

**ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL STATISTIK NONLINIER
SECARA *LEAST SQUARE***

SKRIPSI

Oleh:
RIRIN ZULAIKAH
NIM. 10610050



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL STATISTIK NONLINIER
SECARA *LEAST SQUARE***

SKRIPSI

Oleh:
RIRIN ZULAIKAH
NIM. 10610050

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 02 September 2014

Pembimbing I

Pembimbing II

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL STATISTIK NONLINIER
SECARA *LEAST SQUARE***

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
RIRIN ZULAIKAH
NIM. 10610050

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL STATISTIK NONLINIER
SECARA *LEAST SQUARE***

SKRIPSI

Oleh:
RIRIN ZULAIKAH
NIM. 10610050

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 12 September 2014

Penguji Utama : Dr. Sri Harini, M.Si
NIP. 19731014 200112 2 002

Ketua Penguji : Drs. H. Turmudi, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006

Sekretaris Penguji : Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Anggota Penguji : Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Ririn Zulaikah
NIM : 10610050
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara
Least Square

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 03 September 2014

Yang membuat pernyataan,

Ririn Zulaikah

NIM. 10610050

MOTO

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم: إياكم و الظنّ، فإنّ الظنّ أكذب الحديث (رواه المسلم)

**Nabi SAW : “Hati-hatilah kamu dari prasangka,
sesungguhnya prasangka adalah ucapan paling dusta
(H.R. Muslim)**



HALAMAN PERSEMBAHAN

Dalam iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar,
sehingga penulis persembahkan karya ini kepada:

Ayah dan Ibunda saya (Supriyanto dan Jampen) tercinta,
serta saudari penulis (Ria Setyaningrum)
yang telah memberikan semangatnya kepada penulis,
rasa kasih sayang yang tak terhingga,
dan panjatan do'a yang tiada henti dilantungkannya dalam
setiap sujudnya untuk mewujudkan cita-cita penulis.
Semoga keluarga penulis selalu mendapat perlindungan
Allah Swt.

KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum wr.wb.

Syukur alhamdulillah atas kehadiran Allah Swt yang telah melimpahkan segala rahmat, taufiq, hidayah, serta anugerah-Nya sehingga dengan curahan ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan studi di jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi yang berjudul “Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara *Least Square*” ini dengan baik, walaupun masih banyak kekurangan.

Sholawat serta salam tetap senantiasa terhaturkan kepada Nabi Muhammad Saw sebagai suri tauladan bagi umat Islam yang telah membawa lentera penerang dalam kehidupan ini.

Selesainya penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, bantuan, serta motivasi dan dorongan dari dosen pembimbing, bapak dan ibu dosen serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karenanya penulis sampaikan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi (Saintek) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan matematika Fakultas Saintek UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang dengan sabar telah meluangkan waktunya untuk menerima konsultasi dan senantiasa memberikan bimbingan dan mengarahkan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingannya.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Saintek UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak Supriyanto, ibu Jampen dan adik Rya Setya Ningrum serta segenap keluarga besar yang senantiasa memberikan dukungan doa, kasih sayang, inspirasi, dan motivasi secara moril maupun spiritual.
8. Kakak Rujito yang selalu memberikan doa, semangat, dan motivasi dalam penyelesaian penelitian ini.
9. Wahyudi, Muhammad Sukron dan Eva Kurniasih yang telah memberikan waktunya untuk diskusi tentang program ekonometri.
10. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang 2010, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
11. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut mendukung kelancaran penyempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan semoga Allah Swt selalu memberikan hidayah-Nya.

Wassalamu'alaikum wr.wb.

Malang, September 2014

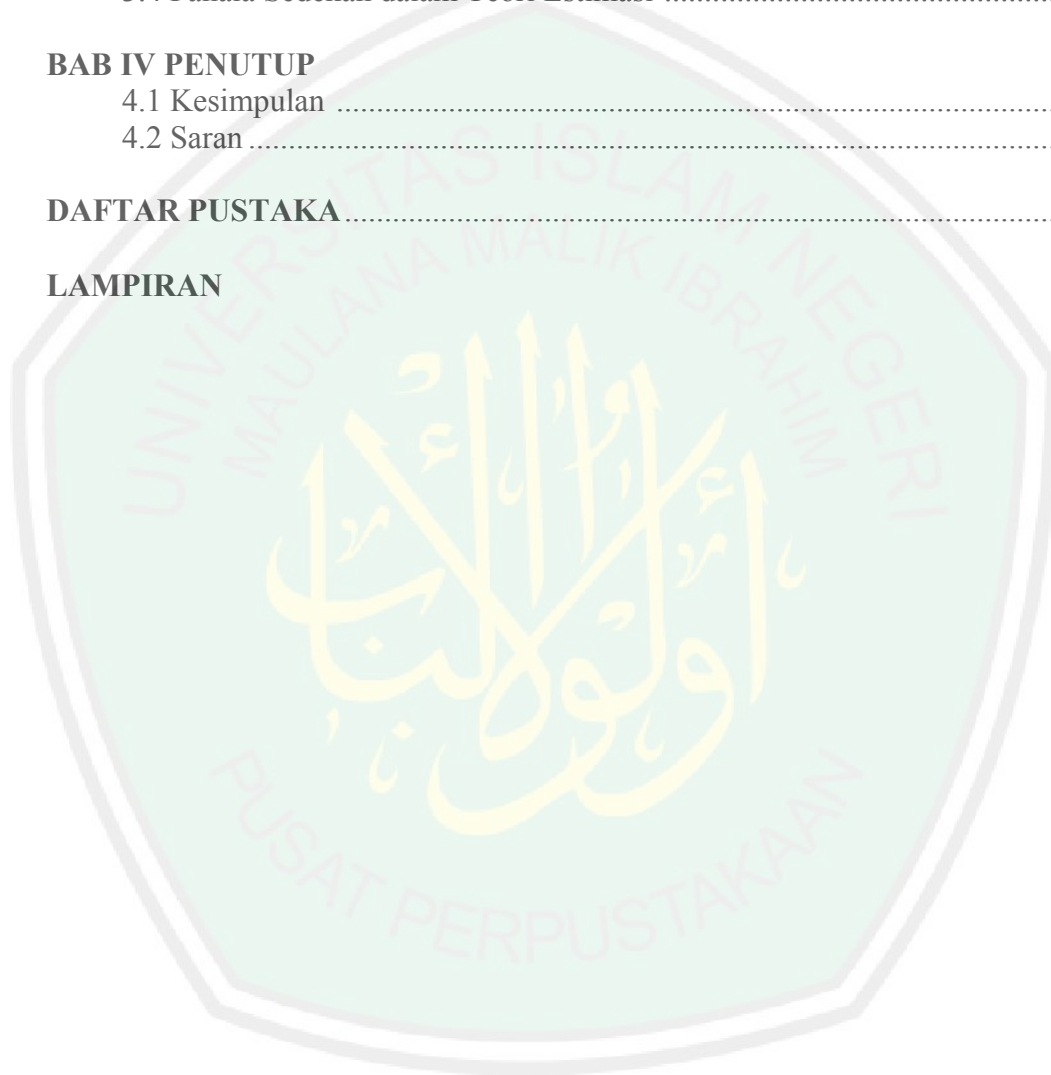
Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث	xvii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Masalah.....	4
1.4 Batasan Masalah.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	8
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Model Statistik.....	9
2.1.1 Model Statistik Linier.....	9
2.1.2 Model Statistik Transformasi Linier.....	11
2.1.3 Model Statistik Nonlinier.....	13
2.2 Model Estimasi Parameter.....	18
2.2.1 Pengertian Estimasi Parameter dan Estimator.....	18
2.2.2 Sifat-sifat Penduga Parameter.....	19
2.3 Pendiferensialan Matriks.....	21
2.4 Deret Taylor.....	24
2.4.1 Persamaan Deret Taylor.....	24
2.5 Metode Estimasi dengan <i>Least Square</i>	26
2.6 Macam-macam Metode <i>Least Square Estimator</i> (LSE).....	27
2.6.1 <i>Ordinary Least Square Estimator</i> (OLSE).....	28
2.7 Kajian Keagamaan.....	33
2.7.1 Perkiraan Pahala Orang yang Bersedekah.....	33
2.7.2 Kajian Nonlinier.....	41
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Fungsi Produksi Cobb-Douglas (CD).....	42
3.2 Model <i>Nonlinear Least Square Estimator</i> (NLSE).....	42
3.2.1 Estimasi Parameter Iterasi <i>Gauss-Newton</i>	44

3.2.2 Estimasi Parameter Iterasi <i>Newton-Rhapson</i>	49
3.3 Aplikasi Metode <i>Nonlinear Least Square Estimator</i> (NLSE).....	52
3.3.1 Paparan Data.....	53
3.3.1.1 Kenonlinieran Data	53
3.3.1.2 Estimasi Parameter secara Iterasi <i>Gauss-Newton</i>	55
3.3.1.3 Estimasi Parameter secara Iterasi <i>Newton-Rhapson</i>	58
3.3.1.4 Perbandingan Hasil Iterasi	61
3.4 Pahala Sedekah dalam Teori Estimasi	61
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	65
4.2 Saran	66
DAFTAR PUSTAKA	67
LAMPIRAN	



DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. <i>Flow Chart</i> Penelitian	7
Gambar 2.1. Fungsi Produksi Cobb-Douglas	16
Gambar 2.2. Perkiraan Suatu Fungsi dengan Deret Taylor	24
Gambar 3.1. Fungsi Produksi Cobb-Douglas	53
Gambar 3.2. Fungsi Produksi Cobb-Douglas dari Aplikasi Data.....	54
Gambar 3.3. Grafik Kekonvergenan dari secara Iterasi <i>Gauss-Newton</i>	56
Gambar 3.4. Grafik Kekonvergenan dari secara Iterasi <i>Gauss-Newton</i>	56
Gambar 3.5. Grafik Kekonvergenan dari secara Iterasi <i>Gauss-Newton</i>	57
Gambar 3.6. Grafik Kekonvergenan dari secara Iterasi <i>Newton-Raphson</i>	59
Gambar 3.7. Grafik Kekonvergenan dari secara Iterasi <i>Newton-Raphson</i>	59
Gambar 3.8. Grafik Kekonvergenan dari secara Iterasi <i>Newton-Raphson</i>	60



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Parameter, Penduga dan Statistiknya	18
Tabel 3.1 Hasil Iterasi <i>Gauss-Newton</i> untuk Fungsi Produksi Cobb-Douglas (CD) pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur	56
Tabel 3.2 Hasil Iterasi <i>Newton-Rhapson</i> untuk Fungsi Produksi Cobb-Douglas (CD) pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur	59
Tabel 3.3 Hasil Perbandingan Fungsi Cobb-Douglas dengan Menggunakan Iterasi <i>Gauss-Newton</i> dan <i>Newton-Rhapson</i>	61



ABSTRAK

Zulaikah, Ririn. 2014. **Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara *Least Square***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si

(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Kata Kunci: Model Statistik Nonlinier, Estimasi Parameter, Fungsi produksi Cobb-Douglas (CD), Metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE), Iterasi *Gauss-Newton*, Iterasi *Newton-Rhapson*.

Statistika merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berhubungan dengan pengumpulan data, analisis data dan penyajian dari sejumlah data. Dalam ekonometri, statistika dan matematika dimanfaatkan dalam mencari nilai suatu parameter. Ada dua jenis model statistik yaitu model statistik linier dan nonlinier. Sifat nonlinier dalam suatu model dapat terjadi pada parameter, variabel atau keduanya. Akan tetapi dalam penelitian ini, peneliti mengkaji pada model statistik nonlinier dalam parameter.

Model statistik nonlinier yang digunakan adalah *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) dengan pendekatan deret Taylor orde satu dan orde dua. Pendekatan deret Taylor orde satu digunakan dalam iterasi *Gauss-Newton* dan orde dua digunakan dalam iterasi *Newton-Rhapson* untuk estimasi parameter .

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa bentuk umum dari estimasi parameter model statistik nonlinier secara iterasi *Gauss-Newton* dan iterasi *Newton-Rhapson* adalah:

1. Estimasi parameter secara iterasi *Gauss-Newton*

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2} \left(Z(\beta^{(n)})^T Z(\beta^{(n)}) \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}}$$

2. Estimasi parameter secara iterasi *Newton-Rhapson*

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}}$$

Hasil dari estimasi *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) tersebut diaplikasikan pada implementasi data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan fungsi produksi Cobb-Douglas (CD), yaitu:

$$y = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

selanjutnya dari kedua iterasi diperoleh hasil terbaik, yaitu iterasi *Newton-Rhapson* dimana untuk $\beta_1 = 13.0487624$, $\beta_2 = 0.4485491943$, dan $\beta_3 = 0.14326877712$ sehingga dapat ditulis menjadi,

$$y = 13.0487624 L^{0.4485491943} K^{0.14326877712}$$

ABSTRACT

Zulaikah, Ririn. 2014. **Parameter Estimation of Nonlinear Statistic Model using Least Square.**
Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
Supervisor: (I) Abdul Aziz, M.Si
(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Keywords: Nonlinear Statistical Model, Parameter Estimation, Cobb-Douglas (CD) production function, Nonlinear Least Square estimator (NLSE) Model, Gauss-Newton iteration, Newton-Rhapson iteration.

Statistics is one of knowledge that related to data collection, data analysis and presentation a number of data. In econometrics, statistics and mathematics are used in determining parameter value. There are two models of statistic, linear statistic and nonlinear statistic model. The nonlinearity in the model may occur in the parameter and variable or both. However in this research, the researcher talk about nonlinearity of parameter.

Nonlinear statistic model used in this study are Nonlinear Least Square Estimator (NLSE) using first order Taylor and second order Taylor approach. First order Taylor approach is used in the Gauss-Newton iteration and second order Taylor approach is used in Newton-Rhapson iteration to estimate β .

Based on the research, the general form of parameter estimation of nonlinear statistic model using Gauss-Newton Iteration and Newton-Rhapson iteration are:

1. Parameter Estimation Using Gauss-Newton Iteration

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2} \left(Z(\beta^{(n)})^T Z(\beta^{(n)}) \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

2. Parameter Estimation Using Newton-Rhapson Iteration

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

The estimation result of Nonlinear Least Square Estimator (NLSE) is applied to the implementation of the data of Metal, Machinery, Textile and Miscellaneous (ILMTA) from 1993 to 2012 in the province of East Java with the Cobb-Douglas (CD). Function of

$$y = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

from that two iteration, we can obtain the optimum result, that is Newton-Rhapson iteration in which $\beta_1 = 13.0487624$, $\beta_2 = 0.4485491943$, and $\beta_3 = 0.14326877712$, so it can be written as

$$y = 13.0487624 L^{0.4485491943} K^{0.14326877712}$$

مستخلص البحث

زليخا، ريزين. ٢٠١٤. تقرير العلة في السخا ذج الإحصائية غير خطية بإستخرا م (طريقة المر بعات الصغرى). البحث الجا معي ، شعبة الر يا ضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: (١) عبد العزيز الماجستير

(٢) أحمد نصيح الدين الماجستير

الكلمات الرئيسية: النماذج الإحصائية غير الخطية، تقدير المعلمة ، وظيفة الإنتاج كوب-دوغلاس (CD) ، طريقة المربعات الصغرى غير الخطية (NLS)، تكرار غاوس-نيوتن ، تكرار نيوتن-رافسون.

الإحصائيات هي فرع من الرياضيات التي تتعلق بجمع البيانات وتحليلها وعرضها. في الاقتصاد القياسي، تستخدم، والإحصاء والرياضيات في إيجاد قيمة المعلمة. النماذج الإحصائية لديهم نوعان هما النماذج الإحصائية الخطية و النماذج الإحصائية وغير الخطية. قد تحدث استقامة النموذج في المعلمة والمتغيرات أو كليهما.

تقدير النماذج الإحصائية غير الخطية المستخدمة هي غير الخطية في لباس سكوير (NLS) بنهج سلسلة تايلور من الدرجة الأولى والدرجة الثانية. أستخدمت السلسلة تايلور الأولى في تكرار غاوس-نيوتن وأستخدمت السلسلة الثانية تايلور في تكرار نيوتن-رافسون لتقدير معلمة β .

بناء على حصول النتيجة بأن الشكل العام تقدير المعلمة غير الخطية للنموذج الإحصائي في تكرار غاوس-نيوتن ، وتكرار نيوتن افسون فهو:

١- التقدير القياسي في تكرار غاوس-نيوتن:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2} \left(Z(\beta^{(n)})^T Z(\beta^{(n)}) \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \quad -٢$$

تقدير القياسي في تكرار نيوتن-رافسون

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

النتيجة من تقدير لاختطية المربعات الصغرى (NLS) ويتم تطبيقها على تنفيذ البيانات من المعادن والآلات والنسيج ومتنوعة (ILMTA)

سنوات ١٩٩٣-٢٠١٢ في محافظة الجاوى الشرقية بوظيفتم الإنتاج كوب-دوغلاس (CD)، وهي

$$y = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

و $\beta_1 = 13.0487624L^{0.4485491943} K^{0.14326877712}$ ، $\beta_2 = 0.4485491943$ ، و $\beta_3 = 0.14326877712$ لذلك يمكن أن نكتب،

$$y = 13.0487624L^{0.4485491943} K^{0.14326877712}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ekonometri adalah salah satu cabang matematika yang sangat penting. Ekonometri diartikan sebagai ilmu yang menggunakan analisis matematika dan teori statistika untuk menganalisis masalah-masalah dan fenomena-fenomena ekonomi secara kualitatif (Firdaus, 2004). Statistika didefinisikan sebagai ilmu yang mempelajari bagaimana merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data (Harini dan Turmudi, 2008).

Menurut (Aziz, 2010) menyatakan bahwa estimasi parameter model statistik nonlinier didasarkan pada meminimumkan atau memaksimumkan suatu fungsi objektif yaitu metode *Least Square Estimator* (LSE) dan *Maximum Likelihood Estimator* (MLE). Kali ini peneliti akan mencoba meneliti pada model statistik nonlinier dengan metode *Least Square Estimator* (LSE), metode ini merupakan metode yang digunakan untuk mencari parameter suatu regresi dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat error, metode ini terdiri dari *Ordinary Least Square* (OLS), *Restricted Least Square* (RLS), *Generalized Least Square* (GLS) dan *Nonlinear Least Square* (NLS). Dalam hal ini peneliti akan membahas model statistik nonlinier secara *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE). Karena pada metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) ini memiliki beberapa sifat-sifat statistik yang sangat menarik dan merupakan salah satu metode yang kuat dalam analisis regresi. Sejauh ini, telah banyak dikaji model-model statistik yang linier. Sehingga dalam penelitian sekarang ini, peneliti akan mengkaji model

statistik nonlinier. Adapun bentuk umum dari model statistik nonlinier sebagai berikut:

$$y = f(X_i, \beta) + e_i$$

Dari model persamaan di atas, dapat dilakukan taksiran parameter dengan menggunakan metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) yang bertujuan untuk mendapatkan nilai parameter yang minimum, yaitu dengan cara meminimumkan galatnya. Sehingga dari estimasi model tersebut akan menghasilkan nilai taksiran (Aziz, 2010).

Hasil nilai taksiran tersebut dilakukan dengan menggunakan operasi turunan pertama dan turunan kedua. Turunan pertama digunakan dalam prosedur iterasi yang diterapkan dalam *Gauss Newton*, digunakan untuk menyelesaikan estimasi least square. Metode ini sering disebut metode linearisasi yang menggunakan ekspansi deret Taylor orde satu untuk menghampiri model statistik nonlinier menjadi bentuk linier. Sedangkan metode *Newton Raphson* juga merupakan suatu metode penyelesaian estimasi *least square*, metode ini sama seperti pada metode iterasi *Gauss Newton* yaitu sama-sama menggunakan ekspansi deret Taylor, akan tetapi pada metode iterasi *Newton Raphson* menggunakan pendekatan deret Taylor orde dua (Aziz, 2010).

Estimasi parameter pada model statistik nonlinier dilakukan karena merupakan masalah paling utama dalam menentukan model yang sebenarnya. Maka dari itu diperlakukan suatu cara untuk mengatasinya yaitu dengan melakukan suatu estimasi terhadap model tersebut dengan menggunakan suatu metode. Metode tersebut harus memberikan hasil yang baik, yaitu metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE). Untuk membuktikan apakah

pendugaan tersebut memenuhi syarat sifat-sifat pendugaan yang baik maka dilakukan suatu pengujian terhadap hasil pendugaan dengan sifat-sifat pendugaan itu sendiri yaitu unbiased, efisien dan konsisten (Aziz, 2010).

Dalam al-Qur'an telah disinggung mengenai permasalahan pendugaan dan perbandingan dua hal. Untuk masalah pendugaan terdapat pada surat al-Baqarah ayat 80 yang berbunyi:

وَقَالُوا لَنْ تَمَسَّنَا النَّارُ إِلَّا أَيَّامًا مَّعْدُودَةً قُلْ أَتَّخَذْتُمْ عِنْدَ اللَّهِ عَهْدًا فَلَنْ يُخْلِفَ اللَّهُ عَهْدَهُ ۗ أَمْ تَقُولُونَ عَلَى اللَّهِ مَا لَا تَعْلَمُونَ ﴿٨٠﴾

Artinya: *dan mereka berkata: “kami sekali-kali tidak akan disentuh oleh api neraka, kecuali selama beberapa hari saja.” Katakanlah: “sudahkah kamu menerima janji dari Allah sehingga Allah tidak akan memungkirkan janji-Nya, atautkah kamu hanya mengatakan terhadap Allah apa yang tidak kamu ketahui?” (Al-Baqarah:80).*

Ayat tersebut menerangkan bahwa umat yahudi berkata bahwa mereka tidak akan disentuh oleh api neraka, kecuali beberapa hari saja. Pada ayat ini terdapat ketidakpastian dalam pernyataan dalam jumlah hitungan hari lamanya orang Yahudi akan disentuh oleh api neraka.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka peneliti akan mengkaji masalah model nonlinier dengan judul “Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara *Least Square*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana perbandingan proses estimasi *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) pada model statistik nonlinier dengan metode *Gauss-Newton* dan *Newton-Rhapson*?
2. Bagaimana perbandingan hasil estimasi *Gauss-Newton* dan *Newton-Rhapson* pada implementasi data nonlinier dengan model Cobb-Douglas (CD)?

1.3 Tujuan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui perbandingan proses estimasi *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) pada model statistik nonlinier dengan metode *Gauss-Newton* dan *Newton-Rhapson*.
2. Mengetahui perbandingan hasil estimasi *Gauss-Newton* dan *Newton-Rhapson* pada implementasi data nonlinier dengan model Cobb-Douglas (CD).

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi masalah agar sesuai dengan apa yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka peneliti memberikan batasan pada estimasi parameter statistik nonlinier dengan menggunakan metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE). Untuk mengestimasi parameter, peneliti menggunakan iterasi Gauss Newton dan Newton Raphson. Kemudian metode iterasi tersebut digunakan dalam menganalisis pada implementasi data nonlinier yaitu data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) Tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan model Cobb-Douglas (CD), karena

pada model Cobb-Douglas (CD) tidak sekedar variabel-variabelnya yang nonlinier namun juga parameter-parameternya.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian tugas akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi Penulis

Penelitian ini merupakan kesempatan untuk mengaplikasikan pengetahuan tentang estimasi model statistik nonlinier secara *least square*.

2. Bagi Pembaca

a. Penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan rujukan dan pengembangan pembelajaran ekonometrika.

b. Sebagai referensi mata kuliah ekonometrika yang pernah dipelajari di bangku kuliah khususnya estimasi model statistik nonlinier least square dengan menggunakan metode estimasi parameter secara *Gauss Newton* dan *Newton Rhapson*.

c. Penelitian ini dapat memberikan metode alternatif untuk menentukan prediksi dalam penentuan model persamaan model statistik nonlinier yang terbaik.

3. Bagi Instansi

a. Penelitian ini dapat mengembangkan wawasan keilmuan matematika.

b. Membandingkan penelitian yang sudah ada dengan metode lain.

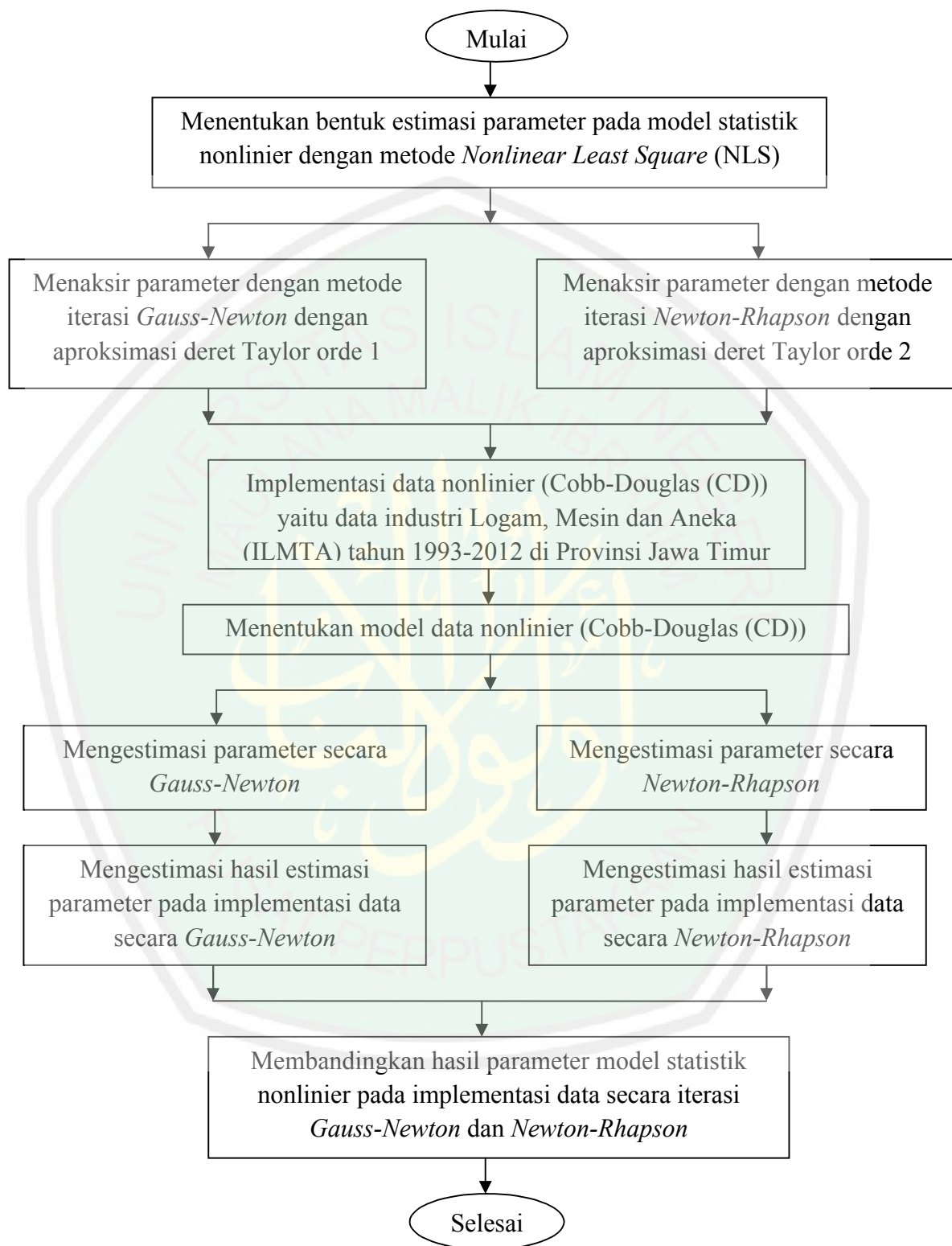
c. Menerapkan dan mengaktualisasi ilmu matematika khususnya pada mata kuliah pilihan ekonometrika.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan pendekatan kepustakaan yang merujuk pada beberapa studi literatur yang berkaitan dan dibutuhkan dalam melakukan penelitian ini. Selain itu, mempelajari literatur pendamping berupa jurnal dan referensi lain yang berkaitan dengan penelitian. Secara umum langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan bentuk estimasi parameter model statistik nonlinier yaitu dengan NLSE secara iterasi *Gauss-Newton* dan *Newton-Raphson*, dengan langkah-langkah sebagai berikut :
 - a) Menaksir parameter dengan metode iterasi *Gauss-Newton* dengan mengaproksimasikan model statistik nonlinier dengan deret Taylor orde 1.
 - b) Menaksir parameter dengan metode iterasi *Newton-Raphson* dengan mengaproksimasikan hasil estimasi parameter dengan deret Taylor orde 2.
2. Implementasi data nonlinier (Cobb-Douglas).
3. Menentukan model data nonlinier (Cobb-Douglas).
4. Mengestimasi parameter.
5. Menganalisis estimasi model statistik nonlinier pada implementasi data nonlinier (Cobb-Douglas).
6. Membuat kesimpulan.

Untuk lebih jelasnya langkah-langkah penelitian di atas akan disajikan dalam bentuk diagram alir (*Flow Chart*) penelitian sebagai berikut:



Gambar 1.1. Flow Chart Penelitian

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan seperti model statistik, metode estimasi parameter, pendiferensialan matriks, deret Taylor, metode estimasi dengan *least square*, *Least Square Estimator* (LSE) dan kajian keagamaan.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penulisan yang menjabarkan tentang gambaran objek penelitian dan hasil pengolahan data dengan menggunakan metode estimasi parameter secara *Gauss Newton* dan *Newton Rhapson* pada estimasi model statistik nonlinier secara *least square*.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari hasil bab III yaitu pembahasan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Statistik

2.1.1 Model Statistik Linier

Menurut Gujarati (2010) arti dari terminologi linier dapat dibedakan menjadi dua cara yang berbeda, yaitu:

Pertama, linieritas dalam variabel maksudnya adalah ekspektasi (harapan bersyarat) dari y adalah sebuah fungsi linier X_i , contoh persamaannya adalah sebagai berikut:

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ data} \quad (2.1)$$

suatu fungsi $y = f(X)$ dikatakan linier dalam variabel jika X berpangkat satu. Sedangkan untuk persamaan berikut:

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \quad (2.2)$$

bukan merupakan fungsi linier dalam variabel karena variabel X berpangkat dua. Akan tetapi fungsi tersebut dapat juga dikatakan sebagai fungsi linier jika X_i^2 diganti dengan Z_i , seperti:

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 Z_i \quad (2.3)$$

Kedua, linieritas dalam parameter maksudnya adalah bahwa ekspektasi (harapan bersyarat) dari y , $E(y | X_i)$ adalah sebuah fungsi linier dari parameter-parameternya, parameter β bisa saja linier atau bisa juga tidak linier untuk variabel X -nya. Dalam hal ini, contoh linier dalam parameter adalah

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \quad (2.4)$$

Sedangkan untuk persamaan berikut:

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2^{\beta_3} X_i \quad (2.5)$$

bukan merupakan fungsi linier dalam parameter karena β_2 tidak berpangkat satu.

Dalam hal ini, $\beta_2^{\beta_3}$ tidak dapat diganti dengan β_4 .

Dari kedua interpretasi tersebut, linieritas dalam parameter relevan terhadap pembentukan teori regresi. Oleh karena itu, terminologi regresi “linier” akan selalu berarti sebuah regresi yang linier dalam parameter-parameternya, β -nya (yaitu parameternya) berpangkat satu saja. Parameter untuk variabel penjelasnya atau X -nya bisa saja linier atau tidak linier. Jadi, $E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$ linier untuk keduanya, yaitu linier dalam variabel dan linier dalam parameter. Sedangkan, $E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2$ linier dalam parameter akan tetapi tidak linier dalam variabel X (Gujarati, 2010: 50).

Model statistik linier dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu atau k variabel. Persamaan model statistik linier dengan k variabel adalah sebagai berikut:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + e \quad (2.6)$$

jika y, x_1, x_2, \dots, x_k dinyatakan masing-masing dengan $y_i = x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ dan e dinyatakan dengan e_i , maka persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + e_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.7)$$

persamaan di atas, dapat dinotasikan dalam bentuk matriks yaitu:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

dari matriks tersebut dapat dituliskan bentuk umum model statistik linier sebagai berikut:

$$y = X\beta + e \quad (2.9)$$

Karena tujuan dari model statistik linier ini tidak hanya sekedar sebagai statistik deskriptif, tetapi juga untuk tujuan pengambilan kesimpulan maupun penaksiran, maka disini harus diasumsikan bahwa e mengikuti distribusi probabilitas, dengan distribusi yang digunakan adalah distribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi σ^2 , dapat ditulis $\sim (0, \quad)$ sebagai matriks atau $\sim (0, \quad)$ sebagai skalar (Aziz, 2010).

2.1.2 Model Statistik Transformasi Linier

Faktanya, terdapat beberapa macam bentuk nonlinier yang dapat ditransformasikan ke dalam bentuk linier, antara lain:

1. Bentuk Power

$$y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} e_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.10)$$

pada persamaan (2.10) dapat dilakukan dengan transformasi logaritma, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\ln(y_i) = \ln(\beta_0 X_i^{\beta_1} e_i)$$

$$\ln(y_i) = \ln \beta_0 X_i^{\beta_1} + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma perkalian}$$

$$\ln(y_i) = \beta_1 \ln(\beta_0 X_i) + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma pangkat}$$

$$\ln(y_i) = \beta_1 \ln \beta_0 + \ln X_i + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma perkalian}$$

bentuk power ini setelah ditransformasikan termasuk dalam model linier.

2. Bentuk Eksponensial

$$y_i = \exp(X\beta) e_i \quad (2.11)$$

dari persamaan tersebut dilakukan dengan transformasi logaritma, sehingga diperoleh:

$$\ln(y_i) = \ln(\exp(X\beta) e_i)$$

$$\ln(y_i) = \ln(\exp(X\beta)) + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma perkalian}$$

$$\ln(y_i) = (X\beta) \ln(\exp) + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma pangkat}$$

$$\ln(y_i) = (X\beta)(1) + \ln e_i, \quad \text{definisi eksponensial}$$

$$\ln(y_i) = (X\beta) + \ln e_i$$

bentuk eksponensial ini merupakan model linier. Sehingga bentuk transformasi dari persamaan (2.11) dapat juga dikatakan sebagai model statistik linier jika dimisalkan bahwa:

$$y^* = X\beta + e^*$$

di mana

$$y^* = \ln(y_i) \quad \text{dan} \quad e^* = \ln(e_i)$$

3. Bentuk Resiprokal (Berkebalikan)

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_i} \right) + e_i \quad (2.12)$$

persamaan (2.12) merupakan model nonlinier pada variabel X karena variabel ini memasuki model secara terbalik atau resiprokal. Model ini

linier dalam β_1 dan β_2 , akan tetapi model ini dapat juga dikatakan sebagai model linier dalam parameter dan linier dalam variabel jika dimisalkan

$$X^* = \frac{1}{X_i}, \text{ sehingga diperoleh}$$

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X^* + e_i \quad (2.13)$$

2.1.3 Model Statistik Nonlinier

Model statistik nonlinier merupakan suatu fungsi yang menghubungkan variabel terikat Y dengan variabel bebas X yang sifatnya tidak konstan untuk setiap perubahan nilai X (Purwanto, 2009).

Pada umumnya realitas perekonomian dapat dilakukan dengan pendekatan secara linier atau ditransformasikan ke dalam linier. Namun demikian, banyak juga model nonlinier yang tidak bisa ditangani oleh model linier, oleh karena itu diperlukan model nonlinier dalam pemecahannya. Tidak berbeda dengan model linier, estimasi model nonlinier didasarkan pada minimasi (*Least square Estimator*) atau maksimasi (*Maximum Likelihood Estimator*) fungsi objektif. Penaksiran terhadap parameter model nonlinier akan menghasilkan nilai yang berbeda untuk penaksir yang sama karena *error* randomnya mempunyai fungsi power. Oleh karena itu, *Least square Estimation* diterapkan pada model nonlinier dengan melakukan suatu prosedur atau algoritma yang dapat menjamin bahwa penaksir tersebut secara nyata memenuhi kriteria dari fungsi tujuan, yaitu memberikan *the sum of squares error* pada titik yang paling minimum.

Dengan perkataan lain, dalam penentuan penaksir pada model nonlinier diperlukan pengetahuan mengenai *static optimization theory*. Berdasarkan teori,

untuk menentukan titik optimum yang diyakini sebagai solusi dalam penentuan penaksir model nonlinier akan digunakan operasi *first* dan *second derivative test*. *First derivative test* digunakan dalam beberapa prosedur iterasi, salah satunya sebagaimana yang diterapkan dalam metode iterasi *Gauss-Newton*. Sementara itu, *second derivative test* digunakan pula pada beberapa prosedur iterasi, namun penulis hanya menggunakan salah satu dari beberapa bentuk dari prosedur iterasi yaitu diterapkan dalam menentukan metode iterasi *Newton-Raphson* (Sanjoyo, 2006).

Menurut Hasan (2002) terdapat beberapa bentuk dari model nonlinier antara lain:

1. Bentuk Power

$$y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} + e_i, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.14)$$

dari persamaan tersebut, tidak dapat dilinierkan karena jika ditransformasikan tidak dapat diselesaikan.

$\ln(y_i) = \ln(\beta_0 X_i^{\beta_1} + e_i)$ \longrightarrow tidak dapat dipecah, sehingga tidak dapat diselesaikan

dimana:

y_i = variabel tak bebas (*dependent variable*)

X_i = variabel bebas (*independent variable*)

β_0 = parameter konstanta/intersept regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

β_1 = parameter koefisien regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

e = variabel galat/kesalahan regresi, dengan $\sim (0; \quad)$

= banyaknya data observasi

2. Bentuk Exponensial

$$y_i = \exp(X\beta)e_i \quad (2.15)$$

dari persamaan tersebut dilakukan dengan transformasi logaritma, sehingga diperoleh:

$$\ln(y_i) = \ln(\exp(X\beta)e_i)$$

$$\ln(y_i) = \ln(\exp(X\beta)) + \ln e_i, \text{ sifat logaritma perkalian}$$

$$\ln(y_i) = (X\beta)\ln(\exp) + \ln e_i, \text{ sifat logaritma pangkat}$$

$$\ln(y_i) = (X\beta)(1) + \ln e_i, \quad \text{sifat eksponensial}$$

$$\ln(y_i) = (X\beta) + \ln e_i$$

model seperti ini adalah model linier. Sehingga bentuk transformasi dari persamaan (2.15) dapat juga dikatakan sebagai model statistik linier jika $y^* = X\beta + e^*$, di mana $y^* = \ln(y_i)$ dan $e^* = \ln(e_i)$.

3. Bentuk Resiprokal (Berkebalikan)

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_i} \right) + e_i \quad (2.16)$$

persamaan (2.16) merupakan model nonlinier pada variabel X karena variabel ini memasuki model secara terbalik atau resiprokal. Model ini linier dalam β_1 dan β_2 , akan tetapi model ini dapat juga dikatakan sebagai model

linier dalam parameter dan linier dalam variabel jika dimisalkan $X^* = \frac{1}{X_i}$,

sehingga diperoleh

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X^* + e_i \quad (2.17)$$

Dari ketiga model statistik nonlinier di atas, terdapat pula bentuk yang lain yakni model fungsi produksi Cobb-Douglas sebagai berikut:

Bentuk awal dari fungsi produksi Cobb-Douglas adalah (Aziz, 2010):

$$Q = f(L, K) = \gamma L^\alpha K^\beta \quad (2.18)$$

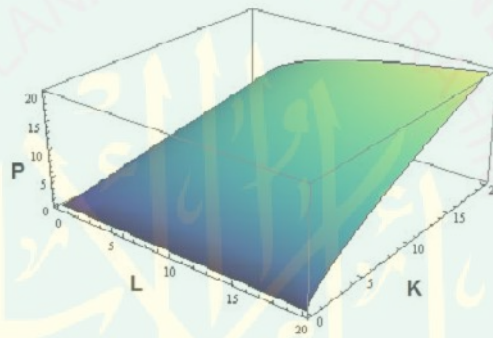
dengan:

Q = output jumlah produksi (*Quantity of Product*)

L = output tenaga kerja (*Labour of Product*)

K = output modal (*Capital of Product*)

γ, α, β = parameter positif yang konstan



Gambar 2.1. Fungsi Produksi Cobb-Douglass

(Hong dan Tan, 2008)

Fungsi produksi Cobb-Douglass dibuat oleh matematikawan Charles W. Cobb dan ekonom Faul H. Douglass sekitar tahun 1928. Fungsi Cobb-Douglas dapat memiliki beberapa bentuk, antara lain:

a. $Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$

Bentuk tersebut dapat ditransformasikan dalam bentuk fungsi linier, sehingga persamaan tersebut dapat diubah menjadi:

$$\ln Q = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln L + \beta_3 \ln K$$

sehingga persamaan ini dapat diestimasi dengan menggunakan teknik statistik linier.

$$b. Q = \beta_1 L^{\beta_2} C^{\beta_3}$$

Bentuk ini tidak dapat ditransformasikan dalam bentuk fungsi linier. Dengan kata lain fungsi tersebut adalah fungsi produksi Cobb-Douglas nonlinier sehingga harus diestimasi dengan menggunakan teknik statistik nonlinier (Aziz, 2010).

Adapun bentuk umum dari persamaan model statistik nonlinier adalah:

$$y = f(X, \beta) + e \quad (2.19)$$

dengan fungsi nonlinier dalam parameter β dan $e \sim (0, \sigma^2)$, dapat ditulis sebagai berikut

$$y_i = f(X_i, \beta) + e_i \quad (2.20)$$

dimana $y_i = (y_1, y_2, \dots, y_i)$; $f(X_i, \beta) = [f(X_1, \beta), f(X_2, \beta), \dots, f(X_i, \beta)]$ adalah vektor dari variabel bebas dan $e_i = (e_1, e_2, \dots, e_i)$ adalah *random error* (*independent identical distributed*). Karena dengan $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ maka berakibat $y_i \sim N(f(X_i, \beta), \sigma^2)$ dengan $f(X_i, \beta)$ adalah fungsi nonlinier dalam parameter β . Terdapat dua cara untuk menaksir parameter β pada model statistik nonlinier, yaitu dengan metode *nonlinear least square* dan *maximum likelihood* (Aziz, 2010).

2.2 Metode Estimasi Parameter

2.2.1 Pengertian Estimasi Parameter dan Estimator

Dalam statistika, salah satu konsep paling dasar adalah penarikan sampel (*sampling*). Sampel diambil dari suatu kelompok yang lebih besar yang disebut dengan populasi. Populasi sering dikatakan sebagai himpunan keseluruhan obyek

yang diselidiki, sedangkan sampel merupakan himpunan bagian populasi. Karakteristik atau konstanta dari suatu populasi disebut parameter. Sedangkan suatu harga yang dihitung dari sampel dinamakan statistik. Sedangkan pengertian parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi (Harini dan Turmudi, 2008).

Dalam statistika, estimasi adalah metode untuk mengetahui taksiran nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel statistik. Nilai-nilai populasi sering disebut dengan parameter populasi. Sedangkan nilai-nilai sampelnya disebut dengan statistik sampel. Estimasi (*estimation*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau memperkirakan hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi juga merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel. Dalam hal ini, peubah acak yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi, dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002).

Penduga (*estimator*) adalah suatu nilai statistika (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter. Dengan pendugaan dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak diketahui berada di sekitar sampel (statistik sampel). Secara umum, parameter diberi lambang θ (baca: *theta*) dan penduga diberi lambang $\hat{\theta}$ (baca: *theta* topi atau *theta* cap). Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut ini:

Tabel 2.1 Parameter, Penduga dan Statistiknya

Parameter (θ)	Penduga ($\hat{\theta}$)	Statistik
μ (rata-rata populasi)	$\hat{\mu}$	\bar{x}
π (proporsi/persentase)	$\hat{\pi}$	ρ

Tabel 2.1 (Lanjutan)

σ^2 (variansi)	$\hat{\sigma}^2$	S^2
σ (simpangan baku)	$\hat{\sigma}$	S
ρ (koefisien korelasi)	$\hat{\rho}$	r
β (koefisien regresi)	$\hat{\beta}$	b

karena penduga merupakan fungsi dari nilai-nilai sampel, maka penduga termasuk peubah acak dan memiliki distribusi *sampling* (distribusi pemilihan sampel) (Hasan, 2002).

Estimator adalah anggota peubah acak dari nilai statistika yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari sesuatu contoh disebut nilai duga (*estimate*), (Yitnosumarto, 1990).

2.2.2 Sifat-sifat Penduga Parameter

Adapun sifat-sifat penduga parameter (estimator), antara lain:

1. Tak Bias (*Unbiased*)

Menurut Yitnosumarto (1990) suatu hal yang menjadi tujuan dalam estimasi adalah estimasi harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter θ . Jika $\hat{\theta}$ merupakan estimasi tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ , maka

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

2. Efisien

Menurut Hasan (2002) suatu estimasi dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila penduganya ($\hat{\theta}$) mempunyai varian yang kecil. Apabila terdapat

lebih dari satu penduga, estimasi yang efisien adalah jika penduganya mempunyai varian yang terkecil. Dua buah estimasi (contoh: OLS dan ML) dapat dibandingkan efisiensinya dengan menggunakan efisiensi relatif (*relative efficiency*). Efisiensi relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) &= \frac{E\left(\left(\hat{\theta}_1, \theta\right)^2\right)}{E\left(\left(\hat{\theta}_2, \theta\right)^2\right)} \\ &= \frac{E\left(\left(\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta})\right)^2\right)}{E\left(\left(\hat{\theta}_2 - E(\hat{\theta})\right)^2\right)} \\ &= \frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)} \end{aligned}$$

dengan keterangan bahwa jika $R > 1$ maka $Var \hat{\theta}_1 > Var \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika $R < 1$ maka $Var \hat{\theta}_1 < Var \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

3. Konsisten

Menurut Hasan (2002) suatu estimasi dikatakan konsisten, jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

- a. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $(\hat{\theta})$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$- \left(\right) \rightarrow 0 \text{ jika } \rightarrow \infty$$

artinya bahwa variansi dari $(\hat{\theta})$ mendekati nol jika n (data sampel) menuju tak hingga.

- b. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampel penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus diatas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1.

2.3 Pendiferensialan Matriks

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut *entri* dari matriks. Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut *matriks kolom* (atau *vektor kolom*) dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut *matriks baris* (atau *vektor baris*). Adapun operasi matriks yaitu, Dua matriks adalah *setara* (*equal*) jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama. Dalam notasi matriks, jika $A = [\]$ dan $B = [\]$ memiliki ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ atau $=$ untuk semua dan (Anton dan Rorres, 2004).

Menurut Gujarati (2004), jika $a^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$ adalah suatu vektor baris dengan angka-angka, dan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

adalah vektor kolom dari variabel-variabel x_1, x_2, \dots, x_N , maka

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

bukti:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = [a_1 x_1 \ a_2 x_2 \ \dots \ a_N x_N]$$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N)}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

perhatikan matriks $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

maka,

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2 A \mathbf{x}$$

yang merupakan vektor kolom dari N elemen, atau

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}$$

yang merupakan vektor baris dari N elemen. Bukti:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{ii} x_i^2 + 2x_i \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j + \sum_{j \neq i} \sum_{j \neq i} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Turunkan terhadap x elemen ke- k didapat:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i$$

untuk $k = 1, 2, \dots, N$ menghasilkan

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_k} &= \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1N}) x_1 + (a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \cdots + a_{N1} x_N) \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2N}) x_2 + (a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{N2} x_N) \\ \vdots \\ (a_{N1} + a_{N2} + \cdots + a_{NN}) x_N + (a_{1N} x_1 + a_{2N} x_2 + \cdots + a_{NN} x_N) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} \end{aligned}$$

karena \mathbf{A} matriks simetris, dimana $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, maka didapat:

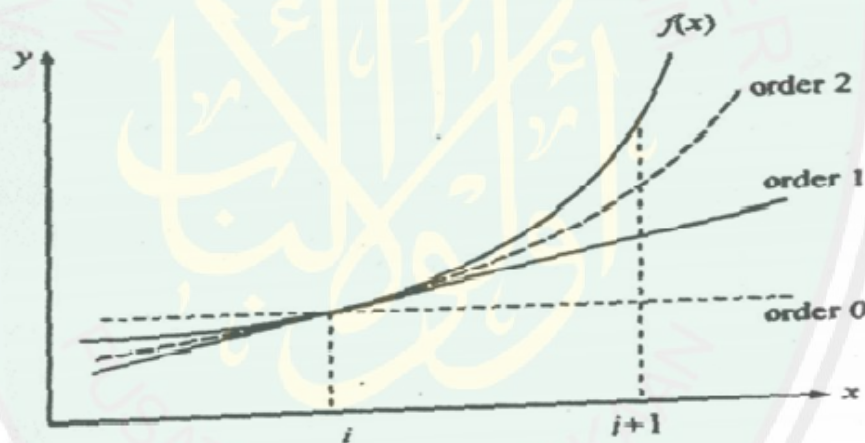
$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{x} = 2\mathbf{A} \mathbf{x}$$

2.4 Deret Taylor

2.4.1 Persamaan Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaian persamaan differensial. Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui titik x_i dan semua turunan dari semua $f^{(n)}(x_i)$ terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka deret Taylor dapat dinyatakan nilai $f(x_{i+1})$ pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n$$



Gambar 2.2. Perkiraan Suatu Fungsi dengan Deret Taylor

dengan

$f(x_i)$ = fungsi dititik x_i

$f^{(n)}(x_i)$ = fungsi dititik x_i

$f', f'', \dots, f^{(n)}$ = turunan pertama, kedua, ..., ke n dari fungsi

Δx = langkah ruang, yaitu jarak antara x_i dan x_{i+1}

R_n = kesalahan pemotongan

Dalam persamaan tersebut kesalahan pemotongan diberikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$R_n = f^{(n+1)}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{(n+2)}(x_i) \frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \quad (2.21)$$

persamaan di atas yang mempunyai suku sebanyak tak hingga akan memberikan perkiraan nilai suatu fungsi sesuai dengan penyelesaian eksaknya.

a. Memperhitungkan suku pertama (Orde Nol)

Apabila hanya memperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan maka persamaan (2.21) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x) \approx f(x_0)$$

pada persamaan (2.21) yang disebut sebagai perkiraan orde nol, nilai f pada titik (x_0) sama dengan nilai $f(x_0)$, perkiraan tersebut adalah benar jika fungsi yang diperkirakan adalah suatu konstan. Jika fungsi tidak konstan maka diperkirakan fungsi-fungsi dari deret Taylor berikutnya.

b. Memperhitungkan suku pertama (Orde 1)

Bentuk deret Taylor orde satu, yang memperhitungkan dua suku pertama dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \frac{\Delta x}{1!}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}$$

yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier).

c. Memperhitungkan suku kedua (Orde 2)

Bentuk deret Taylor orde dua, yang memperhitungkan dua suku pertama dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\left(\right) \approx \left(\right) + \left(\right) \frac{\Delta}{1!} + \frac{\Delta}{2!}$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)}{2!}$$

(Bambang, 2002)

2.5 Metode Estimasi Dengan *Least Square*

Metode kuadrat terkecil adalah salah satu metode yang populer dalam mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel random. Aplikasi pertama perataan kuadrat terkecil adalah dalam hitungan masalah astronomi oleh Carl F. Gauss. Keunggulan dari sisi praktis makin nyata setelah berkembangnya komputer elektronik, formulasi teknik hitungan dalam notasi matriks, dan hubungannya dengan konsep kuadrat terkecil itu ke statistik.

Model fungsional umum tentang sistem yang akan diamati harus ditentukan terlebih dahulu sebelum merencanakan pengukuran. Model fungsional ini ditentukan menggunakan sejumlah variabel (baik parameter maupun pengamatan) dan hubungan di antara mereka.

Selalu ada jumlah minimum variabel bebas yang secara unik menentukan model tersebut. Sebuah model fisis, bisa saja memiliki beberapa model fungsional yang berlainan, tergantung dari tujuan pengukuran atau informasi yang diinginkan. Jumlah minimum variabel dapat ditentukan setelah tujuan pengukuran berhasil ditetapkan, tidak terikat pada jenis pengukuran yang perlu dilakukan (Firdaus, 2004).

2.6 Macam-Macam Metode *Least square Estimator* (LSE)

Metode ini dapat digunakan untuk mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel random. Salah satu cara untuk mendefinisikan nilai tengah dari suatu himpunan data adalah dengan mencari nilai μ_r' yang meminimumkan nilai fungsi berikut:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i^r - \mu_r')^2 \quad (2.22)$$

yang merupakan fungsi galat kesalahan rata-rata aproksimasi dengan data sebenarnya. Estimasi μ_r' , merupakan variabel random yang dikatakan sebagai *Least Square Estimator* (LSE) (Aziz, 2010).

Kemudian untuk meminimumkan sebuah fungsi dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama terhadap μ_r' dan menyamakannya dengan nol, yaitu:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n (y_i^r - \mu_r')^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i^{r2} - 2y_i^r \mu_r' + \mu_r'^2) \\ \frac{\partial S}{\partial \mu_r'} &= \sum_{i=1}^n (-2y_i^r + 2\mu_r') = 0 \\ &\sum_{i=1}^n (-2y_i^r + 2\mu_r') = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n y_i^r + 2 \sum_{i=1}^n \mu_r' &= 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n y_i^r &= -2n\mu_r' \\ \sum_{i=1}^n y_i^r &= n\mu_r' \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sehingga diperoleh

$$\mu_{r'ls} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.24)$$

(Aziz, 2010)

Terdapat beberapa macam metode LSE, diantaranya adalah *Ordinary Least Square Estimator (OLSE)* dan *Nonlinear Least Square Estimator (NLSE)*.

2.6.1 Ordinary Least Square Estimator (OLSE)

Metode *Ordinary Least Square* merupakan salah satu metode bagian dari kuadrat terkecil dan sering hanya disebut kuadrat terkecil saja. Metode ini sering digunakan oleh para ilmuwan atau peneliti dalam proses penghitungan suatu persamaan regresi sederhana. Dalam penggunaan regresi, terdapat beberapa asumsi dasar yang dapat menghasilkan estimator linier tidak bias yang terbaik dari model regresi yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil atau biasa dikenal dengan regresi OLS agar estimasi koefisien regresi itu bersifat *Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)*.

Misalkan terdapat persamaan model statistik linier *multivariate* yaitu:

$$y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + e_i, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.25)$$

kemudian dari persamaan (2.25) dapat dijadikan sebagai Sistem Persamaan Linier (SPL) yaitu:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \dots + \beta_k X_{k1} + e_1 \\ y_2 &= \beta_1 X_{12} + \beta_2 X_{22} + \dots + \beta_k X_{k2} + e_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_1 X_{1n} + \beta_2 X_{2n} + \dots + \beta_k X_{kn} + e_n \end{aligned}$$

jika diambil sebanyak n data observasi maka model ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

misalkan:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

sehingga dari persamaan (2.26) dapat disederhanakan menjadi

$$y = X\beta + e \quad (2.27)$$

Variabel e berperan penting dalam model ekonometrika, akan tetapi variabel ini tidak dapat diteliti dan tidak pula tersedia informasi tentang bentuk distribusi kemungkinannya. Disamping asumsi distribusi probabilitasnya, beberapa asumsi yang diperlukan dalam menerapkan metode OLSE khususnya tentang statistiknya.

Berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai variabel e sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel e adalah sama dengan nol atau

$$E(e) = 0 \quad (2.28)$$

yang berarti nilai bersyarat e yang diharapkan adalah sama dengan nol dimana syaratnya yang dimaksud tergantung pada nilai X . Dengan demikian, untuk nilai X tertentu mungkin saja nilai e sama dengan nol, mungkin positif atau negatif, tetapi untuk banyak nilai X secara keseluruhan nilai rata-rata e diharapkan sama dengan nol.

2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi. Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negatif antara e_i dan e_j . Heteroskedastisitas antar variabel e untuk setiap observasi tidak ada, atau dikatakan bahwa setiap variabel e

memenuhi syarat homoskedastisitas. Artinya variabel e mempunyai varian yang positif dan konstan yang nilainya σ^2 , yaitu

$$\text{Cov}(e_i, e_j) = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.29)$$

atau dalam bentuk matriks varian-kovarian:

$$\begin{bmatrix} \text{var}(e_1) & \text{cov}(e_1, e_2) & \dots & \text{cov}(e_1, e_n) \\ \text{cov}(e_2, e_1) & \text{var}(e_2) & \dots & \text{cov}(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(e_n, e_1) & \text{cov}(e_n, e_2) & \dots & \text{var}(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n \quad (2.30)$$

sehingga asumsi kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\text{Cov}(e) = E \left[(e - E(e))(e - E(e))^T \right] = E(ee^T) = \sigma^2 I_n \quad (2.31)$$

3. Variabel X dan variabel e adalah tidak saling tergantung untuk setiap observasi sehingga

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, e_i) &= E \left[(X_i - E(X_i))(e_i - E(e_i)) \right] \\ &= E \left[(X_i - E(X_i))(e_i - 0) \right] \\ &= E \left[(X_i - E(X_i))e_i \right] \\ &= (X_i - E(X_i))E(e_i) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

dari ketiga asumsi ini diperoleh:

$$\begin{aligned} E(y) &= E(X\beta + e) \\ &= E(X\beta) + E(e) \\ &= X\beta + 0 \\ &= X\beta \end{aligned} \quad (2.33)$$

dan kovariansi:

$$\text{Cov}(y) = \sigma^2 I_n \quad (2.34)$$

Misalkan sampel untuk y diberikan, maka aturan main yang memungkinkan dalam pemakaian sampel untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $e = y - X\beta$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini diharapkan akan menghasilkan komponen sistematis yang lebih berperan daripada komponen stokastiknya, artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang y . Dengan kata lain, X tidak mampu menjelaskan y .

Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga nilai fungsinya adalah

$$S = e^T e = (y - X\beta)^T (y - X\beta) \quad (2.35)$$

sekecil mungkin (minimal).

Karena pada persamaan (2.35) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Akibatnya, *transpose* skalarnya tidak mengubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= (y - X\beta)^T (y - X\beta) \\ &= (y^T - \beta^T X^T)(y - X\beta) \\ &= y^T y - y^T X\beta - \beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta \\ &= y^T y - (y^T X\beta)^T - \beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta \\ &= y^T y - \beta^T X^T y - \beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta \\ &= y^T y - 2\beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta \end{aligned} \quad (2.36)$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama S terhadap β , yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\beta} &= 0 - 2X^T y + X^T X\beta + (\beta^T X^T X)^T \\ &= -2X^T y + X^T X\beta + X^T X\beta \\ &= -2X^T y + 2X^T X\beta \end{aligned} \quad (2.37)$$

dan hasil estimasi parameter β didapatkan dengan menyamakan hasil turunan ini dengan nol, sehingga pada saat hasil turunan jumlah kuadrat eror disamakan dengan nol parameter β menjadi $\hat{\beta}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 -2X^T y + 2X^T X \hat{\beta} &= 0 \\
 2X^T X \hat{\beta} &= 2X^T y \\
 X^T X \hat{\beta} &= X^T y \\
 \hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T y
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

kemudian akan ditunjukkan bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimasi parameter linier tak bias dari β , yaitu:

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\beta}) &= E\left((X^T X)^{-1} X^T y\right) \\
 &= E\left((X^T X)^{-1} X^T (X\beta + e)\right) \\
 &= E\left((X^T X)^{-1} X^T X\beta + (X^T X)^{-1} X^T X e\right) \\
 &= E(I\beta + Ie) \\
 &= E(\beta + e) \\
 &= E(\beta) + E(e) \\
 &= \beta + 0 \\
 &= \beta
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

dari hal ini maka terbukti bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimasi linier tak bias dari β .

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (2.34) ke dalam persamaan (2.38) maka diperoleh:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y \tag{2.40}$$

persamaan tersebut yang dinamakan sebagai penaksir (*estimator*) parameter β secara kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square Estimator (OLSE)*) (Aziz, 2010).

2.7 Kajian Keagamaan

Al-Qur'an merupakan sumber dari segala sumber, salah satunya adalah mengenai khasanah dalam ilmu pengetahuan. Dalam al-Qur'an telah dijelaskan dan diungkapkan bahwa ilmu pengetahuan dan al-Qur'an adalah dua aspek kebenaran yang sama, dan tidak ada pertentangan diantara keduanya. Wahyu pertama al-Qur'an yang diturunkan kepada Nabi Muhammad Saw adalah menuntut ilmu pengetahuan dan menekankan pentingnya arti belajar dalam kehidupan sehari-hari umat manusia (96: 1-5). Al-Qur'an juga menganjurkan umat manusia untuk berdoa semoga Allah Swt menambah ilmu pengetahuan kepadanya (20: 114). Salah satu diantara ilmu pengetahuan adalah mengenai ilmu hisab atau bilangan yaitu matematika. Matematika mengkaitkan dengan bilangan pokok dari keimanan, yakni bilangan angka "satu". Hal ini terdapat dalam al-Qur'an surat al-Ikhlâs ayat 1 yang berbunyi:

قُلْ هُوَ اللَّهُ أَحَدٌ

Artinya: *Katakanlah: "Dia-lah Allah, yang maha Esa"*

Matematika sangat erat hubungannya dengan perhitungan, sehingga ada yang berpendapat bahwa matematika adalah ilmu *al-hisab* (ilmu hitung). Allah Swt adalah raja dari segala sesuatu yang telah diciptakann-Nya. Bahkan dalam hal perhitungan, Allah SWT sangat cepat menghitung dan sangat teliti (Rahman, 2000).

2.7.1 Perkiraan Pahala Orang Yang Bersedekah

Dalam kehidupan sehari-hari, terkadang kita dengan gampangnya mengeluarkan uang puluhan ribu atau bahkan ratusan ribu hanya untuk sekedar

berfoya-foya, misalkan saja duduk di kafe, nonton di bioskop, karaoke, jalan-jalan dan lain sebagainya. Dari hal ini kita akan lupa atau sulit sekali mengeluarkan uang untuk bersedekah, padahal kita tahu dan paham bahwa bersedekah akan membawakan kita pahala yang berlipat ganda dari Allah Swt. Seperti sabda Nabi Rasulullah Saw sebagai berikut:

Rasulullah Saw bersabda: “Bersedekahlah kalian, karena sesungguhnya sedekah dapat menambah harta yang banyak. Maka bersedekahlah kalian, niscaya Allah menyayangi kalian” (Al-Wasail 6: 225, hadis ke 11).

Ayat-ayat al-Qur’an yang berhubungan dengan masalah sedekah terdapat pada surat al-Baqarah ayat 261 yang berbunyi:

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ سَنَابِلٍ مِائَةٌ
حَبَّةٌ وَاللَّهُ يُضْعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: *perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha mengetahui (QS. Al-Baqarah: 261).*

Surat ini dinamakan dengan al-Baqarah karena di dalamnya dijelaskan mengenai kisah penyembelihan sapi betina yang diperintahkan Allah Swt kepada kaum Bani Isra’il (2: 67-74), dimana dijelaskan watak orang Yahudi pada umumnya. Dinamai pula *Fusthaatul-Quran* (puncak al-Qur’an) karena memuat beberapa hukum yang tidak disebutkan dalam surat lainnya. Adapun tafsir dari ayat tersebut adalah sebagai berikut:

Pertama, menurut tafsir Ibnu Kasir (Ad-Dimasyqi, 2000) dalam ayat tersebut merupakan perumpamaan yang dibuat oleh Allah Swt. Untuk menggambarkan perlipatgandaan pahala bagi orang yang menafkahkan hartanya

di jalan Allah Swt dan mencari keridhaan-Nya. Setiap amal kebaikan itu dilipatkan gandakan pahalanya menjadi sepuluh kali lipat, sampai tujuh ratus kali lipat. Untuk itu Allah Swt berfirman:

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ

Artinya: “perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah” (Al-Baqarah: 261).

Dalam ayat di atas, yang dimaksud dengan “jalan Allah” menurut Sa’id ibnu Jubair adalah dalam rangka taat kepada Allah Swt. Sedangkan menurut Mak-hul adalah menafkahkan hartanya untuk keperluan berjihad, seperti halnya mempersiapkan kuda dan senjata serta lainnya untuk tujuan berjihad. Syahib ibnu Bisyr meriwayatkan dari Ikrimah, dari Ibnu Abbas, bahwa menafkahkan harta untuk keperluan jihad dan ibadah haji pahalanya dilipatgandakan sampai tujuh ratus kali lipat. Karena itulah disebutkan dalam firman Allah Swt sebagai berikut:

كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ سُنبُلَةٍ مِائَةٌ حَبَّةٍ

Artinya: “serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji” (Al-Baqarah: 261).

Perumpamaan dari ayat tersebut lebih berkesan dalam hati daripada hanya menyebutkan sekedar bilangan tujuh ratus kali lipat, mengingat pada ungkapan tersebut tersirat pengertian bahwa amal-amal saleh itu dikembangkan pahalanya oleh Allah Swt. Buat para pelakunya, sebagaimana seorang petani menyemaikan benih di lahan yang subur. Sunnah telah menyebutkan adanya perlipatgandaan tujuh ratus kali lipat ini bagi amal kebaikan. Kemudian lanjutan ayat di atas adalah:

وَاللَّهُ يُضَعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ

Artinya: “Allah melipat gandakan (pahala) bagi siapa yang Dia kehendaki” (al-Baqarah: 261).

Hal ini sesuai dengan keikhlasan orang-orang yang bersangkutan dalam amalnya. Kemudian untuk ayat selanjutnya adalah:

وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: “dan Allah maha luas lagi maha mengetahui” (*al-Baqarah: 261*).

Yang artinya bahwa anugerah-Nya mahaluas lagi banyak, lebih banyak daripada makhluk-Nya, lagi Maha mengetahui siapa yang berhak mendapat pahala yang berlipat ganda dan siapa yang tidak berhak. Mahasuci Allah dengan segala pujiann-Nya.

Kedua, dalam buku al-Qur’an dan Tafsirnya (Dahlan, 1991) mengatakan bahwa dalam QS. Al-Baqarah ayat 261 Allah Swt menggambarkan keberuntungan orang yang suka membelanjakan atau menyumbangkan harta bendanya di jalan Allah, yaitu untuk mencapai keridhaan-Nya. Hal ini, ada hubungannya antara infak dengan hari kiamat. Yaitu sebagaimana yang diketahui oleh seseorang yang tak akan mendapat pertolongan apapun dan dari siapapun pada hari kiamat itu, kecuali dari hasil amalnya sendiri selagi ia masih di dunia, antara lain amalnya yang berupa infak di jalan Allah Swt. Kemudian dijelaskan pula bahwa, betapa mujurnya orang-orang yang suka menafkahkan hartanya di jalan Allah, dalam ayat ini dilukiskan bahwa orang tersebut adalah seorang yang mnyemaikan sebutir benih ditanah yang subur. Benih yang sebutir itu menumbuhkan sebatang pohon, dan pohon tersebut bercabang tujuh setiap cabang menghasilkan setangkai buah, dan setiap tangkai berisi seratus biji sehingga benih yang sebutir itu memberikan hasil sebanyak 700 butir. Ini berarti bahwa tujuh ratus kali lipat.

Ketiga, dalam buku tafsir al-Qur’anul Majid An-Nuur (Ash-Shiddieqy, 2003) menjelaskan bahwa dalam QS. al-Baqarah ayat 261 orang-orang yang

menafkahkan hartanya untuk mencari keridhaan Allah dan kebaikan pahalanya dengan meninggikan kalimat-Nya, membahagiakan tanah air dan penduduknya adalah sama dengan satu bibit tanaman yang paling baik (berkualitas) yang ditanam yang paling subur, lalu menghasilkan 700 kali lipat. Misalnya, tanaman padi yang kemungkinan dari satu bibit (satu bulir) setelah ditanam menghasilkan 700 bulir gabah atau lebih banyak lagi telah pernah disaksikan oleh ahli tanaman. Maka contoh yang diberikan dalam ayat al-Qur'an bukanlah hal yang mustahil adanya.

وَاللَّهُ يُضْعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ ﴿٢٦١﴾

Artinya: “Allah melipat gandakan (pahala) bagi siapa yang Dia kehendaki” (Al-Baqarah: 261).

Dari ayat tersebut Allah melipat gandakan yang demikian itu dengan tidak ada batasan maksimalnya kepada siapa yang dikehendaki-Nya. mengeluarkan harta di jalan Allah baik yang bersifat wajib atau sunnah untuk soal-soal kebajikan, memerangi kebodohan memiskinkan dan penyakit, menyebarkan agama, dan memajukan ilmu pengetahuan merupakan hal yang dituntut oleh agama dan harus terus digerakkan. Inilah sebabnya, al-Qur'an memperbincangkan masalah infak di beberapa tempat dalam berbagai tema, diantaranya disertai perumpamaan, ancaman (*tarhib*) ataupun rangsangan pahala (*targhib*).

وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: “dan Allah maha luas lagi maha mengetahui” (al-Baqarah: 261).

Keutamaan Allah tidak terhingga (tak bisa diukur) dan pemberian-Nya tidak terbatas, sebab Allah Maha luas, Maha kaya, dan Maha pemurah. Selain itu, maha mengetahui siapa yang berhak menerima pemberian berlipat ganda semisal orang yang menafkahkan hartanya untuk meninggikan (menegakkan) kebenaran,

mendidik rakyat untuk berakhlak yang mulia, teguh memegang agama, yang membawa mereka menuju kebahagiaan dunia dan akhirat. Keutamaan yang besar dalam soal ini diberikan kepada orang-orang yang mendahului berbuat kebijakan yang meletakkan sendi bagi amal saleh. Merekalah orang yang memperoleh pahala dari usaha (amalan) yang dilakukannya dan pahala dari orang yang meneladaninya.

Keempat, menurut tafsir Jalalain (Al-Mahali, 2008) mengenai QS. al-baqarah ayat 261 menyatakan bahwa مَثَلٌ (perumpamaan) atau sifat nafkah dari ذِئْبٍ يُفْقَرُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ (orang-orang yang membelanjakan harta mereka di jalan Allah) artinya dalam menaati-Nya كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ سُنْبُلَةٍ مِائَةُ حَبَّةٍ (adalah seperti sebulir biji yang menumbuhkan tujuh buah tangkai, pada masing-masing tangkai seratus biji). Demikianlah pula halnya nafkah yang mereka keluarkan itu menjadi 700 kali lipat. وَاللَّهُ يُضَعِفُ (dan Allah melipat gandakan) lebih banyak dari itu lagi لِمَنْ يَشَاءُ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ (bagi siapa yang dikehendaki-Nya, dan Allah Mahaluas karunia-Nya lagi Maha Mengetahui) siapa-siapa yang seharusnya beroleh ganjaran yang berlipat ganda.

Kelima, dalam buku Yusuf Mansur (Mansur, 2009) dijelaskan bahwa Allah secara jelas menyebut perhitungan matematis saat kita mengeluarkan hartanya untuk sedekah. Jika menurut perhitungan matematis itu berarti sedekah kita akan dibalas hingga 700 kali lipat. Di akhir ayat tersebut, Allah menekankan bahwa akan membalas sedekah itu bagi siapa yang Dia kehendaki.

Dalam QS. al-Baqarah ayat 261 dijelaskan pula bahwa Kehidupan manusia penuh dengan liku-liku, setelah selesai permasalahan yang satu permasalahan yang lain muncul, bahkan bertumpuk-tumpuk masalah bisa terjadi. Hidup

seseorang membutuhkan banyak sekali materiil baik itu harta, barang, rumah, benda, tanah, jasa, dll. Kesemuanya itu harus dicapai jika kita punya suatu benda yang sah agar kita bisa mendapatkan sesuatu yang kita inginkan. Uang misalnya, kita dituntut untuk bekerja agar menadapatkan uang untuk penghidupan kita. Kita tahu ketika bekerja dengan susah payah kita, kerja keras kita kemudian kita mendapatkan uang dan dapat membeli mencapai sesuatu yang kita inginkan. Namun, ketahuilah bahwa apa yang kita dapatkan itu dari orang lain. Apa yang kita usahakan itu berkah kasih sayang Allah kepada kita. Dalam hal rejeki ada rejeki yang sudah ditentukan ada juga rejeki yang cara mendapatkannya harus berusaha. Semua rejeki memang sudah ditentukan bahwa setiap manusia/makhluk hidup yang lahir didunia ini sudah ditentukan rejekinya. Lah karena sudah ditentukannya itulah semau dianggap sama rata. Tinggal kita yang berusaha sendiri, jika kita ingin mendapatkan harta yang banyak bagaimana kerja keras kita, bagaimana cara berfikir kita, bagaimana strategi, teknik, tips kita? Dengan kita bekerja keras, tekun, giat, berdo'a, selalu mendekatkan diri kepada Allah, pastilah Allah malu jika kita tidak dikayakan. Kebaikan seseorang akan selalu dicatat oleh malaikat, ketika kita memberi sesuatu pada orang lain janganlah kita memikirkannya atau mengingat-ingatnya karena semua sudah dicatat dan kita tak perlu lagi mengingatnya apalagi mencatatnya. Ketika kita memberi jangan berharap kita akan mendapat balasan dari orang yang kita berikan, niatkan ikhlas ketika memberi. Balasan insya Allah akan datang darimapun yang tidak kamu duka-duka. Ada 4 mata pisau sedekah yang berguna bagi kita ketika kita melakukan sedekah : menambah panjang umur, memberikan rejeki yang banyak, menolak balak/musibah, meringankan penderitaan/kesakitan.

Hal ini dirumuskan Yusuf Mansur dalam matematika, yaitu Untuk mereka yang bersedekah (berbuat kebaikan) akan dibalas 700 kali lipat kebaikan yang lain. Hal tersebut tertuang pada QS. al-Baqarah ayat 261, yaitu sebagai berikut:

Sedekah	Pahala	Jumlah
10-1	$9 + (700 \times 1)$	709
10-2	$8 + (700 \times 2)$	1408
10-3	$7 + (700 \times 3)$	2107
10-4	$6 + (700 \times 4)$	2806
10-5	$5 + (700 \times 5)$	3505
10-6	$4 + (700 \times 6)$	4204
10-7	$3 + (700 \times 7)$	4903
10-8	$2 + (700 \times 8)$	5602
10-9	$1 + (700 \times 9)$	6301
10-10	$0 + (700 \times 10)$	7000

Dari tabel di atas bisa dilihat, 10-1=709, 10-2=1.408, 10-3=2.107, 10-4=2.806, 10-5= 3.505, 10-6= 4.204, dan 10-10 bukan 0 melainkan 7.000. Itulah janji Allah kepada hamba-Nya. Dan juga, tidak pernah sejarahnya ada cerita atau berita bahwa ada orang yang suka bersedekah malah jatuh miskin. Yang ada malah kabar berita orang yang gemar bersedekah justru menjadi semakin kaya.

Dengan mengetahui rumusan matematika sedekah Yusuf Mansur tersebut membuat kita semakin yakin bahwasanya tidak ada ruginya berbuat kebaikan sekecil apapun itu sebagaimana kita harus menghindari amalan jahat karena ada balasannya juga.

Dari kelima tafsir di atas dalam QS. al-baqarah ayat 261, dapat ditarik kesimpulan bahwa untuk setiap orang yang mengeluarkan hartanya untuk berjihad di jalan Allah Swt, maka Allah akan melipat gandakan pahala bagi orang tersebut. Hal ini menggambarkan bahwa dalam matematika dapat diperkirakan untuk setiap orang yang mengeluarkan sedekah maka Allah akan melipat gandakan pahala sebanyak 700 kali lipat.

2.7.2 Kajian Nonlinier

Kajian nonlinier telah dibahas dalam al-Qur'an yaitu surat Luqman ayat 29, yang berbunyi:

أَلَمْ تَرَ أَنَّ اللَّهَ يُولِجُ اللَّيْلَ فِي النَّهَارِ وَيُولِجُ النَّهَارَ فِي اللَّيْلِ وَسَخَّرَ الشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ يَجْرِي إِلَىٰ أَجَلٍ مُّسَمًّى وَأَنَّ اللَّهَ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿٢٩﴾

Artinya: *tidakkah kamu memperhatikan, bahwa Sesungguhnya Allah memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan Dia tundukkan matahari dan bulan masing-masing berjalan sampai kepada waktu yang ditentukan, dan Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan (QS. Luqman: 29).*

Ayat di atas menerangkan bahwa “Allah Swt memasukkan malam kedalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan Dia tundukkan matahari dan bulan masing-masing berjalan sampai kepada waktu yang ditentukan”. Pada kalimat inilah penjelasan mengenai kajian nonlinier yang diambil.

Bentuk nonlinier yang maksud disini adalah mengenai perubahan waktu, dimana antara siang dan malam setiap harinya mengalami perubahan. Perubahan yang terjadi merupakan perubahan yang bersifat tidak linier dan selalu berubah-ubah.

Perubahan itu dapat diketahui dari perubahan waktu sholat magrib dan subuh. Waktu sholat magrib merupakan pertanda perubahan dari siang menjadi malam begitu juga dengan waktu subuh merupakan pertanda pergantian malam kepada siang. Pergantian siang menjadi malam dan malam menjadi siang dalam setiap harinya selalu mengalami perubahan. Perbedaan waktu yang tidak tetap inilah yang kemudian disebut perubahan yang bersifat nonlinier (Rahman, 2010).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Fungsi Produksi Cobb-Douglas (CD)

Adapun model awal dari fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) adalah:

$$Q = f(L, K) = \gamma L^\alpha K^\beta \quad (3.1)$$

misalkan:

$$\gamma = \beta_1; \alpha = \beta_2; \text{ dan } \beta = \beta_3$$

sehingga didapatkan model persamaan sebagai berikut:

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3} \quad (3.2)$$

dengan

$$[L, K] = X$$

maka persamaan (3.2) dapat dituliskan menjadi,

$$Q = f(X, \beta) \quad (3.3)$$

berdasarkan persamaan (3.3), maka persamaan (2.19) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = Q + e \quad (3.4)$$

3.2 Model *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE)

Penaksiran parameter β dengan menggunakan metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) bertujuan untuk menghasilkan nilai parameter β , yaitu

dengan meminimumkan fungsi *residual sum of squares* $S(\beta)$. Dari persamaan (3.4) dengan memindah ruaskan errornya, maka diperoleh:

$$e = y - Q \quad (3.5)$$

dengan

$$Q = f(X, \beta) \quad (3.6)$$

maka persamaan (3.5) menjadi,

$$e = y - f(X, \beta) \quad (3.7)$$

sehingga untuk meminimumkan fungsi *residual of squares* () adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= e^T e = (y - f(X, \beta))^T (y - f(X, \beta)) \\ &= (y^T - [f(X, \beta)]^T)(y - f(X, \beta)) \\ &= y^T y - y^T f(X, \beta) - [f(X, \beta)]^T y + [f(X, \beta)]^T f(X, \beta) \\ &= y^T y - (y^T f(X, \beta))^T - [f(X, \beta)]^T y + [f(X, \beta)]^T f(X, \beta) \\ &= y^T y - [f(X, \beta)]^T y - [f(X, \beta)]^T y + [f(X, \beta)]^T f(X, \beta) \\ &= y^T y - 2[f(X, \beta)]^T y + [f(X, \beta)]^T f(X, \beta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

untuk meminimumkan fungsi tersebut, maka dilakukan turunan pertama S terhadap β , yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0 - 2 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T y}{\partial \beta^T} + \frac{\partial [f(X, \beta)]^T f(X, \beta)}{\partial \beta^T} + \left[\frac{\partial [f(X, \beta)]^T f(X, \beta)}{\partial \beta} \right]^T \\ &= -2 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T y}{\partial \beta^T} + \frac{\partial [f(X, \beta)]^T f(X, \beta)}{\partial \beta^T} + \left[\frac{\partial [f(X, \beta)] f(X, \beta)^T}{\partial \beta^T} \right] \\ &= -2 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T y}{\partial \beta^T} + 2 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \end{aligned} \quad (3.9)$$

kemudian dari hasil estimasi parameter di atas disama dengankan dengan nol, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 -2 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T y}{\partial \beta^T} + 2 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T f(X, \beta)}{\partial \beta^T} &= 0 \\
 2 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T f(X, \beta)}{\partial \beta^T} &= 2 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T y}{\partial \beta^T} \\
 \frac{\partial [f(X, \beta)]^T f(X, \beta)}{\partial \beta^T} &= \frac{\partial [f(X, \beta)]^T y}{\partial \beta^T} \\
 f(X, \beta) &= \left[\frac{\partial [f(X, \beta)]^T}{\partial \beta^T} \right]^{-1} \frac{\partial [f(X, \beta)]^T y}{\partial \beta^T} \\
 f(X, \beta) &= \left[f'(X, \beta)^T \right]^{-1} [f'(X, \beta)]^T y
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

pada persamaan (3.10) fungsi $f(X, \beta)$ adalah fungsi nonlinier, sehingga penaksiran nilai parameter β diperlukan proses iterasi yang memberikan bentuk umum dari persamaan tersebut.

3.2.1 Estimasi Parameter Iterasi *Gauss-Newton*

Iterasi *Gauss-Newton* mengaproksimasi $f(X, \beta)$ di sekitar $f(X, \beta^{(1)})$ dengan nilai awal $(\)$ yang menggunakan deret Taylor orde 1.

Adapun bentuk deret Taylor orde 1 yaitu:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!}$$

maka

$$\begin{aligned}
 f(X, \beta) &\approx f(X, \beta^{(1)}) + \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta - \beta^{(1)}) \\
 &= f(X, \beta^{(1)}) + \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} \beta - \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

jika dimisalkan,

$$Z(\beta^{(1)}) = \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}}$$

maka persamaan (3.11) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y &= f(X, \beta) + e \\ &= f(X, \beta^{(1)}) + Z(\beta^{(1)})\beta - Z(\beta^{(1)})\beta^{(1)} + e \end{aligned} \quad (3.12)$$

dari persamaan (3.12) dapat dikonstruksi menjadi,

$$y - f(X, \beta^{(1)}) + Z(\beta^{(1)})\beta^{(1)} = Z(\beta^{(1)})\beta + e \quad (3.13)$$

jika dimisalkan $y - f(X, \beta^{(1)}) + Z(\beta^{(1)})\beta^{(1)} = y^*(\beta^{(1)})$ maka persamaan (3.13)

dapat ditulis kembali menjadi,

$$y^*(\beta^{(1)}) = Z(\beta^{(1)})\beta + e \quad (3.14)$$

pada persamaan (3.14) dikenal sebagai persamaan *pseudo-linier*, yang dapat dilakukan estimasi parameter dengan metode *Least Square* untuk taksiran $(\hat{\beta})$, yaitu:

$$\begin{aligned} y^*(\beta^{(1)}) &= Z(\beta^{(1)})\beta + e \\ e &= y^*(\beta^{(1)}) - Z(\beta^{(1)})\beta \\ y^*(\beta^{(1)}) &= Z(\beta^{(1)})\beta \\ Z(\beta^{(1)})^T y^*(\beta^{(1)}) &= Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\beta \\ \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y^*(\beta^{(1)}) &= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\beta \\ \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y^*(\beta^{(1)}) &= \beta \end{aligned} \quad (3.15)$$

selanjutnya setelah parameter $(\hat{\beta})$ diperoleh, maka akan dicari fungsi $f^*(\hat{\beta}) =$

$(\hat{\beta})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\beta &= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y^* (\beta^{(1)}) \\
&= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \left(y - f(X, \beta^{(1)}) + Z(\beta^{(1)}) \beta^{(1)} \right) \\
&= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y - \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \\
&\quad f(X, \beta^{(1)}) + \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \beta^{(1)} \\
&= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y - \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T f(X, \beta^{(1)}) + \beta^{(1)} \\
&= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \left(y - f(X, \beta^{(1)}) \right) + \beta^{(1)} \\
&= \beta^{(1)} + \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \left(y - f(X, \beta^{(1)}) \right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

karena persamaan di atas sulit untuk diselesaikan dengan penyelesaian secara numerik, maka setelah mendapatkan fungsi dengan menggunakan aproksimasi metode *Gauss-Newton*, yaitu dengan dilakukannya estimasi parameter pada yang dinamakan nilai aproksimasi pada iterasi ke-2.

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} + \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \left(y - f(X, \beta^{(1)}) \right) \tag{3.17}$$

Nilai-nilai aproksimasi pada iterasi ke-2 $(\beta^{(2)})$ digunakan untuk mencari nilai-nilai (β) dengan mengaproksimasikan $(f(X, \beta))$ disekitar $(\beta^{(2)})$, yaitu:

$$\begin{aligned}
f(X, \beta) &\approx f(X, \beta^{(2)}) + \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(2)}} (\beta - \beta^{(2)}) \\
&= f(X, \beta^{(2)}) + Z(\beta^{(2)}) \beta - Z(\beta^{(2)}) \beta^{(2)}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

sehingga persamaan (3.18) didapatkan fungsi adalah:

$$\begin{aligned}
y &= f(X, \beta^{(2)}) + e \\
&= f(X, \beta^{(2)}) + Z(\beta^{(2)}) \beta - Z(\beta^{(2)}) \beta^{(2)} + e
\end{aligned} \tag{3.19}$$

atau

$$\begin{aligned} y - f(X, \beta^{(2)}) + Z(\beta^{(2)})\beta^{(2)} &= Z(\beta^{(2)})\beta + e \\ y^*(\beta^{(2)}) &= Z(\beta^{(2)})\beta + e \end{aligned} \quad (3.20)$$

setelah parameter pada iterasi ke-2 didapatkan, maka parameter diestimasi kembali dengan menggunakan metode *Least Square* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T y^*(\beta^{(2)}) \\ &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T \left(y - f(X, \beta^{(2)}) \right) + Z(\beta^{(2)})\beta^{(2)} \\ &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T y - \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})^T \\ &\quad f(X, \beta^{(2)}) + \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\beta^{(2)} \\ &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T y - \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T f(X, \beta^{(2)}) + \beta^{(2)} \\ &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T \left(y - f(X, \beta^{(2)}) \right) + \beta^{(2)} \\ &= \beta^{(2)} + \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T \left(y - f(X, \beta^{(2)}) \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

persamaan (3.21) inilah yang dinamakan dengan iterasi ke-3 (),

$$\beta^{(3)} = \beta^{(2)} + \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T \left(y - f(X, \beta^{(2)}) \right) \quad (3.22)$$

sehingga untuk seterusnya jika dilanjutkan proses tersebut, akan diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(Z(\beta^{(n)})^T Z(\beta^{(n)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(n)})^T \left(y - f(X, \beta^{(n)}) \right) \quad (3.23)$$

Jika iterasi di atas dilakukan secara terus menerus sehingga didapatkan sifat yang konvergen, yaitu:

$$\beta_{NLS} = \beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} \quad (3.24)$$

sehingga diperoleh:

$$Z(\beta^{(n)})^T (y - f(X, \beta^{(n)})) = 0 \quad (3.25)$$

atau

$$Z(\beta_{NLS})^T (y - f(X, \beta_{NLS})) = 0 \quad (3.26)$$

persamaan terakhir ini telah memenuhi syarat *Firts Order Condition* (FOC), untuk mendapatkan nilai parameter yang dapat meminimumkan nilai *sum of square error* () yang akan ditunjukkan dengan cara berikut:

$$\begin{aligned} S &= e^T e = (y - f(X, \beta))^T (y - f(X, \beta)) \\ &= (y^T - f^T(X, \beta))(y - f(X, \beta)) \\ &= y^T y - y^T f(X, \beta) - f^T(X, \beta)y + f^T(X, \beta)f(X, \beta) \\ &= y^T y - (y^T f(X, \beta))^T - f^T(X, \beta)y + f^T(X, \beta)f(X, \beta) \\ &= y^T y - f^T(X, \beta)y - f^T(X, \beta)y + f^T(X, \beta)f(X, \beta) \\ &= y^T y - 2f^T(X, \beta)y + f^T(X, \beta)f(X, \beta) \end{aligned} \quad (3.27)$$

kemudian untuk meminimumkan persamaan di atas, maka dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama terhadap , yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0 - 2(f^T(X, \beta)y) + (f^T(X, \beta)f(X, \beta)) + (f^T(X, \beta)f^T(X, \beta))^T \\ &= -2(f^T(X, \beta)y) + (f^T(X, \beta)f(X, \beta)) + (f^T(X, \beta)f(X, \beta)) \\ &= -2(f^T(X, \beta)y) + 2(f^T(X, \beta)f(X, \beta)) \\ &= -2f^T(X, \beta)(y - f(X, \beta)) \\ &= -2 \left. \frac{\partial f^T}{\partial \beta} \right|_{\beta_{NLS}} (y - f(X, \beta_{NLS})) \\ &= -2Z(\beta_{NLS})^T (y - f(X, \beta_{NLS})) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

dengan penyelesaian di atas, maka persamaan (3.25) terbukti bahwa dengan iterasi ini dijamin kekonvergenan suatu fungsi yang modelnya adalah nonlinier dapat dipenuhi.

Sehingga untuk estimasi parameter pada fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan model,

$$Q = f(X, \beta) = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

dengan penyelesaian menggunakan iterasi *Gauss-Newton*, maka diperoleh hasil estimasi pada parameter adalah:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2} \left(Z(\beta^{(n)})^T Z(\beta^{(n)}) \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \quad (3.29)$$

3.2.2 Estimasi Parameter Iterasi *Newton-Raphson*

Sebagaimana model statistik nonlinier pada persamaan (2.18) dan fungsi objektif dalam meminimumkan persamaan (3.1), pada iterasi ini mula-mula fungsi objektif residual *sum of square* $S(\beta)$ akan diaproksimasikan dengan deret Taylor orde 2. Adapun bentuk deret Taylor orde 2 adalah:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)}{2!}$$

sehingga aproksimasi () dengan nilai-nilai awal yang ditentukan dari iterasi pertama pada (), secara deret Taylor orde 2 yaitu:

$$S(\beta) \approx S(\beta^{(1)}) + \frac{S'(\beta^{(1)})^T (\beta - \beta^{(1)})}{1!} + \frac{(\beta - \beta^{(1)})^T S''(\beta^{(1)}) (\beta - \beta^{(1)})}{2!}$$

sehingga dapat ditulis menjadi

$$S(\beta) = S(\beta^{(1)}) + S'(\beta^{(1)})^T (\beta - \beta^{(1)}) + \frac{1}{2} (\beta - \beta^{(1)})^T S''(\beta^{(1)}) (\beta - \beta^{(1)}) \quad (3.30)$$

dengan

$$S'(\beta^{(1)}) = \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}}$$

$$S''(\beta^{(1)}) = \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \\ = \left. \frac{\partial}{\partial \beta^T} \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}}$$

$$S(\beta) = S(\beta^{(1)}) + \left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta - \beta^{(1)}) + \frac{1}{2} (\beta - \beta^{(1)})^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta - \beta^{(1)}) \\ = S(\beta^{(1)}) + \left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta) - \left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta^{(1)}) + \frac{1}{2} \left((\beta^T) - (\beta^{(1)T}) \right) \\ \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta) - \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta^{(1)}) \right) \\ = S(\beta^{(1)}) + \left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta) - \left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta^{(1)}) + \frac{1}{2} \left(\beta^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta - \beta^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right. \\ \left. - (\beta^{(1)T}) \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta + (\beta^{(1)T}) \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right)$$

kemudian dilakukan turunan pertama pada persamaan tersebut, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0 + \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^T - 0 + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta + \left(\beta^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^T - \right. \\ \left. \left. \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} - \left((\beta^{(1)T}) \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^T + 0 \right) \\ = \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^T + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta + \beta \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} - \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \beta^{(1)} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \Bigg) \\
& = \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^T + \frac{1}{2} \left(2 \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta \right) - 2 \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right) \right) \\
& = \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^T + \frac{1}{2} (2) \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} (\beta - \beta^{(1)}) \right) \\
& = \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^T + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) (\beta - \beta^{(1)}) \tag{3.31}
\end{aligned}$$

karena

$$\left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^T = \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}}$$

maka diperoleh

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) (\beta - \beta^{(1)}) \tag{3.32}$$

untuk meminimumkan pada persamaan (3.21) maka disama dengankan dengan nol, sehingga diperoleh:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) (\beta - \beta^{(1)}) = 0$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) \beta - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} = 0$$

$$\left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) \hat{\beta} = - \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \hat{\beta} &= \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \\ \hat{\beta} &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \frac{\partial L}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \\ \hat{\beta} &= \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \\ \hat{\beta} &= \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

pada persamaan (3.32) dikatakan sebagai bentuk iterasi kedua dari aproksimasi .

Nilai-nilai aproksimasi pada iterasi kedua () digunakan untuk mencari nilai-nilai () sehingga diperoleh:

$$\beta^{(3)} = \left(\beta^{(2)} \right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(2)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(2)}} \quad (3.33)$$

dengan demikian jika diteruskan maka akan diperoleh bentuk iterasi umum dari persamaan tersebut yang dapat dituliskan menjadi,

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \quad (3.34)$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Newton-Raphson* untuk *Nonlinear Least Square* (NLS).

3.3 Aplikasi Metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE)

Aplikasi dari metode *Nonlinear Least Square* (NLS) pada penelitian ini menggunakan fungsi nonlinier yaitu fungsi produksi Cobb-Douglas (CD), dimana fungsi tersebut tidak dapat ditransformasikan ke dalam bentuk linier. Adapun persamaan fungsi Cobb-Douglas ini adalah:

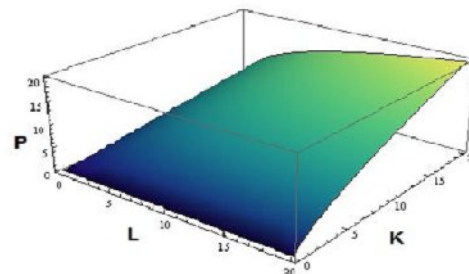
$$y = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3} \quad (3.35)$$

3.3.1 Paparan Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder, yaitu data yang mengacu pada informasi yang dikumpulkan dari sumber yang telah ada. Data sekunder dalam penelitian ini adalah data produksi mengenai Industri Logam, Mesin, tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 (*Industry of Metals, Machines, Textiles and Miscellaneous Industries 1993-2012*) di Provinsi Jawa Timur yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Malang di Jl. Raya Janti Barat No. 47 Malang, Telp. (0341) 801164, Fax. (0341) 805871, E-mail: bps3573@mailhost.bps.go.id pada hari Rabu, 11 Juni 2014 pada puku 12.00 WIB (data dalam Lampiran 1).

3.3.1.1 Kenonlinieran Data

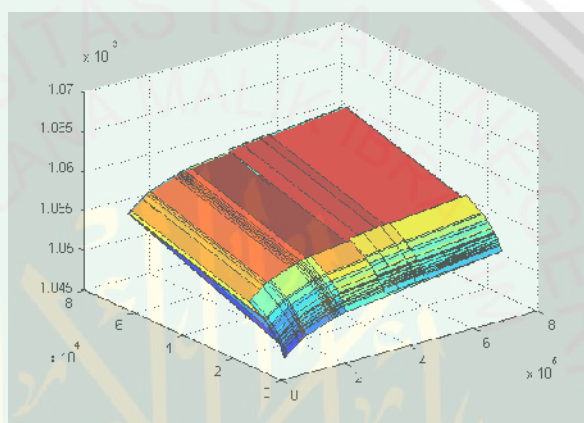
Fungsi produksi Cobb-Douglas adalah salah satu bentuk dari fungsi nonlinier. Kemudian bentuk umum dari fungsi Cobb-Douglas terdapat pada persamaan (3.35). Jika fungsi tersebut dibuat dalam bentuk grafik, maka akan diperoleh bentuk fungsi nonlinier seperti yang terlihat pada gambar berikut:



Gambar 3.1. Fungsi Produksi Cobb-Douglas

(Sumber: Hong dan Tan, 2008)

Pada penelitian ini, peneliti menggunakan data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) dari tahun 1993-2012 (*Industry of Metals, Machines, Textiles and Miscellaneous Industries 1993-2012*) di Provinsi Jawa Timur. Kemudian setelah data tersebut diaplikasikan ke dalam fungsi produksi Cobb-Douglas dengan mengambil nilai awal $\alpha = 0.001$; $\beta = 0.002$ dan $\gamma = 0.003$, maka diperoleh bentuk sebagai berikut:



Gambar 3.2. Fungsi Produksi Cobb-Douglas dari Aplikasi Data

Terlihat dari kedua grafik di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur merupakan data yang nonlinier dan memiliki kemiripan bentuk dengan model fungsi produksi Cobb-Douglas secara umum.

Untuk melakukan estimasi parameter dengan menggunakan metode *Nonlinear Least square Estimator* (NLSE) akan digunakan proses optimasi dengan fungsi obyektifnya yaitu dengan meminimumkan *sum of square error*. Oleh karena itu, akan digunakan estimasi parameter secara iterasi *Gauss-Newton* dan estimasi parameter secara iterasi *Newton-Raphson*, sebagai pembanding untuk menaksir parameter yang memenuhi fungsi obyektifnya.

3.3.1.2 Estimasi Parameter secara Iterasi *Gauss-Newton*

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur. Data ini merupakan data fungsi Cobb-Douglas (CD). Dimana untuk data X dan y diberikan dalam bentuk matriks Lky, dua kolom pertama merupakan data X dan kolom terakhir merupakan data y, yang akan dipakai untuk model fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dalam penelitian ini.

Data sampel tersebut akan dilakukan penaksiran parameter-parameter secara berulang, untuk model fungsi Cobb-Douglas (CD) ini diestimasi dengan menggunakan metode penaksiran LSE, salah satunya adalah *Nonlinear Least Square estimator* (NLSE).

Bentuk umum iterasinya adalah:

$$\beta^{n+1} = \beta^n - t_n P_n \gamma_n$$

dengan γ_n untuk *Least Square Estimator* (LSE) adalah

$$\gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

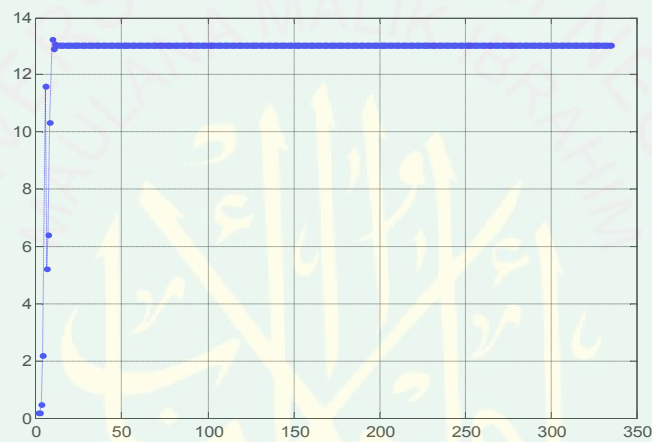
dimana n menunjukkan iterasi ke- n , sedangkan t_n adalah suatu konstanta.

Hasil output dari data fungsi produksi Cobb-Douglas pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan menggunakan iterasi *Gauss-Newton* untuk parameter α , β_1 , β_2 , dan β_3 , akan disajikan dalam bentuk tabel-tabel sebagai berikut:

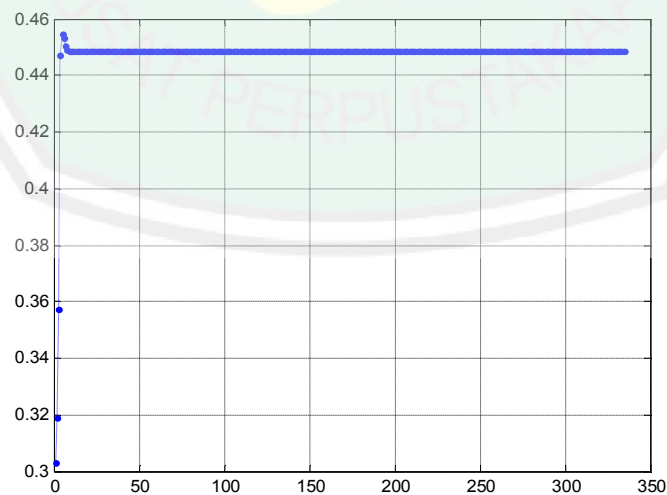
Tabel 3.1 Hasil Iterasi *Gauss-Newton* untuk Fungsi Produksi Cobb-Douglas (CD) pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur

n				S
0	0.7	0.3	1	
50	13.0487680	0.4485491337	0.14326881333	1.21665060912061
100	13.0487804	0.4485490510	0.1432688240	1.21665060912061
150	13.0487675	0.448549155	0.14326878850	1.21665060912061
200	13.0487792	0.4485490682	0.14326881083	1.21665060912060
256	13.0487671	0.448549157	0.14326878877	1.21665060912061
336	13.0487794	0.4485490588	0.14326882154	1.21665060912060

Adapun grafik dari tabel 3.1 adalah:



Gambar 3.3. Grafik kekonvergenan dari S secara iterasi *Gauss-Newton*



Gambar 3.4. Grafik kekonvergenan dari α secara iterasi *Gauss-Newton*



Gambar 3.5. Grafik kekonvergenan dari secara iterasi *Gauss-Newton*

Pada grafik di atas, dengan menggunakan iterasi *Gauss-Newton* diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke-336. Adapun nilai awal parameter yang diberikan adalah $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$. Hasil *Nonlinear Least square* (NLS) untuk fungsi produksi CD pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur secara iterasi *Gauss-Newton* adalah:

$$\begin{aligned} \alpha &= 13.0487794 & \beta &= 0.14326882154 \\ \gamma &= 0.4485490588 & \delta &= 1.21665060912060 \end{aligned}$$

Dengan demikian, model Cobb-Douglas (CD) pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dianggap optimum (konvergen) menurut iterasi *Gauss-Newton* adalah sebagai berikut:

$$y = 13.0487794L^{0.4485490588}K^{0.14326882154}$$

3.3.1.3 Estimasi Parameter secara Iterasi *Newton-Raphson*

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur. Data ini merupakan data fungsi Cobb-Douglas (CD). Dimana untuk data X dan y diberikan dalam bentuk matriks Lky, dimana dua kolom pertama merupakan data X dan kolom terakhir merupakan data y, yang akan dipakai untuk model fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dalam penelitian ini.

Data sampel tersebut akan dilakukan penaksiran parameter-parameter secara berulang, untuk model fungsi Cobb-Douglas (CD) ini diestimasi dengan menggunakan metode penaksiran LSE, salah satunya adalah *Nonlinear Least Square* (NLS).

Bentuk umum iterasinya adalah:

$$\beta^{n+1} = \beta^n - t_n P_n \gamma_n$$

dengan γ_n untuk *Least Square Estimation* (LSE) adalah

$$\gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

dimana n menunjukkan iterasi ke- n , sedangkan t_n adalah suatu konstanta.

Hasil output dari data fungsi produksi Cobb-Douglas pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan menggunakan iterasi *Newton-Raphson* untuk parameter α , β , dan γ , akan disajikan dalam bentuk tabel-tabel sebagai berikut:

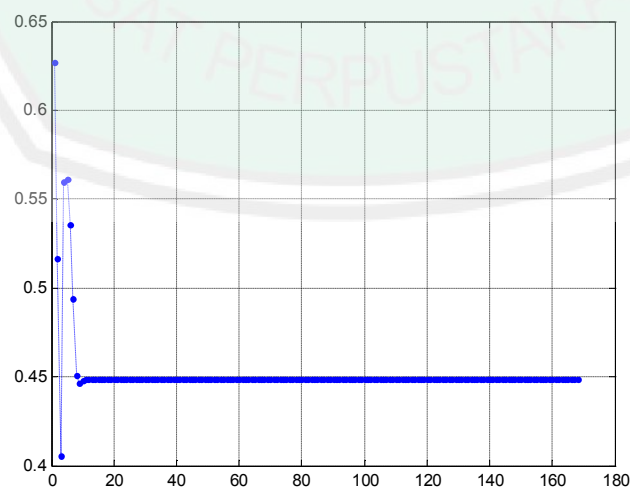
Tabel 3.2 Hasil Iterasi *Newton-Raphson* untuk Fungsi Produksi Cobb-Douglas (CD) pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur

n				S
0	0.7	0.3	0.1	
10	9.41371552	0.4481920311	0.18425243989	1.23488856909662
90	13.0487633	0.4485491802	0.14326878935	1.21665060912061
129	13.0487755	0.448549090	0.14326881061	1.2166506091206
147	13.0487751	0.4485491009	0.14326879944	1.21665060912060
160	13.0487628	0.4485491922	0.14326877725	1.21665060912061
169	13.0487624	0.4485491943	0.14326877712	1.21665060912061

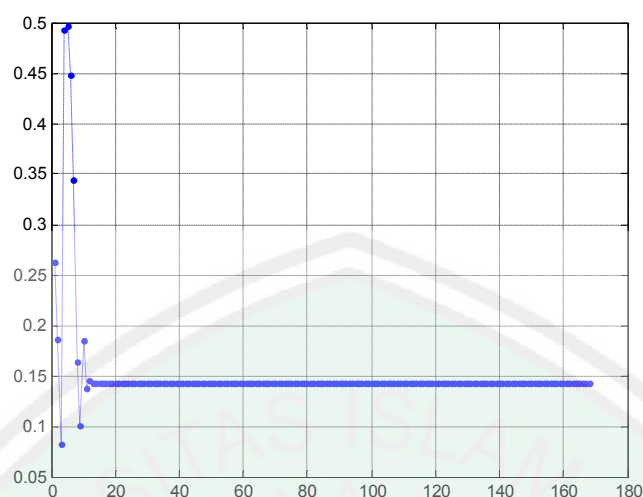
Adapun grafik dari tabel 3.2 adalah:



Gambar 3.6. Grafik kekonvergenan dari secara iterasi *Newton-Raphson*



Gambar 3.7. Grafik kekonvergenan dari secara iterasi *Newton-Raphson*



Gambar 3.8. Grafik kekonvergenan dari secara iterasi *Newton-Raphson*

Pada grafik di atas, dengan menggunakan iterasi *Newton-Raphson* diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke-169. Adapun nilai awal parameter yang diberikan adalah $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$. Hasil *Nonlinear Least square* (NLS) untuk fungsi produksi CD pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur secara iterasi *Newton-Raphson* adalah:

$$A = 13.0487624 \quad B = 0.14326877712$$

$$C = 0.4485491943 \quad D = 1.21665060912061$$

Dengan demikian, model Cobb-Douglas (CD) pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dianggap optimum (konvergen) menurut iterasi *Newton-Raphson* adalah sebagai berikut:

$$y = 13.0487624L^{0.4485491943}K^{0.14326877712}$$

3.3.1.4 Perbandingan Hasil Iterasi

Sebagai bahan perbandingan antara fungsi produksi Cobb-Douglas dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Gauss-Newton* dan *Newton-Raphson*, dapat dilihat pada hasil output sebagai berikut:

Tabel 3.3 Hasil perbandingan fungsi Cobb-Douglas dengan menggunakan iterasi *Gauss-Newton* dan *Newton-Raphson*.

Fungsi Cobb-Douglas (CD)	LSE	
	<i>Gauss-Newton</i>	<i>Newton-Raphson</i>
	13.0487794	13.0487624
	0.4485490588	0.4485491943
	0.14326882154	0.14326877712
	1.21665060912061	1.21665060912061
Jumlah Iterasi	336	169

Dari tabel diatas, ternyata nilai perhitungan fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Newton-Raphson* lebih kecil daripada nilai perhitungan fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Gauss-Newton*. Sehingga fungsi produksi yang cocok dengan data yang telah diberikan (dalam Lampiran 1) adalah fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Newton-Raphson*.

3.4 Pahala Sedekah dalam Teori Estimasi

Estimasi merupakan kemampuan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam hal ini, estimasi yang tertulis dalam surat al-baqarah ayat 261 terdapat pada potongan ayat ayat yang artinya “Allah melipat gandakan (pahala) bagi siapa yang Dia kehendaki”. Potongan ayat ini mengandung unsur estimasi, karena dalam ayat tersebut tidak memberikan

kepastian perlitan ganda pahala yang didapatkan. Disini hanya menduga-duga jumlah pahala yang akan diterima. Hal ini sama dengan estimasi yang ada dalam statistika. Jika diketahui ada suatu model tertentu yang belum diketahui parameternya, maka untuk mencari nilai parameter tersebut dengan cara mengestimasi parameternya.

Sedekah berasal dari kata *sadaqa* yang artinya benar. Sedangkan menurut istilah sedekah yaitu mengeluarkan sebagian harta atau pendapatan / penghasilan untuk suatu kepentingan yang diperintahkan oleh agama, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa sedekah merupakan sesuatu yang diberikan dengan tujuan mendekatkan diri kepada Allah Swt. Yusuf Mansur telah merumuskan dalam matematika bahwa untuk mereka yang bersedekah akan dibalas 700 kali lipat kebaikan, dalam hal ini tertuang dalam QS. Al-Baqarah ayat 261.

Yusuf Mansur memaknai sedekah (*giving*) lebih sekedar dari memberi. Sedekah tidak hanya untuk mensucikan harta, akan tetapi juga dapat menghapus dosa, memperoleh ampunan dari Allah, mendapatkan ridha dan kasih sayang Allah, memperoleh bantuan dari Allah, dan memakbulkan doa-doa. Beliau menjelaskan konsep yang bernama “matematika sedekah”. Konsep matematika sedekah tidak sama dengan matematika yang kita kenal. Dasarnya ada pada al-Qur’an Surat al-An’am ayat 160 dimana Allah menjanjikan balasan 10 kali lipat bagi mereka yang mau berbuat baik (bersedekah adalah salah satu perbuatan baik). Firman Allah Swt:

مَنْ جَاءَ بِالْحَسَنَةِ فَلَهُ عَشْرُ أَمْثَالِهَا ۖ وَمَنْ جَاءَ بِالسَّيِّئَةِ فَلَا تُجْرَىٰ إِلَّا مِثْلَهَا وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ



Artinya: “Barangsiapa membawa amal yang baik, Maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan Barangsiapa yang membawa

perbuatan jahat Maka Dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan)” (QS. Al-An’am: 160).

Menurut pelajaran matematika yang kita kenal bahwasanya,

$$10 - 1 = 9$$

akan tetapi didalam matematika sedekah, pengurangan di atas menjadi

$$10 - 1 = 19$$

dengan penyelesaian menurut sedekah matematika, yaitu:

$$10 - 1 = (1 \cdot 10) + 10 - 1 = 19$$

dengan penjelasan bahwa setiap kali kita bersedekah dengan memberikan satu unit rezki (harta) kita, Allah akan menggantinya (membalasnya) 10 kali lipat. Jika dilanjutkan, maka akan diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut:

$$10 - 2 = 28$$

$$10 - 3 = 37$$

$$10 - 4 = 46$$

$$10 - 5 = 55$$

$$10 - 6 = 64$$

$$10 - 7 = 73$$

$$10 - 8 = 82$$

$$10 - 9 = 91$$

$$10 - 10 = 100$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa 10 unit harta yang dikeluarkan untuk bersedekah, maka kita memperoleh balasan dari Allah Swt 10 kali lipat dari semula, yaitu 100 unit.

Dari perhitungan tersebut, dapat disimpulkan bahwa setiap manusia yang mengeluarkan sedekah atau hartanya untuk berjihad di jalan Allah Swt maka akan dilipat gandakan pahala baginya. Hal tersebut menggambarkan dalam matematika bahwa dapat diperkirakan (*estimation*) untuk setiap manusia yang mengeluarkan sedekah, maka Allah akan melipat gandakan pahala sesuai dengan berapa jumlah sedekah yang mereka keluarkan.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa bentuk estimasi *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) pada model statistik nonlinier diperoleh dua bentuk estimasi yaitu estimasi parameter secara iterasi *Gauss-Newton* dan iterasi *Newton-Rhapson*. Adapun bentuk dari keduanya adalah sebagai berikut:

1. Estimasi parameter secara iterasi *Gauss-Newton*

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2} \left(Z(\beta^{(n)})^T Z(\beta^{(n)}) \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

dimana:

$$Z(\beta^{(n)}) = \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

2. Estimasi parameter secara iterasi *Newton-Rhapson*

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

Berdasarkan hasil perbandingan estimasi model statistik nonlinier secara *least square* (estimasi *Gauss-Newton* dan estimasi *Newton-Rhapson*) pada implementasi data nonlinier yaitu data Industri Logam, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) Tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan model Cobb-Douglas (CD), dapat disimpulkan bahwa iterasi *Newton-Rhapson* lebih kecil dalam

mencapai kekonvergenan dibandingkan dengan menggunakan iterasi *Gauss-Newton*, yaitu:

$$y = 13.0487624L^{0.4485491943} K^{-0.14326877712}$$

4.2 Saran

Pada penelitian ini, peneliti menggunakan Metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) dalam mencari nilai estimasi parameter pada model statistik nonlinier. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan agar penelitian selanjutnya melakukan analisis antara kedua iterasi yang telah digunakan, kemudian dapat dilanjutkan dengan menguji hasil estimasi tersebut dengan uji yang sesuai.

DAFTAR PUSTAKA

- Ad-Dimasyqi, A.A.. 2000. *Tafsir Ibnu Kasir Juz 3 (Al-Baqarah: 253 s.d Ali-Imran:9)*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Al-Mahali, I.J. dan As-Suyuti, I.J.. 2008. *Tafsir Jalalain Berikut Asbabun Nuzul Ayat surat Al-Kahfi s.d An-Nas 2*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.
- Ash-Shiddieqy, T.M.H.. 2003. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur 5*. Semarang: PT. Pustaka Rizki Putra.
- Azis, A.. 2010. *Ekonometrika Teori dan Praktik Eksperimen dengan MATLAB*. Malang: UIN MALIKI PRESS.
- Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta offset.
- Hong, B. dan Tan. 2008. *Cobb-Douglas Production Function*. http://en.wikipedia.org/wiki/Cobb_douglas. (diunduh pada tanggal 02 Juni 2014).
- Dahlan, Z.. 1991. *Al-Qur'an dan Tafsirnya*. Yogyakarta: PT. Dana Bhakti Wakaf.
- Firdaus, M. 2004. *Ekonometrika Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.
- Gujarati, N. D.. 2010. *Dasar-Dasar Ekonometrika Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Gujarati, N. D.. 2004. *Basic Econometrics, Fourth edition*. New York: McGraw-Hill.
- Harini, S. dan Turmudi. 2008. *Metode Statistika*. Malang: UIN-Malang Press.
- Hasan, M. I.. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.
- Mansur, Yusuf. 2009. *Matematika Sedekah*. (<http://www.blog.ui.ac.id/yusufmansur/diskusi-sedekah/comment-page-51/>). (diunduh pada tanggal 25 Agustus 2014).
- Rahman, A.. 2010. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Sanjoyo. 2006. *Nonlinear Estimation*. <http://mhs.blog.ui.ac.id/sanj55/diskusi-ekonometrik/comment-page-73/>. (diunduh pada tanggal 05 Maret 2014).
- Suharyadi dan Purwanto. 2009. *Statistika untuk Ekonomi dan Keuangan Modern*. Jakarta: Salemba Empat.
- Syamsuddin, M.. 2006. *Catatan Kuliah Ekonometrika 3*. Depok: Universitas Indonesia.
- Yitnosumarto dan Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta : CV Rajawali.

LAMPIRAN 1

**Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) Tahun 1993-2012
Di Provinsi Jawa Timur**

No	Tahun	Tenaga Kerja (Orang)	Modal (Milyar)	Produksi
1	2012	473786	18053	8250
2	2011	445857	11389	37759
3	2010	392282	6565	14915
4	2009	349565	5939	13135
5	2008	713379	67001	22673
6	2007	230025	11837	32685
7	2006	212334	7654	16780
8	2005	205439	5408	4108
9	2004	200367	5098	7689
10	2003	195483	4953	3720
11	2002	192412	3673	4854
12	2001	186537	4664	3619
13	2000	178765	4470	3525
14	1999	105933	5980	8749
15	1998	80610	6761	4060
16	1997	101229	9780	9567
17	1996	94607	5432	8657
18	1995	46317	6785	4098
19	1994	39817	9087	6345
20	1993	38857	6454	8087

(Sumber: Jawa Timur dalam Angka dari Tahun 1993-2012)

dengan:

L = Input Tenaga Kerja (*Labour of product*)

K = Input Modal (*Capital of product*)

y = Output Jumlah (*Quantity of Product*)