,13] \\ \min[8,11],[0,1] & \min[3,7],[6,7] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [0,1] & [3,7] \end{bmatrix}.$$

### 3.2 Sifat-Sifat Operasi Matriks Interval atas Aljabar Min-Plus

Pernyataan berikut berlaku untuk sebarang matriks interval A, B dan C asalkan operasi yang dimaksud terdefinisi (Mustofa, 2011:3).

1. I (R) $_{min}^{mxm}$ memiliki sifat assosiatif pada operasi $\overline{\oplus}$:

   A $\overline{\oplus}$ (B $\overline{\oplus}$ C) = (A $\overline{\oplus}$ B) $\overline{\oplus}$ C

   $\forall A, B, C \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$.

   **Bukti**

   $$\left[A \overline{\oplus} \left(B \overline{\oplus}\, C\right)\right]_{ij} = D_{ij}$$

   $$= \left(d_{ij}\right)$$

   $$= \left(a_{ij}\right) \overline{\oplus} \left(b_{ij} \overline{\oplus}\, c_{ij}\right) \qquad \text{definisi 3.9}$$

   $$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \overline{\oplus} \left( \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

   $$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} min(b_{11}, c_{11}) & min(b_{21}, c_{21}) \\ min(b_{21}, c_{21}) & min(b_{22}, c_{22}) \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} min(a_{11},\ b_{11}, c_{11}) & min(a_{21}, b_{21}, c_{21}) \\ min(a_{21,} b_{21}, c_{21}) & min(a_{22,} b_{22}, c_{22}) \end{bmatrix}$$

   $$= \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

   $$= \left(a_{ij} \overline{\oplus}\, b_{ij}\right) \overline{\oplus}\, c_{ij} \qquad \text{sifat assosiatif}$$

   $$= \left[\left(A \overline{\oplus}\, B\right) \overline{\oplus}\, C\right]_{ij}$$

   Jadi, $\left[A \overline{\oplus} \left(B \overline{\oplus}\, C\right)\right]_{ij} = \left[\left(A \overline{\oplus}\, B\right) \overline{\oplus}\, C\right]_{ij}$.

Penulis memberi contoh seperti di bawah ini;

Jika $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [-1,2] \\ [1,1] & [2,2] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [2,1] & [4,5] \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} [1,7] & [1,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}$

maka:

$$A \overline{\oplus} \left(B \overline{\oplus} C\right) = \begin{bmatrix} [0,0] & [-1,2] \\ [1,1] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \left( \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [2,1] & [4,5] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [1,7] & [1,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] & [-1,2] \\ [1,1] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} \min([2,6],[1,7]) & \min([0,2],[1,2]) \\ \min([2,1],[2,9]) & \min([4,5],[4,5]) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min([0,0],[2,6],[1,7]) & \min([-1,2],[0,2],[1,2]) \\ \min([1,1],[2,2],[2,9]) & \min([2,1],[4,5],[4,5]) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min([0,0],[2,6]) & \min([-1,2],[0,2]) \\ \min([1,1],[2,2]) & \min([2,1],[4,5]) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} [1,7] & [1,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}$$

$$= \left( \begin{bmatrix} [0,0] & [-1,2] \\ [1,1] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [2,1] & [4,5] \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [1,7] & [1,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}$$

$$= \left(A \overline{\oplus} (B \overline{\oplus} C)\right)$$

2. I (R) $_{min}^{mxm}$ memiliki sifat komutatif pada operasi $\overline{\oplus}$

A $\overline{\oplus}$ B = B $\overline{\oplus}$ A

$\forall A, B \in$ (R) $_{min}^{mxm}$

**Bukti**

$$[A \overline{\oplus} B]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= (a_{ij}) \overline{\oplus} (b_{ij}) \qquad \text{definisi 3.9}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(a_{11}, b_{11}) & \min(a_{21}, b_{21}) \\ \min(a_{21}, b_{21}) & \min(a_{22}, b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$= (b_{ij})\overline{\oplus}(a_{ij})$ sifat komutatif

$= \min(b_{ij}, a_{ij})$

$= [b_{ij}\ \overline{\oplus}\ a_{ij}]$

$= [B\ \overline{\oplus}\ A]_{ij}$

Jadi, $[A\ \overline{\oplus}\ B]_{ij} = [B\ \overline{\oplus}\ A]_{ij}$.

**Contoh**

Jika $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$ maka:

$$A\ \overline{\oplus}\ B = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min([0,0],[2,6]) & \min([6,8],[0,2]) \\ \min([3,5],[-2,-1]) & \min([2,2],[4,5]) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min([2,6],[0,0]) & \min([0,2],[6,8]) \\ \min([-2,-1],[3,5]) & \min([4,5],[2,2]) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$$

$$= B\ \overline{\oplus}\ A$$

Jadi,

$$\begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$$

3. I (R) $_{min}^{mxm}$ memiliki sifat assosiatif pada operasi $\overline{\otimes}$:

   A $\overline{\otimes}$ (B $\overline{\otimes}$ C) = (A $\overline{\otimes}$ B) $\overline{\otimes}$ C

   $\forall A, B, C \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$: $A\ \overline{\otimes}\ (B\ \overline{\otimes}\ C) = \left((A\ \overline{\otimes}\ B)\ \overline{\otimes}\ C\right)$.

**Bukti**

$\forall A, B, C \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})\,^{mxm}_{min}$

$\left[A \,\overline{\otimes}\, \left(B \,\overline{\otimes}\, C\right)\right]_{ńj} = D_{ij}$

$$= \underset{k}{\overset{n}{\oplus}} a_{ik} \left( \underset{l}{\overset{n}{\oplus}} b_{kl} \,\overline{\otimes}\, c_{lj} \right)$$ definisi 3.9

$$= \underset{k=1}{\overset{n}{\oplus}} a_{ik} \left( \underset{l=1}{\overset{n}{\oplus}} b_{kl} \,\overline{\otimes}\, c_{lj} \right)$$

$$= \begin{matrix} \alpha_{11} \; ( \; b_{11} \,\overline{\otimes}\, c_{11}) \\ \alpha_{11} \; ( \; b_{11} \,\overline{\otimes}\, c_{12}) \\ \alpha_{21} \; ( \; b_{11} \,\overline{\otimes}\, c_{11}) \\ \alpha_{21} \; ( \; b_{11} \,\overline{\otimes}\, c_{12}) \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \alpha_{11} \,\overline{\otimes}\, b_{11} \,\overline{\otimes}\, c_{11} \\ \alpha_{11} \,\overline{\otimes}\, b_{11} \,\overline{\otimes}\, c_{12} \\ \alpha_{21} \,\overline{\otimes}\, b_{11} \,\overline{\otimes}\, c_{11} \\ \alpha_{21} \,\overline{\otimes}\, b_{11} \,\overline{\otimes}\, c_{12} \end{matrix}$$

$$= \underset{k=1}{\overset{n}{\oplus}} \underset{k=1}{\overset{n}{\oplus}} a_{ik} \,\overline{\otimes}\, b_{kl} \,\overline{\otimes}\, c_{lj}$$

$$= \underset{k=1}{\overset{n}{\oplus}} \left( \underset{k=1}{\overset{n}{\oplus}} a_{ik} \,\overline{\otimes}\, b_{kl} \right) \overline{\otimes}\, c_{lj}$$ sifat assosiatif

$$= \left[\left(a_{ij} \,\overline{\otimes}\, b_{ij}\right) \overline{\otimes}\, c_{ij}\right]$$

$$= \left[\left(A \,\overline{\otimes}\, B\right) \overline{\otimes}\, C\right]_{ij}$$

Jadi, $\left[A \,\overline{\otimes}\, (B \,\overline{\otimes}\, C)\right]_{ij} = \left[(A \,\overline{\otimes}\, B) \,\overline{\otimes}\, C\right]_{ij}$.

**Contoh**

Jika $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$, dan C $\begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}$

maka:

$$A \overline{\otimes}(B \overline{\otimes} C) = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \left( \oplus \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} ([2,6]+[1,7]) \overline{\oplus} ([0,2]+[2,9]) & ([2,6]+[-3,2]) \overline{\oplus} ([0,2]+[4,5]) \\ ([-2,-1]+[1,7]) \overline{\oplus} ([-2,-1]+[2,9]) & ([-2,-1]+[-3,2]) \overline{\oplus} ([4,5]+[4,5]) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} ([2,6]+[1,7]) \overline{\oplus} ([0,2]+[2,9]) & ([2,6]+[-3,2]) \overline{\oplus} ([0,2]+[4,5]) \\ ([-2,-1]+[1,7]) \overline{\oplus} ([-2,-1]+[2,9]) & ([-2,-1]+[-3,2]) \overline{\oplus} ([4,5]+[4,5]) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} ([0,0]+([2,6]+[1,7])) \overline{\oplus} ([6,8]+[0,2]+[2,9]) & ([0,0]+[2,6]+[-3,2]) \overline{\oplus} ([6,8]+[0,2]+[4,5]) \\ ([3,5]+([-2,-1]+[1,7]) \overline{\oplus} ([2,2]+[-2,-1]+[2,9]) & ([3,5]+[-2,-1]+[-3,2]) \overline{\oplus} ([2,2]+[4,5]+[4,5]) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} ([0,0]+([2,6])) \overline{\oplus} ([6,8]+[0,2]) & ([0,0]+[2,6]) \overline{\oplus} ([6,8]+[0,2]) \\ ([3,5]+([-2,-1])) \overline{\oplus} ([2,2]+[-2,-1]) & ([3,5]+[-2,-1]) \overline{\oplus} ([2,2]+[4,5]) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right) \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}$$

$$= \left( \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right) \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}$$

$$= (A \overline{\otimes} B) \overline{\otimes} C$$

Jadi, $\begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right) =$

$$\left( \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right) \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}.$$

4. Distributif operasi $\overline{\otimes}$ terhadap operasi $\overline{\oplus}$:

   A $\overline{\otimes}$ (B $\overline{\oplus}$ C) = (A $\overline{\otimes}$ B) $\overline{\oplus}$ (A $\overline{\oplus}$ C)

   $\forall A, B, C \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm}: A\overline{\otimes}\left(B\overline{\oplus}C\right) = \left(A\overline{\otimes}B\right)\overline{\oplus}\left(A\overline{\otimes}C\right).$

   **Bukti:**

   $\forall A, B, C \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm}$

$$\left[A\,\overline{\otimes}\left(B\,\overline{\oplus}\,C\right)\right]_{ij} = D_{ij}$$

$= d_{i}$ 瘠

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}}\; a_{ik}\left(b_{kj}\,\overline{\oplus}\,c_{kj}\right) \qquad \text{definisi 3.9}$$

$$= \begin{array}{l} a_{11}\left(b_{11}\,\overline{\oplus}\,c_{11}\right) \\ a_{11}\left(b_{12}\,\overline{\oplus}\,c_{12}\right) \\ a_{21}\left(b_{11}\,\overline{\oplus}\,c_{11}\right) \\ a_{21}\left(b_{12}\,\overline{\oplus}\,c_{12}\right) \end{array}$$

$$= \begin{array}{l} \left(a_{11}\,\overline{\otimes}\,b_{11}\right) \oplus \left(a_{11}\,\overline{\otimes}\,c_{11}\right) \\ \left(a_{11}\,\overline{\otimes}\,b_{12}\right) \oplus \left(a_{11}\,\overline{\otimes}\,c_{12}\right) \\ \left(a_{21}\,\overline{\otimes}\,b_{11}\right) \oplus \left(a_{21}\,\overline{\otimes}\,c_{11}\right) \\ \left(a_{21}\,\overline{\otimes}\,b_{12}\right) \oplus \left(a_{21}\,\overline{\otimes}\,c_{12}\right) \end{array} \qquad \text{sifat distributif}$$

$$= \begin{array}{l} \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{11}\,\overline{\otimes}\,b_{11}\right)\right) \oplus \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{11}\,\overline{\otimes}\,c_{11}\right)\right) \\ \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{11}\,\overline{\otimes}\,b_{12}\right)\right) \oplus \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{11}\,\overline{\otimes}\,c_{12}\right)\right) \\ \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{21}\,\overline{\otimes}\,b_{11}\right)\right) \oplus \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{21}\,\overline{\otimes}\,c_{11}\right)\right) \\ \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{21}\,\overline{\otimes}\,b_{12}\right)\right) \oplus \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{21}\,\overline{\otimes}\,c_{12}\right)\right) \end{array}$$

$$= \left( \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{ik} \overline{\otimes} b_{kj}\right) \right) \oplus \left( \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{ik} \overline{\otimes} c_{kj}\right) \right)$$

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left( \left(a_{ik} \overline{\otimes} b_{kj}\right) \oplus \left(a_{ik} \overline{\otimes} c_{kj}\right) \right) \text{ sifat distributif}$$

$$= \left[\left(a_{ij} \overline{\otimes} b_{ij}\right) \oplus \left(a_{ij} \overline{\otimes} c_{ij}\right)\right]$$

$$= \left[\left(A \overline{\otimes} B\right) \oplus \left(A \overline{\otimes} C\right)\right]_{ij}$$

Jadi, $\left[A \overline{\otimes} \left(B \overline{\oplus} C\right)\right]_{ij} = \left[\left(A \overline{\otimes} B\right) \overline{\oplus} \left(A \overline{\otimes} C\right)\right]_{ij}$.

**Contoh:**

Jika $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$,

dan $C = \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}$

$$A \overline{\otimes} (B \overline{\oplus} C) = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} [2,6] \overline{\oplus} [1,7] & [0,2] \overline{\oplus} [-3,2] \\ [-2,-1] \overline{\oplus} [2,9] & [4,5] \overline{\oplus} [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} [2,6] \overline{\oplus} [1,7] & [0,2] \overline{\oplus} [-3,2] \\ [-2,-1] \overline{\oplus} [2,9] & [4,5] \overline{\oplus} [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} ([0,0] \overline{\otimes} [2,6]) \overline{\oplus} ([6,8] \overline{\otimes} [-2,-1]) & ([0,0] \overline{\otimes} [0,2]) \overline{\oplus} ([6,8] \overline{\otimes} [4,5]) \\ ([3,5] \overline{\otimes} [2,6]) \overline{\oplus} ([2,2] \overline{\otimes} [-2,-1]) & ([3,5] \overline{\otimes} [0,2]) \overline{\oplus} ([2,2] \overline{\otimes} [4,5]) \end{bmatrix} \overline{\oplus}$$

$$\begin{bmatrix} ([0,0] \overline{\otimes} [1,7]) \overline{\oplus} ([6,8] \overline{\otimes} [1,7]) & ([0,0] \overline{\otimes} [-3,2]) \overline{\oplus} ([6,8] \overline{\otimes} [4,5]) \\ ([3,5] \overline{\otimes} [2,9]) \overline{\oplus} ([2,2] \overline{\otimes} [2,9]) & ([3,5] \overline{\otimes} [-3,2]) \overline{\oplus} ([2,2] \overline{\otimes} [4,5]) \end{bmatrix}$$

$$= \left( \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus}$$

$$\left( \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus}$$

$$\left( \left[ \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right] \right)$$

$$= (A \overline{\otimes} B) \overline{\oplus} (A \overline{\otimes} C)$$

Jadi, $\begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right) =$

$$\left( \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus}$$

$$\left( \left[ \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix} \right] \right).$$

5. Distributif operasi $\overline{\oplus}$ terhadap operasi $\overline{\otimes}$:

(A $\overline{\oplus}$ B) $\overline{\otimes}$ C = (A $\overline{\otimes}$ C) $\overline{\oplus}$ (B $\overline{\oplus}$ C)

$\forall A, B, C \in$ I (R) $^{mxm}_{min}$: $(A \overline{\oplus} B) \overline{\otimes} C = (A \otimes C) \overline{\oplus} (B \overline{\otimes} C)$.

**Bukti**

$\forall A, B, C \in$ I (R) $^{mxm}_{min}$

$\left[ \left( A \overline{\oplus} B \right) \overline{\otimes} C \right]_{ij} = D_{ij}$

$$= d_{ij}$$

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left( a_{ik} \overline{\oplus} b_{ik} \right) c_{kj} \qquad \text{definisi 3.9}$$

$$= \begin{matrix} \left(a_{11} \overline{\oplus} b_{11}\right) c_{11} \\ \left(a_{11} \overline{\oplus} b_{11}\right) c_{11} \\ \left(a_{11} \overline{\oplus} b_{11}\right) c_{11} \\ \left(a_{11} \overline{\oplus} b_{11}\right) c_{11} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \left(a_{11} \overline{\otimes} c_{11}\right) \oplus \left(b_{11} \overline{\otimes} c_{11}\right) \\ \left(a_{11} \overline{\otimes} c_{12}\right) \oplus \left(b_{11} \overline{\otimes} c_{12}\right) \\ \left(a_{21} \overline{\otimes} c_{11}\right) \oplus \left(b_{21} \overline{\otimes} c_{11}\right) \\ \left(a_{21} \overline{\otimes} c_{12}\right) \oplus \left(b_{21} \overline{\otimes} c_{12}\right) \end{matrix} \quad \text{sifat distributif}$$

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{ik} \overline{\otimes} c_{kj}\right) \overline{\oplus} \left(b_{ik} \overline{\otimes} c_{kj}\right)$$

$$= \begin{matrix} \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{11} \overline{\otimes} c_{11}\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \left(b_{11} \overline{\otimes} c_{11}\right)\right) \\ \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{11} \overline{\otimes} c_{12}\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \left(b_{11} \overline{\otimes} c_{12}\right)\right) \\ \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{21} \overline{\otimes} c_{11}\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \left(b_{21} \overline{\otimes} c_{11}\right)\right) \\ \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{21} \overline{\otimes} c_{12}\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \left(b_{21} \overline{\otimes} c_{12}\right)\right) \end{matrix}$$

$$= \left(\overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(a_{ik} \overline{\otimes} c_{kj}\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \left(b_{ik} \overline{\otimes} c_{kj}\right)\right)$$

$$= \left[\left(a_{ij} \overline{\otimes} c_{ij}\right) \oplus \left(b_{ij} \overline{\otimes} c_{ij}\right)\right]$$

$$= \left[\left(A \overline{\otimes} C\right) \overline{\oplus} \left(B \overline{\otimes} C\right)\right]_{ij}$$

Jadi, $\left[\left(A \overline{\oplus} B\right) \overline{\otimes} C\right]_{ij} = \left[\left(A \overline{\oplus} B\right) \overline{\otimes} C\right]_{ij}$.

Jika $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$, dan $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} [1,7] & [-3,2] \\ [2,9] & [4,5] \end{bmatrix}$

**Contoh**

Jika $A = \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}$

maka:

$$(A\overline{\oplus}B)\,\overline{\otimes}\,C = \left(\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix}\right) \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix}[0,0]\,\overline{\oplus}\,[2,6] & [6,8]\,\overline{\oplus}\,[0,2]\\ [3,5]\,\overline{\oplus}\,[-2,-1] & [2,2]\,\overline{\oplus}\,[4,5]\end{bmatrix}\right) \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{matrix}([0,0]\,\overline{\otimes}\,[1,7])\,\overline{\oplus}\,([6,8]\,\overline{\otimes}\,[2,9])\\ ([3,5]\,\overline{\otimes}\,[1,7])\,\overline{\oplus}\,([2,2]\,\overline{\otimes}\,[2,9])\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}([0,0]\,\overline{\otimes}\,[-3,2])\,\overline{\oplus}\,([6,8]\,\overline{\otimes}\,[4,5])\\ ([3,5]\,\overline{\otimes}\,[-3,2])\,\overline{\oplus}\,([2,2]\,\overline{\otimes}\,[4,5])\end{matrix}\right]\overline{\oplus}$$

$$\left[\begin{matrix}([0,0]\,\overline{\otimes}\,[1,7])\,\overline{\oplus}\,([6,8]\,\overline{\otimes}\,[2,9])\\ ([-2,-1]\,\overline{\otimes}\,[1,7])\,\overline{\oplus}\,([4,5]\,\overline{\otimes}\,[2,9])\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}([2,6]+[-3,2])\,\overline{\oplus}\,([0,2]+[4,5])\\ ([-2,-1]+[-3,2])\,\overline{\oplus}\,([4,5]+[4,5])\end{matrix}\right]$$

$$= \left(\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}\right)\overline{\oplus}$$

$$\left(\begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}\right)\overline{\oplus}$$

$$\left(\begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}\right)$$

$$= (A\,\overline{\otimes}\,C)\,\overline{\oplus}\,(B\,\overline{\otimes}\,C)$$

Jadi, $\left(\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix}\right) \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix} =$

$\left(\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}\right)\overline{\oplus}$

$$\left(\begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix}[1,7] & [-3,2]\\ [2,9] & [4,5]\end{bmatrix}\right).$$

6. Idempoten terhadap operasi $\overline{\oplus}$:

A $\overline{\oplus}$ A = A

$\forall A \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})\,^{mxm}_{min} : A \overline{\oplus} A = A \overline{\oplus} A = A.$

**Bukti**

$\forall\, A \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})\,^{mxn}_{min}$

$$\left[A \overline{\oplus} A\right]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= (a_{ij}) \overline{\oplus} (a_{ij}) \quad \text{definisi 3.9}$$

$$= \min\,(a_{ij},\ a_{ij})$$

$$= (a_{ij}) \quad \text{idempoten}$$

$$= A$$

Jadi, $\left[A \overline{\oplus} A\right]_{ij} = A$

**Contoh**

Jika $A = \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}$

maka:

$$A \overline{\oplus} A = \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\min([0,0],[0,0]) & \min([6,8],[6,8])\\ \min([3,5],[3,5]) & \min([2,2],[2,2])\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}$$

$$= A$$

Jadi, $\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}$.

Selanjutnya elemen netral terhadap operasi $\overline{\oplus}$ dan elemen netral terhadap operasi $\overline{\otimes}$ dalam I (R) $_{min}^{mxm}$ berturut-turut adalah matriks E dengan $(E)_{ij}$ = 0, jika i = j dan +∞ jika i ≠ j. Dan matriks $A$ dengan $(\alpha)_{ij}$ = +∞, untuk setiap i dan j. Sehingga diperoleh dua sifat sebagai berikut:

1. Terdapat elemen identitas terhadap $\overline{\oplus}$:

   $\forall\ A \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$ $\exists\ \alpha \in$ I(R)$_{min}$

   $\alpha \overline{\oplus} A = A \overline{\oplus} \alpha$

   **Bukti:**

   $\forall\ A \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$

   $$\begin{aligned}[A \overline{\oplus} \alpha]_{ij} &= D_{ij}\\ &= d_{ij}\\ &= (a_{ij}) \overline{\oplus} (a_{ij})\\ &= \min(a_{ij},\ a_{ij})\\ &= a_{ij}\\ &= A_{ij}\end{aligned}$$

   Jadi, $[A \overline{\oplus} \alpha]_{ij} = A_{ij}$.

   **Contoh:**

   Jika $A = \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}$

   Maka: $A \overline{\oplus} \alpha = \begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix}+\infty & +\infty\\ +\infty & +\infty\end{bmatrix}$

$$= \left(\begin{bmatrix} \min([0,0],+\infty) & \min([6,8],+\infty) \\ \min([3,5],+\infty) & \min([2,2],+\infty) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \min(+\infty,[0,0]) & \min(+\infty,[6,8]) \\ \min(+\infty,[3,5]) & \min(+\infty,[2,2]) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \overline{\oplus} A$$

$$= A$$

Jadi, $\left[\begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}\right] \overline{\oplus} \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} \overline{\oplus} \left[\begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}\right]$$

Dapat dikatakan bahwa I (R) $_{min}^{mxm}$ dengan operasi $\overline{\oplus}$(I (R) $_{min}^{mxm}$ , $\overline{\oplus}$) membentuk semi-grup komutatif dengan eleman identitas $\alpha$, karena memiliki sifat assosiatif dan komutatif terhadap operasi $\overline{\oplus}$.

2. Terdapat elemen identitas terhadap $\overline{\otimes}$, misal $E$ adalah identitas terhadap operasi $\overline{\otimes}$:

$\forall A \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$: $A \overline{\otimes} E = E \overline{\otimes} A$

**Bukti:**

$\forall A \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$

$\left[A \overline{\otimes} E\right]_{\boldsymbol{ij}}$ $\forall A \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$

$$\left[A \overline{\otimes} E\right]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} (a_{kj}) \overline{\otimes} (E_{ik})$$

$= \min[a_{ij} + 0, a_{ij} + 0]$ elemen identitas nol

$= a_{ij}$

$= A_{ij}$

$[E \overline{\otimes} A]_{ij} = D_{ij}$

$= d_{ij}$

$$= \overline{\bigoplus_{k=l}^{n}} (e_{ik}) \overline{\otimes} (\alpha_{kj})$$

$= \min[0 + a_{ij}, 0 + \alpha_{ij}]$

$= \alpha_{ij}$

$= A_{ij}$

Jadi, $[A \overline{\otimes} E]_{ij} = [E \overline{\otimes} A]_{ij} = A_{ij}$.

**Contoh:**

Jika $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$ dan $E = \begin{bmatrix} [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] \end{bmatrix}$

Maka: $A \overline{\otimes} E = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] \end{bmatrix}$

$$= \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ([0,0] + [0,0]) \overline{\oplus} ([6,8] + [0,0]) & ([0,0] + [0,0]) \overline{\oplus} ([6,8] + [0,0]) \\ ([3,5] + [0,0]) \overline{\oplus} ([2,2] + [0,0]) & ([3,5] + [0,0]) \overline{\oplus} ([2,2] + [0,0]) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ([0,0] + [0,0]) \overline{\oplus} ([0,0] + [6,8]) & ([0,0] + [0,0]) \overline{\oplus} ([0,0] + [6,8]) \\ ([0,0] + [3,5]) \overline{\oplus} ([0,0] + [2,2]) & ([0,0] + [3,5]) \overline{\oplus} ([0,0] + [2,2]) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$$

$$= A \overline{\otimes} E$$

Jadi, $A \overline{\otimes} E = E \overline{\otimes} A = A$.

I (R) $_{min}^{mxm}$ dengan operasi $\overline{\otimes}$ I (R) $_{min}^{mxm}$, merupakan semi-ring idempotent dengan elemen identitas *e* karena $\left(\text{I (R)}_{min}^{mxm}, \overline{\otimes}\right)$ memiliki sifat assosiatif terhadap operasi $\overline{\otimes}$. I (R) $_{min}^{m\acute{n}m}$ tidak memiliki komutatif dan tidak memiliki invers sehingga matriks atas aljabar min-plus interval bukan merupakan semi-field.

## 3.3 Sifat-Sifat Operasi Aljabar Min-Plus pada Skalar Interval dan Matriks Interval

Pada bagian ini akan diperkenalkan sifat-sifat matriks interval atas aljabar min-plus pada skalar dan matriks interval dengan membuktikan sifat memberikan contoh.

**Definisi 3.10**

Diketahui $\alpha \in \mathrm{I(R)}_{min}$, A, B $\in$ I (R) $_{min}^{mxm}$. Didefinisikan operasi perkalian skalar $\overline{\otimes}$ dengan $\alpha \overline{\otimes}$ A adalah matriks yang unsur ke-$ij$-nya:

$(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} \mathrm{A}_{ij} = C$, maka $C_{ij} = \overline{\bigoplus_{k}}(\alpha \overline{\otimes} A_{ij})$

dan $(A \overline{\otimes} B) = D$, maka $d_{ij} = \overline{\bigoplus_{k}}(a_{ik} \overline{\otimes} b_{kj})$

Dengan $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $D = (D_{ij})$, untuk $i$ = 1, 2, …, m dan $j$ = 1, 2, …, n.

Contoh

$(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} \mathrm{A}_{ij} = C$, maka $C_{ij} = \underset{k}{\overline{\oplus}}(\alpha \overline{\otimes} A_{ij})$

$= \underset{1}{\overline{\oplus}}(\alpha \overline{\otimes} A_{ij}) \overline{\oplus} \underset{2}{\overline{\oplus}}(\alpha \overline{\otimes} A_{ij})$

$= \begin{matrix} (\alpha \overline{\otimes} a_{11}) \overline{\oplus} (\alpha \overline{\otimes} a_{12}) \\ (\alpha \overline{\otimes} a_{21}) \overline{\oplus} (\alpha \overline{\otimes} a_{22}) \end{matrix}$

$= \left[(\alpha \overline{\otimes} a_{11}) \overline{\oplus} (\alpha \overline{\otimes} a_{12}) \quad (\alpha \overline{\otimes} a_{21}) \overline{\oplus} (\alpha \overline{\otimes} a_{22})\right]$

$= \left[(\alpha + a_{11}) \overline{\oplus} (\alpha \ + a_{12}) \quad (\alpha + a_{21}) \overline{\oplus} (\alpha \ + a_{22})\right]$

$= \left[(c_{11}) \overline{\oplus} (c_{12}) \quad (c_{11}) \overline{\oplus} (c_{11})\right]$

$= [\min(c_{11}), (c_{12}) \quad \min(c_{11}), (c_{12})]$

$= [c_{11} \quad c_{12}]$

$= C_{ij}$

Jika $\alpha = [3,4]$, A = $\begin{bmatrix} [1,4] & [2,3] \\ [0,1] & [7,9] \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$

Maka $(\alpha \overline{\otimes} A) = [3,4] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [1,4] & [2,3] \\ [0,1] & [7,9] \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} [3,4] \overline{\otimes} [1,4] & [3,4] \overline{\otimes} [2,3] \\ [3,4] \overline{\otimes} [0,1] & [3,4] \overline{\otimes} [2,9] \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} [3,4] + [1,4] & [3,4] + [2,3] \\ [3,4] + [0,1] & [3,4] + [2,9] \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} [4,8] & [5,7] \\ [4,5] & [5,13] \end{bmatrix}.$

$(A \overline{\otimes} B) = D,$

maka $d_{ij} = \underset{k}{\overline{\oplus}}(a_{ik} \overline{\otimes} b_{kj})$

$= \underset{k\,=\,1}{\overline{\oplus}}(a_{ik} \overline{\otimes} b_{kj}) \overline{\oplus} \underset{k\,=\,2}{\overline{\oplus}}(a_{ik} \overline{\otimes} b_{kj})$

$$= \begin{matrix} (\text{誠}_{11} \overline{\otimes}\, b_{11}) \overline{\oplus} (a_{12} \overline{\otimes}\, b_{21}) \\ (a_{11} \overline{\otimes}\, b_{12}) \overline{\oplus} (a_{12} \overline{\otimes}\, b_{22}) \\ (a_{21} \overline{\otimes}\, b_{11}) \overline{\oplus} (a_{22} \overline{\otimes}\, b_{21}) \\ (a_{21} \overline{\otimes}\, b_{12}) \overline{\oplus} (a_{22} \overline{\otimes}\, b_{21}) \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(a_{11} \overline{\otimes}\, b_{11}) \overline{\oplus} (a_{12} \overline{\otimes}\, b_{21})] & [(a_{11} \overline{\otimes}\, b_{12}) \overline{\oplus} (a_{12} \overline{\otimes}\, b_{22})] \\ [(a_{21} \overline{\otimes}\, b_{11}) \overline{\oplus} (a_{22} \overline{\otimes}\, b_{21})] & [(a_{21} \overline{\otimes}\, b_{12}) \overline{\oplus} (a_{22} \overline{\otimes}\, b_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(a + b_{11}) \overline{\oplus} (a_{12} + b_{21})] & [(a_{11} + b_{12}) \overline{\oplus} (a_{12} + b_{22})] \\ [(a_{21} + b_{11}) \overline{\oplus} (a_{22} + b_{21})] & [(a_{21} + b_{12}) \overline{\oplus} (a_{22} + b_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(c_{11}) \overline{\oplus} (c_{12})] & [(c_{11}) \overline{\oplus} (c_{12})] \\ [(c_{21}) \overline{\oplus} (c_{22})] & [(c_{21}) \overline{\oplus} (c_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\min(c_{11}), (c_{12})] & [\min(c_{11}), (c_{12})] \\ [\min(c_{21}), (c_{22})] & [\min(c_{21}), (c_{22})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Dari definisi di atas diperoleh sifat-sifat sebagai berikut:

1. $I(R)_{min}^{mxm}$ memiliki sifat assosiatif pada operasi $\overline{\otimes}$ antara skalar α dengan operasi $\overline{\otimes}$ pada (β $\overline{\otimes}$ A):

   $\forall\, \alpha, \beta \in I(R)_{min}$, dan $\forall\, A \in I(R)_{min}^{mxm}$.

   $\alpha \,\overline{\otimes}\, (\beta \,\overline{\otimes}\, A) = (\alpha \,\overline{\otimes}\, \beta) \,\overline{\otimes}\, A$.

   **Bukti**

   $\forall\, \alpha, \beta \in I(R)_{min}$, dan $\forall\, A \in I(R)_{min}^{mxm}$

   $$[\alpha \,\overline{\otimes} (\beta \,\overline{\otimes}\, A)]_{ij} = C_{ij}$$

   $$= c_{ij}$$

   $$= \overset{n}{\underset{k}{\overline{\oplus}}}\, \alpha \left( \overset{n}{\underset{l=1}{\overline{\oplus}}}\ \beta \,\overline{\otimes}\, A_{\text{緆}j} \right) \qquad \text{definisi 3.10}$$

$$= \begin{matrix} \alpha\left(\beta \,\overline{\otimes}\, a_{11}\right) \\ \alpha\left(\beta \,\overline{\otimes}\, a_{12}\right) \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \alpha \,\overline{\otimes}\, \beta \,\overline{\otimes}\, a_{11} \\ \alpha \,\overline{\otimes}\, \beta \,\overline{\otimes}\, a_{12} \end{matrix}$$

$$= \underset{k=l}{\overset{n}{\oplus}} \underset{l=1}{\overset{n}{\oplus}} \alpha \,\overline{\otimes}\, \beta \,\overline{\otimes} A_{lj}$$

$$= \underset{k=l}{\overset{n}{\oplus}} \left( \underset{k=l}{\overset{n}{\oplus}} \alpha \,\overline{\otimes}\, \beta \right) \otimes A_{lj} \quad \text{sifat assosiatif}$$

$$= \left[\left(\alpha \,\overline{\otimes}\, \beta\right) \overline{\otimes}\, a_{i\sim}\right]$$

$$= \left[\left(\alpha \,\overline{\otimes}\, \beta\right) \overline{\otimes}\, A\right]_{ij}$$

Jadi, $\left[\alpha \,\overline{\otimes}\, \left(\beta \,\overline{\otimes}\, A\right)\right]_{ij} = \left[\left(\alpha \,\overline{\otimes}\, \beta\right) \overline{\otimes}\, A\right]_{ij}$.

**Contoh**

Jika $\alpha = [2,5]$, $\beta = [1,4]$, $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$,

maka: $\alpha \,\overline{\otimes} (\beta \,\overline{\otimes}\, A) = [2,5] \,\overline{\otimes} \left([1,4] \,\overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}\right)$

$$= [2,5] \,\overline{\otimes} \left([1,4] \,\overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}\right)$$

$$= [2,5] \,\overline{\otimes} \left(\begin{bmatrix} [1,4] \,\overline{\otimes}\, [0,0] & [1,4] \,\overline{\otimes}\, [6,8] \\ [1,4] \,\overline{\otimes}\, [3,5] & [1,4] \,\overline{\otimes}\, [2,2] \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left([2,5] \,\overline{\otimes}\, [1,4]\right) \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$$

$$= \left(\alpha \,\overline{\otimes}\, \beta\right) \overline{\otimes}\, A$$

Jadi,

$$[2,5] \,\overline{\otimes} \left([1,4] \,\overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}\right) = \left([2,5] \,\overline{\otimes}\, [1,4]\right) \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}.$$

2. I (R) $^{mxm}_{min}$ memiliki sifat assosiatif pada operasi $\overline{\otimes}$ antara skalar α dengan operasi $\overline{\otimes}$ pada (A $\overline{\otimes}$ B):

$\forall\, \alpha \in I(R)_{min}$, dan ∀ matriks A dan B ∈ I (R) $^{mxn}_{min}$.

α $\overline{\otimes}$ ($A$ $\overline{\otimes}$ B) = (α $\overline{\otimes}$ $A$) $\overline{\otimes}$ B

**Bukti**

∀ α ∈ $I(R)_{min}$, dan ∀ matriks A dan B ∈ I (R) $^{mxn}_{min}$.

$$[\alpha \overline{\otimes}(A \overline{\otimes} \mathrm{B})]_{ij} = C_{ij}$$

$$= c_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \alpha \left( \bigoplus_{l=1}^{n} A_{kl} \overline{\otimes} B_{lj} \right) \quad \text{definisi 3.10}$$

$$= \begin{matrix} \alpha\,(a_{11} \overline{\otimes} B_{11}) \\ \alpha\,(a_{11} \overline{\otimes} B_{12}) \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \alpha \overline{\otimes} a_{11} \overline{\otimes} B_{11} \\ \alpha \overline{\otimes} a_{11} \overline{\otimes} B_{12} \end{matrix}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{l=1}^{n} \alpha \overline{\otimes} A_{kl} \overline{\otimes} B_{lj}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left( \bigoplus_{l=1}^{n} \alpha \overline{\otimes} A_{kl} \right) \overline{\otimes} B_{lj} \quad \text{sifat assosiatif}$$

$$= [(\alpha \overline{\otimes} b_{ij}) \overline{\otimes} a_{ij}]$$

$$= [(\alpha \overline{\otimes} B) \overline{\otimes} A]_{ij}$$

Jadi, $[\alpha \overline{\otimes} (B \overline{\otimes} A)]_{ij} = [(\alpha \overline{\otimes} B) \overline{\otimes} A]_{ij}$.

**Contoh**

Jika $\alpha = [2,5]$, $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$, maka: $\alpha \;\overline{\otimes}\; (A \;\overline{\otimes}\; \mathrm{B}) = (\alpha \;\overline{\otimes}\; A) \;\overline{\otimes}\; \mathrm{B}$

$$= [2,5]\;\overline{\otimes}\left(\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix}\right)$$

$$= [2,5]\;\overline{\otimes}\left(\begin{bmatrix}[0,0]\;\overline{\otimes}\;[2,6]\;\overline{\oplus}\;[6,8]\;\overline{\otimes}\;[-2,-1] & [0,0]\;\overline{\otimes}\;[0,2]\;\overline{\oplus}\;[6,8]\;\overline{\otimes}\;[4,5]\\ (3,5)\;\overline{\otimes}\;[2,6]\;\overline{\oplus}\;[2,2]\;\overline{\otimes}\;[-2,-1] & [3,5]\;\overline{\otimes}\;[0,2]\;\overline{\oplus}\;[2,2]\;\overline{\otimes}\;[4,5]\end{bmatrix}\right)$$

$$= [2,5]\;\overline{\otimes}\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix}$$

$$= \left([2,5]\;\overline{\otimes}\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}\right)\overline{\otimes}\begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix}$$

$$= (\alpha \;\overline{\otimes}\; B)\;\overline{\otimes}\; A$$

Jadi, $[2,5]\;\overline{\otimes}\left(\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix}\right) =$

$\left([2,5]\;\overline{\otimes}\begin{bmatrix}[0,0] & [6,8]\\ [3,5] & [2,2]\end{bmatrix}\right)\overline{\otimes}\begin{bmatrix}[2,6] & [0,2]\\ [-2,-1] & [4,5]\end{bmatrix}$

3. I (R) $^{mxm}_{min}$ memiliki sifat distributif pada operasi operasi $\overline{\oplus}$ terhadap operasi $\overline{\otimes}$ pada dua skalar dan satu matriks interval,

   $\forall\, \alpha, \beta \in I(R)_{min}$, dan $\forall$ matriks A $\in$ I (R) $^{mxn}_{min}$.

   $(\alpha \;\overline{\oplus}\; \beta)\;\overline{\otimes}\; \mathrm{A} = (a \;\overline{\otimes}\; A)\;\overline{\oplus}\;(\beta \;\overline{\otimes}\; \mathrm{A})$.

   **Bukti**

   $\left[(\alpha \;\overline{\oplus}\; \beta)\;\overline{\otimes}\; \mathrm{A}\right]_{ij} = C_{ij}$

   $$= c_{ij}$$

   $$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}}\,(\alpha \;\overline{\oplus}\; \beta)\,\mathrm{A}_{ik} \qquad \text{definisi 3.10}$$

$$= \begin{matrix} (\alpha \overline{\oplus} \beta)\, a_{11} \\ (\alpha \overline{\oplus} \beta)\, a_{21} \end{matrix}$$

$$= (\alpha \overline{\otimes} a_{11}) \overline{\oplus} (\beta \overline{\otimes} a_{21})$$

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} (\alpha \overline{\otimes} A_{ik}) \overline{\oplus} (\beta \overline{\otimes} A_{kj}) \qquad \text{distributif}$$

$$= \left( \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} (\alpha \overline{\otimes} A_{ik}) \right) \overline{\oplus} \left( \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} (\beta \overline{\otimes} A_{kj}) \right)$$

$$= (\alpha \overline{\otimes} a_{ij}) \overline{\oplus} (\beta \overline{\otimes} a_{ij})$$

$$= \left[ (\alpha \overline{\oplus} \beta) \overline{\otimes} \mathrm{A} \right]_{ij}$$

Jadi, $\left[ (\alpha \overline{\oplus} \beta) \overline{\otimes} \mathrm{A} \right]_{ij} = \left[ (\alpha \overline{\otimes} A) \overline{\oplus} (\beta \overline{\otimes} \mathrm{A}) \right]_{ij}$.

**Contoh**

Jika $\alpha = [2,5]$, $\beta = [1,4]$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$, maka:

$$(\alpha \overline{\oplus} \beta) \overline{\otimes} \mathrm{A} = ([2,5] \overline{\oplus} [1,4]) \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [2,5] \overline{\otimes} [0,0] & [2,5] \overline{\otimes} [6,8] \\ [2,5] \overline{\otimes} [3,5] & [2,5] \overline{\otimes} [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus}$$

$$\begin{bmatrix} [1,4] \overline{\otimes} [0,0] & [1,4] \overline{\otimes} [6,8] \\ [1,4] \overline{\otimes} [3,5] & [1,4] \overline{\otimes} [2,2] \end{bmatrix}$$

$$= \left( [2,5] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus} \left( [1,4] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \right)$$

$$= (\alpha \overline{\otimes} A) \overline{\oplus} (\beta \overline{\otimes} \mathrm{A})$$

Jadi, $([2,5] \overline{\oplus} [1,4]) \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} = \left( [2,5] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus}$

$\left( [1,4] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \right)$.

4. I (R) $^{mxm}_{min}$ memiliki sifat distributif pada operasi operasi $\overline{\otimes}$ terhadap operasi $\overline{\oplus}$ pada satu skalar dan dua matriks interval,

$\forall$ α, ∈ $I(R)_{min}$, dan ∀ matriks A dan B ∈ I (R) $^{mxm}_{min}$.

α $\overline{\otimes}$ (A $\overline{\oplus}$ B) = (α $\overline{\otimes}$ A) $\overline{\oplus}$ (α $\overline{\otimes}$ B)

**Bukti:**

$$\left[\alpha \overline{\otimes} \left(A \overline{\oplus} B\right)\right]_{ij} = C_{ij}$$

$$= c_{ij}$$

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \alpha \left(A_{ik} \overline{\oplus} B_{kj}\right)$$ definisi 3.10

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \alpha \left(A_{ik} \overline{\oplus} B_{kj}\right)$$

$$= \begin{matrix} \alpha \left(a_{11} \overline{\oplus} b_{11}\right) \\ \alpha \left(a_{11} \overline{\oplus} b_{12}\right) \\ \alpha \left(a_{21} \overline{\oplus} b_{11}\right) \\ \alpha \left(a_{21} \overline{\oplus} b_{12}\right) \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} (\alpha \overline{\otimes} a_{11}) \overline{\oplus} \left(\alpha \overline{\oplus} b_{11}\right) \\ (\alpha \overline{\otimes} a_{11}) \overline{\oplus} \left(\alpha \overline{\oplus} b_{12}\right) \\ (\alpha \overline{\otimes} a_{21}) \overline{\oplus} \left(\alpha \overline{\oplus} b_{11}\right) \\ (\alpha \overline{\otimes} a_{21}) \overline{\oplus} \left(\alpha \overline{\oplus} b_{12}\right) \end{matrix}$$ sifat distributif

$$= \overline{\bigoplus_{k=1}^{n}} \left(\left(\alpha \overline{\otimes} A_{ik}\right) \oplus \left(\alpha \overline{\otimes} b_{kj}\right)\right)$$

$$= \begin{array}{l} \overline{\bigoplus}_{k=1}^{n} \left( \left( \alpha \overline{\otimes} a_{11} \right) \oplus \left( \alpha \overline{\otimes} b_{11} \right) \right) \\ \overline{\bigoplus}_{k=1}^{n} \left( \left( \alpha \overline{\otimes} a_{11} \right) \oplus \left( \alpha \overline{\otimes} b_{12} \right) \right) \\ \overline{\bigoplus}_{k=1}^{n} \left( \left( \alpha \overline{\otimes} a_{21} \right) \oplus \left( \alpha \overline{\otimes} b_{11} \right) \right) \\ \overline{\bigoplus}_{k=1}^{n} \left( \left( \alpha \overline{\otimes} a_{21} \right) \oplus \left( \alpha \overline{\otimes} b_{12} \right) \right) \end{array}$$

$$= \left( \overline{\bigoplus}_{k=1}^{n} \left( \alpha \overline{\otimes} A_{ik} \right) \oplus \left( \overline{\bigoplus}_{k=1}^{n} \alpha \overline{\otimes} B_{kj} \right) \right) \text{ distributif}$$

$$= \left[ \left( \alpha \overline{\otimes} A_{ij} \right) \oplus \left( \alpha \overline{\otimes} B_{ij} \right) \right]$$

$$= \left[ \left( \alpha \overline{\otimes} A \right) \oplus \left( \alpha \overline{\otimes} B \right) \right]_{ij}$$

Jadi, $\left[ \alpha \overline{\otimes} \left( A \overline{\oplus} B \right) \right]_{ij} = \left[ \left( \alpha \overline{\otimes} A \right) \overline{\oplus} \left( \alpha \overline{\otimes} B \right) \right]_{ij}$.

**Contoh:**

Jika $\alpha = [2,5]$, $A = \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix}$

$$\alpha \overline{\otimes} \left( A \overline{\oplus} B \right) = [2,5] \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= [2,5] \overline{\otimes} \left( \begin{bmatrix} [0,0] \overline{\oplus} [2,6] & [6,8] \overline{\oplus} [0,2] \\ [3,5] \overline{\oplus} [-2,-1] & [2,2] \overline{\oplus} [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} [2,5] \overline{\otimes} [0,0] & [2,5] \overline{\otimes} [2,6] \\ [2,5] \overline{\otimes} [3,5] & [2,5] \overline{\otimes} [-2,-1] \end{bmatrix} \overline{\oplus}$$

$$\begin{bmatrix} [2,5] \overline{\otimes} [6,8] & [2,5] \overline{\otimes} [0,2] \\ [2,5] \overline{\otimes} [2,2] & [2,5] \overline{\otimes} [4,5] \end{bmatrix}$$

$$= \left( [2,5] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus} \left( [2,5] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left( [2,5] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \right) \overline{\oplus} \left( [2,5] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

$$= (\alpha \mathbin{\overline{\otimes}} A) \mathbin{\overline{\oplus}} (\alpha \mathbin{\overline{\otimes}} B)$$

Jadi, $[2,5] \mathbin{\overline{\otimes}} \left( \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \mathbin{\overline{\oplus}} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right) =$

$$\left( [2,5] \mathbin{\overline{\otimes}} \begin{bmatrix} [0,0] & [6,8] \\ [3,5] & [2,2] \end{bmatrix} \right) \mathbin{\overline{\oplus}} \left( [2,5] \mathbin{\overline{\otimes}} \begin{bmatrix} [2,6] & [0,2] \\ [-2,-1] & [4,5] \end{bmatrix} \right)$$

Dapat dikatakan bahwa $(I(R)_{min}^{mxm})$ dengan operasi $\overline{\oplus}$ membentuk semi-grup komutatif dengan eleman identitas $e$, karena memiliki sifat assosiatif, dan komutatif terhadap operasi $\overline{\oplus}$ dan memiliki sifat idempoten.

## 3.4 Integrasi Matriks Interval atas Aljabar Min-Plus dengan Al-Qur'an

Matematika merupakan ilmu universal, mempelajari struktur dalam dunia sebagai pola, bentuk, jumlah dan taksiran yang mendasari perkembangan teknologi modern dan mempunyai peran penting pada hampir semua disiplin ilmu dalam rangka memajukan daya pikir manusia.

Perkembangan pesat di bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika di bidang teori bilanagan, aljabar, analisis, teori peluang, dan matematika diskrit, yang secara aksiomatis mendefinisikan dan menyelidiki struktur aljabar seperti kelompok manusia.

Beberapa bagian dari aljabar abstrak dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu dikenal dengan grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

وَاللَّهُ خَلَقَكُم مِن تُرابٍ ثُمَّ مِن نُطفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُم أَزوٰجًا ۚ وَما تَحمِلُ مِن أُنثىٰ وَلا تَضَعُ إِلّا بِعِلمِهِ ۚ
وَما يُعَمَّرُ مِن مُعَمَّرٍ وَلا يُنقَصُ مِن عُمُرِهِ إِلّا فى كِتٰبٍ ۚ إِنَّ ذٰلِكَ عَلَى اللَّهِ يَسيرٌ(١١)

Artinya:

*"Dan Allah menciptakan kamu dari tanah kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam kitab (Lauh Mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah."* (Q. S. Al-Faathir: 11).

Dari surat Al-Faathir ayat 11 diatas disebutkan, bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan dengan cara menikah. Biasanya dalam matematika disimbolkan $(G, \otimes)$ , dengan G adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan) dan $\otimes$ adalah operasi binernya yaitu pernikahan (Majid, 2012:3).

Dalam kesempurnaan penciptaan manusia, terselip juga celah kelemahan dan kekurangan manusia yang harus dipelajari, diketahui dan diantisipasi. Tidak mampu mengenali kelemahan diri akan berakibat fatal yaitu akan menghantarkan pada kesengsaraan. Mengetahui kelemahan akan menjadi kontrol bagi seseorang dalam berucap dan bertindak, termasuk kesadaran yang harus dibangun demi menutupi atau memperbaiki kekurangan itu. Semua kelemahan-kelemahan manusia itu langsung disampaikan oleh Dzat Yang Menciptakan manusia itu sendiri, yaitu Allah SWT.

Kelemahan-kelemahan manusia yang diberitahu oleh Allah itu lebih kepada sifat, sikap atau perilaku manusia itu sendiri. Dan sebetulnya kelemahan-kelemahan itu bukan tidak bisa untuk diantisipasi, namun bisa tidaknya itu bergantung bagaimana kemampuan manusia dalam mengelola akal dan nafsunya. Mengelola akal dan nafsu sekaligus membutuhkan usaha keras supaya berada pada jalur yang diridhoi-Nya. Inilah yang membedakan kita manusia dengan malaikat dan iblis. Salah satu sifat lemah manusia yang diceritakan dalam Al-Qur'an surat Hud ayat 9

وَلَئِنْ أَذَقْنَا الْإِنسَانَ مِنَّا رَحْمَةً ثُمَّ نَزَعْنَاهَا مِنْهُ إِنَّهُ لَيَئُوسٌ كَفُورٌ [١١:٩]

Artinya:

*"Dan jika Kami rasakan kepada mereka suatu rahmat dari Kami, kemudian rahmat itu Kami cabut darinya, pastilah dia berputus asa dan tidak tau berterima kasih."*(Q.S. Hud: 9).

Ayat ini terkait dengan sifat negatif manusia tersebut, sungguh sangat nyata yang bisa kita saksikan atau bahkan kita rasakan sendiri. Pada saat kita dianugerahi rahmat atau karunia dari-Nya, kita merasakan kegembiraan yang sangat, bahkan melebihi batas kewajaran termasuk berbangga-bangga dengan aneka nikmat tersebut. Mereka tidak menyadari bahwa Allah akan mengalihkan satu keadaan ke keadaan lain. Dari positif ke negatif, dari senang ke susah, dari untung ke rugi, dari kaya ke miskin, dari semua yang serba mudah hingga merasakan betapa sulitnya membuat mudah sesuatu yang pada saat mudah hal itu dianggap remeh.

Dalam pandangan Islam, manusia selalu dikaitkan dengan kisah tersendiri. Di dalamnya manusia tidak hanya digambarkan manusia yang mempunyai kelemahan, dalam Al-Qur'an juga terkandung tentang kesempurnaan penciptaan manusia, juga menurut Al-Qur'an manusia lebih luhur dari yang lain.

Dalam Al-Qur'an manusia disebut sebagai makhluk yang amat terpuji dan disebut pula sebagai makhluk yang amat tercela. Hal itu ditegaskan dalam berbagai ayat, bahkan ada pula yang ditegaskan dalam satu ayat. Akan tetapi itu tidak berarti manusia dipuji dan dicela dalam waktu yang bersamaan, melainkan berarti bahwa dengan fitrah yang telah dipersiapkan baginya manusia dapat menjadi makhluk yang sempurna dan dapat pula menjadi makhluk yang serba kurang. Dalam firman Allah SWT Al-Qur'an surat Al-Isro ayat 70 yang berbuunyi:

وَلَقَدْ كَرَّمْنَا بَنِي آدَمَ وَحَمَلْنَاهُمْ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ وَرَزَقْنَاهُم مِّنَ الطَّيِّبَاتِ وَفَضَّلْنَاهُمْ عَلَىٰ كَثِيرٍ
مِّمَّنْ خَلَقْنَا تَفْضِيلًا [١٧:٧٠]

Artinya
*"Dan Sesungguhnya telah Kami muliakan anak-anak Adam, Kami angkut mereka di daratan dan di lautan, Kami beri mereka rezki dari yang baik-baik dan Kami lebihkan mereka dengan kelebihan yang sempurna atas kebanyakan makhluk yang telah Kami ciptakan."*

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada penelitian ini adalah bahwa matriks interval atas aljabar min-plus merupakan semi-ring idempoten $\forall A, B, C \in$ I (R) $_{min}^{mxm}$ dan $\forall$ $\alpha, \beta \in$ I(R)$_{min}$, berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

a. Bersifat assosiatif pada operasi $\overline{\oplus}$:

$$\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, (\mathrm{B} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B}) \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C} \quad \forall \mathrm{A,B,C} \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm}.$$

b. Bersifat komutatif pada operasi $\overline{\oplus}$

$$\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B} = \mathrm{B} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{A} \; \forall \mathrm{A,B} \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm}$$

c. Bersifat assosiatif pada operasi $\overline{\otimes}$:

$$\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, (\mathrm{B} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B}) \,\overline{\otimes}\, \mathrm{C} \quad \forall \mathrm{A,B,C} \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm}$$

d. Operasi distributif $\overline{\otimes}$ terhadap operasi $\overline{\oplus}$:

$$\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, (\mathrm{B} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B}) \,\overline{\oplus}\, (\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C}) \quad \forall \mathrm{A,B,C} \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm}$$

e. Operasi distributif $\overline{\oplus}$ terhadap operasi $\overline{\otimes}$ :

$$(\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B}) \,\overline{\otimes}\, \mathrm{C} = (\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{C}) \,\overline{\oplus}\, (\mathrm{B} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C}) \quad \forall \mathrm{A,B,C} \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm}$$

f. Idempoten terhadap operasi $\overline{\oplus}$:

$$\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{A} = \mathrm{A} \quad \forall \mathrm{A} \in I\,(R)_{min}^{mxm}$$

g. Terdapat elemen identitas terhadap $\overline{\oplus}$:

$$\alpha \,\overline{\oplus}\, \mathrm{A} = \mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \alpha \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm} \; \exists\, \alpha \in \mathrm{I(R)}_{min}$$

h. Terdapat elemen identitas terhadap $\overline{\otimes}$, misal $e$ adalah identitas terhadap operasi $\overline{\otimes}$: $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{e} = \mathrm{e} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A} \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{I}\,(\mathrm{R})_{min}^{mxm}$

i. Bersifat assosiatif pada operasi $\overline{\otimes}$ antara skalar α dengan operasi $\overline{\otimes}$ pada $(\beta \overline{\otimes} A)$: $\alpha \overline{\otimes} (\beta \overline{\otimes} A) = (\alpha \overline{\otimes} \beta) \overline{\otimes} A \ \forall \alpha, \in \ I(R)_{min}$, dan ∀ A ∈ I (R) $_{min}^{mxm}$.

j. Bersifat assosiatif pada operasi $\overline{\otimes}$ antara skalar α dengan operasi $\overline{\otimes}$ pada $(A \overline{\otimes} B)$: $\alpha \overline{\otimes} (A \overline{\otimes} B) = (\alpha \overline{\otimes} A) \overline{\otimes} B = A \overline{\otimes} (\alpha \overline{\otimes} B) \ \ \forall \alpha \in I(R)_{min}$, dan ∀ matriks A dan B ∈ I (R) $_{min}^{mxm}$.

k. Bersifat distributif pada operasi operasi $\overline{\oplus}$ terhadap operasi $\overline{\otimes}$ pada dua skalar dan satu matriks interval:

$(\alpha \overline{\oplus} \beta) \overline{\otimes} A = (\alpha \overline{\otimes} A) \overline{\oplus} (\beta \overline{\otimes} A) \ \forall \alpha, \beta \in \ I(R)_{min}$, dan ∀ A I (R) $_{min}^{mxm}$.

l. Bersifat distributif pada operasi operasi $\overline{\otimes}$ terhadap operasi $\overline{\oplus}$ pada satu skalar dan dua matriks interval:

$\alpha \overline{\otimes} (A \overline{\oplus} B) = (\alpha \overline{\otimes} A) \overline{\oplus} (\alpha \overline{\otimes} B) \ \forall \alpha, \in \ I(R)_{min}$, dan ∀ matriks A dan B ∈ I (R) $_{min}^{mxm}$.

$(I(R)_{min}^{mxn})$ dengan operasi $\overline{\oplus}$ membentuk semi-grup komutatif dengan eleman identitas $\varepsilon$, karena memiliki sifat assosiatif, dan komutatif terhadap operasi $\overline{\oplus}$, dan memiliki sifat idempoten.

### 4.1 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya membahas masalah matriks atas aljabar min-plus interval dan sifat-sifatnya. Maka disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk membahas tentang sistem persamaan linier pada aljabar min-plus interval, pada matriks atas aljabar max-min interval dan sifat-sifatnya, pada fungsi skalar, pada masalah nilai eigen dan vektor eigen, dan lain-lain. Karena penelitian ini tentang matriks atas aljabar min-plus.

## DAFTAR PUSTAKA


Anonim. 2011. *Matematika*. http://en.wikipedia.org/wiki/matematika. (diunduh pada tanggal 23 September 2013).

Anton, H.. 2000. *Elementary linier Algebra*. Terjemahan Hari Suminto. Batam: Interaksara.

Athar, M.. 2010. *Pengertian Matematika*. (Online: http://blog.math.uny.ac.id/idarufaidah/2010/01/02/pengertian-matematika, Diakses tanggal 23 September 2013).

Baccelli, F.. 2001. *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*. Paris: INDRIA.

Bhusiri, A.. 2010. *Diba' Arab dan Latin Beserta Terjemahannya*. Surabaya: Serba Jaya.

Departemen Agama RI. 1995. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Semarang: PT. Karya Toha Putra.

Dummit, S. dan Richard, F.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Fraleigh, J. B.. 1994. *A First Course in Abstract Algebra*. United States. Addison-Wesley Publishing Company inc.

Gazali, W.. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Gere, M. dan Weaver, W.. 1987. *Matriks Algebra for Engineers*. Terjemahan G tejo Sutikno. Jakarta: Erlangga

Hamzah, M.. 2003. *Matematika dalam Islam*. Jakarta: Republika.

Kandasamy, W.. 2002. *Smarandache Semirings, Semifields, and Semivector spaces*. Rehoboth: American Research Press.

Lestari, D.. 2012. *Materi Linier Aljabar Lanjut*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Litvinov, G.. dan Sobolevskii, A.. 2001. *Idempotent interval Analysis and Optimization Problems. Reliab*. Comput 7: 353-377

Majid, A.. 2012. *Aljabar Max-plus dan Sifat-sifatnya*. *Skripsi tidak dipublikasikan*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Musthofa. 2011. *Sistem Persamaan Linear Pada Aljabar Min-Plus*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Soewandi, H. dan Sinduningrum. 2011. *Ilmu Kealaman Dasar (IKD)*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Sukirman. 2005. *Pengantar Struktur Aljabar*. Malang: Universitas Negeri Malang.

Rudhito, A.. 2004. *Semimodul atas Aljabar Max-plus.* Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.