SPEKTRUM *ADJACENCY, LAPLACE* DAN *SIGNLESS-LAPLACE* GRAF *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL (D_{2n})

SKRIPSI

Oleh :
RIVATUL RIDHO ELVIERAYANI
NIM. 10610055

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

SPEKTRUM *ADJACENCY, LAPLACE* DAN *SIGNLESS-LAPLACE* GRAF *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL (D_{2n})

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
RIVATUL RIDHO ELVIERAYANI
NIM. 10610055

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

SPEKTRUM *ADJACENCY, LAPLACE* DAN *SIGNLESS-LAPLACE* GRAF *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL (D_{2n})

SKRIPSI

Oleh:
RIVATUL RIDHO ELVIERAYANI
NIM. 10610055

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal 16 Januari 2014:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdussakir, M.Pd	**Dr. Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 19751006 200312 1 001	**NIP. 19731212 199803 1 001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SPEKTRUM *ADJACENCY, LAPLACE* DAN *SIGNLESS-LAPLACE* GRAF *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL (D_{2n})

SKRIPSI

Oleh:
RIVATUL RIDHO ELVIERAYANI
NIM. 10610055

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2014

Penguji Utama	:	Drs. H. Turmudi, M.Si
		NIP. 19571005 198203 1 006 ______________________
Ketua Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si
		NIP. 19800429 200604 1 003 ______________________
Sekretaris Penguji	:	Abdussakir, M.Pd
		NIP. 19751006 200312 1 001 ______________________
Anggota Penguji	:	Dr. Ahmad Barizi, M.A
		NIP. 19731212 199803 1 001 ______________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rivatul Ridho Elvierayani

NIM : 10610055

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Spektrum *Adjacency*, *Laplace*, dan *Signless-Laplace* Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n}).

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Januari 2014
Yang membuat pernyataan,

Rivatul Ridho Elvierayani
NIM. 10610055

MOTTO

"Kegagalan terjadi Bila Kita menyerah" (Lessing, Philosof German)

وَمَن جَٰهَدَ فَإِنَّمَا يُجَٰهِدُ لِنَفْسِهِۦٓ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ لَغَنِىٌّ عَنِ ٱلْعَٰلَمِينَ ﴿٦﴾

"dan Barangsiapa yang berjihad, Maka Sesungguhnya jihadnya itu adalah untuk dirinya sendiri. Sesungguhnya Allah benar-benar Maha Kaya (tidak memerlukan sesuatu) dari semesta alam" (QS. Al-Ankabut/29:06).

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah-Ibu tercinta Ridho dan Nuriyati serta Kakak Narti, Sony serta ponakan Meryna yang senantiasa memberikan semangat, doa, motivasi, nasihat kepada penulis untuk meraih cita-cita setinggi-tingginya

Muhammad Nanda yang kata-katanya selalu memberikan semangat yang berarti bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada semua yang terlibat dan telah membantu selesainya skripsi ini, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus Dosen Wali dan Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
4. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan Ibu, selaku orang tua yang selalu memberikan doa, semangat serta motifasi kepada penulis sampai saat ini.
7. Seluruh teman-teman matematika angkatan 2010, terutama Muflihatun Nafisah, Sri Susanti, Siska Dwi Oktavia, "Keluarga Cemara", "Kontrakan Cepat Wisuda" yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi kita, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Semoga Allah SWT, melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa di dunia ini tidak ada yang sempurna. Begitu juga dalam penulisan skripsi ini, yang tidak luput dari kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Elvierayani, Rivatul Ridho. 2014. **Spektrum *Adjacency*, *Laplace*, dan *Signless-Laplace* graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n}).** Tugas akhir/skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Kata kunci: spektrum, matriks *Adjacency*, matriks *Laplace*, matriks *Signless-Laplace*, nilai eigen, vektor eigen, graf *Non Commuting*, Grup dihedral

Graf dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, misalnya matriks *Adjacency*, *Laplace*, *dan Signless-Laplace*. Ketika graf sudah dinyatakan dalam bentuk matriks, maka dapat didekati secara aljabar linier untuk mencari nilai eigen dan vektor eigennya. Matriks baru yang memuat semua nilai eigen pada baris pertama dan banyaknya vektor eigen yang besesuaian pada baris kedua disebut spektrum. Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum *Adjacency*, matriks $L(G)$ disebut spektrum *Laplace* dan matriks $Q(G)$ disebut spektrum *Signless-Laplace*.

Tujuan dari penelitian ini adalah mencari pola yang nantinya dijadikan suatu teorema dari spektrum *Adjacency*, *Laplace*, dan *Signless-Laplace* graf *non commuting* yang dibangun dari grup dihedral (D_{2n}). Hasil dari penelitian ini adalah:

1. Spektrum *Adjacency* $\Gamma_{D_{2n}}$
   a. n ganjil dan $n \geq 3$ ($n \in N$) diperoleh:

$$spec\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. n genap dan $n \geq 6$ ($n \in N$) diperoleh:

$$spec\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} + \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{3n-6}{2} & \frac{n-2}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$
   a. n ganjil dan $n \geq 3$ ($n \in N$) diperoleh:

$$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & n & 0 \\ n & n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. n genap dan $n \geq 6$ ($n \in N$) diperoleh:

$$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & 2(n-2) & n & 0 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Spektrum *Signless-Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n genap dan $n \geq 8$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$spec_Q(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3) + \sqrt{2n^2-8n+9} & 2(n-2) & 2(n-3) & n & (2n-3) - \sqrt{2n^2-8n+9} \\ 1 & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan bermacam-macam teorema tentang spektrum graf *non commuting* dari grup lainnya.

ABSTRACT

Elvierayani, Rivatul Ridho. 2014. **Spectrum Adjacency, Laplace, and Signless-Laplace Non Commuting Graph of Dihedral (D_{2n}) Group.** Final Project/Thesis. Department of Mathematic, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Keyword: spectrum, Adjacency matrix, Laplace matrix, Signless-Laplace matrix, eigen value, eigen vektor, *Non commuting* Graph, Dihedral Group

Graph can be shown in matrix form, for example *Adjacency* matrix, *Laplace* matrix and *Signless-Laplace* matrix. When a graph has been shown in the matrix form, so, it can be approached as a linear algebra to find the eigen values and the eigen vektors. The new matrix which containing all of eigen values in the first row and the number of the corresponding eigen vektors in the second row is called spectrum. Spectrum from *Adjacency* matrix *A(G)* is called spectrum *Adjacency*, from *Laplace* matrix *L(G)* is called spectrum *Laplace*, and from *Signless-Laplace* matrix *Q(G)* is called spectrum *Signless-Laplace*.

The purpose of this research is to find a formula which will be used as a theorem of the spectrum *Adjacency*, *Laplace*, and *Signless-Laplace non commuting* graph which built from dihedral (D_{2n}) group. The results from this research are:

1. Spectrum *Adjacency* $\Gamma_{D_{2n}}$
   a. n odd and $n \geq 3$ $(n \in N)$ is:

$$spec\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. n even and $n \geq 6$ $(n \in N)$ is:

$$spec\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} + \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{3n-6}{2} & \frac{n-2}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spectrum *Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$
   a. n odd and $n \geq 3$ $(n \in N)$ is:

$$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & n & 0 \\ n & n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. n even and $n \geq 6$ $\forall n \in N$ is:

$$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & 2(n-2) & n & 0 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Spectrum *Signless-Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$ *with* n even and $n \geq 8$ $(n \in N)$ is:

$$spec_Q(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3) + \sqrt{2n^2-8n+9} & 2(n-2) & 2(n-3) & n & (2n-3) - \sqrt{2n^2-8n+9} \\ 1 & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

For the next research the writer hopes can get the other of theorems about spectrum non commuting graph from the other groups.

ملخص

الفيرايان، ريفة الرضا. 2014. سفكتروم ادجاجينجي و لابلاجي وسيكين ليس لابلاجي كراف *non commuting* grup dihedral (D_{2n}). البحث الجامعي، شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: عبد الشاكر الماجستير

الدكتور احمد بارزي الماجستير

الكلمة المفتاحية: سفكتروم وماتريك ادجاجينجي وماتريك لابلاجي وماتريك وسيكين ليس لابلاجي وقيمة ايكن وفكتور ايكن و كراف *non commuting* و grup dihedral.

كراف يستطيع ان يظهر فى شكل ماتريك كمثل ماتريك ادجاجينجي ولابلاجي وسيكين ليس لابلاجي. إذا كراف ظهر فى شكل ماتريك فيستطيع ان يقرف بالاجبر لينير ليبحث قيمة ايكن وفكتور ايكنها. ماتريك جديد عند جميع قيمة ايكن في بارز الاول وكثر فكتور ايكن الذى يناسب فى بارز الثانى ويسمى بسفكتروم. سفكتروم الذى ينال من ماتريك $A(G)$ يسمى بسفكتروم ادجاجينجي وماتريك $L(G)$ يسمى بسفكتروم لابلاجي وماتريك $Q(G)$ يسمى بسفكتروم سيكين ليس لابلاجي.

الخلاصة من هذا البحث هو يبحث عن الرموز الذى يصير النظرية من سفكتروم ادجاجينجي ولابلاجي وسيكين ليس لابلاجي كراف *non commuting* الذى بنائه من grup dihedral (D_{2n}).

حاصله من هذا البحث كما يلي:

1) سفكتروم ادجاجينجي $\Gamma_{D_{2n}}$

(أ) ب n غريب و $3 \leq n$ $(n \in N)$ هو:

$$specc\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) ب n كامل و $6 \leq n$ $(n \in N)$ هو:

$$specc\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} + \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{3n-6}{2} & \frac{n-2}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2) سفكتروم لابلاجي $\Gamma_{D_{2n}}$

(أ) ب n و $3 \leq n$ $(n \in N)$ غريب هو:

$$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & n & 0 \\ n & n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) ب n كامل و $6 \leq n$ $(n \in N)$ و:

$$spec_L\,(\Gamma_{D_{2n}})=\begin{bmatrix} 2(n-1) & 2(n-2) & n & 0 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

3) بسفكتروم سيكين ليس لابلاجي $\Gamma_{D_{2n}}$ ب n كامل و $8 \leq n$ $(n \in N)$ هو:

$$spec_Q(\Gamma_{D_{2n}})=\begin{bmatrix} (2n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9} & 2(n-2) & 2(n-3) & n & (2n-3)-\sqrt{2n^2-8n+9} \\ 1 & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

والبحث الأتي عسى أن يقدر أن يوجد عن أنواع نظرية من سفكتروم كراف *non commuting* ومن الأخر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Segala fenomena yang dialami sehari-hari, sebenarnya sudah terpola dengan rapi, tersusun dari beberapa aturan-aturan yang saling berkaitan, ada langkah-langkahnya, perhitungannya bahkan formulanya. Matematikawan atau pun ilmuwan lainnya secara umum tidak membuat suatu formula, tetapi mereka menangkap fenomena yang terjadi, kemudian meneliti dan merumuskannya dalam suatu bentuk tertentu sehingga terbentuk suatu formula baru.

Dalam Islam fenomena di atas telah diatur dalam firman Allah yang berbunyi

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Qs-Al Qamar/54:49).

Ayat tersebut menyiratkan suatu makna yaitu kata *ukuran* (قدر) jika dikaji dalam ilmu matematika dapat dikaitkan dengan suatu teori baru yang akan dijadikan suatu konjektur atau teorema yang diperoleh dari suatu pola-pola teratur dengan ukuran-ukuran tertentu sehingga menghasilkan suatu rumus baru yang dapat dianggap sebagai suatu teorema. Dari dasar ini penulis ingin mengetahui keteraturan pada suatu graf.

Graf G merupakan pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$ (Chartrand & Lesniak, 1996:1).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, sisi e terkait dengan v *dan* u disebut *terkait langsung (incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. *Derajat dari titik* v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ (Chartrand & Lesniak, 1996:1-2).

Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Matriks keterhubungan titik* (atau *matriks Adjacency*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $(n \times n)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks *Adjacency* dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$. Matriks *Adjacency* suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya (Chartrand & Lesniak, 1996:1).

Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$. Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut matriks *Laplace* (Biyikoglu, dkk., 2007).

Matriks $Q(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks *Signless-Laplace* (Brower dan Haemers, 2010:1).

Pembahasan matriks *Adjacency* $A(G)$, matriks *Laplace* $L(G)$ dan matriks *Signless-Laplace* $Q(G)$, dari graf G dapat dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier yang menghasilkan konsep spektrum. Misalkan $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\delta-1}$ dengan $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_{\delta-1}$ adalah nilai eigen berbeda dari matriks suatu graf, dan misalkan $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_{\delta-1})$ adalah multiplisitas dari nilai-nilai eigennya λ_i. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\delta-1}$ pada baris pertama dan $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_{\delta-1})$ pada baris kedua disebut spektrum graf G, dan dinotasikan dengan Spec(G). Jadi, spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$\text{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{\delta-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_{\delta-1}) \end{bmatrix}$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum *Adjacency*, dari matriks $L(G)$ disebut spektrum *Laplace*, dari matriks $Q(G)$ disebut spektrum *Signless-Laplace.*

Lebih spesifiknya teori spektrum graf memuat tentang aljabar linier dalam representasi matriks. Dragos M. Cvetkovic, Michael Doob dan Horst Sachs (1980) dalam bukunya menyatakan bahwa spektrum graf diberikan dengan mendeskripsikan tentang beberapa teori-teori graf dengan teori-teori dalam matriks. Penelitian sebelumnya mengenai spektrum monograf yang dikaji oleh mereka dalam karya ilmiahnya yang berjudul *Spectra of Graph* pada tahun 1980.

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf sudah pernah dilakukan. Shuhua Yin (2006) meneliti spektrum *Adjacency* dan spektrum

Laplace pada graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_l. Abdussakir, dkk (2009) meneliti spektrum *Adjacency* pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan (P_n). Ayyaswamy & Balachandran (2010) meneliti spektrum Detour pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n, n)$, graf Korona G dan K_1, graf perkalian Kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan dobel kover dari graf beraturan. Abdussakir, dkk (2012) meneliti spektrum *Adjacency*, *Laplace*, *Singless-Laplace*, dan *Detour* graf multipartisi komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$. Abdussakir, dkk (2013) meneliti spektrum graf *commuting* suatu grup.

Teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup yang anggotanya memenuhi sifat-sifat grup *non abelian*. Misal G grup *non abelian* dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* (Γ_G) adalah suatu graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G\backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$ (Abdollahi, dkk, 2006). Dalam penelitian mengenai graf *non commuting*, A. Abdollahi, dkk (2006 & 2010) meneliti tentang grup finite pada dua grup yang *non abelian* dan bilangan *clique*.

Berdasarkan uraian di atas, belum ada yang mengkaji spektrum pada graf *non commuting*. Pada penelitian ini, dikaji spektrum *Adjacency* $A(G)$, spektrum *Laplace* $L(G)$ dan spektrum *Signless-Laplace* $Q(G)$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dirumuskan oleh penulis di antaranya:

1. Bagaimana pola spektrum *Adjacency* $A(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).
2. Bagaimana pola spektrum *Laplace* $L(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).
3. Bagaimana pola spektrum *Signless-Laplace* $Q(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang ada, tujuan penelitian ini di antaranya:

1. Untuk menentukan pola spektrum *Adjacency* $A(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).
2. Untuk menentukan pola spektrum *Laplace* $L(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).
3. Untuk menentukan pola spektrum *Signless-Laplace* $Q(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai spektrum suatu graf *non commuting* yang diperoleh dari suatu grup.

2. Memberikan informasi saling keterkaitan antara beberapa topik dalam matematika, khususnya teori graf, aljabar linier dan aljabar abstrak.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas masalah spektrum *Adjacency* titik $A(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}) pada n ganjil dan $n \geq 3$ dan n genap dengan $n \geq 6$. Pada spektrum *Laplace* $L(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}) ditunjukkan pada n ganjil dan $n \geq 3$ dan n genap dengan $n \geq 6$, dan pada spektrum *Signless-Laplace* $Q(\Gamma_{D_{2n}})$ graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}) ditunjukkan pada n genap dengan $n \geq 8$ dimana untuk setiap n adalah bilangan asli $(\forall n \in N)$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak. Tahap penelitian yang digunakan adalah pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Menentukan unsur yang tidak saling komutatif pada grup dihedral (D_{2n}).
2. Menentukan himpunan titik graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).
3. Menggambar graf *non commuting* dari grup dihedral$(\Gamma_{D_{2n}})$.
4. Menyatakan graf *non commuting* $(\Gamma_{D_{2n}})$ dalam bentuk matriks *Adjacency*.

5. Menyatakan graf *non commuting* $(\Gamma_{D_{2n}})$ dalam bentuk matriks derajat.
6. Menyatakan graf *non commuting* $(\Gamma_{D_{2n}})$ dalam bentuk matriks *Laplace.*
7. Menyatakan graf *non commuting* $(\Gamma_{D_{2n}})$ dalam bentuk matriks *Signless-Laplace.*
8. Menentukan nilai eigen dan multiplisitas nilai eigen dari masing-masing matriks yang dibentuk dengan cara *Eliminasi Gauss* dan *Gauss Jordan* untuk memperoleh spektrumnya. Untuk mempermudah menemukan pola spektrum, maka proses penentuan spektrum juga akan dilakukan dengan bantuan program *Maple 12*.
9. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
10. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
11. Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.
12. Menulis laporan penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi teori graf, analisis matriks, spektrum graf, grup, graf *non commuting* dan kajian keislaman (silaturahim) dalam Al-Qur'an.

Bab III Hasil dan Pembahasan

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutan dalam metode penelitian. Spektrum-spekturm yang dikaji adalah spektrum *Adjacency* $A(\Gamma_{D_{2n}})$ spektrum *Laplace* $L(\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}})$ dan spektrum *Signless-Laplace* $Q(\Gamma_{D_{2n}})$.

Bab IV Penutup

Bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

2.1.1 Graf

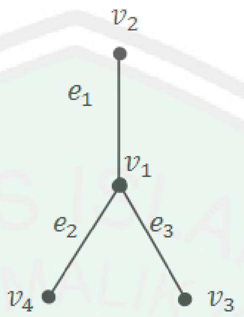
Definisi 2.1

Graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi* (Chartrand dan Lesniak, 1996:1).

Definisi 2.2

Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut ***order*** dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ***ukuran*** dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis n dan m. Graf dengan order n dan ukuran m dapat disebut graf (n, m). Sisi $e = (u, v)$ dikatakan *menghubungkan* titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut ***terhubung langsung (adjacent)***, v dan e serta u dan e disebut ***terkait langsung (incident)***, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut ***terhubung langsung* (*adjacent*)**, jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:1-2).

Dari definisi-definisi tersebut penulis memberikan contoh dari suatu graf yang merupakan pasangan dari himpunan titik *V(G)* dan himpunan sisi *E(G).*



Gambar 2.1 Contoh Graf $G(4,3)$

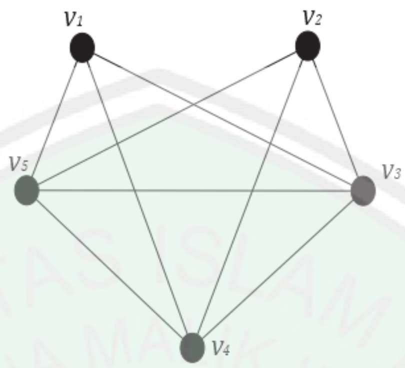
Graf G pada Gambar 1 mempunyai order 4 dan mempunyai ukuran 3, dapat dinyatakan sebagai $G(V(G),E(G))$ atau $G(4,3)$ dengan $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G)=\{e_1, e_2, e_3\}$. Titik-titik yang terhubung langsung di antaranya v_1 dengan v_2, v_1 dengan v_3 dan v_1 dengan v_4. Titik v_1 dan e_1 serta v_2 dan e_1 dikatakan terkait lagsung. Sisi e_1 dan e_2 juga e_1 dan e_3 dikatakan sisi yang terhubung langsung *(adjacent).*

2.1.2 Derajat Titik

Definisi 2.3

Derajat dari titik v di graf *G*, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di *G* yang terkait langsung (*incident)* dengan *v*. Titik *v* dikatakan genap atau ganjil tergantung dari $deg_G(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1996:2).

Contoh 2.1: Diberikan graf *G* sebagai berikut:



Gambar 2.2 Contoh Graf *G* (5,9)

Dari contoh tersebut dapat dituliskan derajat masing-masing titiknya adalah sebagai berikut:

$$deg_G(v_1) = 3$$

$$deg_G(v_2) = 3$$

$$deg_G(v_3) = 4$$

$$deg_G(v_4) = 4$$

$$deg_G(v_5) = 4$$

Perhatikan bahwa jumlah total derajat titik di *G* adalah 18 sedangkan banyak sisinya adalah 9. Ini menunjukkan bahwa jumlah derajat semua titik di *G* adalah 2 kali banyak sisi di *G*.

Selanjutnya diberikan suatu teorema yang menunjukkan hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf *G* dengan banyak sisi, yaitu *m* sebagai berikut.

Teorema 2.1:

Jumlah derajat semua titik pada suatu graf adalah genap, yaitu 2 kali banyak sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain, jika *G=(V(G),E(G))* maka:

$$\sum_{i=1}^{p} deg_G(v_i) = 2m$$

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali (Chartrand dan Lesniak, 1996:3).

2.1.3 Graf Terhubung

Definisi 2.4

Misalkan *G* graf serta *u* dan *v* adalah titik di *G* (yang tidak harus berbeda). ***Jalan u-v*** pada graf *G* adalah barisan berhingga yang berselang-seling W: $u=u_o$, e_1, u_1, e_2, …, u_{k-1}, e_k, $u_k = v$ antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = u_i - u_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, k$ adalah sisi di *G* (Chartrand dan Lesniak, 1996:16).

u_0 disebut *titik awal*, u_k disebut *titik akhir*, titik u_1, u_2, …, u_{k-1} disebut *titik internal*, dan *k* menyatakan panjang dari *W*. Jika $u_0 \neq u_k$, maka *W* disebut *jalan terbuka*. Jika $u_0 = u_k$, maka *W* disebut *jalan tertutup*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*.

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan *u-v*, *W*: $u=v_o$, e_1, v_1, e_2, v_2, …, e_n, $v_n=v$

dapat ditulis menjadi W: $u=v_o, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n=v$.

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut ***trail***. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut ***lintasan***. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan.

Teorema 2.2

Setiap jalan u-v pada suatu graf selalu memuat lintasan u-v

(Chartrand dan Lesniak, 1996:17).

Bukti

Misalkan W adalah jalan u-v di graf G. Jika W tertutup, maka jelas W memuat lintasan trivial di G. Misalkan

W: $u=v_o, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n=v$

adalah jalan u-v terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di W, maka W adalah lintasan u-v. Jika ada titik yang berulang di W, misakan i dan j adalah bilangan bulat positif berbeda dengan $i < j$ sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku v_i, $v_{i+1}, \ldots, v_j$ dihapus dari W. Hasilnya sebut W_1, yakni jalan u-v baru yang panjangnya kurang dari panjang W. Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan u-v. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan u-v yang merupakan lintasan u-v.

Definisi 2.5

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung.

Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan u-v di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan u-v di G, maka G dikatakan **tak terhubung (*disconnected*)** (Chartrand dan Lesniak, 1996:18).

2.1.4 Graf dalam Matriks

Definisi 2.6

Misalkan G graf dengan order n ($n \geq 1$) dan ukuran m serta himpunan titik $V(G)=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. ***Matriks keterhubungan*** (atau *matriks adjacency*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($n \times n$) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , \text{jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

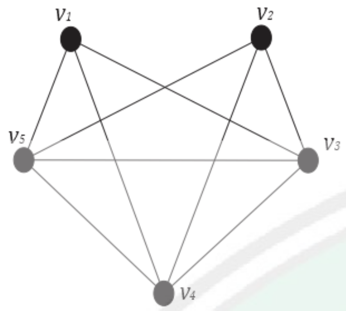
(Chartrand dan Lesniak, 1996:1).

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel.

Contoh 2.2 :

Pada Gambar 2.2 himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_3,\ v_1v_4,\ v_1v_5,\ v_2v_3,\ v_2v_4,\ v_2v_5,\ v_3v_4,\ v_3v_5, v_4v_5\}$.

Maka, diagram dan matriks keterhubungan graf G sebagai berikut:



$$A(\mathrm{G}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Definisi 2.7

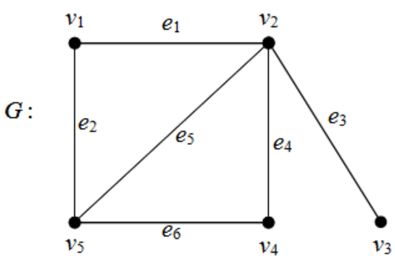
Misalkan G graf dengan order n ($n \geq 1$) dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. ***Matriks keterkaitan*** *(matriks incidence)* dari graf G, dinotasikan dengan $B(G)$ adalah matriks ($m \times n$) yang unsur pada baris i dan kolom j adalah bilangan yang menyatakan berapa kali titik v_i terkait langsung dengan sisi e_j. Dengan kata lain, matriks keterkaitan dapat ditulis $B(G) = [b_{ij}]$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ dengan

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i \text{ terkait langsung dengan } e_j \\ 0 & \text{, jika } v_i \text{ tidak terkait langsung dengan } e_j \end{cases}$$

(Chartrand dan Lesniak, 1996:2).

Contoh 2.3

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}$. Maka, diagram dan matriks keterkaitan dari graf G sebagai berikut.



$$B(\mathrm{G}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selain matriks *adjacency* dan matrik *incidence* ***Matriks derajat*** dari matriks *G*, dinotasikan dengan *D(G)*, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-*i* dan kolom ke-*i* adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Jadi, matriks derajat dari graf *G* dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \le i, j \le n$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Matriks L(G) $= D(G) - A(G)$ disebut matriks *laplace* (Biyikoglu, 2007:3). ***Matriks Q(G)*** $= D(G) + A(G)$ disebut matriks *signless-laplace* (Brouwer dan Haemers, 2010:1).

2.2 Analisis Matriks

2.2.1 Matriks

Definisi 2.8

Matriks adalah susunan segi empat dan siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan *entri* dalam matriks (Anton, 1997:22). Suatu susunan dari bilangan (atau simbol) yang terdiri dari m baris dan n kolom adalah matriks $m \times n$ (Jain dan Gunawardena, 2004:17).

Dari definisi di atas, bilangan-bilangan yang dimaksudkan adalah bilangan-bilangan riil. Bilangan yang terdiri dari *m* baris dan *n* kolom adalah susunannya saja. Misalkan *A* adalah matriks dengan ukuran *m* baris dan *n* kolom, *m* dan *n* merupakan bilangan riil, maka matriks *A* dapat ditulis:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Suatu matriks yang terdiri dari n baris dan 1 kolom disebut sebagai vektor kolom dengan ukuran n atau vektor, sedangkan matriks yang terdiri dari 1 baris dan n kolom disebut sebagai vektor baris dengan ukuran n. Matriks yang berukuran $1 \times n$ atau $n \times 1$ dinotasikan sebagai R^n (Jain dan Gunawardena, 2004:17).

2.2.2 Operasi Matriks

Definisi 2.9

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka ***jumlah***(*sum*) A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan ***selisih*** *(difference)* $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangi entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian dengan B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat di jumlahkan atau di kurangkan (Anton dan Rores, 2004:28).

Contoh 2:

Perhatikan matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Macam-Macam matriks

Definisi 2.10

Matriks identitas adalah matriks yang memiliki 1 pada diagonal utama, dan 0 untuk yang lain (Larson dan Valvo, 2009:65). Jika ditulis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.11

Misalkan A adalah matriks $n \times n$. Jika terdapat B matriks $n \times n$, seperti $AB = I = BA$, dimana I adalah matriks identitas $n \times n$, maka B disebut *invers* dari A, dan A disebut ***invertible***. Matriks *invertible* juga dapat disebut sebagai *nonsingular*. Invers dari matriks A dinotasikan dengan A^{-1}. (Jain & Gunawardena, 2004:115).

Suatu matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut ***matriks diagonal***. Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks ***segitiga bawah*** *(lower triangular)* dan matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks ***segitiga atas*** *(upper triangular)*. Suatu matriks baik segitiga bawah maupun segitiga atas disebut matriks ***segitiga*** (Anton, dan Rorres, 2004:74).

2.2.4 Gaus Eliminasi dan Gaus Jordan

Dalam Howard Anton (1997), suatu matriks dikatakan dalam ***bentuk eselon baris tereduksi*** *(reduced row-echelon form)* jika mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1. (dinamakan 1 utama)
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu di kelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Suatu matriks yang mempunyai sifat-sifat 1, 2 dan 3 dikatakan berada dalam ***bentuk eselon baris*** *(row-echelon form).*

Bentuk matriks eselon baris tereduksi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.4:

Ubahlah matriks A berikut sehingga menjadi matriks berbentuk eselon baris tereduksi!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Langkah 1. Letakkan kolom paling kiri (garis vertikal) yang seluruhnya tidak terdiri dari nol.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Kolom taknol paling kiri

Langkah 2. Pertukarkanlah baris atas dengan baris lain, jika perlu, untuk membawa entri taknol ke atas kolom yang didapatkan dalam langkah 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dan baris kedua dalam matriks terdahulu dipertukarkan

Langkah 3. Jika entri yang sekarang ada di atas kolom yang didapatkan dalam Langkah 1 adalah a, kalikanlah baris pertama tersebut dengan $\frac{1}{a}$ untuk memperoleh 1 utama.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Baris pertama matriks terdahulu dikalikan dengan ½.

Langkah 4. Tambahkanlah kelipatan yang sesuai dari baris atas pada baris-baris yang di bawah sehingga semua entri di bawah 1 utama menjadi nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

-2 kali baris pertama dari matriks terdahulu akan ditambahkan pada baris ketiga.

Langkah 5. Sekarang tutuplah baris atas dalam matriks tersebut dan mulailah sekali lagi dengan Langkah 1 yang diterapkan pada submatriks yang masih sisa. Teruskanlah dengan cara ini sampai *entri* matriks tersebut berada dalam bentuk bentuk eselon baris.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-5&3&6&14\\0&0&-2&0&7&12\\0&0&5&0&-17&-29\end{bmatrix}$$

Baris pertama dalam submatriks dikalikan dengan ½ untuk mendapatkan 1 utama.

Kolom taknol paling kiri dalam submatriks

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-5&3&6&14\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&5&0&-17&-29\end{bmatrix}$$

-5 kali baris pertama submatriks ditambahkan ke baris kedua dari submariks untuk mendapatkan nol di bawah 1 utama.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-5&3&6&14\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&0&0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

Baris atas dalam submatriks ditutupi dan kembali sekali lagi ke Langkah 1.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-5&3&6&14\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&0&0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

Kolom taknol paling kiri dalam submatriks yang baru

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-5&3&6&14\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

Baris pertama (dan hanya baris pertama) dalam submatriks yang baru dikalikan dengan 2 untuk mendapatkan 1 utama.

Entri matriks tersebut berada dalam bentuk eselon baris. Untuk mencari bentuk eselon baris tereduksi diperlukan langkah tambahan berikut.

Langkah 6. Dengan memulai dari baris taknol terakhir dan bekerja ke arah atas, tambahkanlah kelipatan yang sesuai dari setiap baris pada baris-baris di atas untuk mendapatkan nol di atas 1 utama.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-5&3&6&14\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$\frac{7}{2}$ kali baris ketiga dari matriks terdahulu ditambahkan pada baris kedua

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-5&3&0&2\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

-6 kali baris ketiga ditambah baris pertama

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5 kali baris kedua ditambahkan ke baris pertama

Prosedur di atas untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi yang dinamakan ***eliminasi Gauss-Jordan.*** Jika hanya menggunakan lima langkah pertama, prosedur untuk menghasilkan eselon baris tersebut dinamakan ***eliminasi Gauss***.

2.2.5 Determinan

Definisi 2.11

Permutasi himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, n\}$ adalah susunan bilangan bulat-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa adanya penghilang atau pengulangan (Anton dan Rorres, 2004:90).

Suatu ***invers*** (*inversion)* dikatakan terjadi dalam permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ jika suatu bilangan bulat yang lebih besar mendahului suatu bilangan bulat yang lebih kecil. Jumlah *invers* seluruhnya yang dapat terjadi dalam permutasi adalah sebagai berikut:

1. Carilah banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari j_1 dan yang membawa j_1 dalam permutasi tersebut.
2. Carilah banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari j_2 dan yang membawa j_2 dalam permutasi tersebut.
3. Lanjutkanlah proses perhitungan ini untuk $j_3, \ldots, j_{n-1}$. Jumlah bilangan-bilangan ini akan sama dengan jumlah invers seluruhnya dalam permutasi tersebut.

Contoh 2.5:

Tentukan banyaknya permutasi (6, 1, 3, 4, 5, 2)

Penyelesaian :

Bilangan pertama dari permutasi tersebut adalah 6, karena 1 adalah bilangan yang lebih kecil dari 6, maka di hitung 1 inversi, kemudian bilangan selanjutnya adalah 1, 3, 4, 5, 2 sehingga dari masing-masing bilangan tersebut di hitung 1 inversi, jadi total invers untuk bilangan tersebut di hitung 1 inversi, jadi total invers untuk bilangan 6 dalam permutasi tersebut adalah $1+1+1+1+1=5$. Kemudian langkah yang sama di gunakan untuk menghitung total invers pada bilangan selanjutnya, sehingga diperoleh total invers untuk $1, 3, 4, 5, 2$ berturut-turut adalah $0, 1, 1, 1$. Jadi jumlah total inversi pada permutasi tersebut adalah $5+0+1+1+1=8$.

Definisi 2.12

Suatu permutasi dinamakan *genap (even)* jika jumlah invers seluruhnya adalah suatu bilangan bulat yang genap dan dinamakan *ganjil (odd)* jika jumlah invers seluruhnya adalah suatu bilangan bulat yang ganjil (Anton dan Rorres, 2004:92).

Definisi 2.13

Hasil kali elementer adalah hasil kali yang berbentuk $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ dimana $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah permutasi himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$. ***Hasil kali elementer bertanda A*** adalah hasil kali elementer $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ dikalikan dengan $+1$ atau -1. Penggunaan tanda $+$ jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah permutasi genap dan tanda – jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah permutasi ganjil (Anton, 1997:61-62).

Definisi 2.14

Misalkan *A* adalah matriks persegi. Fungsi determinan dinyatakan oleh *det*, dan didefinisikan *det(A)* sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari *A*. Jumlah *det(A)* dinamakan ***determinan A*** (Anton, 1997:63).

Contoh 2.6:

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Matriks *A* berukuran 3 baris dan 3 kolom, maka berdasarkan definisi di atas, ada 3 entri hasil kali elementer pada matriks *A* yang masing-masing berasal dari baris yang berbeda. Hasil kali elementernya dapat ditulis dalam bentuk $a_{1\_}, a_{2\_}, a_{3\_}$, dimana titik-titik kosong menunjukkan nomor kolom. Karena pada hasil kali elementer mensyaratkan perkalian pada entri matriks yang berasal dari kolom yang berbeda, maka nomor-nomor kolom tersebut merupakan permutasi dari himpunan $\{1, 2,3\}$. Sesuai dengan definisi 2.14 maka determinan dari matriks $A_{3\times 3}$ adalah

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{33}$$

Determinan suatu matriks dapat dihitung dengan mereduksi matriks tersebut pada bentuk eselon baris. Metode ini penting untuk menghindari perhitungan panjang yang terlibat dalam penerapan definisi determinan secara langsung.

Teorema 2.3:

Jika A adalah sebarang matriks persegi yang mengandung sebaris bilangan nol, maka $det(A) = 0$.

Bukti:

Karena hasil kali elementer bertanda dari A mengandung satu faktor dari setiap baris A, maka tiap-tiap hasil kali elementer bertanda mengandung faktor dari baris bilangan nol dan sebagai konsekuensinya juga akan mempunyai nilai nol. Karena $det(A)$ adalah jumlah semua hasil kali elementer bertanda, maka didapatkan $det(A) = 0$ (Anton, 1997:66).

Teorema 2.4:

Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$, maka $det(A)$ adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama, yakni $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ (Anton, 1997:67).

Contoh 2.7: Hitunglah $\det(A)$!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Matriks A merupakan matriks segitiga atas (*upper triangle*). Menurut teorema 3 $\det(A)$ adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utamanya, sehingga $\det(A) = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$.

2.2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.15

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka suatu vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada R^n disebut ***vektor eigen*** *(eigen vektor)* dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah suatu kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; yakni, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut ***nilai eigen*** (*eigen value*) dari A, dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ (Anton dan Rorres, 2004:384).

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A, persamaan $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ditulis kembali dalam bentuk

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

dengan I adalah matriks identitas berordo $n \times n$. Persamaan tersebut merupakan sistem persamaan linier homogen dan akan mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika matriks $(A - \lambda I)$ *singular* (tidak mempunyai invers) akibatnya

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Persamaan $det(A - \lambda I) = 0$ disebut ***persamaan karakteristik*** *(characteristic equation)* matriks A, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A. Apabila diperluas lagi determinan $det(A - \lambda I)$ adalah suatu polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai ***polinomial karakteristik*** *(characteristic polynomial)* matriks A (Anton & Rorres, 2004:385).

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1, jelasnya polinomial karakteristik $p(x)$ dari suatu matriks $n \times n$ memiliki bentuk:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$$

Berdasarkan teorema dasar aljabar bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

(Anton dan Rorres, 2004:385)

Teorema 2.5

Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka nilai-nilai eigen dari A adalah entri-entri yang terletak pada diagonal utama matriks A (Anton dan Rorres, 2004:387).

Contoh 2.8:

Tentukan nilai-nilai eigen dari matriks segitiga atas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})$$

Sehingga persamaan karakteristiknya adalah:

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

Dan nilai-nilai eigennya:

$$\lambda_1 = a_{11},\ \lambda_2 = a_{22},\ \lambda_3 = a_{33},\ \lambda_4 = a_{44}$$

Setelah mengetahui nilai eigen, akan ditentukan suatu vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan nilai eigen λ yaitu merupakan vektor-vektor taknol x yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Dengan kata lain vektor-vektor eigen yang terkait dengan λ adalah vektor-vektor taknol di dalam ruang solusi $(\lambda I - A)x = 0$. Sehingga ruang solusi ini disebut dengan ***ruang eigen*** *(eigen space)* dari matriks A yang terkait dengan λ.

Contoh 2.9

Tentukan basis-basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Persamaan karakteristik matriks A adalah $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, atau dalam bentuk terfaktorkan, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$. Dengan demikian terdapat dua ruang eigen dari A. Menurut definisinya

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Adalah suatu vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika x adalah suatu solusi *nontrivial* dari $(A - \lambda I)x = 0$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini menggunakan metode *Gauss Jordan* akan menghasilkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika ditulis dalam sistem persamaan berbentuk

$$x_1 = -x_3 = -s$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = s$$

Sehingga vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bebas linier, vektor-vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = 2$. Jika $\lambda = 1$ maka persamaannya akan menjadi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini akan menghasilkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika ditulis dalam sistem persamaan berbentuk

$$x_1 = -2x_3 = -2s$$

$$x_2 = x_3 = s$$

$$x_3 = s$$

Sehingga vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Adalah suatu basis untuk ruang vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$.

2.3 Spektrum Graf

Definisi 2.16

Spektrum dari graf berhingga Γ didefinisikan dengan spektrum dari matriks *adjacency* A yang merupakan himpunan dari nilai eigen bersamaan dengan multiplisitas dari nilai eigen tersebut (Brouwer dan Haemers, 2010:2)

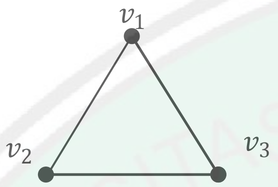
Misalkan λ_0, λ_1, …, $\lambda_{\delta-1}$ adalah nilai eigen berbeda dari A, dengan $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_{\delta-1}$, dan misalkan $m(\lambda_0)$, $m(\lambda_1)$, …, $m(\lambda_{\delta-1})$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat λ_0, λ_1, …, $\lambda_{\delta-1}$ pada baris pertama dan $m(\lambda_0)$, $m(\lambda_1)$, …, $m(\lambda_{\delta-1})$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan Norman Biggs (1974) menotasikannya dengan Spec(G). Jadi, spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$\text{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{\delta-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_{\delta-1}) \end{bmatrix}$$

Contoh 2.10:

Untuk menentukan spektrum suatu graf, perhatikan graf komplit K_3 beserta matriks keterhubungannya berikut ini:

K_3 :



$$A(K_3) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pertama akan ditentukan nilai eigen dari A menggunakan persamaan $det(A - \lambda I) = 0$. Diperoleh

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Untuk $\lambda_1 = 2$, maka

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks yang diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh:

$x_1 - x_3 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

Diperoleh vektor eigen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_1 = 2$.

Untuk $\lambda_2 = -1$, maka

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Akan diperoleh suatu persamaan tunggal, yaitu

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_2 = -1$.

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ serta $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$. Dengan demikian, maka spektrum graf K_3 adalah

$$\operatorname{spec}(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Spektrum yang dicontohkan di atas disebut spektrum *Adjacency* karena diperoleh dari matriks *Adjacency* graf.

2.4 Grup

Definisi 2.17

Menurut Raisinghania dan Aggarwal (1980), suatu sistem aljabar *(G,*)* dengan G bukan merupakan himpunan ∅ dan suatu operasi biner * dikatakan sebagai grup jika memenuhi postulat:

(i) Hukum assosiatif berlaku pada operasi * :

$$(a * b) * c = a * (b * c) \text{ .....} \forall a, b, c \in G$$

(ii) Setiap unsur pada G mempunyai identitas terhadap operasi *, misal e adalah identitas:

$$e * a = a * e = a \text{ ....} \forall a \in G$$

(iii) Setiap unsur di G mempunyai invers:

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e \text{ ... ... dimana e adalah } \in G$$

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a*b = b*a$ untuk semua $a, b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31). Himpunan bilangan bulat Z dengan operasi jumlah memenuhi aksioma grup, yakni (Z, +) adalah grup abelian.

2.4.1 Grup Dehidral (D_{2n})

Definisi 2.18

Grup *dihedral* adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup *dihedral* dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh *s* dan *t* untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga s, t adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka st akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri *s* (jadi jika *s* akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka menurut Dummit dan Foote (1991) perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua *i*.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$$

yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk k = 0 atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$.

Contoh 2.11

D_6 adalah grup dihendral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.4.2 Center Grup

Definisi 2.19

Dalam Raisinghania dan Aggarwal (1980) misal G grup, center dari grup G, dituliskan $Z(G)$ sebagai berikut:

$$Z(G) = \{z \in G : zx = xz, \forall\, x \in G\}$$

Jadi jika $Z(G)$ adalah himpunan anggota G yang komutatif terhadap semua anggota $Z(G)$.

2.5 Graf *Non Commuting*

Definisi 2.20

Misal G grup non abelian dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* Γ_G adalah suatu graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari

$G\backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$ (Abdollahi, dkk., 2006).

Teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup yang anggotanya memenuhi sifat-sifat grup non abelian. Γ_G adalah suatu graf yang titiknya adalah bukan elemen-elemen center dari suatu graf G, titik-titik dari Γ_G adalah $G\backslash Z(G)$ merupakan pengambilan atau penghapusan elemen center pada graf G (Abdollahi, dkk., 2010, Algebra Colloqium).

Contoh 2.12

pada grup dihedral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Diambil $\Gamma_G = D_6$ maka akan ditentukan unsur yang tidak saling komutatif melalui tabel berikut.

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* D_6

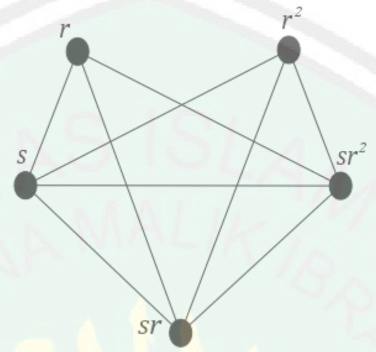
$\circ$	**1**	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	1	sr^2	s	sr
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	1	r	sr	sr^2	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	s	r^2	1	r
$\boldsymbol{r^2}$	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 1 terlihat bahwa:

1. Elemen 1 komutatif dengan setiap elemen D_6 (sifat elemen identitas) sehingga 1 merupakan center di Γ_{D_6} (ditunjukkan pada tabel dengan warna merah).
2. Himpunan titik $V(\Gamma_{D_6})=\{ r, r^2, s, sr, sr^2 \}$
3. Elemen-elemen pada D_6 yang tidak komutatif ditunjukkan pada tabel dengan warna biru dan elemen yang tidak komutatif terhubung langsung di Γ_{D_6}.

4. Untuk elemen-elemen yang komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak terhubung langsung di Γ_{D_6}.

Secara geometri, graf *non commuting* pada D_6 dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.3 Graf *Non Commuting* pada Grup D_6

2.6 Kajian Al-Qur'an tentang Graf

Al-Qur'an merupakan sumber dari segala sumber ilmu yang ada di dunia ini. Segala sesuatu yang ada di dunia ini sebenarnya telah termuat dalam Al-Qur'an. Seperti halnya ilmu pengetahuan merupakan hasil yang diperoleh dari Al-Qur'an karena semua ilmu pengetahuan yang terlahir tidak lepas dari Al-Qur'an, begitu pula dengan ilmu matematika salah satunya yaitu teori graf yang merupakan himpunan titik dan sisi. Suatu graf dinyatakan terhubung apabila dua titik berbeda dalam suatu graf terdapat suatu lintasan (sisi) yang menghubungkan kedua titik tersebut. Graf *non commuting* grup dihedral merupakan representasi graf dari suatu grup dihedral. Graf dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, salah satunya adalah matriks *adjacency*. Matriks *adjacency* merupakan representasi keterhubungan graf. Matriks *adjacency* bernilai 1 jika antara titik-titik dalam suatu graf terhubung langsung dan bernilai 0 jika sebaliknya. Dalam Al-Qur'an hal tersebut dapat direpresentasikan dengan kegiatan silaturahim. Kata صلة الرحم (silaturahim) merupakan salah satu ajaran akhlak yang paling asasi.

Secara etimologi, kalimat yang berasal dari bahasa Arab ini merupakan gabungan dari *mudhof* (kata yang disandarkan), yaitu kata *shilah* an *mudhaf* (kata yang menjadi tempat penyandaran *mudhaf*), yaitu *al-rahmi*. Menurut kamus besar Bahasa Arab Al-Munawwir, *shilah* juga dapat bermakna *alaqah*, yaitu hubungan atau menghubungkan. Dalam hal ini dapat di representasikan dengan graf yang saling menghubungkan antar titik dengan suatu sisi.

Adapun kata *al-rahmi* seakar dengan kata *al-Rahmah* dari kata *rahimah* yang bermakna kasih sayang. Selain itu kata *al-rahmi* itu sendiri juga mengandung makna *al-qarabah* atau kerabat, serta *mustauda' al-janin* yang artinya tempat bayi di dalam perut ibu atau rahim.

Secara terminologi, Imam Nawawi mengemukakan bahwa silaturahim artinya berbuat baik kepada kerabat sesuai dengan kondisi yang menyambung maupun yang disambung. Silaturahim dapat dilakukan dengan harta, benda, pelayanan, kunjungan, salam, dan lain sebagainya. Senada dengan hal tersebut, Ibnu Manzhur menjelaskan adanya kaitan antara kedua pengertian etomologi dan terminologi silaturahim. Ia mengatakan, bahwa silaturahim merupakan kiasan tentang berbuat baik kepada kerabat yang ada hubungan darah (nasab atau kekerabatan) maupun perkawinan, bersikap sayang dan santun kepada mereka, memperhatikan kondisi mereka, meskipun mereka jauh atau pernah menyakiti. Seolah-olah dengan berbuat baik kepada mereka hubungan kekerabatan, perkawinan, dan hubungan sah telah terjalin (asy-Syafrowi, dkk, 2010:91-96). Dalam Al-Qur’an dijelaskan

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِى خَلَقَكُم مِّن نَّفۡسٍ وَٰحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنۡهَا زَوۡجَهَا وَبَثَّ مِنۡهُمَا رِجَالًا كَثِيرًا

وَنِسَآءً ۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِى تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلۡأَرۡحَامَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَيۡكُمۡ رَقِيبًا ﴿١﴾

Artinya: “Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan-mu yang telah menciptakan kamu dari seorang diri, dan dari padanya Allah menciptakan isterinya; dan dari pada keduanya Allah memperkembang biakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain[264], dan (peliharalah) hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kamu” (QS. An-Nisaa’/04: 1).

Dalam firman Allah tersebut terkandung makna bahwa Allah menciptakan manusia untuk bertaqwa, yang memelihara dan meliputi manusia dengan kemurahan dan kedermawanan-Nya. Ingatlah bahwa Dia telah menciptakan manusia dari satu jiwa (Nabi Adam), kemudian menjadikan kamu sebagai suatu jenis makhluk (yaitu manusia) yang kemaslahatan-kemaslahatannya baru bisa ditegakkan atas dasar saling menolong dan saling membantu, serta saling memelihara dalam hal kebenaran. Bertaqwalah kalian kepada Allah yang kalian agungkan, dan kalian saling meminta antar sesama dengan memakai Asma dan hak-Nya atas hamba-hamba-Nya di samping dengan kekuasaan dan pengaruh yang dimiliki-Nya. Ingatlah baik-baik hak-hak silaturahim atas kalian, jagan sampai kalian menyia-yiakannya. Sebab apabila kalian berbuat demikian, berarti kalian telah merusak hubungan kekeluargaan dan persaudaraan (Al-Maraghi, 1993:314).

Perintah untuk bertaqwa tersebut secara nyata memperlihatkan kepada manusia, bahwa sesungguhnya seorang manusia itu merupakan bagian dari manusia lain yang terikat erat sebagai ketentuan baku dari-Nya. Adanya hubungan antar satu sama lain yang saling membutuhkan itu merupakan kodrat penciptaan. Manusia tidak akan dapat hidup tanpa keberadaan manusia lainnya. Ketentuan Allah swt. Ini menimbulkan suatu konsekuensi logis, bahwa untuk melanggengkan hubungan di antara manusia, mereka perlu menjaga dan memelihara silaturahim dengan sebaik-baiknya. Dengan kata lain silaturahim merupakan sunnah penciptaan. Allah swt sendirilah yang telah memutuskan agar manusia saling berhubungan dan bersilaturahim (asy-Syafrowi, dkk, 2010:98). Sehingga jika seseorang tidak melakukannya akan merusak hubungan antar manusia, sehingga Allah swt menegaskan dalam firmannya:

إِنَّمَا ٱلۡمُؤۡمِنُونَ إِخۡوَةٞ فَأَصۡلِحُواْ بَيۡنَ أَخَوَيۡكُمۡۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمۡ تُرۡحَمُونَ ١٠

Artinya: "Orang-orang beriman itu Sesungguhnya bersaudara. sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (QS. Al-Hujaraat/49:10).

Secara matematika suatu graf yang dapat direpresentasikan dengan matriks *adjacency* terdapat suatu nilai bahwa 1 merupakan nilai entri matriks untuk graf yang titiknya saling terhubung dengan sisi, dan bernilai 0 pada nilai entri matriks jika sebaliknya. Hal ini jika dimaknai secara mendalam nilai 1 dapat menggambarkan proses silaturahim antar sesama manusia yang baik. Jika seseorang sebagai umat manusia saling bersilaturahim Allah sangat menyukai hal tersebut sehingga kegiatan ini di mata Allah sangat indah dan akan menimbulkan rasa kasih dan sayang antar sesama, begitu pula sebaliknya nilai 0 mendeskripsikan kebencian Allah swt terhadap manusia jika tidak melakukan kegiatan silaturahim ini. Dalam suatu hadis dikatakan bahwa

لاَ يَدْخُلُ الْجَنَّةَ قَاطِعُ رَحِمٍ

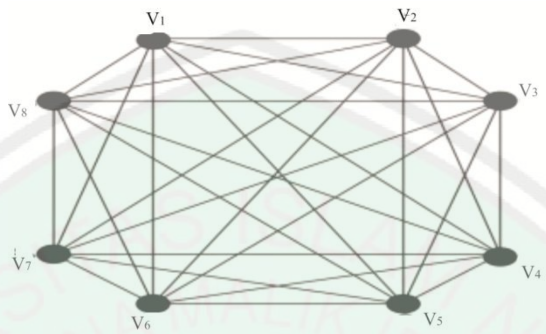
Artinya: "Tidak akan masuk surga orang yang memutus hubungan kekerabatan (ar-rahim)" (HR. al-Bukhari dan Muslim).

Dalam ayat lain juga dijelaskan oleh Allah kepada siapa manusia bersilaturahim dan seperti apa manusia bersilatuahim, firman Allah yang menerangkan hal tersebut yakni:

۞ وَٱعۡبُدُواْ ٱللَّهَ وَلَا تُشۡرِكُواْ بِهِۦ شَيۡـٔٗاۖ وَبِٱلۡوَٰلِدَيۡنِ إِحۡسَٰنٗا وَبِذِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡيَتَٰمَىٰ وَٱلۡمَسَٰكِينِ وَٱلۡجَارِ
ذِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡجَارِ ٱلۡجُنُبِ وَٱلصَّاحِبِ بِٱلۡجَنۢبِ وَٱبۡنِ ٱلسَّبِيلِ وَمَا مَلَكَتۡ أَيۡمَٰنُكُمۡۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن
كَانَ مُخۡتَالٗا فَخُورًا ٣٦

Artinya : "Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapak, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, Ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri" (QS-An Nisaa'/4:36).

Dalam ayat tersebut terdapat kata-kata *dekat-jauh* yang dapat diartikan dengan tempat, hubungan kekeluargaan, dan ada pula antara yang Muslim dan yang bukan Muslim. Ayat tersebut sangat jelas bagi manusia untuk melakukan hubungan baik kepada semua manusia. Poin terpenting lain dari pemaknaan silaturahim adalah apa yang terangkum di dalam makna *shilah* itu sendiri, yaitu menyambung atau menghubungkan. Makna "menyambung" atau "menghubungkan" menunjukkan bahwa ada suatu proses aktif dari sesuatu yang pada mulanya tidak ada ikatan menjadi terikat atau dari sesuatu yang tidak tertata menjadi sesuatu yang bersatu dan utuh kembali. sebagaimana sabda Rasulullah saw berikut ini "*Yang disebut bersilaturahim itu bukanlah seseorang yang membalas kunjungan atau pemberian, melainkan bersilaturahim itu ialah menyambungkan apa yang telah putus".* Secara matematika silaturahim direpresentasikan dari suatu graf terhubung sederhana yang titik-titiknya saling terhubung langsung oleh suatu sisi.



Gambar 2.4 Graf terhubung

Pada gambar tersebut titik-titik yang ada dimisalkan sebagai dua orang tua, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga dekat, tetangga yang jauh, teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahaya, dan sisi merepresentasikan silaturahim yang ditegakkan di antara mereka.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas mengenai spektrum graf *non commuting* yang terbentuk dari grup dihedral berdasarkan tabel *Cayley*.

3.1 Spektrum *Adjacency* Graf *Non Commuting* Grup Dihedral

Grup dihedral adalah suatu grup yang anggota-anggotanya adalah simetri-simetri dari segi n beraturan *(poligon n)*. Grup dihedral ke n ditulis sebagai D_{2n}. Anggota-anggotanya merupakan rotasi dan komposisi dari rotasi dan refleksi.

i) $x = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian rotasi;

ii) $y = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian komposisi dari rotasi dan refleksi;

atau dapat dituliskan sebagai $x \subset D_{2n}$ dan $y \subset D_{2n}$. Hasil operasi komposisi pada grup dihedral akan diberikan dalam bentuk tabel *Cayley*.

3.1.1 Spektrum *Adjacency* Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_6 $(D_{2\cdot 3})$

Grup dihedral D_6 dibangun dari elemen-elemen $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral berbentuk tabel *Cayley* yang menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada D_6 sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel *Cayley* D_6

$\circ$	**1**	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

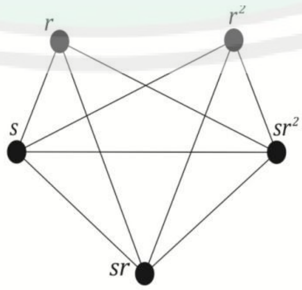
Dari tabel *Cayley* 3.1, menentukan center D_6 atau $Z(D_6)$ yaitu $\{1\}$ yang ditunjukkan pada tabel dengan warna merah, dan elemen-elemen pada D_6 yang tidak komutatif ditunjukkan pada tabel dengan warna biru. Elemen-elemen yang memenuhi sifat non komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_6 adalah:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^2 \circ s \neq s \circ r^2 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$

$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2 \qquad s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$

$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$

Sehingga graf *non commuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titiknya $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dari hasil tersebut akan digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf *Non Commuting* pada Grup D_6

Graf *non commuting* grup D_6 di atas menghasilkan matriks *Adjacency* sebagai berikut:

$$A(\Gamma_{D_6}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Adjacency* akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut. Agar λ menjadi suatu nilai eigen maka harus ada penyelesaian taknol *(nontrivial)* dari persamaan $\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)x = 0$. Akan tetapi persamaan di atas mempunyai pernyelesaian taknol jika dan hanya jika $det\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)$=0, sehingga nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A(\Gamma_{D_6})$ dapat dicari dengan cara:

$$det\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)=0$$

$$det\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$det\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6+2\lambda-\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(A\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$det\left(A\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right) = (1)(\lambda)(1+\lambda)^2(6+2\lambda-\lambda^2)$

Karena $det\left(A\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right) = 0$, maka

$det\left(A\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right) = (1)(\lambda)(1+\lambda)^2(6+2\lambda-\lambda^2) = 0$

Dan diperoleh nilai eigennya

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1-\sqrt{7}\ ,\ \lambda_4 = 1+\sqrt{7}$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Menurut definisinya

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Adalah suatu vektor eigen yang terkait dengan λ jika dan hanya jika x adalah suatu solusi *nontrivial* dari $\left(A\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right)x = 0$, yaitu

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda_1 = 0$ maka persamaan di atas menjadi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi *Gauss Jordan* maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut akan membentuk sistem sebagai berikut:

$$x_1 = -x_2 = -s$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

Sehingga vektor eigen dari $A(\Gamma_{D_6})$ yang terkait dengan $\lambda_1 = 0$ adalah vektor taknol yang berbentuk

$$x = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk $\lambda_2 = -1$ akan diperoleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi *Gauss Jordan* maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut akan membentuk sistem sebagai berikut:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = -x_4 - x_5$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = t$$

Sehingga vektor eigen dari $A(\Gamma_{D_6})$ yang terkait dengan $\lambda_2 = -1$ adalah vektor taknol yang berbentuk

$$x = s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda_2 = -1$ sebanyak 2. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Jika $\lambda_3 = 1 - \sqrt{7}$ akan diperoleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} -(1-\sqrt{7}) & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(1-\sqrt{7}) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -(1-\sqrt{7}) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -(1-\sqrt{7}) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -(1-\sqrt{7}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} -(1-\sqrt{7}) & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -(1-\sqrt{7}) & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -(1-\sqrt{7}) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -(1-\sqrt{7}) & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -(1-\sqrt{7}) & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi *Gauss Jordan* maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{-1+\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{-1+\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut akan membentuk sistem sebagai berikut:

$$x_1 = -\frac{3}{-1+\sqrt{7}}x_5 = -\frac{3}{-1+\sqrt{7}}s$$

$$x_2 = -\frac{3}{-1+\sqrt{7}}x_5 = -\frac{3}{-1+\sqrt{7}}s$$

$$x_3 = x_5 = s$$

$$x_4 = x_5 = s$$

$$x_5 = s$$

Sehingga vektor eigen dari $A(\Gamma_{D_6})$ yang terkait dengan $\lambda_3 = 1 - \sqrt{7}$ adalah vektor taknol yang berbentuk

$$x = s\begin{bmatrix} -\frac{3}{-1+\sqrt{7}} \\ -\frac{3}{-1+\sqrt{7}} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda_3 = 1 - \sqrt{7}$ sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang terakhir yaitu λ_4, jika $\lambda_4 = 1 + \sqrt{7}$ akan diperoleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} -(1+\sqrt{7}) & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(1+\sqrt{7}) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -(1+\sqrt{7}) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -(1+\sqrt{7}) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -(1+\sqrt{7}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} -(1+\sqrt{7}) & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -(1+\sqrt{7}) & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -(1+\sqrt{7}) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -(1+\sqrt{7}) & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -(1+\sqrt{7}) & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi *Gauss Jordan* maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{1+\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{1+\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut akan membentuk sistem sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{3}{1+\sqrt{7}} x_5 = \frac{3}{1+\sqrt{7}} s$$

$$x_2 = \frac{3}{1+\sqrt{7}} x_5 = \frac{3}{1+\sqrt{7}} s$$

$$x_3 = x_5 = s$$

$$x_4 = x_5 = s$$

$$x_5 = s$$

Sehingga vektor eigen dari $A(\Gamma_{D_6})$ yang terkait dengan $\lambda_3 = 1+\sqrt{7}$ adalah vektor taknol yang berbentuk

$$x = s\begin{bmatrix} \frac{3}{1+\sqrt{7}} \\ \frac{3}{1+\sqrt{7}} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4, dengan $\lambda_4 = 1+\sqrt{7}$ adalah 1.

Sehingga spektrum *Adjacency* untuk graf *non commuting* grup dihedral D_6

$$\Gamma_{D_6} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{7} & 0 & -1 & 1-\sqrt{7} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama akan dilakukan penelitian terhadap D_8, $D_{10}, D_{12}, \ldots, D_{2n}$ dengan bantuan *Software Maple 12* untuk mencari nilai eigen dan basis dari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya.

3.1.2 Pola Spektrum *Adjacency* Graf *Non Commuting* D_{2n}

Dari penelitian yang telah dilakukan, diperoleh spektrum graf *non commuting* dari beberapa grup dihedral di antaranya:

Tabel 3.2 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* Beberapa Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n})

No	**Graf *Non Commuting***	**Polinomial Graf *Non Commuting***
1	Graf *Non Commuting* D_6	$(1)(\lambda)(1+\lambda)^2(6+2\lambda-\lambda^2)$
2	Graf *Non Commuting* D_8	$(1)(\lambda)^2(8+4\lambda)\left(2\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{4}\lambda^3\right)$
3	Graf *Non Commuting* D_{10}	$(1)(\lambda)^3(1+\lambda)^4(20+4\lambda-4\lambda^2)$
4	Graf *Non Commuting* D_{12}	$(1)(\lambda)^4(-1)^2(-2\lambda-\lambda^2)(8\lambda+24)(-\frac{1}{8}\frac{\lambda(-48-32\lambda-2\lambda^2+\lambda^3}{3+\lambda})$
5	Graf *Non Commuting* D_{14}	$(1)(\lambda)^5(1+\lambda)^6(-\lambda^2+6\lambda+42)$
6.	Graf *Non Commuting* D_{16}	$(1)(\lambda)^4(-1)^3(-2\lambda-\lambda^2)^2(12\lambda+48)(-\frac{1}{12}\frac{\lambda(-96-60\lambda-4\lambda^2+\lambda^3}{4+\lambda})$
7.	Graf *Non Commuting* D_{20}	$(1)(\lambda)^8(-1)^4(-2\lambda-\lambda^2)^3(16\lambda+80)(-\frac{1}{16}\frac{\lambda(-160-96\lambda-6\lambda^2+\lambda^3}{5+\lambda})$

Tabel 3.3 Spektrum *Adjacency* Beberapa Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n})

No.	Graf Non Kommuting	Spektrum Graf *Non Commuting*
1.	Graf *Non Commuting* D_6	$specc(\Gamma_{D_6}) = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{7} & 0 & -1 & 1-\sqrt{7} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
2.	Graf *Non Commuting* D_8	$specc(\Gamma_{D_8}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
3.	Graf *Non Commuting* D_{10}	$specc(\Gamma_{D_{10}}) = \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{6} & 0 & -1 & 2-2\sqrt{6} \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
4.	Graf *Non Commuting* D_{12}	$specc(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{7} & 0 & -2 & 2-2\sqrt{7} \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
5.	Graf *Non Commuting* D_{14}	$specc(\Gamma_{D_{14}}) = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{51} & 0 & -1 & 3-\sqrt{51} \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
6.	Graf *Non Commuting* D_{16}	$specc(\Gamma_{D_{16}}) = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{57} & 0 & -2 & 3-\sqrt{57} \\ 1 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
7.	Graf *Non Commuting* D_{20}	$spec(\Gamma_{D_{20}}) = \begin{bmatrix} 4+4\sqrt{6} & 0 & -2 & 4-4\sqrt{6} \\ 1 & 12 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Lemma 1:

Polinomial karakteristik matriks *Adjacency* $A(\Gamma_{D_{2n}})$ dengan n ganjil dan $n \geq 3$ $(n \in N)$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^n(1+\lambda)^{n-1}\left(-\lambda + (n-1)\lambda + \left(n(n-1)\right)\right)$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Untuk n ganjil diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1\}$ karena $\forall$ 1 jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif. Dengan demikian graf *non commuting* D_{2n} mempunyai himpunan titik $\{ r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Karena n ganjil, maka $sr^i \neq r^i s, i = 1, 2, \ldots, n-1$, artinya s dan r^i saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}. Demikian juga, karena n ganjil, maka $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i$, j=1, 2,..., n-1 dan $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dengan $i \neq j$, yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di graf *non commuting* maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Adjacency* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det\left(A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I\right)=0$$

$$det\left(A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I\right) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} \end{array}$$

Diperoleh matriks segitiga atas dari $A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|cccccccccc|}
 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \\
r & 1 & 1 & \dots & 1 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
r^2 & 0 & \lambda & \dots & \lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda & \cdots & 1+\lambda \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \lambda & n-\lambda^2 & n+\lambda & n+\lambda & \cdots & n+\lambda \\
s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\
sr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 & \cdots & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1+\lambda & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -\lambda+(n-1)\lambda+\left(n(n-1)\right)
\end{array}$$

Polinomial karakteristik dari $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda I$ adalah $\det\left(A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda I\right)$. Dengan eliminasi Gauss-Jordan $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ yaitu:

$$p(\lambda)=(1)(\lambda)^n(1+\lambda)^{n-1}\left(-\lambda+(n-1)\lambda+\left(n(n-1)\right)\right)$$

Teorema 1:

Spektrum *Adjacency* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n ganjil dan $n \geq 3$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$Specc\ (\Gamma_{D_{2n}})=\begin{bmatrix} \frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2}-\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Elvierayani, 2013).

Bukti:

Dari lemma 1, diperoleh bahwa

$$p(\lambda)=(1)(\lambda)^n(1+\lambda)^{n-1}\left(-\lambda+(n-1)\lambda+\left(n(n-1)\right)\right)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_2=0,\ \lambda_3=-1,\ \lambda_{1,4}=\frac{n-1}{2}\pm\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ dengan mensubstitusikan ke $\left(A(\Gamma_{D_{2n}})-\right.$

$\lambda_1 \mathrm{I})$ dan mereduksi matriks menggunakan metode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi berikut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{n}{\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{n}{\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{n}{\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Dengan $\lambda_1 = \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ adalah 1. Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(A\left(\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}\right) - \lambda_2 \mathrm{I}\right) = 0$ dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi berikut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Dengan $\lambda_2 = 0$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak *n-2* baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 0$ adalah *n-2*. Untuk $\lambda_3 = -1$ setelah di substitusikan ke $\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda_3 I\right)$ dan mereduksi matriks menggunakan metode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan $\lambda_3 = -1$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak *n*-1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = -1$ adalah *n*-1. Untuk $\lambda_4 = \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ setelah di substitusikan akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{-\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{-\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{-\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan $\frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ adalah 1.

Sehingga :

$$Specc\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lemma 2:

Polinomial karakteristik matriks *Adjacency* $A(\Gamma_{D_{2n}})$ dengan n genap dan $n \geq 6$ $(n \in N)$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{n-2}(-1)^{\frac{n-2}{2}}(-2\lambda - \lambda^2)^{\frac{n-4}{2}}[(2n-4)\lambda + (n^2 - 2n)]\left[\frac{1}{2n-4} \cdot \frac{\lambda\{-n(2n^2-4n)\} - \{(n-2)(n+2)\}\lambda - (n-4)\lambda^2 + \lambda^3}{\frac{n}{2} + \lambda}\right]$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ karena $\forall\ 1, r^{\frac{n}{2}}$ jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif. Dengan demikian graf *non commuting* D_{2n} mempunyai himpunan titik $\{r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, sr^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}+1}, \ldots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$ yang mana berjumlah $2n-2$. Karena n genap, maka $sr^i \neq r^i s,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$, artinya s dan r^i saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}. Demikian juga, dengan $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i$, j=1, 2,..., n-1 dan $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dengan $i \neq j$, maka sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n} kecuali jika $sr^i sr^j = r^{\frac{n}{2}}$ yang berarti sr^i dan sr^j

tidak saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n} maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Adjacency* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan menyelesaikan persamaan $det\left(A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I\right)=0$:

$$det\left(A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & -\lambda & \ddots & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & -\lambda & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & -\lambda & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 & -\lambda & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \end{array}$$

Diperoleh matriks segitiga atas dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda I$ sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccccc|}
 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\
r & 1 & 1 & \dots & 1 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
r^2 & 0 & \lambda & \dots & \lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda^2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 1+\lambda^2 & 1 & 1+\lambda^2 & \cdots & 1+\lambda^2 & 1+\lambda^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \lambda & (n-3)-\lambda^2 & (n-3)+\lambda^2 & (n-3)+\lambda^2 & \cdots & (n-3)+\lambda^2 & (n-3) & (n-3)+\lambda^2 & \cdots & (n-3)+\lambda^2 & (n-3)+\lambda^2 \\
s & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
sr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 2+\lambda & -\lambda-1 & \ddots & 0 & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & \ddots & 0 & 2+\lambda & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -\lambda-1 & \ddots \\
sr^{\frac{n}{2}-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2+\lambda & 0 & \ddots & 0 & -\lambda-1 \\
sr^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda+\lambda^2 & \ddots & 0 & 0 \\
sr^{\frac{n}{2}+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -2\lambda-\lambda^2 & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
sr^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2n-4)\lambda+(n^2-2n) & -(n-2)\lambda-\lambda^2 \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2n-4}.\frac{\lambda\{-n(2n^2-4n)\}-\{(n-2)(n+2)\}\lambda-(n-4)\lambda^2+\lambda^3}{\frac{n}{2}+\lambda}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda I$ adalah $\det\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda I\right)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda)=(1)(\lambda)^{n-2}(-1)^{\frac{n-2}{2}}(-2\lambda-\lambda^2)^{\frac{n-4}{2}}[(2n-4)\lambda+(n^2-2n)]\left[\frac{1}{2n-4}.\frac{\lambda\{-n(2n^2-4n)\}-\{(n-2)(n+2)\}\lambda-(n-4)\lambda^2+\lambda^3}{\frac{n}{2}+\lambda}\right]$$

Teorema 2:

Spektrum *Adjacency* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n genap dan $n \geq 6$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$Specc\ (\Gamma_{D_{2n}})=\begin{bmatrix} \frac{n-2}{2}+\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2}-\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{3n-6}{2} & \frac{n-2}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(Elvierayani, 2013).

Bukti:

Dari lemma 2, diperoleh bahwa

$$p(\lambda)=(1)(\lambda)^{n-2}(-1)^{\frac{n-2}{2}}(-2\lambda-\lambda^2)^{\frac{n-4}{2}}[(2n-4)\lambda+(n^2-2n)]\left[\frac{1}{2n-4}.\frac{\lambda\{-n(2n^2-4n)\}-\{(n-2)(n+2)\}\lambda-(n-4)\lambda^2+\lambda^3}{\frac{n}{2}+\lambda}\right]$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1=\frac{n-2}{2}+\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}},\lambda_2=0,\ \lambda_3=-2,\ \lambda_4=\frac{n-2}{2}-\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=\frac{n-2}{2}+\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$ dengan mensubstitusikan ke $\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda_1 I\right)$ dan mereduksi matriks menggunakan metode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{n-2}{2} + \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$ adalah 1. Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda_2 \mathrm{I}\right)$ dan mereduksi matriks menggunakan metode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi berikut:

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccccc|}
 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\
\hline
r & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
r^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
r^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\
r^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
sr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\
sr^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
sr^{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}
$$

Dengan $\lambda_2 = 0$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak $\frac{3n-6}{2}$ baris, maka banyaknya basis untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 0$ adalah $\frac{3n-6}{2}$. Untuk $\lambda_3 = -2$ disubstitusikan ke dalam $\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda_3 \mathrm{I}\right)$ dan mereduksi matriks menggunakan metode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi berikut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-2} & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & sr^{\frac{n}{2}+2} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-2} \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ sr^{\frac{n}{2}+2} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Dengan $\lambda_3 = -2$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak $\frac{n-2}{2}$ baris, maka banyaknya basis untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = -2$ adalah $\frac{n-2}{2}$. Untuk $\lambda_4 = \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$ disubstitusikan ke dalam $\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda_4 \mathrm{I}\right)$ dan mereduksi matriks menggunakan metode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan $\frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$ adalah 1.

Sehingga :

$$
specc\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} + \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{n-2}{2} & \frac{3n-6}{2} & 1 \end{bmatrix}
$$

3.2 Spektrum *Laplace* Graf *Non Commuting* Grup Dihedral

Setelah diteliti dan ditunjukkan sebelumnya mengenai spektrum *Adjacency* dari graf *non commuting* dihedral (D_{2n}) selanjutnya akan ditunjukkan spektrum *Laplace* dari graf *non commuting* dihedral dengan konsep:

$$L(\Gamma_{D_{2n}}) = D(\Gamma_{D_{2n}}) - A(\Gamma_{D_{2n}})$$

Untuk pencarian nilai eigen dan basis vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya peneliti menggunakan *Software Maple 12* untuk mempermudah perhitungan.

3.2.1 Spektrum Laplace Graf Non Kommuting Grup Dihedral D_6 ($D_{2\cdot 3}$)

Dalam pembahasan sebelumnya telah diketahui matriks *Adjacency* dari graf *non commuting dari* grup dihedral D_6 (Γ_{D_6}) adalah sebagai berikut:

$$A(\Gamma_{D_6}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selanjutnya ditentukan matrik derajat dari grup dihedral D_6:

$$D(\Gamma_{D_6}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sehingga diperoleh matriks *Laplace* dari grup dihedral D_6:

$$L(\Gamma_{D_6}) = D(\Gamma_{D_6}) - A(\Gamma_{D_6}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det\left(L(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)=0$$

$$det\left[\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$det\left[\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\lambda+\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(L\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$det\left(L\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right) = (-1)(3-\lambda)(-5+\lambda)^2(-5\lambda+\lambda^2)$

Karena $det\left(L\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right)$ =0, maka

$det\left(L\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda I\right) = (-1)(3-\lambda)(-5+\lambda)^2(-5\lambda+\lambda^2) = 0$

Dan diperoleh nilai eigennya

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(L\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda_1 I\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 3-0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4-0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4-0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk $\lambda_2 = 3$ disubstitusikan ke dalam $\left(L\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda_2 I\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4-3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4-3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 3$ adalah 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Dengan $\lambda_3 = 5$ disubstitusikan ke dalam $\left(L\left(\Gamma_{D_6}\right) - \lambda\, I\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4-5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4-5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil tersebut banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3, dengan $\lambda_3 = 5$ adalah 3.

Sehingga spektrum *Laplace* untuk graf *non commuting* $\Gamma_{D_6} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Dengan cara yang sama akan dilakukan penelitian terhadap $D_8, D_{10}, D_8, \dots, D_{2n}$. Sehingga akan membentuk suatu pola teratur dan dirumuskan menjadi suatu lemma dan teorema dengan disertai bukti.

3.2.2 Pola Spektrum *Laplace* Graf *Non Commuting* D_{2n}

Dari penelitian yang telah dilakukan, diperoleh polinomial karakeristik dan spektrum *Laplace* graf *non commuting* dari beberapa grup dihedral di antaranya:

Tabel 3.4 Polinomial Karakteristik Matriks *Laplace* Beberapa Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n})

No	Graf *Non Commuting*	Polinomial Graf *Non Commuting*
1	*Non Commuting* D_6	$(-1)(3-\lambda)(-5+\lambda)^2(-5\lambda+\lambda^2)$
2	*Non Commuting* D_8	$(-1)(4-\lambda)(-5+\lambda)\left(\frac{24-10\lambda+\lambda^2}{-5+\lambda}\right)(-6+\lambda)\lambda$
3	*Non Commuting* D_{10}	$(-1)(5-\lambda)^3(-9+\lambda)^4(-9\lambda+\lambda^2)$
4	*Non Commuting* D_{12}	$(-1)(6-\lambda)^3(-9+\lambda)^2(-8+\lambda)\left(-\frac{80-18\lambda+\lambda^2}{-9+\lambda}\right)^2(-10+\lambda)\lambda$
5	*Non Commuting* D_{14}	$(-1)(7-\lambda)^5(-13+\lambda)^6(-13\lambda+\lambda^2)$
6.	*Non Commuting* D_{16}	$(-1)(8-\lambda)^5(-13+\lambda)^3(-12+\lambda)\left(-\frac{168-26\lambda+\lambda^2}{-13+\lambda}\right)^3(-14+\lambda)\lambda$
7.	*Non Commuting* D_{20}	$(-1)(10-\lambda)^7(-17+\lambda)^4(-16+\lambda)\left(-\frac{288-34\lambda+\lambda^2}{-17+\lambda}\right)^4(-18+\lambda)\lambda$

Tabel 3.5 Spektrum *Laplace* Beberapa Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n})

No.	Graf *Non Commuting*	Spektrum Graf *Non Commuting*
1.	Graf *Non Commuting* D_6	$spec_L(\Gamma_{D_6}) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
2.	Graf *Non Commuting* D_8	$spec_L(\Gamma_{D_8}) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
3.	Graf *Non Commuting* D_{10}	$spec_L(\Gamma_{D_{10}}) = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
4.	Graf *Non Commuting* D_{12}	$spec_L(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
5.	Graf *Non Commuting* D_{14}	$spec_L(\Gamma_{D_{14}}) = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
6.	Graf *Non Commuting* D_{16}	$spec_L(\Gamma_{D_{16}}) = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 8 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
7.	Graf *Non Commuting* D_{20}	$spec_L(\Gamma_{D_{20}}) = \begin{bmatrix} 18 & 16 & 10 & 0 \\ 5 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Lemma 3:

Polinomial karakteristik matriks *Laplace* $L(\Gamma_{D_{2n}})$ dengan n ganjil dan $n \geq 3$ $(n \in N)$, adalah:

$$p(\lambda) = (-1)(n-\lambda)^{n-2}\left((-2n+1)+\lambda\right)^{n-1}((-2n+1)\lambda+\lambda^2)$$

Bukti :

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Untuk n ganjil diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1\}$ karena $\forall$ 1 jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif. Dengan demikian graf *non commuting* D_{2n} mempunyai himpunan titik $\{r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Karena n ganjil, maka $sr^i \neq r^i s,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$, artinya s dan r^i saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}. Demikian juga, karena n ganjil, maka $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i$, j=1, 2,..., n-1 dan $i = 1, 2, \dots, n-1$, dengan $i \neq j$, yang berarti pula sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di graf *non commuting* maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & r^3 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dan matriks derajat:

$$D(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & r^3 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2n-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 2n-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n-2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka matriks *Laplace* graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} adalah:

$$L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & r^3 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 2n-2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & 2n-2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 2n-2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara $det\left(L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)=0$ dan diperoleh matriks segitiga atas dari $L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} r & r^2 & r^3 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccccccccc} -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 2n-2-\lambda & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-\lambda & 0 & \ldots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & n-\lambda & \ldots & 0 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-\lambda & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2n+1+\lambda & 2n-1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -2n+1+\lambda & 2n-1-\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -2n+1+\lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2n+1+\lambda & -2n-1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-2n+1)\lambda+\lambda^2 \end{array}\right| \end{array}$$

Polinomial karakteristik dari $L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I$ adalah det $\left(L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = (-1)(n-\lambda)^{n-2}\big((-2n+1)+\lambda\big)^{n-1}((-2n+1)\lambda+\lambda^2)$$

Teorema 3:

Spektrum *Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n ganjil dan $n \geq 3$ $(n \in N)$ diperoleh:

$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}})= \begin{bmatrix} 2n-1 & n & 0 \\ n & n-2 & 1 \end{bmatrix}$

(Elvierayani, 2013).

Bukti :

Dari lemma 3, diperoleh bahwa

$$p(\lambda) = (-1)(n-\lambda)^{n-2}\big((-2n+1)+\lambda\big)^{n-1}((-2n+1)\lambda+\lambda^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 2n-1,\ \lambda_2 = n,\ \lambda_3 = 0$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Karena multiplisitas itu sama dengan basis ruang vektor eigen yang besesuaian dengan λ_i,

i = 1, 2, 3 dan basis merupakan baris nol pada matriks, substitusikan λ_i ke $\left(L(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_i I\right)$ dan dengan mereduksi matriks menggunakan meode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi. Untung ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2n - 1$ disubstitusikan ke dalam $\left(L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda_1 I\right)$, diperoleh matriks eselon baris tereduksi:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\
0 & 1 & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Dengan $\lambda_1 = 2n - 1$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak n baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2n - 1$ multiplisitasnya sebanyak n. Untuk $\lambda_2 = n$ dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi berikut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Dengan $\lambda_2 = n$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak $n-2$ baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = n$ adalah $n-2$. Untuk $\lambda_3 = 0$ akan menghasilkan matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \\
\hline
r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\
r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\
s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\
sr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\
sr^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}$$

Dengan $\lambda_3 = 0$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ adalah 1. Sehingga diperoleh:

$$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & n & 0 \\ n & n-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lemma 4:

polinomial karakteristik matriks *Laplace* $L(\Gamma_{D_{2n}})$ dengan n genap dan $n \geq 6$, maka adalah:

$$p(\lambda) = (-1)(n-\lambda)^{n-3}\left((-2n+3)+\lambda\right)^{\frac{n-2}{2}}\left((-2n+4)+\lambda\right)\left\{-\frac{4(n^2-3n+2)-(4n-6)\lambda+\lambda^2}{(-2n+3)+\lambda}\right\}^{\frac{n-2}{2}}(-2\mathrm{n}-2)\lambda+\lambda^2)$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ karena $\forall\ 1, r^{\frac{n}{2}}$ jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif. Dengan demikian graf *non commuting* D_{2n} mempunyai himpunan titik $\{r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr,$

$sr^2, sr^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}+1}, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$ yang mana berjumlah $2n-2$. Karena n genap, maka $sr^i \neq r^i s,\ i = 1, 2, \dots, n-1$, artinya s dan r^i saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}. Demikian juga, dengan $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i$, j=1, 2,..., n-1 dan $i = 1, 2, \dots, n-1$, dengan $i \neq j$, maka sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n} kecuali jika $sr^i sr^j = r^{\frac{n}{2}}$ yang berarti sr^i dan sr^j tidak saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n} maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dan matriks derajat:

$$D(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n-4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2n-4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 2n-4 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2n-4 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 2n-4 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 2n-4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n-4 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n-4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka matriks *Laplace* graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} adalah:

$$L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 2n-4 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 2n-4 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \ddots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & 2n-4 & \ddots & -1 & -1 & -1 & \ddots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \ddots & 2n-4 & -1 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & -1 & \ddots & -1 & 2n-4 & -1 & \ddots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & -1 & \ddots & -1 & -1 & 2n-4 & \ddots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \ddots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 2n-4 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \ddots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2n-4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara $det\left(L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)=0$ dan diperoleh matriks segitiga atas dari $L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \left|\begin{matrix} -1 & -1 & \dots & -1 & 2n-4-\lambda & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-\lambda & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-\lambda & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (-2n+3)+\lambda & (2n-3)-\lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-2n+3)+\lambda & (2n-3)-\lambda & \ddots & 0 & 0 & -1 & \ddots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (-2n+3)+\lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & (-2n+4)+\lambda & -\frac{4(n^2-3n+2)-(4n-6)\lambda+\lambda^2}{(-2n+3)+\lambda} & 0 & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{4(n^2-3n+2)-(4n-6)\lambda+\lambda^2}{(-2n+3)+\lambda} & -\frac{4(n^2-3n+2)-(4n-6)\lambda+\lambda^2}{(-2n+3)+\lambda} & \cdots & 0 & -\frac{(-2n+4)+\lambda}{(-2n+3)+\lambda} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -\frac{4(n^2-3n+2)-(4n-6)\lambda+\lambda^2}{(-2n+3)+\lambda} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{4(n^2-3n+2)-(4n-6)\lambda+\lambda^2}{(-2n+3)+\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-2n-2)\lambda+\lambda^2 \end{matrix}\right| \end{array}$$

Polinomial karakteristik dari $L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I$ adalah $\det\left(L\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) - \lambda I\right)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = (-1)(n-\lambda)^{n-3}\left((-2n+3)+\lambda\right)^{\frac{n-2}{2}}\left((-2n+4)+\lambda\right)\left\{-\frac{4(n^2-3n+2)-(4n-6)\lambda+\lambda^2}{(-2n+3)+\lambda}\right\}^{\frac{n-2}{2}}\left(-2n-2)\lambda+\lambda^2\right)$$

Teorema 4:

Spektrum *Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n genap dan $n \geq 6$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & 2(n-2) & n & 0 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

(Elvierayani, 2013).

Bukti :

Dari lemma 4, diperoleh bahwa

$$p(\lambda) = (-1)(n-\lambda)^{n-3}\left((-2n+3)+\lambda\right)^{\frac{n-2}{2}}\left((-2n+4)+\lambda\right)\left\{-\frac{4(n^2-3n+2)-(4n-6)\lambda+\lambda^2}{(-2n+3)+\lambda}\right\}^{\frac{n-2}{2}}(-2\mathrm{n}-2)\lambda+\lambda^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 2(n-1),\ \lambda_2 = 2(n-2),\ \lambda_3 = n, \lambda_4 = 0$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Karena multiplisitas itu sama dengan basis ruang vektor eigen yang besesuaian dengan λ_i, i = 1, 2, 3, 4 dan basis merupakan baris nol pada matriks, substitusikan λ_i ke $L(\Gamma_{\mathrm{D}_{2\mathrm{n}}}) - \lambda_i I$ dan dengan mereduksi matriks menggunakan meode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi. Untuk $\lambda_1 = 2(n-1)$ setelah disubstitusi ke $\left(L\left(\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}\right) - \lambda_1\mathrm{I}\right)$, diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n-2}{2} & \cdots & \frac{n-2}{2} & \frac{n-2}{2} \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n-2}{2} & \cdots & \frac{n-2}{2} & \frac{n-2}{2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n-2}{2} & \ddots & \frac{n-2}{2} & \frac{n-2}{2} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & -1 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

dengan $\frac{n}{2}$ baris yang nol, jadi untuk $\lambda_1 = 2n - 1$ memiliki multiplisitas sebanyak $\frac{n}{2}$. Untuk $\lambda_2 = 2(n-2)$ setelah disubstitusi ke $\left(L\left(\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}\right) - \lambda_2\mathrm{I}\right)$, diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 1 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

dengan $\frac{n}{2}$ baris yang nol, jadi untuk $\lambda_2 = 2(n-2)$ memiliki multiplisitas sebanyak $\frac{n}{2}$. Untuk $\lambda_3 = n$ setelah disubstitusi ke $\left(L\left(\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}\right) - \lambda_3 \mathrm{I}\right)$, diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} r & r^2 & r^3 & \cdots & r^{n-3} & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-3} \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

dengan $n-3$ baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_3 = n$ memiliki multiplisitas sebanyak $n-3$. Untuk $\lambda_4 = 0$ setelah disubstitusi ke $\left(L\left(\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}\right) - \lambda_4 \mathrm{I}\right)$, diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} r & r^2 & r^3 & \cdots & r^{n-3} & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-3} \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

dengan 1 baris yang nol, maka untuk $\lambda_3 = 0$ memiliki multiplisitas sebanyak 1.

Sehingga diperoleh:

$$spec_L\ (\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & 2(n-2) & n & 0 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Spektrum *Signless-Laplace* Graf *Non Commuting* Grup Dihedral

Setelah diteliti dan ditunjukkan sebelumnya mengenai spektrum *Adjacency*, spektrum *Laplace* dari graf *non commuting* dihedral (D_{2n}) selanjutnya akan ditunjukkan spektrum *Signless-laplace* dari graf *non commuting* dihedral dengan konsep:

$$Q(\Gamma_{D_{2n}}) = D(\Gamma_{D_{2n}}) + A(\Gamma_{D_{2n}}).$$

Untuk pencarian nilai eigen dan basis vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya peneliti menggunakan *Software Maple 12* untuk mempermudah perhitungan.

3.3.1 Spektrum *Signless-Laplace* Graf *Non commuting* Grup Dihedral D_8 ($D_{2\cdot4}$)

Dalam teorema sebelumnya dapat diketahui matriks *Adjacency* dari Γ_{D_8} adalah sebagai berikut:

$$A(\Gamma_{D_8}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^3 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selanjutnya ditentukan matrik derajat dari Γ_{D_8}:

$$D(\Gamma_{D_8}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^3 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sehingga diperoleh matriks *Signles-Laplace* dari Γ_{D_8}:

$$Q(\Gamma_{D_8}) = D(\Gamma_{D_8}) + A(\Gamma_{D_8}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^3 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det\left(Q(\Gamma_{D_8}) - \lambda I\right)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix}4&0&1&1&1&1\\0&4&1&1&1&1\\1&1&4&1&0&1\\1&1&1&4&1&0\\1&1&0&1&4&1\\1&1&1&0&1&4\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\right)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix}4&0&1&1&1&1\\0&4&1&1&1&1\\1&1&4&1&0&1\\1&1&1&4&1&0\\1&1&0&1&4&1\\1&1&1&0&1&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&0&1&1&1&1\\0&4-\lambda&1&1&1&1\\1&1&4-\lambda&1&0&1\\1&1&1&4-\lambda&1&0\\1&1&0&1&4-\lambda&1\\1&1&1&0&1&4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix}1&1&4-\lambda&1&0&1\\0&4-\lambda&1&1&1&1\\0&0&-3+\lambda&3-\lambda&1&-1\\0&0&0&-4+\lambda&-\dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda}&\dfrac{-4+\lambda}{-3+\lambda}\\0&0&0&0&\dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda}&-\dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda}\\0&0&0&0&0&-(-2+\lambda)(\lambda-8)\end{bmatrix}$$

Karena $det\left(Q(\Gamma_{D_8})-\lambda I\right)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$det\left(Q(\Gamma_{D_8})-\lambda I\right)=(1)(4-\lambda)(-3+\lambda)(-4+\lambda)\left(\frac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda}\right)-(-2+\lambda)(\lambda-8)$$

Karena $det\left(Q(\Gamma_{D_8})-\lambda I\right)=0$, maka

$det\left(Q\left(\Gamma_{D_8}\right) - \lambda I\right) = (1)(4-\lambda)(-3+\lambda)(-4+\lambda)\left(\frac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda}\right) - (-2+\lambda)(\lambda-8) = 0$

Dan diperoleh nilai eigennya

$\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 2$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda_1 = 8$ disubstitusikan ke dalam $\left(Q\left(\Gamma_{D_8}\right) - \lambda I\right)$=0 diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 4-8 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4-8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari hasil tersebut banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1, dengan $\lambda_1 = 8$ adalah 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk $\lambda_2 = 4$ disubstitusikan ke dalam $\left(Q\left(\Gamma_{D_8}\right) - \lambda I\right)$=0 diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 4-4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4-4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 4$ adalah 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk $\lambda_3 = 2$ disubstitusikan ke dalam $\left(Q(\Gamma_{D_8}) - \lambda I\right)$=0 diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 2$ sebanyak 2.

Sehingga spektrum *Signless-Laplace* untuk graf *non commuting* grup dihedral D_8

$$specc_Q(\Gamma_{D_8}) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Spektrum *Signless-Laplace* Graf *Non commuting* Grup Dihedral D_{12} $(D_{2\cdot 6})$

Dalam teorema sebelumnya dapat diketahui matriks *Adjacency* dari $\Gamma_{D_{12}}$ adalah sebagai berikut:

$$A(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ r^4 \\ r^5 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & r^4 & r^5 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selanjutnya ditentukan matriks derajat dari $\Gamma_{D_{12}}$:

$$D(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ r^4 \\ r^5 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & r^4 & r^5 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sehingga diperoleh matriks *Signless-Laplace* dari $\Gamma_{D_{12}}$:

$Q(\Gamma_{D_{12}}) = D(\Gamma_{D_{12}}) + A(\Gamma_{D_{12}})$

$$Q(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ r^4 \\ r^5 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} r & r^2 & r^4 & r^5 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det\left(Q(\Gamma_{D_{12}}) - \lambda I\right) = 0$$

$$det\left[\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$det\left[\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8+\lambda & -\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} & 0 & \frac{-8+\lambda}{-7+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} & -\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} & -\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+18\lambda-48 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(Q\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$det\left(Q\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right) = (1)(6-\lambda)^3(-7+\lambda)^2(-8+\lambda)\left(\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda}\right)^2(-\lambda^2+18\lambda-48)$$

Karena $det\left(Q\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right) = 0$, maka

$$det\left(Q\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right) = (1)(6-\lambda)^3(-7+\lambda)^2(-8+\lambda)\left(\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda}\right)^2(-\lambda^2+18\lambda-48) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$\lambda_1 = 9+\sqrt{33}$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 6$ dan $\lambda_4 = 9-\sqrt{33}$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1. Dengan $\lambda_1 = 9+\sqrt{33}$ disubstitusikan ke dalam $\left(Q\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix}
-3-\sqrt{33} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & -3-\sqrt{33} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -3-\sqrt{33} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -3-\sqrt{33} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33}
\end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\left(35+3\sqrt{33}\right)}{\left(3+\sqrt{33}\right)\left(2+\sqrt{33}\right)\left(1+\sqrt{33}\right)} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\left(35+3\sqrt{33}\right)}{\left(3+\sqrt{33}\right)\left(2+\sqrt{33}\right)\left(1+\sqrt{33}\right)} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\left(35+3\sqrt{33}\right)}{\left(3+\sqrt{33}\right)\left(2+\sqrt{33}\right)\left(1+\sqrt{33}\right)} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\left(35+3\sqrt{33}\right)}{\left(3+\sqrt{33}\right)\left(2+\sqrt{33}\right)\left(1+\sqrt{33}\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{35+3\sqrt{33}}{\left(2+\sqrt{33}\right)\left(1+\sqrt{33}\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{35+3\sqrt{33}}{\left(2+\sqrt{33}\right)\left(1+\sqrt{33}\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{35+3\sqrt{33}}{\left(2+\sqrt{33}\right)\left(1+\sqrt{33}\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Dari hasil tersebut banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1, dengan $\lambda_1 = 9+\sqrt{33}$ adalah 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk $\lambda_2 = 8$ disubstitusikan ke dalam $\left(Q\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 8$ adalah 3. Untuk $\lambda_3 = 6$ disubstitusikan ke dalam $\left(Q\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 6$ sebanyak 5.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Dengan $\lambda_4 = 9 - \sqrt{33}$ disubstitusikan ke dalam $\left(Q\left(\Gamma_{D_{12}}\right) - \lambda I\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -3+\sqrt{33} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3+\sqrt{33} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3+\sqrt{33} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3+\sqrt{33} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode *Gauss Jordan* yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6(-35+3\sqrt{33})}{(-3+\sqrt{33})(-2+\sqrt{33})(-1+\sqrt{33})} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6(-35+3\sqrt{33})}{(-3+\sqrt{33})(-2+\sqrt{33})(-1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6(-35+3\sqrt{33})}{(-3+\sqrt{33})(-2+\sqrt{33})(-1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6(-35+3\sqrt{33})}{(-3+\sqrt{33})(-2+\sqrt{33})(-1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-35+3\sqrt{33}}{(-2+\sqrt{33})(-1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-35+3\sqrt{33}}{(-2+\sqrt{33})(-1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-35+3\sqrt{33}}{(-2+\sqrt{33})(-1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dari hasil tersebut banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4, dengan $\lambda_4 = 9 - \sqrt{33}$ adalah 1.

Sehingga spektrum *Signless-Laplace* untuk graf *non commuting*

$$spec_Q(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{bmatrix} 9+\sqrt{33} & 8 & 6 & 9-\sqrt{33} \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.3 Pola Spektrum *Signless-Laplace* Graf *Non Commuting D_{2n}*

Dengan cara yang sama akan diperoleh bentuk polinomial karakeristik dan spektrum *Signless-Laplace* dari graf *non commuting* beberapa grup dihedral di antaranya:

Tabel 3.6 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless-Laplace* dari Beberapa Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n})

No	Graf *Non Commuting*	Polinomial Graf *Non Commuting*
1	*Non Commuting D8*	$(1)(4-\lambda)(-3+\lambda)(-4+\lambda)\left(\frac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda}\right)-(-2+\lambda)(\lambda-8)$
2	*Non Commuting D12*	$(1)(6-\lambda)^3(-7+\lambda)^2(-8+\lambda)\left(\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda}\right)^2(-\lambda^2+18\lambda-48)$
3	*Non Commuting D16*	$(1)(8-\lambda)^5(-11+\lambda)^3(-12+\lambda)\left(\frac{120-22\lambda+\lambda^2}{-11+\lambda}\right)^3(-\lambda^2+26\lambda-96)$
4	*Non Commuting D20*	$(1)(10-\lambda)^7(-15+\lambda)^4(-16+\lambda)\left(\frac{224-30\lambda+\lambda^2}{-15+\lambda}\right)^4(-\lambda^2+34\lambda-160)$
5	*Non Commuting D24*	$(1)(12-\lambda)^7(-19+\lambda)^5(-20+\lambda)\left(\frac{360-38\lambda+\lambda^2}{-19+\lambda}\right)^5(-\lambda^2+42\lambda-240)$

Tabel 3.7 Spektrum *Signless-laplace* Beberapa Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n})

No.	Graf *Non Commuting*	Spektrum Graf *Non Commuting*
1.	Graf *Non Commuting D8*	$spec_Q(\Gamma_{D_8})=\begin{bmatrix}8 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$
2.	Graf *Non Commuting D12*	$spec_Q(\Gamma_{D_{12}})=\begin{bmatrix}9+\sqrt{33} & 8 & 6 & 9-\sqrt{33}\\ 1 & 3 & 5 & 1\end{bmatrix}$
3.	Graf *Non Commuting D16*	$spec_Q(\Gamma_{D_{16}})=\begin{bmatrix}13+\sqrt{73} & 12 & 10 & 8 & 13-\sqrt{73}\\ 1 & 4 & 3 & 5 & 1\end{bmatrix}$
4.	Graf *Non Commuting D20*	$spec_Q(\Gamma_{D_{16}})=\begin{bmatrix}17+\sqrt{129} & 16 & 14 & 10 & 17-\sqrt{129}\\ 1 & 5 & 4 & 7 & 1\end{bmatrix}$
5.	Graf *Non Commuting D24*	$spec_Q(\Gamma_{D_{24}})=\begin{bmatrix}21+\sqrt{201} & 20 & 18 & 12 & 21-\sqrt{201}\\ 1 & 6 & 5 & 9 & 1\end{bmatrix}$

Lemma 5:

Polinomial karakteristik matriks *Signless-Laplace* $Q(\Gamma_{D_{2n}})$ dengan n genap dan $n \geq 8$, adalah:

$$p(\lambda)=(1)(n-\lambda)^{n-3}((-2n+5)+\lambda)^{\frac{n-2}{2}}((-2n+4)+\lambda)\left\{\frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda}\right\}^{\frac{n-2}{2}}\{(-2n^2+4n)+(4n-6)\lambda-\lambda^2)\}$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ karena $\forall\ 1, r^{\frac{n}{2}}$ jika dioperasikan dengan operasi $\circ$ di D_{2n} akan menghasilkan unsur-unsur yang saling komutatif. Dengan demikian graf *non commuting* D_{2n} mempunyai himpunan titik $\{r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, sr^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}+1}, \ldots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$ yang mana berjumlah $2n - 2$. Karena n genap, maka $sr^i \neq r^i s,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$, artinya s dan r^i saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}. Demikian juga, dengan $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i$, j=1, 2,..., n-1 dan $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dengan $i \neq j$, maka sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n} kecuali jika $sr^i sr^j = r^{\frac{n}{2}}$ yang berarti sr^i dan sr^j tidak saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n} maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dan matriks derajat:

$$D(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n-4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2n-4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 2n-4 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2n-4 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 2n-4 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 2n-4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n-4 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n-4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka matriks *signless-laplace* graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} adalah:

$$Q(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & n & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2n-4 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2n-4 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 2n-4 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 2n-4 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 2n-4 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 2n-4 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2n-4 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2n-4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara *det* $\left(Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I\right)$=0 dan diperoleh matriks segitiga atas dari $Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-2} & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-2} \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ sr^{\frac{n}{2}+2} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \left|\begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 2n-4-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & n-\lambda & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-\lambda & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (-2n+5)+\lambda & (2n-5)-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-2n+5)+\lambda & (2n-3)-\lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (-2n+5)+\lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & (-2n+5)+\lambda & (2n-3)-\lambda & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & (-2n+4)+\lambda & -\frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{(-2n+4)+\lambda}{(-2n+3)+\lambda} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} & -\frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} & -\frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} & -\frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-2n^2+4n)+(4n-6)\lambda-\lambda^2 \end{matrix}\right| \end{array}$$

Polinomial karakteristik dari $Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I$ adalah $\det\left(Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I\right)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda) = (1)(n-\lambda)^{n-3}((-2n+5)+\lambda)^{\frac{n-2}{2}}((-2n+4)+\lambda)\left\{\frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda}\right\}^{\frac{n-2}{2}}\{(-2n^2+4n)+(4n-6)\lambda-\lambda^2)\}$$

Teorema 5:

Spektrum *Signless-Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n genap dan $n \geq 8$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$spec_Q(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9} & 2(n-2) & 2(n-3) & n & (2n-3)-\sqrt{2n^2-8n+9} \\ 1 & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti :

Dari lemma 5, diperoleh bahwa

$$p(\lambda) = (1)(n-\lambda)^{n-3}((-2n+5)+\lambda)^{\frac{n-2}{2}}((-2n+4)+\lambda)\left\{\frac{4(n-5n+6)-(4n-10)\lambda+\lambda^2}{(-2n+5)+\lambda}\right\}^{\frac{n-2}{2}}\{(-2n^2+4n)+(4n-6)\lambda-\lambda^2)\}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = (2n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9},\ \lambda_2 = 2(n-2),\ \lambda_3 = 2(n-3),\ \lambda_4 = n,\ \lambda_5 = (2n-3)-\sqrt{2n^2-8n+9}$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Karena multiplisitas itu sama dengan basis ruang vektor eigen yang besesuaian dengan λ_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 dan basis merupakan baris nol pada matriks, substitusikan λ_i ke $Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_i I$ dan dengan mereduksi matriks menggunakan meode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi. Untuk $\lambda_1 = (2n-3) + \sqrt{2n^2-8n+9}$ setelah disubstitusikan ke $(Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_1 I)$, diperoleh matriks eselon baris sebagai berikut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{(2n^3-8n^2+11n)+3n\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9}][(2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{(2n^3-8n^2+11n)+3n\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9}][(2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{(2n^3-8n^2+11n)+3n\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9}][(2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{(2n^2-8n+11)+3\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{(2n^2-8n+11)+3\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{(2n^2-8n+11)+3\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{(2n^2-8n+11)+3\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

dengan 1 baris yang nol, jadi untuk $\lambda_1 = (2n-3) + \sqrt{2n^2-8n+9}$ memiliki multiplisitas sebanyak 1. Untuk $\lambda_2 = 2(n-2)$ setelah disubstitusi ke $(Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_2 I)$ diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

dengan $\frac{n}{2}$ baris yang nol, jadi untuk $\lambda_2 = 2(n-2)$ memiliki multiplisitas sebanyak $\frac{n}{2}$. Untuk $\lambda_3 = 2(n-3)$ setelah disubstitusi ke $(Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_3 I)$, diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|cccccccccccccccc|}
 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-2} & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & sr^{\frac{n}{2}+2} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\
r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
sr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ddots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
sr^{\frac{n}{2}-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 \\
sr^{\frac{n}{2}-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 \\
sr^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
sr^{\frac{n}{2}+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
sr^{\frac{n}{2}+2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\
sr^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}$$

dengan $\frac{n-2}{2}$ baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_3 = 2(n-3)$ memiliki multiplisitas sebanyak $\frac{n-2}{2}$. Untuk $\lambda_4 = n$ setelah disubstitusi ke $(Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_4 I)$, diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|cccccccccccccccc|}
 & r & r^2 & r^3 & \cdots & r^{n-3} & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\
r & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
r^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
r^3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
r^{n-3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
r^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
r^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
sr & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
sr^3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
sr^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\
sr^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}$$

dengan $n-3$ baris yang nol, maka untuk $\lambda_4 = n$ memiliki multiplisitas sebanyak $n-3$. Untuk $\lambda_5 = (2n-3) - \sqrt{2n^2 - 8n + 9}$ setelah disubstitusi ke $(Q(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_5 I)$, diperoleh matriks eselon baris sebagai berikut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{\frac{n}{2}-1} \\ sr^{\frac{n}{2}} \\ sr^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{-(2n^3-8n^2+11n)+3n\sqrt{2n^2-8n+9}}{[-(n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9}][(-2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(-1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{-(2n^3-8n^2+11n)+3n\sqrt{2n^2-8n+9}}{[-(n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9}][(-2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(-1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{-(2n^3-8n^2+11n)+3n\sqrt{2n^2-8n+9}}{[-(n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9}][(-2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(-1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-(2n^2-8n+11)+3\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(-2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(-1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \frac{-(2n^2-8n+11)+3\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(-2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(-1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-(2n^2-8n+11)+3\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(-2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(-1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \frac{(2n^2-8n+11)+3\sqrt{2n^2-8n+9}}{[(-2+\sqrt{2n^2-8n+9})][(-1+\sqrt{2n^2-8n+9})]} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

dengan 1 baris yang nol, jadi untuk $\lambda_5 = (2n-3) - \sqrt{2n^2-8n+9}$ memiliki multiplisitas sebanyak 1.

Sehingga diperoleh:

$$
spec_Q(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3)+\sqrt{2n^2-8n+9} & 2(n-2) & 2(n-3) & n & (2n-3)-\sqrt{2n^2-8n+9} \\ 1 & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}.
$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Spektrum *Adjacency* $\Gamma_{D_{2n}}$

   a. n ganjil dan $n \geq 3$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$specc\,(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. n genap dan $n \geq 6$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$specc\,(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} + \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{3n-6}{2} & \frac{n-2}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$

   a. n ganjil dan $n \geq 3$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$spec_L\,(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & n & 0 \\ n & n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. n genap dan $n \geq 6$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$spec_L\,(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & 2(n-2) & n & 0 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Spektrum *Signless-Laplace* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n genap dan $n \geq 8$ $(n \in N)$ diperoleh:

$$spec_Q(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} (2n-3) + \sqrt{2n^2-8n+9} & 2(n-2) & 2(n-3) & n & (2n-3) - \sqrt{2n^2-8n+9} \\ 1 & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{2} & n-3 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian mengenai spektrum *Signless-Laplace* graf *non commuting* grup dihedral D_{2n} pada n ganjil. Penelitian selanjutnya juga dapat mencari teorema dari berbagai macam spektrum yang dapat diperoleh dari graf *non commuting* dari grup lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Azad, A., Hassanabadi, A.M. & Zarrin, M.. 2010. On The Clique Numbers of Non-Commuting Graphs of certain Groups. *Algebra Colloquium*, 611-620.

Abdollahi, A. Akbari, S. & Maimani, H.R.. 2006. Non-Commuting Graph of a Group. *Journal Of Algebra*, 468-492.

Abdussakir, Fahruddin, I. & Rahmawati, N.D.. 2009. *Menentukan Spectrum Suatu Graf Berbantuan Matlab*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Sari, FNK., & Shandya, D.. 2012. *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Intifaada, A., & Arifandi, M.Z.. 2013. *Spektrum Graf Commuting pada Grup*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Al-Maraghi, M. A. 1993. *Terjemahan Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra.

Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. & Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

asy-Syafrowi, M., Najmuddin, W. & Ikhsan, M.Y.. 2010. *Mana Ada Orang yang Miskin Karena Sedekah dan Silaturahim?*. Yogyakarta: Mutiara Media

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S.. 2010. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. Nomor 4 Volume 5 Halaman: 250-252.

Biggs, Norman. 1974. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Biyikoglu, T., Leydold, J., Stadler, P.F.. 2009. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. Berlin: Springer.

Brouwer, A.E. & Haemers, W.H.. 2010. *Spectra of Graphs Theory and Apllication.* New York: London Academic Press.

Chartand, G. & Lesniak, L.. 1996. *Graph and Digraph Third Edition*. California: Wadsworth Inc.

Cvetcovic, D.M., Doob, M. & Sachs, H.. 1980. *Spectra of Graphs Theory and Apllication*. New York: London Academic Press.

Dummit, D.S. & Foote, R.M.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Elvierayani, R.R.. 2013. Makalah Presentasi Seminar Internasional (the 4th International Converence Green Technology). Malang: Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. 9 Nopember 2013.

Elvierayani, R.R.. 2013. Makalah Presentasi Seminar Nasional (Menumbuhkan Tindak Pikir Kreatif pada Pembelajaran Matematika sebagai Implementasi Kurikulum 2013). Surakarta: Fakultas Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret. 20 Nopember 2013.

Jain, S.K. & Gunawardena, A.D.. 2004. *Linear Algebra an Interactive Approach*. Australia: Thomson Learning.

Larson, R. & Falvo, D.C.. 2009. *Elementary Linear Algebra Sixth Edition.* Boston: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Raisinghania, M. & Aggrawal, R.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

Yin, Shuhua. 2008. Investigation on Spectrum of the Adjacency Matrix and Laplacian Matrix of Graph G_l. *WSEAS Transaction on Systems*. Vol 7, No 4, Hal: 362-372.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

- **Perhitungan Nilai Eigen dan Vektor Eigen yang Besesuaian pada matriks adjacency graf *Non Commuting* grup dihedral D_6**

> *start*;

$$start$$

> *with*(*linalg*) :

> *d6* := *matrix*([[−λ, 0, 1, 1, 1], [0,−λ, 1, 1, 1], [1, 1,−λ, 1, 1], [1, 1, 1, −λ, 1], [1, 1, 1, 1,−λ]]);

$$d6 := \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

> *gaussjord*(*d6*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> *gausselim*(*d6*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6+2\lambda-\lambda^2 \end{bmatrix}$$

> *d60* := *matrix*([[0, 0, 1, 1, 1], [0, 0, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 0]]);

$$d60 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord*(*d60*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $d63 := matrix([[1, 0, 1, 1, 1], [0, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]]);$

$$d63 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> $gaussjord(d63);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $d61 := matrix([[-(1+\sqrt{7}), 0, 1, 1, 1], [0, -(1+\sqrt{7}), 1, 1, 1], [1, 1, -(1+\sqrt{7}), 1, 1], [1, 1, 1, -(1+\sqrt{7}), 1], [1, 1, 1, 1, -(1+\sqrt{7})]]);$

$$d61 := \begin{bmatrix} -1-\sqrt{7} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\sqrt{7} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\sqrt{7} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1-\sqrt{7} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1-\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

> $gaussjord(d61);$

```
Warning, unable to find a provably non-zero pivot
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{1+\sqrt{7}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{1+\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $d66 := matrix([[-(1-\sqrt{7}), 0, 1, 1, 1], [0, -(1-\sqrt{7}), 1, 1, 1], [1, 1, -(1-\sqrt{7}), 1, 1], [1, 1, 1, -(1-\sqrt{7}), 1], [1, 1, 1, 1, -(1-\sqrt{7})]]);$

$$d66 := \begin{bmatrix} -1+\sqrt{7} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1+\sqrt{7} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1+\sqrt{7} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1+\sqrt{7} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1+\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

> $gaussjord(d66);$

```
Warning, unable to find a provably non-zero pivot
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{-1+\sqrt{7}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{-1+\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Perhitungan Nilai Eigen dan Vektor Eigen yang Besesuaian pada matriks Laplace graf *Non Commuting* grup dihedral D_6**

> $start;$

$$start$$

> $with(linalg):$

> $d6 := matrix([[3-\lambda, 0, -1, -1, -1], [0, 3-\lambda, -1, -1, -1], [-1, -1, 4-\lambda, -1, -1], [-1, -1, -1, 4-\lambda, -1], [-1, -1, -1, -1, 4-\lambda]]);$

$$d6 := \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

> $gaussjord(d6);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $gausselim(d6);$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\lambda+\lambda^2 \end{bmatrix}$$

> $d60 := matrix([[3, 0,-1,-1,-1], [0, 3,-1,-1,-1], [-1,-1, 4,-1,-1], [-1,-1,-1, 4,-1], [-1,-1,-1,-1, 4]]);$

$$d60 := \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

> $gaussjord(d60);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $d63 := matrix([[0, 0,-1,-1,-1], [0, 0,-1,-1,-1], [-1,-1, 1,-1,-1], [-1,-1,-1, 1,-1], [-1,-1,-1,-1, 1]]);$

$$d63 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> $gaussjord(d63);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>

> $d65 := matrix([[-2, 0,-1,-1,-1], [0,-2,-1,-1,-1], [-1,-1,-1,-1,-1], [-1,-1,-1,-1,-1], [-1,-1,-1,-1,-1]]);$

$$d65 := \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*d65*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Perhitungan Nilai Eigen dan Vektor Eigen yang Besesuaian pada matriks *Signless-Laplace* graf *Non Commuting* grup dihedral D_8**

> *with*(*linalg*) :

> $d8 := matrix([[4-\lambda, 0, 1, 1, 1, 1], [0, 4-\lambda, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 4-\lambda, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 4-\lambda, 1, 0], [1, 1, 0, 1, 4-\lambda, 1], [1, 1, 1, 0, 1, 4-\lambda]]);$

$$d8 := \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*d8*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> *gausselim*(*d8*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3+\lambda & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4+\lambda & -\frac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} & \frac{-4+\lambda}{-3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} & -\frac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(-2+\lambda)(\lambda-8) \end{bmatrix}$$

> *d81* := *matrix*([[2, 0, 1, 1, 1, 1], [0, 2, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 2, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 2, 1, 0], [1, 1, 0, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 0, 1, 2]]);

$$d81 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*d81*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *d84* := *matrix*([[4 − 4, 0, 1, 1, 1, 1], [0, 4 − 4, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 4 − 4, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 4 − 4, 1, 0], [1, 1, 0, 1, 4 − 4, 1], [1, 1, 1, 0, 1, 4 − 4]]);

$$d84 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*d84*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *d80* := *matrix*([[4 − 8, 0, 1, 1, 1, 1], [0, 4 − 8, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 4 − 8, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 4 − 8, 1, 0], [1, 1, 0, 1, 4 − 8, 1], [1, 1, 1, 0, 1, 4 − 8]]);

$$d80 := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*d80*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Perhitungan Nilai Eigen dan Vektor Eigen yang Besesuaian pada matriks *Signless-Laplace* graf *Non Commuting* grup dihedral D_{12}**

> *start*;

start

> *with*(*linalg*) :

> *d12* := *matrix*([[6 − λ, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 6 − λ, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 6 − λ, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 6 − λ, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 8 − λ, 1, 1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 8 − λ, 1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 8 − λ, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − λ, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − λ, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − λ]]);

$$d12 := \begin{bmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

> *gaussjord* (*d12*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> *gausselim* (*d12*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 8-\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8+\lambda & -\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} & 0 & \frac{-8+\lambda}{-7+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} & -\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} & -\frac{48-14\lambda+\lambda^2}{-7+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+18\lambda-48 \end{bmatrix}$$

> $d61 := matrix([[6-(9+\sqrt{33}), 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 6-(9+\sqrt{33}), 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 6-(9+\sqrt{33}), 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 6-(9+\sqrt{33}), 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 8-(9+\sqrt{33}), 1, 1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 8-(9+\sqrt{33}), 1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 8-(9+\sqrt{33}), 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8-(9+\sqrt{33}), 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8-(9+\sqrt{33}), 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8-(9+\sqrt{33})]]);$

$$d61 := \begin{bmatrix} -3-\sqrt{33} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3-\sqrt{33} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3-\sqrt{33} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3-\sqrt{33} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1-\sqrt{33} \end{bmatrix}$$

> $gaussjord(d61);$

```
Warning, unable to find a provably non-zero pivot
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6(35+3\sqrt{33})}{(3+\sqrt{33})(2+\sqrt{33})(1+\sqrt{33})} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6(35+3\sqrt{33})}{(3+\sqrt{33})(2+\sqrt{33})(1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6(35+3\sqrt{33})}{(3+\sqrt{33})(2+\sqrt{33})(1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6(35+3\sqrt{33})}{(3+\sqrt{33})(2+\sqrt{33})(1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{35+3\sqrt{33}}{(2+\sqrt{33})(1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{35+3\sqrt{33}}{(2+\sqrt{33})(1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{35+3\sqrt{33}}{(2+\sqrt{33})(1+\sqrt{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $d2 := matrix([[6-(9-\sqrt{33}), 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 6-(9-\sqrt{33}), 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 6-(9-\sqrt{33}), 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 6-(9-\sqrt{33}), 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 8-(9-\sqrt{33}), 1, 1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 8-(9-\sqrt{33}), 1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 8-(9-\sqrt{33}), 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8-(9-\sqrt{33}), 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8-(9-\sqrt{33}), 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8-(9-\sqrt{33})]]);$

$$d2 := \begin{bmatrix} -3+\sqrt{33} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3+\sqrt{33} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3+\sqrt{33} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3+\sqrt{33} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1+\sqrt{33} \end{bmatrix}$$

> *gaussjord*(*d2*);

```
Warning, unable to find a provably non-zero pivot
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\left(-35+3\sqrt{33}\right)}{\left(-3+\sqrt{33}\right)\left(-2+\sqrt{33}\right)\left(-1+\sqrt{33}\right)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\left(-35+3\sqrt{33}\right)}{\left(-3+\sqrt{33}\right)\left(-2+\sqrt{33}\right)\left(-1+\sqrt{33}\right)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\left(-35+3\sqrt{33}\right)}{\left(-3+\sqrt{33}\right)\left(-2+\sqrt{33}\right)\left(-1+\sqrt{33}\right)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\left(-35+3\sqrt{33}\right)}{\left(-3+\sqrt{33}\right)\left(-2+\sqrt{33}\right)\left(-1+\sqrt{33}\right)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-35+3\sqrt{33}}{\left(-2+\sqrt{33}\right)\left(-1+\sqrt{33}\right)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-35+3\sqrt{33}}{\left(-2+\sqrt{33}\right)\left(-1+\sqrt{33}\right)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-35+3\sqrt{33}}{\left(-2+\sqrt{33}\right)\left(-1+\sqrt{33}\right)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *d68* := *matrix*([[6 − 8, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 6 − 8, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 6 − 8, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 6 − 8, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 8 − 8, 1, 1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 8 − 8, 1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 8 − 8, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − 8, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − 8, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − 8]]);

$$d68 := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord*(*d68*);

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

> *d66* := *matrix*([[6 − 6, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 6 − 6, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 6 − 6, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 6 − 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 8 − 6, 1, 1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 8 − 6, 1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 8 − 6, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − 6, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − 6, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 8 − 6]]);

$$
d66 := \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

> *gaussjord* (*d66*);

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rivatul Ridho Elvierayani
NIM : 10610055
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Spektrum *Adjacency*, *Laplace* dan *Signless-Laplace* Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n})
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	31 Oktober 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	27 Nopember 2013	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	7 Nopember 2013	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	3.
4.	11 Desember 2013	Revisi Kajian Keagamaan	4.
5.	18 Nopember 2013	Revisi Bab III	5.
6.	8 Januari 2014	ACC Bab I dan Bab II	6.
7.	8 Januari 2014	ACC Kajian Keagamaan	7.
8.	9 Januari 2014	ACC Bab III	8.
9.	10 Januari 2014	Konsultasi Bab IV	9.
10.	13 Januari 2014	ACC Bab IV	10.
11.	15 Januari 2014	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	11.
12.	15 Januari 2014	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 15 Januari 2014
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001