

**PEMILIHAN MODEL REGRESI *B-SPLINE* TERBAIK
UNTUK ESTIMASI RADIASI UV MATAHARI
BERDASARKAN ORDE DAN TITIK KNOT OPTIMAL**

SKRIPSI

Oleh:
KHUROTUL LISNAINI
NIM. 10610060



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**PEMILIHAN MODEL REGRESI *B-SPLINE* TERBAIK
UNTUK ESTIMASI RADIASI UV MATAHARI
BERDASARKAN ORDE DAN TITIK KNOT OPTIMAL**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

**KHUROTUL LISNAINI
NIM. 10610060**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**PEMILIHAN MODEL REGRESI *B-SPLINE* TERBAIK
UNTUK ESTIMASI RADIASI UV MATAHARI
BERDASARKAN ORDE DAN TITIK KNOT OPTIMAL**

SKRIPSI

**Oleh:
KHUROTUL LISNAINI
NIM. 10610060**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 05 September 2014

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Ir. Nanang Widodo, M.Si
NIP. 19630210 198912 1 002

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PEMILIHAN MODEL REGRESI *B-SPLINE* TERBAIK
UNTUK ESTIMASI RADIASI UV MATAHARI
BERDASARKAN ORDE DAN TITIK KNOT OPTIMAL**

SKRIPSI

**Oleh:
KHUROTUL LISNAINI
NIM. 10610060**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 11 September 2014

Penguji Utama	: <u>Dr. Sri Harini, M.Si</u> NIP. 19731014 200112 2 002	_____
Ketua Penguji	: <u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u> NIP. 19571005 198203 1 006	_____
Sekretaris Penguji	: <u>Ir. Nanang Widodo, M.Si</u> NIP. 19630210 198912 1 002	_____
Anggota Penguji	: <u>Abdul Aziz, M.Si</u> NIP. 19760318 200604 1 002	_____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Khurotul Lisnaini

NIM : 10610060

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Pemilihan Model Regresi *B-Spline* Terbaik untuk Estimasi Radiasi
UV Matahari Berdasarkan Orde dan Titik Knot Optimal

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 September 2014

Yang membuat Pernyataan,

Khurotul Lisnaini
NIM. 10610060

MOTO

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَئِكَ
كَانَ عَنْهُ مَسْئُولًا ﴿٣٦﴾

Artinya : “Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggung jawaban (Qs. Al-Israa’:36).



PERSEMBAHAN

**بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ**

Dengan iringan do'a dan mengucapkan syukur yang tak pernah terhenti kepada Allah Swt

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ibunda tercinta Asniful Uliyah,

Ayahanda tersayang Jupri

Sebagai motivator terbesar dalam hidup penulis,

yang tak pernah lelah menyayangi dan mengasihi serta tak pernah

berhenti mendoakan penulis,

Kakak tercinta Muhammad Basori dan Uswatun Khasanah yang selalu

memberikan dukungan

Seluruh keluarga besar yang tak pernah berhenti memberikan

semangat kepada penulis

Karya ini penulis persembahkan untuk kalian semua yang sudah tulus

ikhlas meberikan kasih sayang kepada penulis

KATA PENGANTAR

Syukur *alhamdulillah* ke hadirat Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah, dan inayah-Nya sehingga skripsi dengan judul “ Pemilihan Model Regresi *B-Spline* Terbaik untuk Estimasi Radiasi UV Matahari Berdasarkan Orde dan Titik Knot Optimal ” ini dapat diselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam tetap tucurahkan kepada Nabi Muhammad Saw, yang telah membimbing manusia ke jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun doa. Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. Bambang Suhandi, selaku kepala BPD LAPAN Watukosek yang telah memberikan kesempatan untuk meneliti di instansi, dan menyediakan segala fasilitas serta memberikan bimbingan selama penelitian.
5. Ir. Nanang Widodo, M.Si, selaku dosen pembimbing matematika yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi serta yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan.

6. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Bapak dan Ibu dosen serta staf Jurusan Matematika maupun Fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.
8. Bapak Jupri, ibu Asniful Uliyah dan kakak Muhammad Basori serta segenap keluarga besar yang tidak pernah berhenti memberikan doa, kasih sayang, inspirasi, dan motivasi secara moril maupun spiritual.
9. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2010, Istiqomah, Silvi Kamaliyah, Edi Suprianto, dan Abdul Hapid, tak lupa teman satu bimbingan Atikah Abdillah dan Anisa Ika Indrayanti. Mohammad Arif sebagai teman Jurusan Matematika angkatan 2011. Terima kasih atas semua pengalaman dan motivasi yang diberikan dalam penyelesaian penelitian ini.
10. Feri Novianto sebagai teman penulis yang memberikan banyak motivasi, bantuan, serta doanya kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Hanya Allah Swt yang dapat membalas semua kebaikan kalian. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang statistika. Amin.

Malang, September 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv شحہلا
صخلم	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	7
1.3 Tujuan Penelitian.....	7
1.4 Batasan Masalah.....	8
1.5 Manfaat Penelitian.....	8
1.6 Metode Penelitian.....	9
1.7 Sistematika Penulisan.....	11
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Estimasi	13
2.1.1 Pengertian Estimasi	13
2.1.2 Estimasi Parameter.....	13
2.1.3 Metode <i>Ordinary Least Square</i>	14
2.2 Pendiferensialan Matriks.....	15
2.3 Regresi Nonparametrik.....	16
2.4 Regresi <i>B-Spline</i>	17
2.5 Pemilihan Model Regresi <i>B-Spline</i> Terbaik.....	19
2.6 Radiasi UV Matahari.....	20
2.7 Lapisan Ozon.....	22
2.8 Kajian Keagamaan	24
2.8.1 Kajian Estimasi dalam al-Qur'an dan al-Hadist	25
2.8.2 Kajian Atmosfer (Lapisan Pelindung Bumi) dalam al-Qur'an.....	28
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Estimasi Regresi Nonparametrik.	31
3.1.1 Fungsi <i>B-Spline</i> Linier ($m=2$).....	32
3.1.2 Fungsi <i>B-Spline</i> Kuadrat ($m=3$).....	34
3.2 Menentukan Model Regresi Nonparametrik Terbaik dengan GCV	40

3.3 Deskripsi Data	40
3.4 Algoritma Program.....	43
3.5 Output Program	51
3.5.1 Data Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon Maret 2013	51
3.5.2 Data Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon April 2013	57
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	63
4.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	



DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 GCV dan MSE Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon Maret 2013	52
Tabel 3.2 GCV dan MSE Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon April 2013	57



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Gambar Ilustrasi Sinar UVA, UVB, dan UCV.....	22
Gambar 3.1 Plot Data Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon Maret 2013....	41
Gambar 3.2 Plot Data Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon April 2013.....	43
Gambar 3.3 Skema Basis $m=2$ dan $K=5$	46
Gambar 3.4 (a) <i>B-Spline</i> Linier 3 Knot 3, 10, 15.....	53
Gambar 3.4 (b) <i>B-Spline</i> Kuadratik 3 Knot 3, 6, 9.....	53
Gambar 3.5 Plot <i>B-Spline</i> Linier 4 Knot 4, 9, 13, 17.....	54
Gambar 3.6 Plot <i>B-Spline</i> Linier 5 Knot 5, 6, 9, 16, 20.....	54
Gambar 3.7 Plot <i>B-Spline</i> Kuadratik 5 Knot 5, 6, 9, 22, 23.....	55
Gambar 3.8 (a) Plot <i>B-Spline</i> Linier 3 Knot 5, 6, 9.....	59
Gambar 3.8 (b) Plot <i>B-Spline</i> Kuadratik 3 Knot 3, 5, 7.....	59
Gambar 3.9 Plot <i>B-Spline</i> Linier 4 Knot 3, 6, 9, 12.....	59
Gambar 3.10 Plot <i>B-Spline</i> Linier 5 Knot 3, 6, 9, 17, 22.....	60
Gambar 3.11 Plot <i>B-Spline</i> Linier 5 Knot 6, 12, 18, 24, 30.....	60
Gambar 3.12 Plot <i>B-Spline</i> Kuadratik 5 Knot 3, 6, 9, 17, 22.....	61

ABSTRAK

Lisnaini, Khurotul. 2014. **Pemilihan Model Regresi *B-Spline* Terbaik untuk Estimasi Radiasi UV Matahari Berdasarkan Orde dan Titik Knot Optimal**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Ir. Nanang Widodo, M.Si
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata kunci: Pendekatan nonparametrik, regresi *B-Spline*, titik-titik knot, GCV.

Analisis regresi merupakan salah satu bidang statistika yang memiliki peran sangat penting untuk menyelidiki pola hubungan fungsional antara variabel respon dengan satu atau beberapa variabel prediktor. Dalam menjelaskan kedua jenis variabel tersebut digunakan kurva regresi. Pendekatan yang digunakan dalam kurva regresi ada tiga macam, yaitu parametrik, nonparametrik, dan semiparametrik. Regresi Nonparametrik digunakan jika terdapat informasi masa lalu mengenai pola data. Sedangkan regresi nonparametrik tidak memberikan asumsi terhadap bentuk kurva regresi sehingga memiliki fleksibilitas yang tinggi untuk mengestimasi kurva regresi. Dari kedua pendekatan tersebut memberikan pendekatan regresi semiparametrik. Dalam regresi nonparametrik ada banyak macam-macamnya, salah satunya *spline*. Ada dua basis dalam regresi *spline*, yaitu *truncated power* basis dan *B-Spline* basis. Kelebihan *B-Spline* basis yaitu dapat mengatasi orde *spline* yang tinggi, knot yang banyak, dan knot yang terlalu dekat. Konsentrasi Ozon sangat berperan dalam penghambatan radiasi UV Matahari yang sampai pada permukaan bumi. Adanya perubahan konsentrasi ozon pada setiap menitnya, akan berdampak pada berkurangnya intensitas radiasi UV Matahari. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bentuk model regresi nonparametrik dengan pendekatan *B-Spline* dan memilih model terbaik berdasarkan kriteria GCV pada orde dan titik knot optimal. Berdasarkan analisis, didapatkan model regresi nonparametrik dengan pendekatan *B-spline* untuk mendekati data, yaitu:

$$\hat{f}(x) = B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y$$

Fungsi estimasi untuk data Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon diperoleh model terbaik dengan jumlah knot 5. Dari perbandingan nilai *Chi-square* hitung dan *Chi-square* tabel, model linier dan kuadratik adalah model yang sama-sama baik. Jika dilihat dari kriteria GCV dan ketepatan kuva regresi dalam mendekati data. Pada data bulan Maret 2013, model terbaik adalah model linier dengan titik-titik knot optimal terletak pada posisi $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 16, u_5 = 20$ dan nilai GCV sebesar 6,6514. Sedangkan data bulan April 2013, model terbaik adalah model kuadratik dengan titik-titik knot optimal terletak pada posisi $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 17, u_5 = 22$ dengan nilai GCV sebesar 5,8585.

ABSTRACT

Lisnaini, Khurotul. 2014. **Election the best *B-Spline* Regression Model for Solar UV Radiation Estimation Based on Optimal Order and Point Knot**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Ir. Nanang Widodo, M.Si
(II) Abdul Aziz, M.Si

Keyword: Nonparametric approach, *B-Spline* regression, knots point, GCV

Regression analysis is one of the atopic of statistics which have a very important role to investigate the patterns of functional relationship between the response variable with one or several predictor variables. In explaining the two types of variables, regression curve is used. The approaches used in the regression are three kinds, namely parametric, nonparametric, and semiparametric. Nonparametric Regression is used when there is information about the data patterns of the past. While the nonparametric regression does not provide assumptions on the form of the regression curve that has high flexibility to estimate the regression curve. Both approaches provide semiparametric regression approach. In nonparametric regression there are many kinds, one of them is *spline*. There are two bases in spline regression, namely truncated power bases and *B-Spline* base. The advantages of *B-Spline* base is that we can cope with high-order spline, many knots, and the knots were too close. Ozone concentration very instrumental in the inhibition of solar UV radiation that reaches the surface of the earth. The change of the concentration of ozone in every minute, will reduce the intensity of solar UV radiation. This study aims to determine the form of nonparametric regression models with *B-Spline* approach and choose the best model based on the criteria of GCV on the order and point of optimal knots. Based on the analysis, nonparametric regression models obtained using *B-spline* approach to approximate the data, is:

$$\hat{f}(x) = B(\lambda) \left(B(\lambda)^T B(\lambda) \right)^{-1} B(\lambda)^T y$$

From the estimation function for solar UV radiation data vs Ozone concentrations obtained the number of knots 5. From the comparison of the value of calculate *Chi-square* and tabel *Chi-square*, linear and quadratic models are models that are both good. When viewed from the GCV and accuracy criteria curve regression in approaching the data. In the data in March 2013, best model is a linear model with optimal knots dots located at position $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 16, u_5 = 20$ with GCV value 6.6514. While the data in April 2013, the knots points optimal lie in a position $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 17, u_5 = 22$ on the GCV value 5.8585.

ملخص البحث

ليثيني. خراتول. ٢٠١٤. الاختيار أفضل نموذج الانحدار $B-spline$ للتقدير الإشعاع الاشعاع فوق البنفسجية الشمسية التي تستند الترتيب ونقطة العقدة الأمثل. أطروحة. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكو مية مولانا مالك إبراهيم مالانج .

المشرف: غير .نانا ويدودو، الماجستير ،وعبد العزيز، الماجستير

الكلمات الأساسية: نذج غير معلمية، الانحدار ، عقدة نقطة، GCV .

تحليل الانحدار هو واحد من مجالات الإحصاءات التي لها دور مهم جدا للتحقيق في أنماط العلاقة الوظيفية بين متغير الاستجابة مع واحد أو عدة المتنبئة المتغيرات. في تفسير هذه النوعين من المتغيرات تستخدم منحى الانحدار . النهج المتبع في منحى الانحدار هناك ثلاثة أنواع، وهي معلمية، غير معلمية وشبه معلمية .يستخدم الانحدار غير معلمية عندما يكون هناك معلومات عن أنماط البيانات من الماضي .في حين أن الانحدار غير معلمية لا توفر الافتراضات على شكل منحى الانحدار الذي لديه مرونة عالية لتقدير منحى الانحدار .من كلا النهجين توفير نذج الانحدار شبه معلمية .في الانحدار غير معلمية هناك العديد من أنواع، إحدها هي $spline$ هناك قاعدتين في الانحدار $spline$ ، أي $truncated power$ أساسية و $B-spline$. ميزة $B-spline$ الأساس التي يمكن التعامل مع ذات الترتيب العالي سين، كانت عقدة عديدة، وكانت عقدة قريبة جدا .تركيز الأوزون يلعب دورا في تثبيط الأشعة فوق البنفسجية الشمسية التي تصل إلى سطح الأرض .تغيير تركيز الأوزون في كل دقيقة، سوف تقلل من شدة لأشعة فوق البنفسجية الشمسية .حتى كانت في هذه الدراسة تهدف إلى تحديد شكل نماذج الانحدار غير معلمية مع النهج $B-spline$ واختيار أفضل نموذج على أساس المعايير GCV في رتبة ونقطة عقدة المثلى .استنادا إلى تحليل، نماذج الانحدار غير معلمية تم الحصول عليها مع نذج $B-Spline$ لتقريب البيانات، وهي :

$$\hat{f}(x) = B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y$$

يتم الحصول على وظيفة التقدير للبيانات الشمسية تركيز الأوزون مقابل النموذج الأفضل من عدد من عقدة ٥. من مقارنة عدد $Chi-square$ و $Chi-square$ الجداول ، نماذج الخطية والتربيعية كلاهما موثوق .عندما ينظر إليها من المعيار GCV والدقة في منحى الانحدار يقترب البيانات .في بيانات مارس ٢٠١٣، أفضل نموذج هو نموذج خطي مع عقدة المثلى النقاط التي تقع في الموقف $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 16, u_5 = 20$ وقيمة GCV في 6.6514. في حين أن البيانات أبريل عام ٢٠١٣، أفضل نموذج هو نموذج الدرجة الثانية مع عقدة المثلى نقطة تقع

في مواقع $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 17, u_5 = 22$ ذات قيمة GCV من 5.8585.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi merupakan salah satu bidang statistika yang memiliki peran sangat penting untuk menyelidiki model pola hubungan fungsional antara variabel respon dengan satu atau beberapa variabel prediktor. Selain itu, analisis regresi juga berperan untuk peramalan (*forecasting*). Hal terpenting yang harus diperhatikan dalam memodelkan satu atau lebih variabel dalam regresi yaitu apakah variabel-variabel tersebut secara rasional berkorelasi atau tidak (Budiantara, 2009b). Sehingga jika dalam pemilihan variabel prediktor yang mempengaruhi variabel respon diperhatikan, maka akan didapatkan hasil analisis yang rasional.

Menurut Wahba dalam Budiantara (2009b), Analisis regresi memiliki tiga jenis model pendekatan, yaitu pendekatan regresi parametrik, regresi nonparametrik, dan regresi semiparametrik. Dalam pendekatan regresi parametrik diperlukan informasi masa lalu yang detail mengenai pola data agar diperoleh pemodelan yang baik. Sedangkan dalam pendekatan regresi nonparametrik, tidak memberikan asumsi terhadap bentuk kurva regresi sehingga memiliki fleksibilitas yang tinggi untuk mengestimasi kurva regresi karena pada regresi nonparametrik ini, data akan mencari sendiri bentuk estimasi dari kurva regresinya. Dari kedua pendekatan tersebut memberikan pendekatan regresi semiparametrik (Budiantara dan Ratna, 2010). Apabila bagian parametriknya dapat dipolakan linier, maka regresi semiparametrik ini disebut sebagai regresi linier parsial. Oleh karena itu, pada regresi semiparametrik estimasi untuk kurva regresi diperoleh secara

ekuivalen dengan estimasi fungsi dan estimasi parameter dalam model (Budiantara, 2006a).

Beberapa ilmuwan menyarankan penggunaan regresi nonparametrik sebagai pendekatan untuk model data, agar mempunyai fleksibilitas yang baik. Ada beberapa macam regresi nonparametrik, diantaranya; histogram, *kernel*, *spline*, polinomial lokal, deret orthogonal, deret *Fourier*, k-NN, *neural network*, *wavelets*, MARS, dan lainnya. Pada estimator *spline* ada beberapa macam pendekatan antara lain *spline original*, *spline type M*, *spline relaxed*, dan *spline terbobot* (Budiantara, dkk., 2006). *Spline* adalah salah satu jenis *piecewise polynomial*, yaitu polinomial yang memiliki sifat tersegmen. Sifat tersegmen inilah yang memberikan fleksibilitas lebih dari polinomial biasa, sehingga memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara efektif terhadap karakteristik lokal suatu fungsi atau data. Pendekatan *spline* memiliki suatu basis fungsi yaitu *truncated power basis* dan *B-spline basis* (Eubank dalam Budiantara(2009a)). *Truncated power basis* adalah model basis *spline* yang memiliki persamaan normal. Sedangkan *B-spline basis* adalah model basis *spline* yang dapat mengatasi order *spline* yang tinggi, knot yang banyak, dan knot yang terlalu dekat yang dapat mengakibatkan pembentukan matrik dalam perhitungan yang hampir singular, sehingga *B-spline basis* adalah solusi untuk mengatasi permasalahan tersebut.

Regresi *spline* memungkinkan untuk berbagai macam orde sehingga dapat dibentuk regresi *spline* linier, kuadrat, kubik, maupun orde m . *Spline* memiliki kelebihan dalam mengatasi pola data yang dihasilkan relatif mulus (Hardle dalam Agustini (2011)). Bentuk estimator *spline* sangat dipengaruhi oleh nilai parameter penghalus. Oleh karena itu parameter penghalus yang optimal sangat diperlukan

untuk memperoleh estimator spline yang sesuai dengan data. Pada pemilihan parameter penghalus, jika nilai parameter penghalus sangat besar akan menghasilkan bentuk kurva regresi yang sangat halus. Namun jika nilai parameter penghalus sangat kecil akan menghasilkan bentuk kurva regresi yang sangat kasar. Sehingga pemilihan parameter penghalus yang optimal sangat diperlukan untuk memperoleh bentuk kurva regresi yang sesuai mengikuti pola sebaran data. Jika mengetahui nilai parameter penghalus yang optimal yaitu dengan melihat nilai *GCV* yang minimum.

Memilih model regresi terbaik sama halnya dengan memilih jalan yang terbaik, dijelaskan sebagaimana dalam al-Qur'an surat al-Baqarah ayat 267-268 yang berbunyi:

يَتَأْتِيهَا الَّذِينَ آمَنُوا وَآذَقُوا مِنْ طَيِّبَاتِ مَا كَسَبْتُمْ وَمِمَّا
 أَخْرَجْنَا لَكُمْ مِنَ الْأَرْضِ وَلَا تَيَمَّمُوا الْخَبِيثَ مِنْهُ تُنْفِقُونَ وَلَسْتُمْ
 بِءَاخِذِيهِ إِلَّا أَنْ تُغْمِضُوا فِيهِ وَاعْلَمُوا أَنَّ اللَّهَ عَنِّي حَمِيدٌ ﴿٢٦٧﴾

Artinya:

“Hai orang-orang yang beriman, nafkahkanlah (di Jalan Allah) sebagian dari hasil usahamu yang baik-baik dan sebagian dari apa yang Kami keluarkan dari bumi untuk kamu. Dan janganlah kamu memilih yang buruk-buruk lalu kamu menafkahkan dari padanya, padahal kamu sendiri tidak mau mengambilnya melainkan dengan memicingkan mata terhadapnya. Dan ketahuilah, bahwa Allah Maha Kaya lagi Maha Terpuji. Setan menjanjikan (menakut-nakuti) kamu dengan kemiskinan dan menyuruh kamu berbuat kejahatan (kikir); sedang Allah menjanjikan untukmu ampunan dari pada-Nya dan karunia, dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui”. (Qs. al-Baqarah: 267-268).

Allah *ta'ala* menganjurkan kepada hamba-hamba-Nya untuk menginfakkan sebagian apa yang mereka dapatkan dalam berniaga, dan sebagian dari apa yang mereka panen dari tanaman dari biji-bijian maupun buah-buahan, hal ini mencakup zakat uang maupun seluruh perdagangan yang dipersiapkan untuk dijual belikan,

juga hasil pertanian dari biji-bijian dan buah-buahan. Termasuk dalam keumuman ayat ini, infak yang wajib maupun yang sunnah. Allah Swt memerintahkan untuk memilih yang baik dari itu semua dan tidak memilih yang buruk, yaitu yang jelek lagi hina mereka sedekahkan kepada Allah, seandainya mereka memberikan barang yang seperti itu kepada orang-orang yang berhak mereka berikan, pastilah merekapun tidak akan meridhainya, mereka tidak akan menerimanya kecuali dengan kedongkolan dan memi-cingkan mata. Maka yang seharusnya adalah mengeluarkan yang tengah-tengah dari semua itu, dan yang lebih sempurna adalah mengeluarkan yang paling baik. Sedang yang dilarang adalah mengeluarkan yang jelek, karena yang ini tidaklah memenuhi infak yang wajib dan tidak akan memperoleh pahala yang sempurna dalam infak yang sunnah.

Dalam kalimat “(وَاعْلَمُوا أَنَّ اللَّهَ غَنِيٌّ حَمِيدٌ)” yang artinya, “*Dan ketahuilah, bahwa Allah Mahakaya lagi Maha Terpuji*”. Allah Swt adalah Maha Kaya atas seluruh makhluk, Allah *ta'ala* Maha Kaya dari infak orang-orang yang berinfaq, dan Allah Swt Maha Kaya atas ketaatan orang-orang yang taat. Allah memerintahkan hal itu kepada mereka dan menganjurkan mereka untuk itu demi kemaslahatan mereka, dan semata-mata karena karunia dan kemuliaan-Nya atas mereka. Di samping kesempurnaan kekayaan-Nya dan luasnya pemberian-Nya Diapun Maha Terpuji dalam segala perkara yang disyariatkan-Nya untuk hamba-hamba-Nya dari hukum-hukum yang menyampaikan mereka kepada negeri keselamatan. Dia Terpuji dalam perbuatan-perbuatan-Nya yang tidak akan keluar dari koridor karunia, keadilan dan hikmah-Nya. Terpuji sifat-sifat-Nya, karena sifat-sifat Allah semuanya baik dan sempurna, yang tidak ada seorang pun dari hamba-hamba-Nya yang mampu sampai pada eksistensinya dan tidak akan


mengerti seperti apa persisnya sifat-sifat tersebut. Ketika Allah menganjurkan mereka untuk berinfak yang berguna, Allah juga melarang mereka dari menahan harta mereka yang dapat merugikan, dan Allah menjelaskan kepada mereka bahwa mereka itu di antara dua seruan Yang Maha Penyayang, Yang mengajak kepada kebaikan, menjanjikan kepadanya kebaikan, karunia dan pahala yang segera maupun yang tertunda serta mengganti apa yang telah mereka infakkan, dan seruan dari setan yang mengajak mereka untuk menahan harta dan menakut-nakuti mereka bila mereka menginfakkan harta mereka pastilah mereka akan menjadi miskin.

Barangsiapa yang memenuhi seruan Ar-Rahman lalu ia menginfakkan sebagian dari apa yang Allah rizkikan kepadanya, maka bergembiralah dengan ampunan dosa dan mendapatkan apa yang dicarinya. Barangsiapa yang mengikuti penyeru setan maka sesungguhnya setan hanya mengajak kelompoknya agar menjadi penghuni-penghuni neraka. Karena itu, seorang hamba harus memilih di antara kedua perkara itu yang lebih pantas dan cocok untuknya.

Dari tafsir ayat tersebut, dalam memilih model regresi *spline* yang terbaik sangat dianjurkan karena ayat di atas menjelaskan kepada seluruh manusia untuk memilih segala sesuatu yang baik-baik dan meninggalkan segala sesuatu yang buruk-buruk. Diantara model-model regresi *spline* yang akan diperoleh, tentu saja akan ada model regresi *spline* yang terbaik.

Ada tiga kriteria yang harus diperhatikan dalam membentuk model regresi *spline* yaitu orde untuk model, banyaknya knot, dan lokasi penempatan knot. Orde untuk model dapat ditentukan berdasarkan pola umum yang terjadi pada data, sedangkan banyaknya knot dan lokasi knot ditentukan berdasarkan perubahan pola di daerah tertentu pada kurva.

Konsentrasi ozon memberikan peranan penting terhadap intensitas radiasi UV yang akan sampai pada permukaan bumi. Adanya perbedaan konsentrasi ozon yang berubah-ubah pada setiap menitnya, mengakibatkan intensitas radiasi UV Matahari terhadap bumi juga mengalami perubahan. Sehingga hubungan antara konsentrasi ozon dan intensitas radiasi UV Matahari sangat penting untuk dicari hubungannya. Perubahan yang terjadi antara intensitas radiasi UV Matahari terhadap konsentrasi ozon tidak bisa diprediksi pola sebaran datanya. Maka dari itu dibutuhkan suatu alat yang tepat untuk mengestimasi data agar diperoleh suatu hasil estimasi yang sesuai dengan kenyataan yang ada. Kajian dalam al-Qur'an mengenai estimasi terdapat dalam surat ash-Shaffaat ayat 147 yang berbunyi:


 وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ

Artinya:

“Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih”. (Qs. ash-Shaffaat: 147).

Dalam Qs. ash-Shaffaat ayat 147 dijelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus. Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah Swt maha mengetahui yang gaib dan yang nyata? Bukankah Allah Swt maha mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah umat nabi Yunus? Jawaban terhadap pertanyaan tersebut adalah “inilah contoh estimasi (taksiran)” (Abdussakir, 2007).

Karena hubungan antara intensitas radiasi UV Matahari dengan konsentrasi ozon tidak memiliki informasi masa lalu mengenai pola hubungannya, sehingga regresi nonparametrik sangat cocok digunakan sebagai alat untuk mengestimasi

radiasi UV matahari. Karena data yang digunakan mengalami kenaikan dan penurunan yang tidak menentu, maka penulis memilih basis *B-Spline*. Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis berkeinginan untuk melakukan penelitian dengan mengambil judul “ *Pemilihan Model Regresi B-Spline Terbaik untuk Estimasi Radiasi UV Matahari Berdasarkan Orde dan Titik Knot Optimal* ”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana bentuk model regresi nonparametrik dengan menggunakan pendekatan *B-Spline* ?
2. Bagaimana memilih model terbaik untuk estimasi radiasi UV Matahari akibat perubahan konsentrasi ozon berdasarkan kriteria GCV pada orde dan titik knot optimal ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk:

1. Menentukan bentuk model regresi nonparametrik dengan menggunakan pendekatan *B-Spline*.
2. Menentukan pemilihan model terbaik untuk estimasi radiasi UV Matahari akibat perubahan konsentrasi ozon berdasarkan kriteria GCV pada orde dan titik knot optimal.

1.4 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi kerancuan terhadap maksud dan isi dari penelitian ini, maka perlu adanya pembatasan masalah sebagai berikut:

1. Untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik hubungan antara konsentrasi ozon terhadap intensitas radiasi UV Matahari menggunakan metode pendekatan fungsi regresi *B-Spline basis*.
2. Data yang digunakan adalah data intensitas radiasi UV Matahari dan data konsentrasi ozon selama tahun 2013 hasil amatan BPD LAPAN Watukosek.
3. Tabulasi data konsentrasi ozon yang akan digunakan disesuaikan dengan data intensitas radiasi UV Matahari yang perekamannya dilakukan tiap 15 menit.
4. Sampel data intensitas radiasi UV Matahari dan konsentrasi ozon dibuat rata-rata harian pada setiap bulannya.
5. Pemilihan model regresi *B-Spline* terbaik dengan kriteria nilai GCV minimum berdasarkan orde dan knot optimal.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat memberi manfaat:

1. Bagi peneliti
 - a. Pada penelitian ini, penulis semakin mengerti dengan perkembangan ilmu statistika khususnya regresi nonparametrik dan macam-macam pendekatannya salah satunya *B-Spline basis* yang digunakan untuk mengestimasi data radiasi UV Matahari akibat perubahan konsentrasi ozon.

- b. Dapat mengaplikasikan ilmu yang diperoleh dalam mata kuliah ekonometri yaitu metode kuadrat terkecil untuk mencari estimator dari suatu persamaan regresi.

2. Bagi Pembaca

- a. Penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan rujukan dan pengembangan pembelajaran statistika khususnya model regresi nonparametrik.
- b. Sebagai contoh aplikasi model regresi nonparametrik dengan pendekatan *B-Spline* basis untuk estimasi radiasi UV Matahari akibat perubahan konsentrasi ozon.

3. Bagi Instansi

- a. Penelitian ini dapat dijadikan sebagai referensi pengembangan keilmuan di LAPAN.
- b. Model regresi nonparametrik yang diperoleh dapat digunakan untuk memberikan alternatif metode statistik baru dalam menjelaskan intensitas radiasi UV Matahari yang dipengaruhi oleh konsentrasi ozon.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yaitu dengan mempelajari beberapa literatur yang berupa buku-buku statistik, jurnal, prosiding, dan bahan literatur lainnya yang berhubungan dengan regresi nonparametrik. Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Membangun model regresi nonparametrik. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

- a. Mendefinisikan bentuk persamaan regresi nonparametrik $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$
- b. Mengganti fungsi $f(x_i)$ dengan fungsi basis *B-Spline*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m+K} \alpha_j B_{j-m,m}(x)$$

- c. Menguraikan fungsi basis *B-Spline* dengan menjalankan indeks j mulai dari 1 sampai $m+K$
 - d. Mengubah bentuk $f(x)$ dalam bentuk matriks, $Y = B(\lambda)\alpha + \varepsilon$
 - e. Untuk mengestimasi parameter α menggunakan metode kuadrat terkecil
 - f. Untuk memperoleh model regresi nonparametrik dengan pendekatan *B-Spline* yaitu dengan mensubstitusikan hasil estimasi parameter α dalam fungsi regresi nonparametrik
2. Aplikasi regresi *B-Spline* untuk data radiasi UV Matahari, langkah-langkahnya sebagai berikut:
 - a. Tabulasi data intensitas radiasi UV Matahari dan konsentrasi ozon hasil amatan BPD LAPAN Watukosek.
 - b. Menggambarkan bentuk sebaran data dengan minitab 14.
 - c. Mengestimasi kurva regresi dengan basis *B-spline* linier dan *B-spline* kuadratik.
 - d. Dalam simulasi regresi *spline*, penulis menggunakan program MATLAB.
 - e. Menentukan banyaknya knot dan penempatan knot dari masing-masing basis disesuaikan dengan kondisi fisis sebaran dari kedua jenis data.
 - f. Menghitung nilai GCV.

- g. Memilih model regresi spline terbaik dengan mempertimbangkan nilai GCV yang minimum berdasarkan orde dan knot optimal, serta ketepatan kurva dalam mendekati data.
- h. Interpretasi model terbaik.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini, akan diuraikan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan gambaran secara umum dari teori yang mendasari pembahasan dari permasalahan yang diambil penulis untuk dilakukan penelitian. Dalam permasalahan yang diangkat penulis mengenai “Pemilihan Model Regresi *B-Spline* Terbaik untuk Estimasi Radiasi UV Matahari Berdasarkan Orde dan Titik Knot Optimal ” memerlukan beberapa teori untuk mendukung penulis dalam melakukan penelitiannya tersebut, diantaranya: estimasi parameter, metode *Ordinary Least Square*, pendiferensialan matriks, persamaan regresi nonparametrik, pendekatan *B-Spline* basis, kriteria model terbaik dengan GCV, radiasi UV matahari, lapisan ozon.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penulisan yang menjabarkan tentang gambaran objek penelitian dan hasil dari penelitian yaitu Pemilihan Model Regresi *B-Spline* Terbaik untuk Estimasi Radiasi UV Matahari Berdasarkan Orde dan Titik Knot Optimal.

Bab IV Penutup

Pada bagian ini membahas tentang kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dibahas dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Estimasi

2.1.1 Pengertian Estimasi

Estimasi adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah estimate dari suatu parameter. Data yang digunakan untuk melakukan estimasi parameter populasi adalah statistik sampel sebagai estimator. Parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi. Suatu karakteristik dari populasi disebut parameter, sedangkan karakteristik dari suatu sampel disebut dengan statistik (Harini dan Turmudi, 2008).

Sumber lain mengatakan bahwa estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi dan sampel, dalam hal ini sampel peubah acak yang diambil dari populasi. Jadi dengan estimasi, keadaan parameter populasi akan diketahui. Dalam statistik, parameter diberi lambang θ dan estimator nya diberi lambang $\hat{\theta}$.

2.1.2 Estimasi Parameter

Suatu nilai θ bagi suatu statistik $\hat{\theta}$. disebut suatu nilai estimasi bagi parameter populasi θ . Statistik yang digunakan untuk memperoleh sebuah nilai estimasi disebut estimator atau fungsi keputusan. Sifat yang seharusnya dimiliki oleh suatu keputusan yang baik adalah menghasilkan nilai estimasi parameter yang bersifat tak bias. Jika terdapat dua atau lebih nilai estimasi bagi parameter yang

sama, maka estimasi paling efisien adalah estimasi yang memiliki ragam terkecil (Walpole dalam Miftahul (2014)).

2.1.3 Metode *Ordinary Least Square* (OLS)

Metode *Ordinary Least Square* merupakan salah satu metode bagian dari kuadrat terkecil dan sering hanya disebut kuadrat terkecil saja. Metode ini sering digunakan oleh para ilmuan atau peneliti dalam proses penghitungan suatu persamaan regresi sederhana. Misal diberikan persamaan regresi nonparametrik

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

Jika persamaan regresi nonparametrik diubah dalam bentuk matriks maka akan menjadi:

$$Y = f(X) + \varepsilon \quad (2.2)$$

Jika $f(X)$ adalah persamaan regresi *B-Spline*. Maka $f(X)$ akan berubah menjadi $Y = B(\lambda)\alpha + \varepsilon$. Jika ε dipindah ruas menjadi $\varepsilon = Y - B(\lambda)\alpha$. Misalkan sampel untuk y diberikan, maka aturan main yang memungkinkan dalam pemakaian sampel untuk mendapatkan taksiran dari α adalah dengan membuat $\varepsilon = Y - B(\lambda)\alpha$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini diharapkan akan menghasilkan komponen sistematis yang lebih berperan dari pada komponen stokastiknya, artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang y . Dengan kata lain, X tidak mampu menjelaskan y . Untuk tujuan inilah perlu memilih parameter α sehingga nilai fungsi, $S = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - B(\lambda)\alpha)^T (Y - B(\lambda)\alpha)$ sekecil mungkin (minimal).

2.2 Pendiferensialan Matriks

Pada metode kuadrat terkecil menghasilkan persamaan normal. Persamaan dalam bentuk matriks sangat menguntungkan karena persamaan tersebut dapat ditulis secara umum dan lebih ringkas. Demikian juga dalam mengkaji estimator *B-Spline*, persamaan akan ditulis dalam bentuk matriks.

Persamaan linier dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a^T X \quad (2.3)$$

dimana:

$$a^T = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{vektor yang berukuran } 1 \times n$$

$$X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{vektor berukuran } 1 \times n$$

Turunan y terhadap x adalah vektor $\frac{\partial y}{\partial x}$ berukuran $n \times 1$, didefinisikan

sebagai berikut:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \quad (2.4)$$

Jika y persamaan kuadrat, maka y dapat ditulis $y = X^T A X$, dimana

$$X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

maka:

$$y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

dengan asumsi $a_{ij} = a_{ji}$, turunan y terhadap x didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= 2AX \end{aligned} \quad (2.6)$$

(Basilevsky dalam Fredi (2006))

2.3 Regresi Nonparametrik

Regresi nonparametrik merupakan suatu metode regresi untuk mengetahui pola hubungan suatu variabel independen terhadap variabel dependen yang tidak diketahui bentuk kurva dari fungsi regresinya dan hanya diasumsikan mulus (*smooth*), sehingga regresi nonparametrik sangat mempertahankan fleksibilitasnya (Yuyun, dkk., 2013). Model umum regresi nonparametrik adalah sebagai berikut (Eubank dalam Budiantara (2010)) :

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

dimana y_i adalah variabel dependen dari data ke- i , x merupakan variabel independen. $f(x_i)$ adalah fungsi regresi yang belum diketahui bentuknya, sedangkan ε_i merupakan residual yang berdistribusi normal, independen dengan mean nol dan variansi σ^2 .

Jika persamaan (2.5) dibentuk matriks akan menjadi :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad f(X) = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Maka model regresi pada persamaan (2.5) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$Y = f(X) + \varepsilon \quad (\text{Hardle, 1994}) \quad (2.8)$$

2.4 Regresi *B-Spline*

Model regresi $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$; $i = 1, 2, \dots, n$, dengan ε_i adalah residual dan $f(x_i)$ kurva regresi. Jika kurva regresi f didekati dengan fungsi *B-Spline* maka f dapat ditulis menjadi:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m+K} \alpha_j B_{j-m,m}(x) \quad (2.9)$$

dengan $B_{j-m,m}$ merupakan basis *B-Spline* dengan orde ke $(j-m)$.

Cara membangun fungsi *B-Spline* orde m dengan titik knot $a < u_1 < u_2 < \dots < u_K < b$ adalah dengan terlebih dahulu mendefinisikan knot tambahan sebanyak $2m$ yaitu $u_{-(m-1)} < \dots < u_{-1} < u_0 < \dots < u_{K+m}$ dimana

$u_{-(m-1)} = \dots = u_0 = a$ dan $u_{k+1} = \dots = u_{k+m} = b$. Biasanya a diambil dari nilai minimum x dan b diambil dari nilai maksimum x . $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+K}$ adalah parameter.

Fungsi *B-Spline* dengan derajat m didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

1. Jika $m=1$, maka:

$$B_{j,1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } u_j < x \leq u_{j+1} \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

2. Jika $m > 1$, maka:

$$B_{j,m}(x) = \frac{x - u_j}{u_{j+m-1} - u_j} B_{j,m-1}(x) + \frac{u_{j+m} - x}{u_{j+m} - u_{j+1}} B_{j+1,m-1}(x) \quad (2.10)$$

m adalah derajat atau orde dari *B-Spline*. Untuk $m=2$ memberikan fungsi *B-Spline* linear, $m=3$ memberikan fungsi *B-Spline* kuadratik, $m=4$ memberikan fungsi *B-Spline* kubik. Untuk mengestimasi koefisien γ pada persamaan (2.5), didefinisikan matriks berikut:

$$B(\lambda) = (B_{j,m}(x_i)) \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = -(m-1), \dots, K \quad (2.11)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{-(m-1),m}(x_1) & B_{-(m-2),m}(x_1) & \cdots & B_{K,m}(x_1) \\ B_{-(m-1),m}(x_2) & B_{-(m-2),m}(x_2) & \cdots & B_{K,m}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-(m-1),m}(x_n) & B_{-(m-2),m}(x_n) & \cdots & B_{K,m}(x_n) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Jadi $B(\lambda)$ adalah sebuah matrik berukuran $n \times (m + K)$ (Botella & Shariff dalam Fredi (2006)).

2.5 Pemilihan Model Regresi *B-Spline* Terbaik

Agar diperoleh model regresi *B-Spline* terbaik, yang harus diperhatikan adalah penentuan titik-titik knot k_1, k_2, \dots, k_m yang optimal. Karena adanya titik-titik knot, kurva yang dibentuk akan tersegmen pada titik-titik knot yang telah ditentukan. Sehingga dalam menentukan titik knot, tidak boleh asal menentukan, tetapi harus melihat bentuk sebaran data.

Pada pemilihan model regresi *B-Spline* terbaik, yaitu dengan melihat nilai GCV. Nilai GCV minimum menunjukkan titik knot optimal. Semakin kecil nilai GCV yang diperoleh dari proses perhitungan, maka model regresi *B-Spline* pada titik knot optimal menunjukkan model regresi yang dihasilkan adalah model regresi *B-Spline* terbaik. Formula untuk menghitung nilai GCV, dituliskan sebagai berikut:

$$GCV(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{MSE(k_1, k_2, \dots, k_n)}{\left(\frac{1}{n} \text{trace}[I - A(k_1, k_2, \dots, k_n)]\right)^2} \quad (2.13)$$

Keterangan:

n = banyaknya data

I = matriks identitas

$MSE = n^{-1} \sum_{j=1}^p (y_j - \hat{y}(x_j))^2$

(k_1, k_2, \dots, k_n) = titik knot

$A(k_1, k_2, \dots, k_n) = T(T'T)^{-1}T'$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} & (x_1 - k_1)^{m-1} & \cdots & (x_1 - k_h)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{m-1} & (x_n - k_1)^{m-1} & \cdots & (x_n - k_h)^{m-1} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

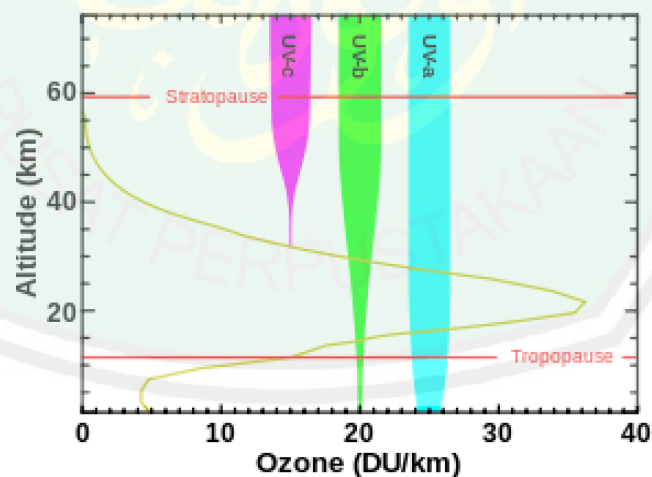
(Yuyun, dkk., 2013)

2.6 Radiasi UV Matahari

Matahari adalah suatu bola raksasa yang terbentuk dari gas hidrogen dan helium. Matahari bisa juga disebut bintang, karena matahari mampu memancarkan cahayanya sendiri. Diameter matahari mencapai 1.400.000 kilometer. Sedangkan suhu pada permukaan matahari mencapai 5.800^0 C, semakin ke bagian dalam matahari, suhunya akan semakin tinggi. Hingga mencapai $15.000.000^0$ C pada inti matahari. Cahaya yang banyak diterima makhluk hidup di bumi adalah dari permukaan matahari. Cahaya yang dipancarkan matahari berupa energi panas. Energi panas matahari dapat mencapai bumi melalui proses radiasi.

Radiasi adalah suatu proses perambatan energi (panas) dalam bentuk gelombang elektromagnetik tanpa memerlukan zat perantara. Energi matahari bisa sampai ke permukaan bumi dengan cara radiasi (pancaran), karena diantara bumi dan matahari terdapat ruang hampa (tidak ada zat perantara). Sedangkan gelombang elektromagnetik adalah suatu bentuk gelombang yang dirambatkan dalam bentuk komponen medan listrik dan medan magnet, sehingga dapat merambat dengan kecepatan yang sangat tinggi dan tanpa memerlukan zat atau medium perantara. Jumlah energi paling tinggi yang sampai ke bumi adalah pada siang hari (andre panggabean). Jenis-jenis gelombang elektromagnetik yang dipancarkan matahari diantaranya sinar gamma, sinar X, sinar ultraviolet, cahaya tampak, sinar inframerah, gelombang radio, dan gelombang mikro (pustakafisika).

Sinar UV adalah salah satu jenis gelombang elektromagnetik yang memberikan banyak dampak positif maupun negatif bagi makhluk hidup di bumi. Radiasi UV adalah bagian dari spektrum elektromagnetik (cahaya) yang mencapai bumi dari matahari. Memiliki panjang gelombang lebih pendek daripada cahaya, sehingga radiasi UV tidak terlihat oleh mata telanjang. Radiasi UV dibagi dalam tiga jenis panjang gelombang, yaitu UVA, UVB, dan UVC, dengan UVA terpanjang di 320-400 nm. UVA dibagi lagi menjadi dua gelombang, UVA I dan UVA II. UVB berkisar antara 290-320 nm, dan sinar paling pendek yaitu UVC 100-280 nm yang diserap oleh lapisan ozon dalam proses perjalanan menuju ke bumi sehingga sinar UVC tidak sampai ke permukaan bumi. Sinar yang sampai pada permukaan bumi adalah sinar UVA dan UVB karena sinar tersebut dapat menembus atmosfer bumi (Cory dan Katharina: 2). Berikut ini adalah ilustrasi gambar sinar UVA, UVB, dan UVC.



Gambar 2.1 Ilustrasi sinar UVA, UVB, dan UVC
(Sumber: BPD LAPAN Watukosek)

2.7 Lapisan Ozon

Ozon merupakan molekul triatomik, yang tersusun oleh tiga atom Oksigen dan bersifat lebih tidak stabil bila dibandingkan dengan oksigen. Molekul ozon merupakan bagian terkecil dari atmosfer bumi (hanya 0,03 % dari total seluruh volume atmosfer). Ozon terdapat di lapisan atmosfer bumi, yaitu di stratosfer dan troposfer. Ozon di lapisan stratosfer disebut juga sebagai lapisan ozon, yang berperan sebagai lapisan pelindung bumi dari sinar ultraviolet yang berbahaya bila masuk ke bumi dengan intensitas yang tinggi. Lapisan ozon pada stratosfer terletak diantara 10 sampai dengan 50 km diatas permukaan bumi. Lapisan ini dapat menyerap radiasi UV matahari yang berbahaya bagi kehidupan.

Ozon (O_3) dihasilkan apabila O_2 menyerap sinar UV pada jarak gelombang 242 nanometer dan disingkirkan dengan fotosintesis dari sinar bagi jarak gelombang yang besar dari 290 nm. O_3 juga merupakan penyerap utama sinar UV antara 200 dan 330 nm. Penggabungan proses-proses ini efektif dalam meneruskan kekonstanan bilangan ozon dalam lapisan penyerapan 90% sinar UV (Wikipedia ozon).

Kerusakan lapisan ozon di stratosfer berawal dari adanya emisi molekul gas yang mengandung kloro dan brom yang dihasilkan dari berbagai aktifitas manusia. Karena tidak bereaksi dan tidak larut dalam air, molekul gas tersebut terakumulasi di bagian bawah atmosfer. Pada lapisan stratosfer, radiasi matahari memecah molekul gas tersebut sehingga dihasilkan radikal kloro dan brom. Melalui reaksi berantai, radikal kloro dan brom akan memecah ikatan molekul gas-gas lain di atmosfer, termasuk molekul ozon. Reaksi yang terjadi mengakibatkan molekul ozon terpecah menjadi oksigen dan radikal oksigen. Karena reaksi tersebut

berlangsung secara berantai maka konsentrasi ozon di stratosfer akan terus berkurang, sehingga pada kondisi yang paling kritis akan membentuk lubang ozon. Berkurangnya molekul ozon di stratosfer mengakibatkan lapisan ozon menjadi semakin tipis sehingga fungsi penyerapan radiasi UV-B menjadi berkurang. Sebagai akibatnya, intensitas radiasi UV-B semakin meningkat. Berdasarkan kajian ilmiah diketahui bahwa setiap 10% penipisan lapisan ozon, akan terjadi kenaikan radiasi UV-B sebesar 20%. Paparan radiasi UV-B yang berlebih dapat menimbulkan dampak negatif (Rio Renhard Putra).

Ozon di stratosfer berasal dari 10 % dari transport ozon di stratosfer. Selain itu, sumber ozon di troposfer juga berasal dari aktifitas manusia dengan mekanisme yang sedikit berbeda dengan ozon di stratosfer. Penelitian mengenai ozon di LAPAN berkaitan dengan penelitian dan pengembangan proses-proses fisis, kimia, dan dinamika ozon seras radiasi UV matahari.

Ozon permukaan adalah ozon troposfer pada ketinggian paling bawah di permukaan bumi. Di troposfer, ozon berperan sebagai gas rumah kaca sehingga dapat menyokong perubahan iklim. Pada konsentrasi tertentu, ozon di permukaan juga dapat berperan sebagai polutan. Penelitian mengenai ozon permukaan di LAPAN dilakukan menggunakan instrumen pengukur konsentrasi ozon permukaan yaitu monitor ozon. Untuk memonitor adanya penipisan lapisan ozon di Indonesia, LAPAN melakukan pengamatan intensitas radiasi UV-A (315-400 nm) dan UV-B (280-315 nm) sebagai salah satu indikator kuantitas konsentrasi ozon. Peralatan yang digunakan adalah UV Pyranometer.

2.8 Kajian Keagamaan

Al-Qur'an adalah *kalamullah*, firman Allah ta'ala. Ia bukanlah kata-kata manusia. Bukan pula kata-kata jin, syaithan atau malaikat. Ia sama sekali bukan berasal dari pikiran makhluk, bukan syair, bukan sihir, bukan pula produk kontemplasi atau hasil pemikiran filsafat manusia. Hal ini ditegaskan oleh Allah ta'ala dalam al-Qur'an surat an-Najm ayat 3-4:

وَمَا يَنْطِقُ عَنِ الْهَوَىٰ ۗ (٣) إِنْ هُوَ إِلَّا وَحْيٌ يُوحَىٰ (٤)

Artinya: "...dan tiadalah yang diucapkannya itu (al-Qur'an) menurut kemauan hawa nafsunya. Ucapannya itu tiada lain hanyalah wahyu yang diwahyukan (kepadanya)..."

Dalam al-Qur'an telah diungkapkan bahwa ilmu pengetahuan dan al-Qur'an adalah dua aspek kebenaran yang sama, dan tidak ada pertentangan diantara keduanya. Wahyu pertama al-Qur'an yang diturunkan Allah kepada Nabi Muhammad Saw adalah menuntut ilmu pengetahuan dan menekankan pentingnya arti belajar dalam kehidupan umat manusia. Salah satu ilmu yang harus dipelajari adalah matematika karena dalam matematika terdapat kegiatan kalkulasi atau menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian matematika disebut dengan ilmu hitung atau *ilmu al-hisab*. Dalam urusan hitung menghitung, Allah Swt adalah ahlinya. Allah Swt sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Berikut ini adalah ayat al-Qur'an yang menjelaskan bahwa Allah Swt sangat cepat dalam melakukan perhitungan dan sangat teliti. Dalam surat an-Nur ayat 39 yang berbunyi:

وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ (٣٩)

Artinya: "Allah adalah sangat cepat perhitungannya" (QS. an-Nur: 39).

Allah Swt adalah raja dari segala sesuatu yang telah diciptakannya, bahkan dalam hal perhitungan, Allah Swt sangat cepat menghitung dan sangat teliti.

2.8.1 Kajian Estimasi dalam al-Qur'an dan al-Hadist

Statistika adalah suatu ilmu yang mempelajari bagaimana merencanakan, mengumpulkan, menganalisa, menginterpretasi, dan mempresentasikan data dengan data-data yang berbentuk angka dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Salah satu ayat al-Qur'an yang berhubungan dengan statistika yaitu surat al-Baqarah ayat 261 yang berbunyi :

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ
حَبَّةٍ أَدْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ سَنَابِلَةٍ مِائَةٌ حَبًّا وَاللَّهُ يُضْعِفُ
لِمَن يَشَاءُ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: “ Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang dia kehendaki dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha mengetahui”. (QS. al-Baqarah: 261).

Dari ayat tersebut dapat dianalisa bahwa dengan statistika segala sesuatu dari hal yang kecil bisa menjadi hal yang besar, seperti arti dari ayat tersebut yang menyebutkan bahwa dari sebutir benih dapat menumbuhkan tujuh bulir, dan pada tiap-tiap bulirnya dapat menumbuhkan seratus biji. Pada ayat tersebut, Allah akan memberikan balasan bagi orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah yaitu ganjaran atau pahala yang berlipat-lipat atas kehendak-Nya karena Allah Maha Luas karunia-Nya. Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa dalam al-Qur'an juga ada perhitungan sebagaimana dalam statistika juga ada perhitungan.

Estimasi adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah fungsi estimasi dari suatu parameter. Estimasi dapat juga didefinisikan sebagai pendugaan parameter. Dalam al-Qur'an terdapat banyak ayat yang menjelaskan mengenai estimasi, salah satunya al-Qur'an surat ash-Shaffaat ayat 147 yang berbunyi:

وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: " Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih "

Dalam Qs. ash-Shaffaat ayat 147 dijelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus. Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah Swt maha mengetahui yang gaib dan yang nyata? Bukankah Allah Swt maha mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah umat nabi Yunus? Jawaban terhadap pertanyaan tersebut adalah "inilah contoh estimasi (taksiran)" (Abdussakir, 2007). Dalam surat ali-'imran ayat 24 juga disebutkan:

ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا لَن نَّمَسَّنَا النَّارَ إِلَّا أَيَّامًا مَّعْدُودَاتٍ ۚ وَغَرَّبَهُمْ فِي دِينِهِمْ مَّا كَانُوا يَفْتَرُونَ ﴿٢٤﴾

Artinya: " Hal itu adalah karena mereka mengaku "Kami tidak akan disentuh oleh api neraka kecuali beberapa hari yang dapat dihitung". Mereka diperdayakan dalam agama mereka oleh apa yang selalu mereka ada-adakan ". (QS. ali-'imran: 47).

Asbabun Nuzul: Ibnu Abu Hatim, Ibnu Munzir dan Ikrimah menentengahkan dari Ibnu Abbas, katanya, "Rasulullah Saw. masuk ke rumah

Madras menemui segolongan orang-orang Yahudi. Maka diserunya mereka kepada Allah, lalu kata Na'im bin Amr dan Harits bin Zaid kepada Nabi saw., 'Menganut agama apakah Anda, hai Muhammad?' Jawabnya, 'Menganut millah Ibrahim dan agamanya.' Kata mereka pula, 'Sesungguhnya Ibrahim itu beragama Yahudi.' Sabda Nabi saw. pula, 'Kalau begitu marilah kita pegang Taurat! Dialah yang akan menjadi hakim di antara kami dan tuan-tuan!' Kedua mereka itu menolak, maka Allah pun menurunkan, 'Tidakkah kamu perhatikan orang-orang yang diberi bagian berupa Alkitab..., 'sampai dengan firman-Nya, '...mereka ada-adakan.'" (Q.S. ali Imran 24).

Kaitan ayat tersebut dengan metode estimasi (pendugaan) terletak pada kata *اياما معدودت*, yang dimaksud pada lafadz tersebut adalah hari-hari yang terbilang (tertentu). Pada ayat tersebut tidak dijelaskan secara jelas lama waktu ketika orang yahudi menentukan masa akan disentuh oleh api neraka, akan tetapi hanya tertulis "beberapa hari saja".

Yang dimaksudkan dengan hari-hari disini oleh ucapan orang-orang yahudi adalah 40 hari, yaitu hari-hari mereka ketika mereka menyembah anak-anak sapi setelah mereka ditinggal pergi oleh Nabi Musa Alaihissalam. Orang-orang yahudi berpaling dari kebenaran dan bersi keras untuk tidak mau kembali mencari kebenaran dan mengikutinya karena mereka percaya bahwa api neraka tidak akan mampu menyentuh kulit-kulit mereka. Jika memang mereka dilemparkan ke dalam api neraka hanya 40 hari saja. Padahal kepercayaan mereka itu adalah batil dan tidak ada dasarnya sama sekali, sehingga perkiraan mereka itu salah karena mereka akan dimasukkan ke dalam api neraka selama-lamanya akibat dari kekafiran, kezaliman, dan sikap ingkar serta keras kepala mereka.

Metode estimasi juga disebutkan dalam suatu hadist pada bab jual-beli tentang larangan menjual buah-buahan yang belum tampak jadinya tanpa syarat untuk dipetik dan haram menjual kurma basah dengan kurma kering kecuali dalam (jual beli) araya (ariah), yakni:

Hadist riwayat Ibnu Abbas r.a, ia berkata: Rasulullah Saw melarang menjual pohon kurma sebelum ia memakan sebagian buahnya atau dimakan orang lain dan sebelum ditimbang. Aku bertanya: Apa yang dimaksud dengan ditimbang? Seorang lelaki yang berada di sebelahnya menjawab: Yaitu ditaksir. (Shahih Muslim No. 2833).

2.8.2 Kajian Atmosfer (lapisan pelindung bumi) dalam al-Qur'an

Atmosfer yang melingkupi bumi berperan penting bagi berlangsungnya kehidupan. Dengan menghancurkan benda-benda langit, seperti meteor yang berukuran besar ataupun kecil yang mendekati bumi, maka dengan adanya atmosfer mencegah benda-benda langit jatuh ke bumi yang dapat membahayakan makhluk hidup. Atmosfir juga melindungi bumi dari suhu dingin membeku ruang angkasa, yang mencapai sekitar 270 derajat celcius di bawah nol. Seperti dalam Firman Allah dalam surat al-Anbiya ayat 32 yang berbunyi:

وَجَعَلْنَا السَّمَاءَ سَقْفًا مَحْفُوظًا وَهُمْ عَنْ آيَاتِهَا مُعْرِضُونَ ﴿٣٢﴾

Artinya: " Dan kami menjadikan langit itu sebagai atap yang terpelihara, sedang mereka berpaling dari segala tanda-tanda (kekuasaan Allah) yang ada padanya ". (QS. al-Anbiya: 32).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa langit (termasuk atmosfer) merupakan atap dari bumi yang melindungi bumi dan makhluk yang ada didalamnya dari benda-benda yang berbahaya. Singkatnya, sebuah sistem sempurna sedang bekerja jauh tinggi di atas bumi. Ia melingkupi bumi kita dan melindunginya dari berbagai ancaman dari luar angkasa. Para ilmuwan baru mengetahuinya sekarang, sementara berabad-abad lampau, kita telah diberitahu dalam al-Qur'an tentang atmosfer bumi

yang berfungsi sebagai lapisan pelindung. Dalam al-Qur'an surat ath-Thaariq ayat 11 yang berbunyi:

وَالسَّمَاءِ ذَاتِ الرَّجْعِ ﴿١١﴾

Artinya: " Demi langit yang mengandung hujan". (QS. ath-Thaariq: 11).

Kata yang ditafsirkan sebagai "mengandung hujan" dalam terjemahan ayat tersebut memberikan makna "mengirim kembali" atau "mengembalikan". Sebagaimana diketahui, atmosfer yang melingkupi bumi terdiri dari sejumlah lapisan. Setiap lapisan memiliki peran penting bagi kehidupan. Penelitian mengungkapkan bahwa lapisan-lapisan ini memiliki fungsi mengembalikan benda-benda atau sinar yang mereka terima ke ruang angkasa atau ke arah bawah, yakni ke bumi. Berikut ini adalah fungsi "pengembalian" dari lapisan-lapisan yang mengelilingi bumi:

1. Troposfer, 13 hingga 15 km di atas permukaan bumi, memungkinkan uap air yang naik dari permukaan bumi menjadi terkumpul hingga jatuh dan turun kembali ke bumi sebagai hujan.
2. Lapisan ozon, pada ketinggian 25 km, memantulkan radiasi berbahaya dan sinar ultraviolet yang datang dari ruang angkasa dan mengembalikan keduanya ke ruang angkasa.
3. Ionosfer, memantulkan kembali pancaran gelombang radio dari bumi ke berbagai belahan bumi lainnya, persis seperti satelit komunikasi pasif, sehingga memungkinkan komunikasi tanpa kabel, pemancaran siaran radio dan televisi pada jarak yang cukup jauh.

4. Lapisan magnet, memantulkan kembali partikel-partikel radioaktif berbahaya yang dipancarkan Matahari dan bintang-bintang lainnya ke ruang angkasa sebelum sampai ke Bumi.

Sifat lapisan-lapisan langit yang hanya dapat ditemukan secara ilmiah di masa kini tersebut, telah dinyatakan berabad-abad lalu dalam al Qur'an. Ini sekali lagi membuktikan bahwa al Qur'an adalah firman Allah.



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Estimasi Regresi Nonparametrik

Model umum regresi nonparametrik :

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

dimana

y_i : variabel dependen dari data ke- i

x_i : variabel independen dari data ke- i

$f(x_i)$: kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya

ε_i : galat (*error*) yang diasumsikan berdistribusi normal independen dengan mean nol, dan variansi konstan (σ^2).

Dalam regresi nonparametrik, kurva regresi hanya diasumsikan termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu. Jika kurva regresi $f(x_i)$ didekati dengan fungsi *B-Spline* maka f dapat dituliskan menjadi:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m+K} \alpha_j B_{j-m,m}(x) \quad (3.2)$$

Dengan $B_{j-m,m}$ merupakan basis *B-Spline*. Untuk mengestimasi parameter α dapat didefinisikan matriks sebagai berikut:

$$B(\lambda) = (B_{j,m}(t_i)) \quad \text{dengan } i = 1, 2, \dots, n \text{ dan } j = -(m-1), -(m-2), \dots, K$$

atau dapat dituliskan menjadi:

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{-(m-1),m}(x_1) & B_{-(m-2),m}(x_1) & \dots & B_{K,m}(x_1) \\ B_{-(m-1),m}(x_2) & B_{-(m-2),m}(x_2) & \dots & B_{K,m}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-(m-1),m}(x_n) & B_{-(m-2),m}(x_n) & \dots & B_{K,m}(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Jadi $B(\lambda)$ matriks berukuran $n \times (m + K)$.

3.1.1 Fungsi *B-Spline* linier ($m=2$)

a. Melibatkan satu titik knot $x=5$

Mendefinisikan knot tambahan sebanyak $2m$:

$$u_{-(m-1)} < \dots < u_{-1} < u_0 < \dots < u_{K+m} \quad (3.4)$$

$$\text{dimana } u_{-(m-1)} = \dots = u_0 = a \quad (3.5)$$

$$\text{dan } u_{k+1} = \dots = u_{K+m+1} = b \quad (3.6)$$

nilai a diambil dari nilai minimum $x = 1$ dan nilai b diambil dari nilai maksimum $x = 49$. Dengan mengganti nilai m pada (3.5), maka :

$$u_{-(2-1)} = u_{-1} = u_0 = 0 \quad (3.7)$$

Banyaknya titik knot $k=1$ dan $m=2$, substitusikan nilai k pada (3.6), maka :

$$u_6 = u_7 = u_8 = 49 \quad (3.8)$$

Dari (3.7) dan (3.8), sehingga titik-titik knot dapat dituliskan :

$$u_{-1} = u_0 = 1, u_1 = 5, u_2 = u_3 = 49 \quad (3.9)$$

Untuk mengestimasi parameter α pada persamaan (3.2), didefinisikan matriks:

$$B(\lambda) = (B_{j,m}(x_i)) \quad (3.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, K ; j = -(m-1), \dots, K$$

Untuk indeks j , substitusikan nilai m dan k :

$$j = -1, 0, 1$$

Maka bentuk dari (3.10) dapat ditulis sebagai berikut :

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{-1,2}(x_1) & B_{0,2}(x_1) & B_{1,2}(x_1) \\ B_{-1,2}(x_2) & B_{0,2}(x_2) & B_{1,2}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{-1,2}(x_n) & B_{0,2}(x_n) & B_{1,2}(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Bentuk (3.11) adalah sebuah matrik berukuran $n \times 3$. Untuk menghitung setiap elemen pada matrik (3.11) dengan menggunakan bentuk rekursif fungsi *B-Spline*:

1. Fungsi basis $B_{-1,2}(x)$

$$\begin{aligned} B_{-1,2}(x) &= \frac{x - u_{-1}}{u_{-1+2-1} - u_{-1}} B_{-1,2-1}(x) + \frac{u_{-1+2} - x}{u_{-1+2} - u_{-1+1}} B_{-1+1,2-1}(x) \\ &= \frac{x - u_{-1}}{u_0 - u_{-1}} B_{-1,1}(x) + \frac{u_1 - x}{u_1 - u_0} B_{0,1}(x) \\ &= \frac{x - 1}{1 - 1} B_{-1,1}(x) + \frac{5 - x}{5 - 1} B_{0,1}(x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$B_{-1,1}(x)$ didefinisikan bernilai 0 karena $u_{-1} = u_0$, sedangkan untuk $B_{0,1}(x)$ bernilai 1 pada saat x bernilai $u_0 = 0$ sampai dengan $u_1 = 1$, dan bernilai 0 untuk nilai x lainnya, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$B_{-1,2}(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{4} & , 1 < x \leq 5 \\ 0 & , 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

2. Fungsi basis $B_{0,2}(x)$

$$B_{0,2}(x) = \frac{x - u_0}{u_{0+2-1} - u_0} B_{0,2-1}(x) + \frac{u_{0+2} - x}{u_{0+2} - u_{0+1}} B_{0+1,2-1}(x)$$

$$\begin{aligned}
 B_{0,2}(x) &= \frac{x-u_0}{u_1-u_0} B_{0,1}(x) + \frac{u_2-x}{u_2-u_1} B_{1,1}(x) \\
 &= \frac{x-1}{5-1} B_{0,1}(x) + \frac{10-x}{10-5} B_{1,1}(x) \\
 &= \frac{x-1}{4} B_{0,1}(x) + \frac{10-x}{5} B_{1,1}(x)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dari bentuk (3.13) selanjutnya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$B_{0,2}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4} & , 1 < x \leq 5 \\ \frac{10-x}{5} & , 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

Untuk basis yang lainnya dengan menggunakan langkah yang sama pada dua basis diatas.

- b. Melibatkan dua titik knot $x=5$ dan $x=10$

$$u_{-1} = u_0 = 1, u_1 = 5, u_2 = 10, u_3 = u_4 = 49$$

Dapat dicari dengan cara yang serupa, sehingga akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{-1,2}(x_1) & B_{0,2}(x_1) & B_{1,2}(x_1) & B_{2,2}(x_1) \\ B_{-1,2}(x_2) & B_{0,2}(x_2) & B_{1,2}(x_2) & B_{2,2}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{-1,2}(x_n) & B_{0,2}(x_n) & B_{1,2}(x_n) & B_{2,2}(x_n) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Dengan menggunakan langkah yang sama untuk menguraikan basis-basis pada bentuk matriks (3.14) pada poin a.

3.1.2 Fungsi B-Spline kuadrat ($m=3$)

- a. Melibatkan satu titik knot $x=3$

titik-titik knot nya menjadi:

$$u_{-2} = u_{-1} = u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = u_3 = u_4 = 49$$

Dapat dicari dengan cara yang serupa, sehingga akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{-2,3}(x_1) & B_{-1,3}(x_1) & B_{0,3}(x_1) & B_{1,3}(x_1) \\ B_{-2,3}(x_2) & B_{-1,3}(x_2) & B_{0,3}(x_2) & B_{1,3}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{-2,3}(x_n) & B_{-1,3}(x_n) & B_{0,3}(x_n) & B_{1,3}(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Bentuk (3.15) adalah sebuah matrik berukuran $n \times 4$. Untuk menghitung setiap elemen pada matrik (3.15) dengan menggunakan bentuk rekursif fungsi *B-Spline*:

1. Fungsi basis $B_{-2,3}(x_1)$

$$\begin{aligned} B_{-2,3}(x) &= \frac{x - u_{-2}}{u_{-2+3-1} - u_{-2}} B_{-2,3-1}(x) + \frac{u_{-2+3} - x}{u_{-2+3} - u_{-2+1}} B_{-2+1,3-1}(x) \\ B_{-2,3}(x) &= \frac{x - u_{-2}}{u_0 - u_{-2}} B_{-2,2}(x) + \frac{u_1 - x}{u_1 - u_{-1}} B_{-1,2}(x) \\ &= \frac{x - 1}{1 - 1} B_{-2,2}(x) + \frac{3 - x}{3 - 1} B_{-1,2}(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Menguraikan basis-basis pada bentuk (3.16)

$$\begin{aligned} B_{-2,2}(x) &= \frac{x - u_{-2}}{u_0 - u_{-2}} B_{-2,1}(x) + \frac{u_0 - x}{u_0 - u_{-1}} B_{-1,1}(x) \\ &= \frac{x - 1}{1 - 1} B_{-2,1}(x) + \frac{1 - x}{1 - 1} B_{-1,1}(x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} B_{-1,2}(x) &= \frac{x - u_{-1}}{u_0 - u_{-1}} B_{-1,1}(x) + \frac{u_1 - x}{u_1 - u_0} B_{0,1}(x) \\ &= \frac{x - 1}{1 - 1} B_{-1,1}(x) + \frac{3 - x}{3 - 1} B_{0,1}(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Substitusikan bentuk (3.17) dan (3.18) dalam bentuk (3.16):

$$B_{-2,3}(x) = \left(\frac{x-1}{1-1}\right)\left(\frac{x-1}{1-1}B_{-2,1}(x) + \frac{1-x}{1-1}B_{-1,1}(x)\right) + \left(\frac{3-x}{3-1}\right)\left(\frac{x-1}{1-1}B_{-1,1}(x) + \frac{3-x}{3-1}B_{0,1}(x)\right)$$

$$B_{-2,3}(x) = \left(\frac{3-x}{3-1}\right)\left(\frac{x-1}{1-1}B_{-1,1}(x)\right) + \left(\frac{3-x}{3-1}\right)\left(\frac{3-x}{3-1}B_{0,1}(x)\right)$$

$$B_{-2,3}(x) = \left(\frac{3-x}{2}\right)\left(\frac{3-x}{2}B_{0,1}(x)\right)$$

$$B_{-2,3}(x) = \left(\frac{(3-x)^2}{4}B_{0,1}(x)\right)$$

$$B_{-2,3}(x) = \begin{cases} \frac{(3-x)^2}{4}, & 1 < x \leq 3 \\ 0, & 3 < x \leq 49 \end{cases}$$

b. Melibatkan dua titik knot $x=3$ dan $x=7$

titik-titik knot nya menjadi:

$$u_{-2} = u_{-1} = u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 7, u_3 = u_4 = u_5 = 49$$

Dapat dicari dengan cara yang serupa, sehingga akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{-2,3}(x_1) & B_{-1,3}(x_1) & B_{0,3}(x_1) & B_{1,3}(x_1) & B_{2,3}(x_1) \\ B_{-2,3}(x_2) & B_{-1,3}(x_2) & B_{0,3}(x_2) & B_{1,3}(x_2) & B_{2,3}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{-2,3}(x_n) & B_{-1,3}(x_n) & B_{0,3}(x_n) & B_{1,3}(x_n) & B_{2,3}(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Bentuk (3.19) adalah sebuah matrik berukuran $n \times 5$. Untuk menghitung setiap elemen pada matrik (3.19) dengan menggunakan bentuk rekursif fungsi *B-Spline*:

1. Fungsi basis $B_{-1,3}(x_1)$

$$B_{-1,3}(x) = \frac{x - u_{-1}}{u_{-1+3-1} - u_{-1}} B_{-1,3-1}(x) + \frac{u_{-1+3} - x}{u_{-1+3} - u_{-1+1}} B_{-1+1,3-1}(x)$$

$$\begin{aligned}
B_{-1,3}(x) &= \frac{x-u_{-1}}{u_1-u_{-1}} B_{-1,2}(x) + \frac{u_2-x}{u_2-u_0} B_{0,2}(x) \\
&= \frac{x-1}{3-1} B_{-1,2}(x) + \frac{7-x}{7-1} B_{0,2}(x)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Menguraikan basis-basis pada bentuk (3.20):

$$\begin{aligned}
B_{-1,2}(x) &= \frac{x-u_{-1}}{u_0-u_{-1}} B_{-1,1}(x) + \frac{u_1-x}{u_1-u_0} B_{0,1}(x) \\
&= \frac{x-1}{1-1} B_{-1,1}(x) + \frac{3-x}{3-1} B_{0,1}(x)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
B_{0,2}(x) &= \frac{x-u_0}{u_1-u_0} B_{0,1}(x) + \frac{u_2-x}{u_2-u_1} B_{1,1}(x) \\
&= \frac{x-1}{3-1} B_{0,1}(x) + \frac{7-x}{7-3} B_{1,1}(x)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Substitusikan bentuk (3.21) dan (3.22) dalam bentuk (3.20):

$$\begin{aligned}
B_{-1,3}(x) &= \left(\frac{x-1}{3-1} \right) \left(\frac{x-1}{1-1} B_{-1,1}(x) + \frac{3-x}{3-1} B_{0,1}(x) \right) + \left(\frac{7-x}{7-1} \right) \left(\frac{x-1}{3-1} B_{0,1}(x) + \frac{7-x}{7-3} B_{1,1}(x) \right) \\
&= \left(\frac{x-1}{3-1} \right) \left(\frac{3-x}{3-1} B_{0,1}(x) \right) + \left(\frac{7-x}{7-1} \right) \left(\frac{x-1}{3-1} B_{0,1}(x) \right) + \left(\frac{7-x}{7-1} \right) \left(\frac{7-x}{7-3} B_{1,1}(x) \right) \\
&= \left(\left(\frac{x-1}{3-1} \right) \left(\frac{3-x}{3-1} \right) + \left(\frac{7-x}{7-1} \right) \left(\frac{x-1}{3-1} \right) \right) B_{0,1}(x) + \left(\frac{7-x}{7-1} \right) \left(\frac{7-x}{7-3} B_{1,1}(x) \right) \\
&= \left(\left(\frac{x-1}{2} \right) \left(\frac{3-x}{2} \right) + \left(\frac{7-x}{6} \right) \left(\frac{x-1}{2} \right) \right) B_{0,1}(x) + \left(\frac{7-x}{6} \right) \left(\frac{7-x}{4} B_{1,1}(x) \right) \\
&= \left(\left(\frac{(x-1)(3-x)}{4} \right) + \left(\frac{(7-x)(x-1)}{12} \right) \right) B_{0,1}(x) + \left(\frac{(7-x)(7-x)}{24} \right) B_{1,1}(x) \\
&= \left(\frac{(x-1)(3(3-x) + (7-x))}{12} \right) B_{0,1}(x) + \left(\frac{(7-x)^2}{24} \right) B_{1,1}(x) \\
&= \left(\frac{(x-1)(16-4x)}{12} \right) B_{0,1}(x) + \left(\frac{(7-x)^2}{24} \right) B_{1,1}(x)
\end{aligned}$$

$$B_{-1,3}(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(16-4x)}{12} & , 1 < x \leq 3 \\ \left(\frac{7-x}{24}\right)^2 & 3 < x \leq 7 \\ 0 & , 7 < x \leq 49 \end{cases}$$

Setelah diketahui bentuk-bentuk kurva *B-Spline*, selanjutnya dapat dituliskan *spline* dengan basis *B-Spline*:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{m+K} \alpha_j B_{j-m,m}(x) \\ &= \alpha_1 B_{1-m,m}(x) + \alpha_2 B_{2-m,m}(x) + \dots + \alpha_{m+K} B_{m+K-m,m} \\ &= \alpha_1 B_{-(m-1),m}(x) + \alpha_2 B_{-(m-2),m}(x) + \dots + \alpha_{m+K} B_{K,m} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Maka model regresi nonparametrik dapat dituliskan dalam bentuk:

$$y = \alpha_1 B_{-(m-1),m}(x) + \alpha_2 B_{-(m-2),m}(x) + \dots + \alpha_{m+K} B_{K,m} + \varepsilon_i \quad (3.24)$$

Apabila disajikan dalam bentuk matriks, akan menjadi:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{-(m-1),m}(x_1) & B_{-(m-2),m}(x_1) & \dots & B_{K,m}(x_1) \\ B_{-(m-1),m}(x_2) & B_{-(m-2),m}(x_2) & \dots & B_{K,m}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-(m-1),m}(x_n) & B_{-(m-2),m}(x_n) & \dots & B_{K,m}(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m+K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Bentuk tersebut dapat dituliskan dalam bentuk matriks:

$$Y = B(\lambda)\alpha + \varepsilon$$

(3.25)

dengan:

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \text{ dan } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+K})^T$$

Untuk mencari estimasi α digunakan metode kuadrat terkecil:

$$\varepsilon^T \varepsilon = (y - B(\lambda)\alpha)^T (y - B(\lambda)\alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= (y^T - \alpha^T B(\lambda)^T) (y - B(\lambda)\alpha) \\
&= (y^T y - y^T B(\lambda)\alpha - y\alpha^T B(\lambda)^T + \alpha^T B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha) \\
&= (y^T y - (y^T B(\lambda)\alpha)^T - y\alpha^T B(\lambda)^T + \alpha^T B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha) \\
&= (y^T y - y\alpha^T B(\lambda)^T - y\alpha^T B(\lambda)^T + \alpha^T B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha) \\
&= y^T y - 2y\alpha^T B(\lambda)^T + \alpha^T B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha \tag{3.26}
\end{aligned}$$

agar didapatkan parameter α , persamaan (3.26) diturunkan terhadap α , maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^T \varepsilon}{\partial \alpha} &= \frac{\partial (y^T y - 2y\alpha^T B(\lambda)^T + \alpha^T B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha)}{\partial \alpha} \\
&= 0 - 2B(\lambda)^T y + (B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha + (\alpha^T B(\lambda)^T B(\lambda))^T) \\
&= 0 - 2B(\lambda)^T y + (B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha + B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha) \\
&= 0 - 2B(\lambda)^T y + 2B(\lambda)^T B(\lambda)\alpha
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan penaksir α yaitu $\hat{\alpha}$, maka turunannya disamakan nol:

$$-2B(\lambda)^T y + 2B(\lambda)^T B(\lambda)\hat{\alpha} = 0$$

$$2B(\lambda)^T B(\lambda)\hat{\alpha} = 2B(\lambda)^T y$$

$$\hat{\alpha} = \frac{2B(\lambda)^T y}{2B(\lambda)^T B(\lambda)}$$

$$\hat{\alpha} = (B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y \tag{3.27}$$

Jadi didapatkan estimator *B-Spline*:

$$\hat{\alpha} = (B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y$$

Maka penaksir untuk kurva regresi nonparametrik adalah

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= B(\lambda)\hat{\alpha} \\ &= B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y\end{aligned}\quad (3.28)$$

3.2 Menentukan Model Regresi Nonparametrik Terbaik dengan GCV

Dalam pemilihan model regresi *B-Spline* terbaik yaitu dengan melihat nilai GCV. Semakin kecil nilai GCV yang diperoleh dari proses perhitungan, maka model regresi *B-Spline* pada titik knot optimal menunjukkan model regresi yang dihasilkan adalah model regresi *B-Spline* terbaik. Formula untuk GCV dapat dituliskan sebagai berikut:

$$GCV(\lambda) = \frac{MSE(\lambda)}{(n^{-1} \text{trace}[I - A(\lambda)])}$$

dengan:

$$MSE = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^{m+K} \alpha_j B_{j-m,m}(x_i) \right)^2 \quad (3.29)$$

$$A(\lambda) = B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T$$

Jadi GCV dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$GCV = \frac{\frac{1}{n} \left[\left(Y - B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y \right) \left(Y - B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y \right)^T \right]}{\left(\frac{1}{n} \text{trace} \left[I - B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T \right] \right) \left(\frac{1}{n} \text{trace} \left[I - B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T \right] \right)^T} \quad (3.30)$$

3.3 Deskripsi Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data hasil amatan BPD LAPAN Watukosek berupa radiasi UV dan konsentrasi ozon tahun 2013. Deskripsi

data yang akan disajikan dalam penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan data yang berkenaan dengan variabel terpilih, proses tabulasi data, karakteristik data yang meliputi sebaran data dan kondisi data secara fisis.

Dalam penelitian ini menggunakan dua variabel atmosfer permukaan yaitu radiasi UV sebagai variabel dependen dan konsentrasi ozon sebagai variabel independen. Dalam penelitian ini, digunakan model regresi nonparametrik untuk mengestimasi data radiasi UV Matahari terhadap konsentrasi ozon karena tidak adanya informasi mengenai pola sebaran data apakah mengikuti pola linier, kuadratik, kubik, atau polinomial seperti dalam regresi parametrik.

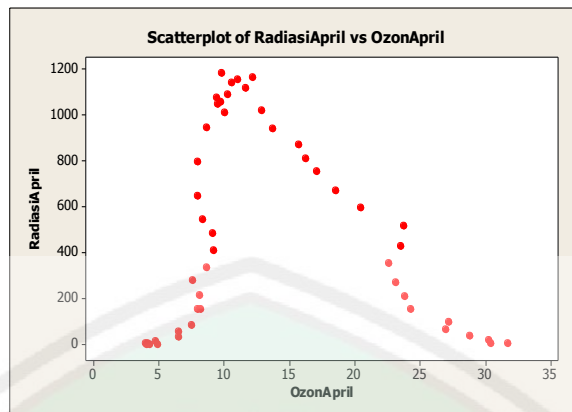
Besarnya konsentrasi ozon berpengaruh terhadap intensitas radiasi UV Matahari. Hal tersebut dapat dilihat dari bentuk sebaran data hubungan antara konsentrasi ozon dan radiasi UV Matahari. Pada awal pengamatan sampai pukul 11.00, sebaran data ozon terhadap radiasi UV Matahari menunjukkan trend kenaikan. Sekitar pukul 11.00 terjadi anomali yaitu perubahan kondisi fisis di permukaan bumi. Setelah pukul 11.00, sebaran data ozon terhadap radiasi UV menunjukkan trend penurunan. Kedua trend ini, menggambarkan bentuk nonlinier, sehingga dari adanya pembelokan lintasan ini akan di dekati dengan model regresi *B-Spline*.

Pada pemilihan data konsentrasi ozon, penulis menyesuaikan dengan data radiasi UV Matahari yang perekamannya tiap 15 menit mulai jam 06.00 sampai 18.00. Karena jumlah data radiasi UV berjumlah 49 data, sehingga data konsentrasi ozon harus disesuaikan jumlah datanya (49 data), dengan syarat jam pengamatan/ perekaman antara kedua data harus sama.



Gambar 3.1 Plot data Radiasi UV Matahari Vs Konsentrasi Ozon Maret

Gambar grafik 3.1 menunjukkan hubungan antara radiasi UV Matahari (kilo Joule) vs konsentrasi ozon (mPa) pada bulan maret 2013. Hubungan antara radiasi UV vs konsentrasi ozon terhadap waktu menunjukkan pola kenaikan dan penurunan. Pada interval pukul 06:00 sampai pukul 11:00 dimulai dari sebelah kanan ke sebelah kiri pada posisi ozon kira-kira berada pada titik 34,01 dan radiasi UV Matahari kira-kira berapa pada posisi 0,1 sampai pada posisi tertinggi pada plot data, konsentrasi ozon semakin menurun. Sekitar pukul 11:30 terjadi anomali yaitu perubahan kondisi fisis dimana konsentrasi ozon menurun sedangkan radiasi UV pada posisi tertinggi. Pada interval pukul 11:30 sampai pukul 18:00, konsentrasi ozon dan radiasi UV berkurang. Hal tersebut dikarenakan adanya pengaruh dari parameter-parameter lain yang membantu dalam proses pemantulan dan penghambatan radiasi UV yang sampai ke bumi. Sehingga akan mengakibatkan radiasi UV semakin menurun.



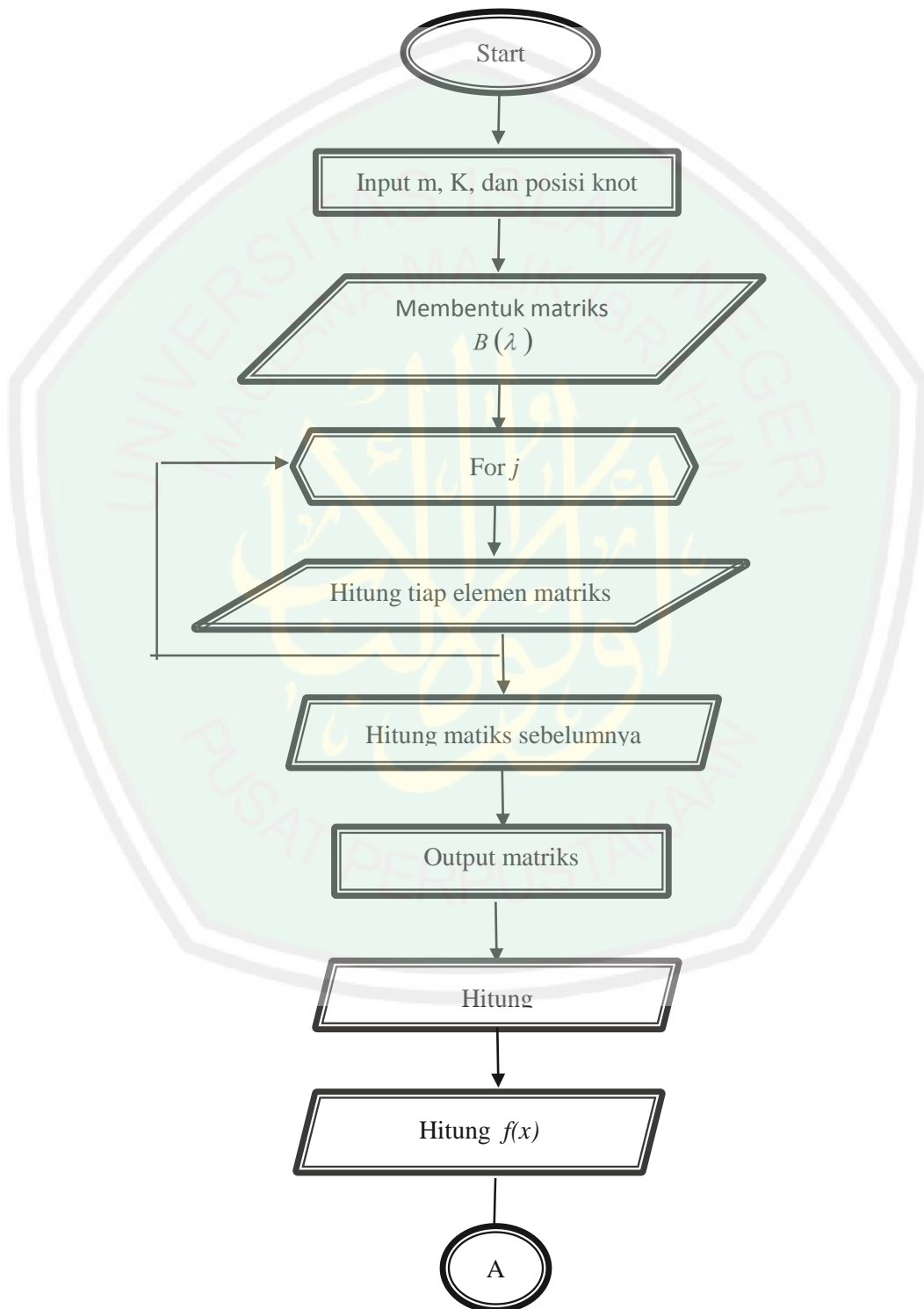
Gambar 3.2 Plot data Radiasi UV Matahari Vs Konsentrasi Ozon April

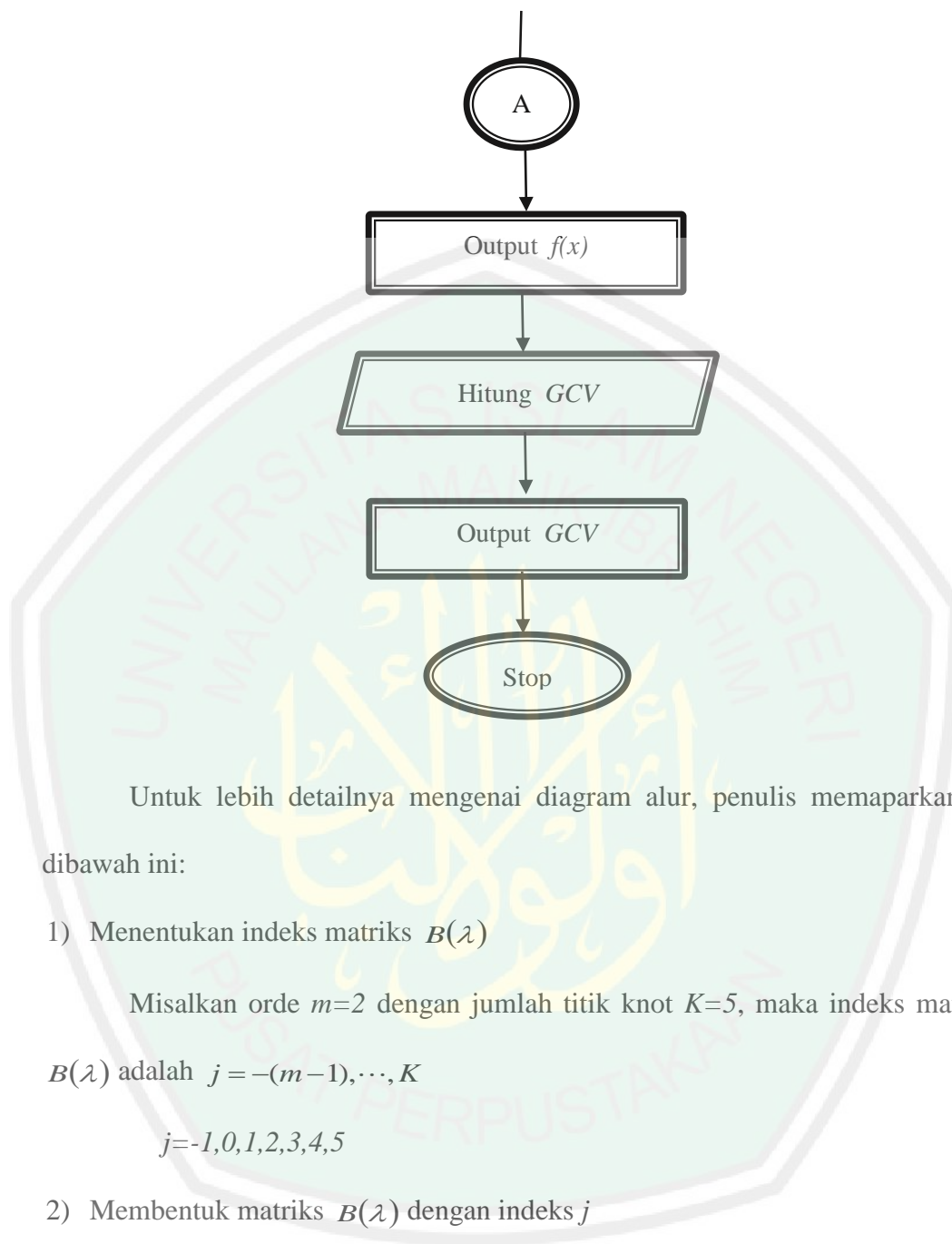
Gambar grafik 3.2 menunjukkan hubungan antara radiasi UV Matahari (kilo Joule) vs konsentrasi ozon (mPa) pada bulan april 2013. Hubungan antara radiasi UV vs konsentrasi ozon terhadap waktu menunjukkan pola kenaikan dan penurunan. Pada interval pukul 06:00 sampai pukul 12:00 dimulai dari sebelah kanan ke sebelah kiri pada posisi ozon kira-kira berada pada titik 32,01 dan radiasi UV Matahari kira-kira berapa pada posisi 0,1 sampai pada posisi tertinggi pada plot data, konsentrasi ozon semakin menurun. Sekitar pukul 12:15 terjadi anomali yaitu perubahan kondisi fisis dimana konsentrasi ozon menurun sedangkan radiasi UV pada posisi tertinggi. Pada interval pukul 12:15 sampai pukul 18:00, konsentrasi ozon dan radiasi UV berkurang. Hal tersebut dikarenakan adanya pengaruh dari parameter-parameter lain yang membantu dalam proses pemantulan dan penghambatan radiasi UV yang sampai ke bumi. Sehingga akan mengakibatkan radiasi UV semakin menurun.

3.4 Algoritma Program

Untuk mengestimasi data radiasi UV Matahari terhadap konsentrasi ozon dengan menggunakan bentuk estimasi dari fungsi regresi nonparametrik dengan pendekatan fungsi basis *B-Spline* pada bentuk (3.28). Bentuk persamaan (3.28)

mengandung matriks $B(\lambda)$ yang harus dicari terlebih dahulu dengan menggunakan software Matlab R2011b. Adapun langkah-langkah untuk memperoleh matriks $B(\lambda)$ sebagai berikut dituliskan dalam diagram alir:





Untuk lebih detailnya mengenai diagram alur, penulis memaparkannya dibawah ini:

- 1) Menentukan indeks matriks $B(\lambda)$

Misalkan orde $m=2$ dengan jumlah titik knot $K=5$, maka indeks matriks $B(\lambda)$ adalah $j = -(m-1), \dots, K$
 $j = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- 2) Membentuk matriks $B(\lambda)$ dengan indeks j

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{-1,2}(x_1) & B_{0,2}(x_1) & B_{1,2}(x_1) & B_{2,2}(x_1) & \dots & B_{5,2}(x_1) \\ B_{-1,2}(x_2) & B_{0,2}(x_2) & B_{1,2}(x_2) & B_{2,2}(x_2) & \dots & B_{5,2}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-1,2}(x_n) & B_{0,2}(x_n) & B_{1,2}(x_n) & B_{2,2}(x_n) & \dots & B_{5,2}(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Dengan ukuran matriks 49×7

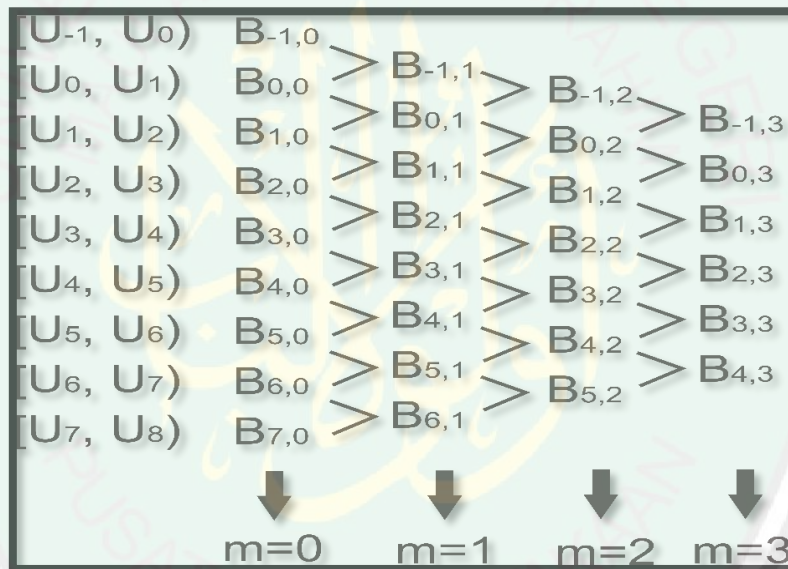
- 3) Menguraikan setiap basis pada matriks $B(\lambda)$

$$B_{j,m} = \frac{x-u_j}{u_{j+m}-u_j} B_{j,m-1}(x) + \frac{u_{j+m+1}-x}{u_{j+m+1}-u_{j+1}} B_{j+1,m-1}(x) \tag{3.32}$$

Ambil basis $B_{1,2}(x)$, jika diuraikan dengan rumus tersebut akan menjadi:

$$B_{1,2} = \frac{x-u_1}{u_3-u_1} B_{1,1}(x) + \frac{u_4-x}{u_4-u_2} B_{2,1}(x)$$

Fungsi basis $B_{1,2}(x)$ dibentuk dari basis $B_{1,1}(x)$ dan $B_{2,1}(x)$. Untuk mempermudah dalam memahami penguraian basis-basis pada matriks $B(\lambda)$ akan digambarkan dalam skema berikut:



Gambar 3.3 Skema basis $m=2$ dan $K=5$

Dari skema tersebut dapat dilihat bahwa untuk memperoleh basis-basis dengan derajat $m=2$, terlebih dahulu harus diketahui nilai pada basis-basis yang sebelumnya yaitu nilai basis pada derajat $m=0$ dan $m=1$. Sebelum menghitung basis pada derajat $m=0$ dan $m=1$, terlebih dahulu harus mendefinisikan titik-titik knot pada bentuk (3.5) dan (3.6). Memisalkan $a=0$ dan $b=49$, maka:

$$u_{-1} = u_0 = 0 \text{ dan } u_6 = \dots = u_8 = 49, \text{ sedangkan } u_1, u_2, \dots, u_5 \text{ inputan. Ambil}$$

$$u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 12, u_5 = 15$$

1. Pada derajat $m=0$ berlaku:

$$B_{j,0}(x) = \begin{cases} 1, & u_j \leq x < u_{j+1} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Untuk memperoleh nilai basis pada skema (3.3), sesuai dengan syarat untuk derajat $m=0$, maka:

$$B_{-1,0}(x) = \begin{cases} 1, & u_{-1} \leq x < u_0 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$B_{0,0}(x) = \begin{cases} 1, & u_0 \leq x < u_1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$B_{1,0}(x) = \begin{cases} 1, & u_1 \leq x < u_2 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$B_{2,0}(x) = \begin{cases} 1, & u_2 \leq x < u_3 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

⋮

$$B_{7,0}(x) = \begin{cases} 1, & u_7 \leq x < u_8 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Sehingga elemen-elemen matriks untuk derajat $m=0$ akan bernilai 1 dan 0 dengan ukuran matriks 49×9 .

2. Pada derajat $m=1$ dengan menggunakan formula (3.32):

$$\begin{aligned} B_{0,1}(x) &= \frac{x-u_0}{u_1-u_0} B_{0,0}(x) + \frac{u_2-x}{u_2-u_1} B_{1,0}(x) \\ &= \frac{x-0}{3-0} B_{0,0}(x) + \frac{6-x}{6-3} B_{1,0}(x) \end{aligned}$$

$$= 0,3xB_{0,0}(x) + 0,3(6-x)B_{1,0}(x)$$

1. Jika x pada $[0,3)$, maka $B_{0,1}(x)$ adalah $0,3xB_{0,0}(x) = 0,3x$
2. Jika x pada $[3,6)$, maka $B_{0,1}(x)$ adalah $0,3(6-x)B_{0,0}(x) = 0,3(6-x)$

$$\begin{aligned} B_{1,1}(x) &= \frac{x-u_1}{u_2-u_1} B_{1,0}(x) + \frac{u_3-x}{u_3-u_2} B_{2,0}(x) \\ &= \frac{x-3}{6-3} B_{1,0}(x) + \frac{9-x}{9-6} B_{2,0}(x) \\ &= 0,3(x-3)B_{1,0}(x) + 0,3(9-x)B_{2,0}(x) \end{aligned}$$

1. Jika x pada $[3,6)$, maka $B_{1,1}(x)$ adalah $0,3(x-3)B_{1,0}(x) = 0,3(x-3)$
2. Jika x pada $[6,9)$, maka $B_{1,1}(x)$ adalah $0,3(9-x)B_{2,0}(x) = 0,3(9-x)$

$$\begin{aligned} B_{2,1}(x) &= \frac{x-u_2}{u_3-u_2} B_{2,0}(x) + \frac{u_4-x}{u_4-u_3} B_{3,0}(x) \\ &= \frac{x-6}{9-6} B_{2,0}(x) + \frac{12-x}{12-9} B_{3,0}(x) \\ &= 0,3(x-6)B_{2,0}(x) + 0,3(12-x)B_{3,0}(x) \end{aligned}$$

1. Jika x pada $[6,9)$, maka $B_{2,1}(x)$ adalah $0,3(x-6)B_{2,0}(x) = 0,3(x-6)$
2. Jika x pada $[9,12)$, maka $B_{2,1}(x)$ adalah $0,3(12-x)B_{3,0}(x) = 0,3(12-x)$

Untuk basis yang selanjutnya pada $m=1$, dengan menggunakan langkah yang sama dengan melihat posisi basis berdasarkan posisi knot pada skema (3.3).

3. Untuk derajat $m=2$ dengan menggunakan formula (3.32):

- a. Basis $B_{0,2}(x)$

$$B_{0,2}(x) = \frac{x-u_0}{u_2-u_0} B_{0,1}(x) + \frac{u_3-x}{u_3-u_1} B_{1,1}(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x-0}{6-0} B_{0,1}(x) + \frac{9-x}{9-3} B_{1,1}(x) \\
 &= 0,16x B_{0,1}(x) + 0,16(9-x) B_{1,1}(x)
 \end{aligned}$$

Catatan:

$B_{0,1}(x)$ bukan nol pada interval $[0,3)$ dan $[3,6)$

$B_{1,1}(x)$ bukan nol pada interval $[3,6)$ dan $[6,9)$, maka:

1. x pada interval $[0,3)$

$B_{0,1}(x)$ menambah nilai basis $B_{0,2}(x)$, karena $B_{0,1}(x) = 0,3x$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 B_{0,2}(x) &= 0,16x B_{0,1}(x) \\
 &= (0,16x)(0,3x) \\
 &= 0,048x^2
 \end{aligned}$$

2. x pada interval $[3,6)$

$B_{0,1}(x)$ dan $B_{1,1}(x)$ menambah nilai basis $B_{0,2}(x)$, karena

$B_{0,1}(x) = 0,3(6-x)$ dan $B_{1,1}(x) = 0,3(x-3)$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 B_{0,2}(x) &= 0,16x B_{0,1}(x) + 0,16(9-x) B_{1,1}(x) \\
 &= (0,16x)((0,3)(6-x)) + 0,16(9-x)((0,3)(x-3))
 \end{aligned}$$

3. x pada interval $[6,9)$

Hanya $B_{1,1}(x)$ yang menambah nilai $B_{0,2}(x)$, karena $B_{1,1}(x) = 0,3(x-6)$,

sehingga:

$$\begin{aligned}
 B_{0,2}(x) &= 0,16(9-x) B_{1,1}(x) \\
 &= 0,16(9-x)((0,3)(x-6))
 \end{aligned}$$

b. Basis $B_{1,2}(x)$ dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B_{1,2}(x) &= \frac{x-u_1}{u_3-u_1} B_{1,1}(x) + \frac{u_4-x}{u_4-u_2} B_{2,1}(x) \\ &= \frac{x-3}{9-3} B_{1,1}(x) + \frac{12-x}{12-6} B_{2,1}(x) \\ &= 0,16(x-3)B_{1,1}(x) + 0,16(12-x)B_{2,1}(x) \end{aligned}$$

Catatan:

$B_{1,1}(x)$ bukan nol pada interval $[3,6)$ dan $[6,9)$

$B_{2,1}(x)$ bukan nol pada interval $[6,9)$ dan $[9,12)$, maka:

1. x pada interval $[3,6)$

$B_{1,1}(x)$ menambah nilai basis $B_{1,2}(x)$, karena $B_{1,1}(x) = 0,3(x-3)$, sehingga:

$$\begin{aligned} B_{1,2}(x) &= 0,16(x-3)B_{1,1}(x) \\ &= (0,16)(x-3)((0,3)(x-3)) \end{aligned}$$

2. x pada interval $[6,9)$

$B_{1,1}(x)$ dan $B_{2,1}(x)$ menambah nilai basis $B_{1,2}(x)$, karena

$B_{1,1}(x) = 0,3(9-x)$ dan $B_{2,1}(x) = 0,3(x-6)$, sehingga:

$$\begin{aligned} B_{1,2}(x) &= 0,16(x-3)B_{1,1}(x) + 0,16(12-x)B_{2,1}(x) \\ &= 0,16(x-3)((0,3)(9-x)) + 0,16(12-x)((0,3)(x-6)) \end{aligned}$$

3. x pada interval $[9,12)$

Hanya $B_{2,1}(x)$ yang menambah nilai $B_{1,2}(x)$, karena $B_{2,1}(x) = 0,3(12-x)$

sehingga:

$$\begin{aligned}
 B_{1,2}(x) &= 0,16(12-x)B_{2,1}(x) \\
 &= 0,16(12-x)((0,3)(12-x))
 \end{aligned}$$

Untuk basis selanjutnya pada $m=2$, dengan langkah yang sama melibatkan elemen-elemen pada basis matriks $m=0$ dan $m=1$ yang telah diketahui nilainya. Sehingga akan didapatkan seluruh elemen matriks $B(\lambda)$ pada derajat $m=2$.

- 4) Setelah diperoleh matriks $B(\lambda)$, menghitung penaksir α yaitu $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = (B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y$$

- 5) Hitung $\hat{f}(x)$

$$\hat{f}(x) = B(\lambda)\hat{\alpha}$$

- 6) Hitung GCV

3.5 Output Program

Dalam membentuk suatu model regresi *B-Spline*, yang harus diperhatikan adalah orde untuk model, banyaknya knot, dan lokasi penempatan knot. Orde untuk model dapat ditentukan berdasarkan sebaran data. Sedangkan banyaknya knot dan lokasi penempatan knot ditentukan berdasarkan perubahan pola di daerah tertentu pada kurva. Dari ketiga hal tersebut digunakan untuk membangun model regresi *B-spline* terbaik. Pada penelitian ini penulis akan membandingkan jumlah knot dan penempatan posisi knot dengan melihat nilai MSE dan GCV. Pada plot data hubungan antara intensitas radiasi UV Matahari vs konsentrasi ozon pada gambar 3.1 dan gambar 3.2, penulis dapat menentukan jumlah dan posisi knot.

Hasil dari program MATLAB R2011b diperoleh nilai MSE dan GCV untuk jumlah knot dan posisi knot yang berbeda-beda pada data Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi ozon bulan maret 2013 dan april 2013 disajikan dalam tabel berikut:

3.5.1 Data Radiasi UV Matahari Vs Konsentrasi Ozon pada bulan Maret 2013

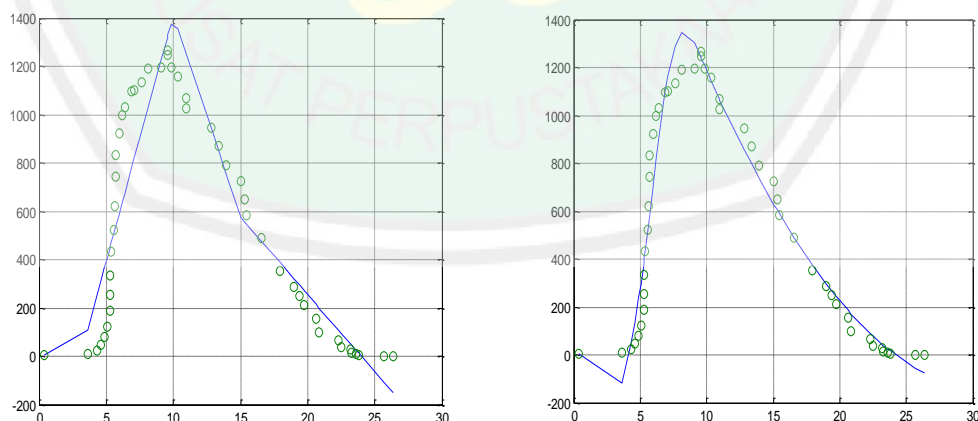
Tabel 3.1 GCV dan MSE Radiasi UV Matahari Vs Konsentrasi Ozon Maret 2013

Orde	Banyak Knot (i)	Titik Knot	Jumlah semua knot (O_i)	E_i	$O_i - E_i$ (A)	A^2	$\chi_{hit}^2 = \frac{A^2}{E_i}$	Nilai MSE	Nilai GCV
Linier (m=2)	3	4, 8, 12	15	20	-5	25	1,25	4,7595	5,9027
		2, 6, 8						4,7622	5,9060
		3, 6, 9						4,7489	5,8895
		3, 10, 15						4,6086	5,7155
		5, 9, 13						4,6634	5,7835
	4	2, 4, 6, 8	20	20	0	0	0	4,8116	6,2481
		2, 7, 9, 11						4,7733	6,1983
		3, 5, 7, 9						4,7970	6,2290
		3, 7, 10, 13						4,7795	6,2064
		4, 9, 13, 17						4,7025	6,1064
	5	5, 6, 9, 16, 20	25	20	5	25	1,25	4,8868	6,6514
		5, 6, 9, 15, 21						4,8882	6,6534
		5, 6, 9, 22, 23						4,8877	6,6527
		5, 6, 9, 13, 20						4,8872	6,6520
		5, 6, 9, 17, 22						4, 8883	6,6535
Kuadratik (m=3)	3	2, 4, 6	15	20	-5	25	1,25	4,4345	5,7584
		2, 6, 8						4,8130	6,2499
		3, 6, 9						4,8099	5,2459
		3, 10, 15						4,7729	6,1978
		5, 9, 13						4,8138	6,2510
	4	2, 4, 6, 8	20	20	0	0	0	4,8190	6,5592
		2, 7, 9, 11						4,8207	6,5614
		3, 5, 7, 9						4,8415	6,5898
		3, 7, 10, 13						4,7752	6,4995
		4, 9, 13, 17						4,7759	6,5005
	5	5, 6, 9, 16, 20	25	20	5	25	1,25	4,8213	6,8863
		5, 6, 9, 15, 21						4,8210	6,8859
		5, 6, 9, 22, 23						4,8200	6,8845
		5, 6, 9, 13, 20						4,8208	6,8857
		5, 6, 9, 17, 22						4,8213	6,8863

Berdasarkan tabel 3.1 dapat dilihat bahwa nilai *Chi-square* hitung untuk orde linier χ_1^2 dan kuadratik χ_2^2 mempunyai nilai yang sama sebesar 1,25. Hal ini

menunjukkan bahwa kedua model tidak berbeda. Untuk melihat tingkat signifikansinya, maka hasil χ^2 hitung dibandingkan dengan χ^2 tabel. Untuk orde linier, nilai *Chi-square* tabel ($\chi_1^2 = 3,841$) dengan derajat kebebasan $n-1=1$ dan untuk orde kuadratik, nilai *Chi-square* tabel ($\chi_2^2 = 5,991$) dengan derajat kebebasan $n-1=2$. Dari hasil tersebut didapatkan bahwa nilai χ^2 hitung $< \chi^2$ tabel yang berarti model linier maupun model kuadratik sama-sama model yang baik.

Selain membandingkan nilai *Chi-square* dari kedua orde, dari tabel 3.1 dapat dilihat bahwa semakin banyak jumlah knot pada kedua orde, akan berpengaruh dengan semakin besarnya nilai MSE dan GCV. Nilai GCV terkecil dari kedua orde tersebut terdapat pada jumlah knot 3 dengan posisi yang berbeda. Pada orde linier ($m=2$) dengan posisi knot 3, 10, 15 diperoleh GCV minimum sebesar 5,7155, sedangkan pada orde kuadratik ($m=3$), dengan posisi knot 3, 6, 9 diperoleh GCV minimum sebesar 5,2459. Berikut ini grafik estimasi dari kedua orde dengan masing-masing knot optimumnya:

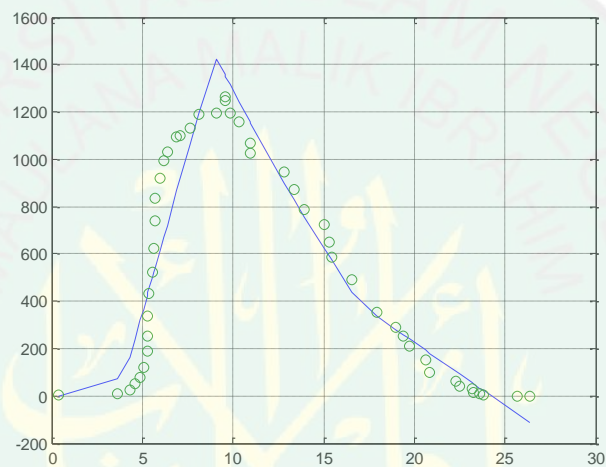


Gambar 3.4 (a) *B-Spline* linier 3 knot 3, 10, 15 dan (b) *B-Spline* kuadratik 3 knot 3, 6, 9

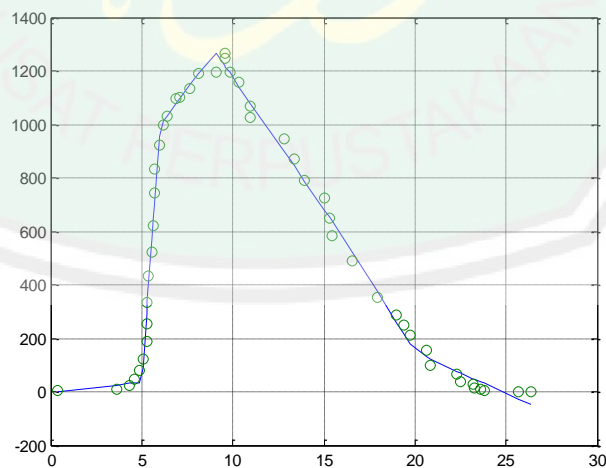
Dari kedua grafik tersebut dapat dilihat bahwa ada banyak data yang tidak dilalui oleh estimasi kurva *B-Spline*. Sehingga dapat dinyatakan bahwa dalam

menentukan model regresi terbaik tidak hanya dibandingkan dari besarnya nilai GCV, selain itu yang harus diperhatikan yaitu apakah model tersebut jika diterapkan pada data sudah mendekati semua titik data atau belum.

Dalam menentukan model terbaik, tidak hanya dilihat nilai GCV minimum, tetapi juga harus dilihat nilai MSE dan ketepatan kurva dalam mendekati sebaran data. Berikut ini plot dari estimasi *B-Spline* dengan 4 dan 5 titik knot:



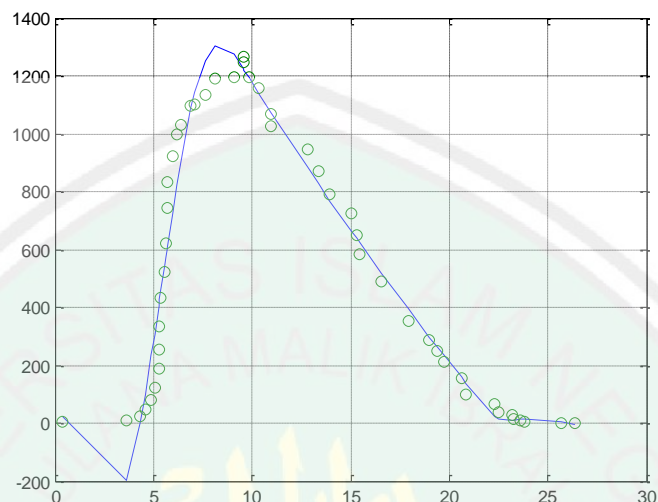
Gambar 3.5 plot *B-Spline* linier 4 knot 4, 9, 13, 17



Gambar 3.6 plot *B-Spline* linier 5 knot 5, 6, 9, 16, 20

Dari gambar 3.5 dan gambar 3.6, dapat dilihat perbandingan antara 4 titik knot dan 5 titik knot. Dengan 5 titik knot, kurva *B-Spline* relatif lebih baik dalam

mendekati sebaran data dibandingkan dengan 4 titik knot. Sehingga jumlah knot yang optimum adalah 5 knot. Dari tabel 3.1, pada jumlah knot sebanyak 5 knot,



nilai GCV minimum terdapat pada orde linier ($m=2$) dengan posisi knot 5, 6, 9, 16, 20 yaitu sebesar 6,6514. Jika dilihat dari nilai MSE minimum, terdapat pada orde kuadratik ($m=3$) pada posisi knot 5, 6, 9, 22, 23.

Gambar 3.7 plot *B-Spline* Kuadratik 5 knot 5, 6, 9, 22, 23

Gambar 3.6 adalah plot dari nilai GCV minimum dan gambar 3.7 adalah plot dari nilai MSE minimum. Dalam menentukan model terbaik selain diukur dari nilai GCV dan MSE, selain itu juga diperlukan ketepatan kurva regresi dalam mendekati sebaran data. Alasan lainnya dikarenakan bentuk persamaan linier lebih simpel dan lebih mudah penyelesaiannya daripada persamaan kuadratik. Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk mendekati hubungan antara radiasi UV Matahari dan Konsentrasi Ozon digunakan pendekatan regresi *B-Spline* linier dengan jumlah knot 5, dan pada posisi knot 5, 6, 9, 16, 20. Dari titik-titik knot tersebut, maka dapat ditentukan model regresi *B-Spline* linier dengan 5 titik knot:

$\hat{y} = 0,0011B_0 + 0,0357B_1 + 0,9960B_2 + 1,2739B_3 + 0,5824B_4 + 0,1486B_5 - 0,0522B_6$
dengan:

$$B_0 = B_{-1,2}(x), \quad B_1 = B_{0,2}(x), \quad B_2 = B_{1,2}(x), \quad B_3 = B_{2,2}(x), \quad B_4 = B_{3,2}(x), \quad B_5 = B_{4,2}(x)$$

$$B_6 = B_{5,2}(x).$$

Berdasarkan nilai *Chi-square*, GCV, MSE, dan ketepatan garis regresi dalam mendekati data, dapat disimpulkan bahwa model regresi *B-Spline* linier dengan 5 titik knot 5, 6, 9, 16, 20 memadai sebagai model pendekatan untuk data hubungan radiasi UV Matahari vs konsentrasi ozon Maret 2013.

Dalam memilih sesuatu yang tepat juga dijelaskan dalam al-Qur'an Surat al-Kahfi ayat 12 yang berbunyi:

ثُمَّ بَعَثْنَاَهُمْ لِنَتَّعَلَّمَ أَيُّ الْجَزْبَيْنِ أَحْصَى لِمَا لَبِثُوا أَمَدًا



Artinya: "Kemudian kami bangunkan mereka, agar kami mengetahui manakan diantara kedua golongan itu yang lebih tepat dalam menghitung berapa lama mereka tinggal (dalam gua itu)".

Kata *أَيُّ الْجَزْبَيْنِ* menunjukkan arti kedua golongan itu ialah pemuda-pemuda itu sendiri yang berselisih tentang berapa lamanya mereka tinggal dalam gua itu. Ayat tersebut menjelaskan tentang kekuasaan Allah dalam menjaga dan mengawasi hamba-hamba-Nya. Selama dalam gua, para pemuda tersebut dikawal langsung oleh Allah. Allah memberikan daya hidup kepada mereka dan menutup telinga mereka agar tidur mereka tidak terganggu oleh suara bising dari luar. Dengan begitu, mereka pun dapat tidur nyenyak dan pulas. Dengan cara ini, Allah ingin menguji siapa diantara mereka yang tertidur dalam gua itu. Mengenai waktu yang mereka habiskan dalam gua, mereka ternyata berbeda dalam hitungan. Ini berarti keterbatasan ilmu manusia untuk mengetahui secara pasti tentang pengalaman mereka selama dalam gua, khususnya tentang waktu yang telah mereka

habiskan. Ada diantara mereka yang berpendapat, mereka berada didalam gua hanya setengah hari saja, sementara yang lain mengatakan baru satu hari. Ini memberi pelajaran bagi manusia bahwa waktu berjalan demikian cepat, dan tidak ada yang pasti dalam perkiraan atau perhitungan manusia. Hanya ilmu Allah sajalah yang pasti. Ilmu manusia penuh dengan kemungkinan (*probability*) dan keraguan (*doubtfulness*).

Dari ayat tersebut telah disebutkan bahwa tidak ada sesuatu yang pasti dalam perhitungan manusia. Hanya Allah saja yang memiliki kepastian. Oleh karena itu, manusia hanya bisa memperkirakan sesuatu termasuk dalam memperkirakan fungsi estimasi untuk radiasi UV Matahari terhadap konsentrasi ozon.

3.5.2 Data Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon pada bulan April 2013

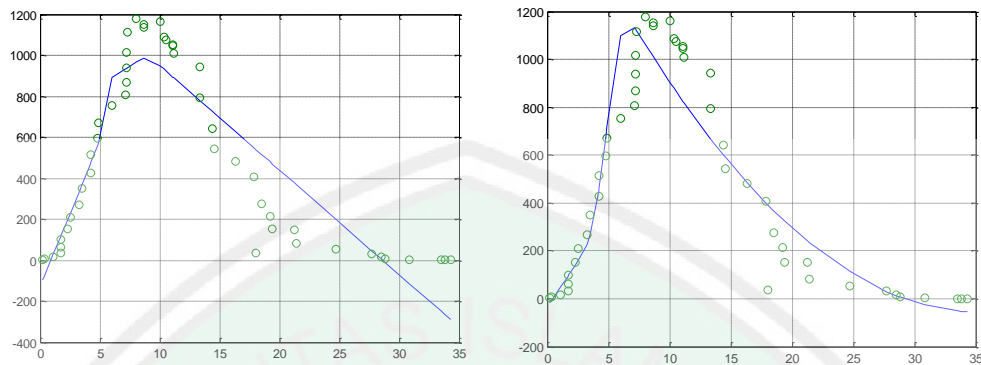
Tabel 3.2 GCV dan MSE Radiasi UV Matahari Vs Konsentrasi Ozon April 2013

Orde	Banyak Knot (i)	Titik Knot	Jumlah seluruh knot (O_i)	E_i	$O_i - E_i$ (A)	A^2	$\chi^2_{hit} = \frac{A^2}{E_i}$	Nilai MSE	Nilai GCV
Linier ($m=2$)	3	5, 6,9	15	20	-5	25	1,25	3,8801	4,8120
		3, 5,7						3,8846	4,8176
		4, 8, 12						3,9442	4,8916
		4, 10, 15						4,0556	5,0298
		5, 7, 10						3,8814	4,8136
	4	3, 6, 9, 12	20	20	0	0	0	3,9880	5,1786
		3, 7, 10, 15						4,0683	5,2829
		4, 8, 12, 16						4,0985	5,3221
		4, 9, 13, 20						4,1086	5,3351
		5, 9, 14, 25						4,0839	5,3031
	5	2, 6, 9, 14, 20	25	20	5	25	1,25	4,1136	5,5990
		3, 6, 9, 17, 22						4,1106	5,5950
		4, 10, 12, 17, 26						4,0893	5,5660
		5, 7, 11, 15, 20						4,0953	5,5741
			6, 12, 18, 24, 30					4,0666	5,5351
	3	5, 6,9	15	20	-5	25	1,25	4,0544	5,2648
		3, 5,7						3,9449	5,1226
		4, 8, 12						4,0992	5,3229
		4, 10, 15						4,0846	5,3041

Kuadratik ($m=3$)	4	5, 7, 10	20	20	0	0	0	4,0954	5,3180
		3, 6, 9, 12						4,0996	5,5800
		3, 7, 10, 15						4,0984	5,5784
		4, 8, 12, 16						4,1049	5,5872
		4, 9, 13, 20						4,1124	5,5975
		5, 9, 14, 25						4,1091	5,5930
	5	2, 6, 9, 14, 20	25	20	5	25	1,25	4,1144	5,8766
		3, 6, 9, 17, 22						4,1017	5,8585
		4, 10, 12, 17, 26						4,1108	5,8716
		5, 7, 11, 15, 20						4,1135	5,8754
		6, 12, 18, 24, 30						4,1103	5,8709

Berdasarkan tabel 3.2 dapat dilihat bahwa nilai *Chi-square* hitung untuk orde linier χ_1^2 dan kuadratik χ_2^2 mempunyai nilai yang sama sebesar 1,25. Hal ini menunjukkan bahwa kedua model tidak berbeda. Untuk melihat tingkat signifikansinya, maka hasil χ^2 hitung dibandingkan dengan χ^2 tabel. Untuk orde linier, nilai *Chi-square* tabel ($\chi_1^2 = 3,841$) dengan derajat kebebasan $n-1=1$ dan untuk orde kuadratik, nilai *Chi-square* tabel ($\chi_2^2 = 5,991$) dengan derajat kebebasan $n-1=2$. Dari hasil tersebut didapatkan bahwa nilai χ^2 hitung $<$ χ^2 tabel yang berarti model linier maupun model kuadratik sama-sama model yang baik.

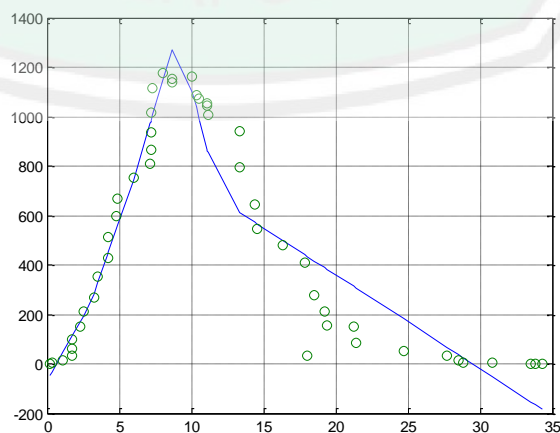
Selain melihat perbandingan nilai *Chi-square* dari kedua orde, dari tabel 3.2 dapat dilihat bahwa semakin banyak jumlah knot pada kedua orde, akan berpengaruh dengan semakin besarnya nilai MSE dan GCV. Nilai GCV terkecil dari kedua orde tersebut terdapat pada jumlah knot 3 dengan posisi yang berbeda. Pada orde linier ($m=2$) dengan posisi knot 5, 6, 9 diperoleh nilai GCV minimum sebesar 3,8801, sedangkan pada orde kuadratik ($m=3$) dengan posisi knot 3, 5, 7 diperoleh nilai GCV minimum sebesar 5,1226. Berikut ini grafik estimasi dari kedua orde dengan masing-masing knot optimumnya:



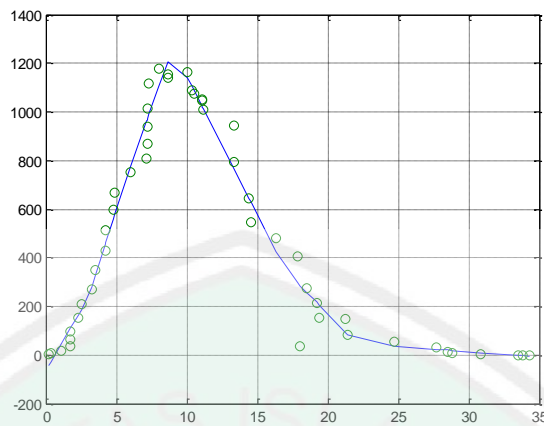
Gambar 3.8 (a) plot *B-Spline* linier 3 knot 5, 6, 9 dan (b) plot *B-Spline* kuadratik 3 knot 3, 5, 7

Dari gambar 3.8 (a) dan 3.8 (b) dapat dilihat bahwa ada banyak data yang tidak dilalui oleh estimasi kurva *B-Spline*. Sehingga dapat dianalisa bahwa dalam menentukan model regresi terbaik tidak hanya melihat dari minimumnya nilai GCV, selain itu juga yang harus diperhatikan yaitu apakah model tersebut jika di terapkan pada data sudah melalui semua titik data atau belum.

Gambar 3.8 (a) dan 3.8 (b) menunjukkan bahwa dengan jumlah knot sebanyak 3, ternyata masih banyak data yang belum dihamperi oleh kurva. Sehingga nilai MSE dan GCV minimum belum bisa menjamin model tersebut adalah model terbaik. Berikut ini akan diberikan grafik dengan 4 dan 5 knot:

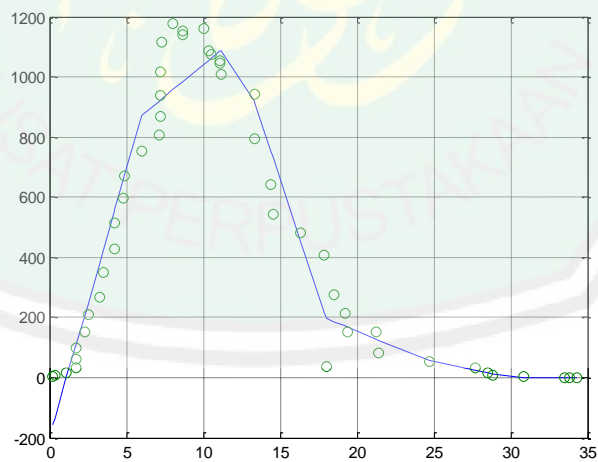


Gambar 3.9 plot *B-Spline* linier 4 knot 3, 6, 9, 12

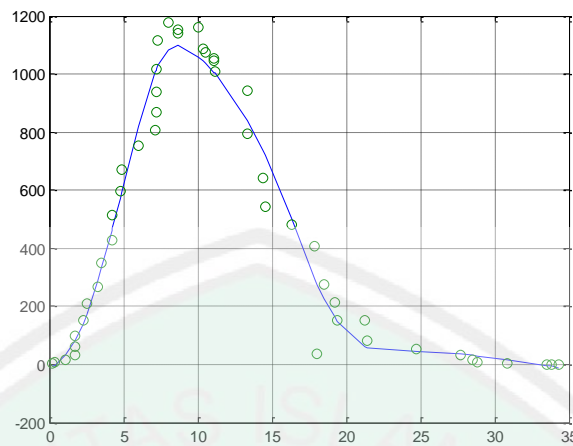


Gambar 3.10 plot *B-Spline* linier 5 knot 3, 6, 9, 17, 22

Dari gambar 3.9 dan 3.10 dapat dilihat perbandingan antara 4 titik knot dan 5 titik knot. Dengan 5 titik knot, banyak data yang dilalui oleh kurva *B-Spline* dibandingkan dengan 4 titik knot, sehingga jumlah knot yang optimum adalah 5 knot. Dari tabel 3.2, pada jumlah knot sebanyak 5 knot, pada orde linier ($m=2$) dengan posisi knot 6, 12, 18, 24, 30 diperoleh nilai GCV minimum sebesar 5,5351 dan nilai MSE sebesar 4,0666.



Gambar 3.11 plot *B-Spline* linier 5 knot 6, 12, 18, 24, 30



Gambar 3.12 plot *B-Spline* kuadratik 5 knot 3, 6, 9, 17, 22

Nilai GCV dan MSE minimum pada orde kuadratik ($m=3$) terdapat pada knot 3, 6, 9, 17, 22 yang ditunjukkan pada gambar 3.12. Dalam menentukan model terbaik selain nilai GCV dan MSE, selain itu juga diperlukan ketepatan kurva regresi dalam mendekati sebaran data. Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk mendekati hubungan antara radiasi UV Matahari dan Konsentrasi Ozon pada bulan april 2013 digunakan pendekatan regresi *B-Spline* kuadratik dengan jumlah knot 5, dan pada posisi knot 3, 6, 9, 17, 22. Dari titik-titik knot tersebut, maka dapat ditentukan model regresi *B-Spline* kuadratik dengan 5 titik knot:

$$\hat{y} = -0,0065B_0 + 0,0101B_1 + 0,4953B_2 + 1,1348B_3 + 0,9878B_4 + 0,0520B_5 \\ + 0,0471B_6 - 0,0116B_7$$

dengan:

$$B_0 = B_{-2,3}(x), B_1 = B_{-1,3}(x), B_2 = B_{0,3}(x), B_3 = B_{1,3}(x), B_4 = B_{2,3}(x), B_5 = B_{3,3}(x), B_6 = B_{4,3}(x) \\ , B_7 = B_{5,3}(x).$$

Berdasarkan nilai *Chi-square*, GCV, MSE, dan ketepatan garis regresi dalam mendekati data, dapat disimpulkan bahwa model regresi *B-Spline* kuadratik

dengan 5 titik knot 5, 6, 9, 16, 20 memadai sebagai model pendekatan untuk data hubungan Radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon April 2013.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis yang sudah dijabarkan pada pembahasan, dapat disimpulkan:

1. Bentuk estimasi regresi nonparametrik dengan pendekatan *B-Spline* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= B(\lambda)\hat{\alpha} \\ &= B(\lambda)(B(\lambda)^T B(\lambda))^{-1} B(\lambda)^T y\end{aligned}$$

2. Hasil analisis model regresi *B-Spline* linier dan kuadratik memiliki nilai *Chi-square* yang sama yaitu nilai *Chi-square* lebih kecil dari *Chi-square* tabel, yang berarti model linier maupun model kuadratik sama-sama model terbaik. Nilai MSE dan GCV dari kedua model mendekati sama. Model yang diperoleh untuk masing-masing hubungan antara radiasi UV Matahari dan Konsentrasi Ozon sebagai berikut:

- a. Model regresi nonparametrik untuk estimasi radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon bulan Maret 2013 diperoleh model *B-Spline* linier dengan jumlah knot 5 dan pada posisi $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 16, u_5 = 20$:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 0,0011B_0 + 0,0357B_1 + 0,9960B_2 + 1,2739B_3 + 0,5824B_4 \\ &+ 0,1486B_5 - 0,0522B_6\end{aligned}$$

dengan:

$$B_0 = B_{-1,2}(x), \quad B_1 = B_{0,2}(x), \quad B_2 = B_{1,2}(x), \quad B_3 = B_{2,2}(x), \quad B_4 = B_{3,2}(x),$$

$$B_5 = B_{4,2}(x), \quad B_6 = B_{5,2}(x)$$

- b. Model regresi nonparametrik untuk estimasi radiasi UV Matahari vs Konsentrasi Ozon bulan April 2013 diperoleh model *B-Spline* kuadratik dengan jumlah knot 5 dan pada posisi $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 17, u_5 = 22$

$$\hat{y} = -0,0065B_0 + 0,0101B_1 + 0,4953B_2 + 1,1348B_3 + 0,9878B_4 + 0,0520B_5$$

$$+ 0,0471B_6 - 0,0116B_7$$

dengan:

$$B_0 = B_{-2,3}(x), \quad B_1 = B_{-1,3}(x), \quad B_2 = B_{0,3}(x), \quad B_3 = B_{1,3}(x), \quad B_4 = B_{2,3}(x),$$

$$B_5 = B_{3,3}(x), \quad B_6 = B_{4,3}(x), \quad B_7 = B_{5,3}(x)$$

4.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya antara lain:

- Penelitian selanjutnya dengan menggunakan pengamatan yang lebih banyak sehingga dapat menambah jumlah knot yang lebih banyak.
- Dapat membandingkan dengan metode pendekatan lainnya seperti *truncated power basis*.
- Untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik dapat menggunakan metode pendekatan lainnya seperti kernel, histogram, deret fourier, dll.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Agustini, T. 2011. *Analisis Regresi Spline Kuadratik*. Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. UNY.
- Angelina, C. & Katharina, O., *Paparan Fisis Pencahayaan Terhadap Mata dalam Kegiatan Pengelasan*.
- Botella, O. And Shariff, K., 2003, "B-Spline Method in Fluid Dynamics". *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17(2), 133-149.
- Budiantara, I. N. 2006a. *Regresi Nonparametrik Dalam Statistika*, Makalah Pembicara Utama pada Seminar Nasional Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Makasar (UNM), Makasar.
- Budiantara, I. N. 2006b. *Model Spline Dengan Knot Optimal*, jurusan Ilmu Dasar, FMIPA Universitas Jember, 7, 77-85.
- Budiantara, I. N., Suryadi, F., Otok, B. Dan Guritno, S. 2006. *Pemodelan B-Spline dan MARS pada Nilai Ujian Masuk Terhadap IPK Mahasiswa Jurusan Desain Komunikasi UK Petra*, Surabaya, Jurnal Teknik Industri, 8, 1-13.
- Budiantara, I.N., Lestari,B., dan Islamiyati, A. 2009a. *Estimator Spline Terbobot dan Spline Parsial Terbobot Dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik Heteroskedastik untuk Data Longitudinal*, Laporan Penelitian Hibah Kompetensi Tahun I, DP2M DIKTI, Jakarta.
- Budiantara, I. N. 2009b. *Spline Dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik :Sebuah Pemodelan Statistika Masa Kini dan Masa Mendatang*, Pidato Pengukuhan Guru Besar Pada Jurusan Statistika, FMIPA-ITS, Surabaya, 25 April 2009.
- Budiantara, I. N., dan Ratna, M. 2010. *Pendekatan Spline Bivariat Terbobot Dalam Regresi Nonparametrik Multirespon dan Semiparametrik Multirespon*, Laporan Penelitian Fundamental, Tahun I, DP2M DIKTI, Jakarta.
- Budiantara. 2010. *Pengembangan Parameter Teknologi Terhadap Prediksi Produktivitas Pembangunan Kapal dengan Pendekatan Spline Kubik*. Jurusan Teknologi, 14 (2). 121-127. Surabaya.
- Eubank, R.L., 1988. *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*, Marcel Dekker: New York.
- Harini, S. & Turmudi. 2008. *Metode Statistika*. Malang: UIN Malang Press.

- Hidayati, N. M.. 2014. *Estimasi Regresi Semiparametrik dengan Pendekatan B-Spline*. Skripsi. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN.
- Lestari, B., Budiantara, I. N., Sunaryo, S, dan Mashuri, M. 2010. Spline Estimator of Triple Response Nonparametric Regression Model, *Journal of Mathematics and Statistics*, 6, 327332.
- Suryadi, F.. 2006. *B-Spline dan Spline dalam Regresi Nonparametrik serta Penerapannya*. Thesis. Thesis tidak dipublikasikan. Surabaya: ITS.
- Pustakafisika. Wordpress.Com/2012/11/16/Menyelidiki-energi-pancaran-matahari.
- Wahba (1990) dalam Budiantara (2009b). *Spline Dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik: Sebuah Pemodelan Statistika Masa Kini dan Masa Mendatang*, Pidato Pengukuhan Guru Besar Pada Jurusan Statistika, FMIPA-ITS, Surabaya, 25 April 2009.
- Yuyun, Y., Dadan, K., dan Muhlashah, N. M. 2013. *Penentuan General Cross Validation (GCV) Sebagai Kriteria dalam Pemilihan Model Regresi B-Spline Terbaik*. Buletin Ilmiah Mat. Sat. Dan Terapannya (Bimaster).

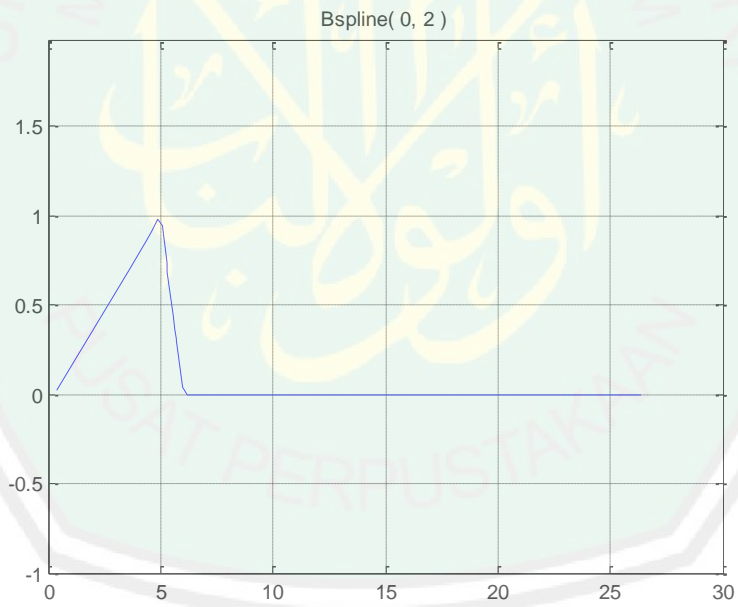
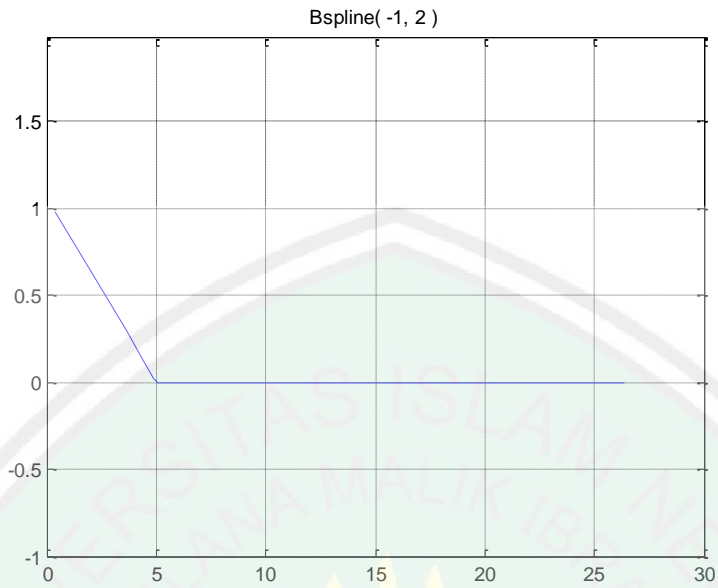
LAMPIRAN I

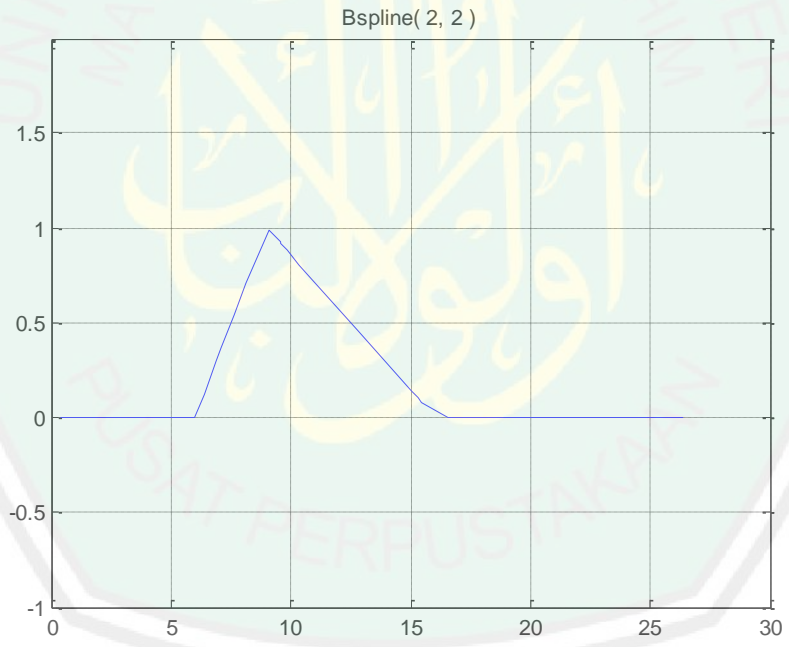
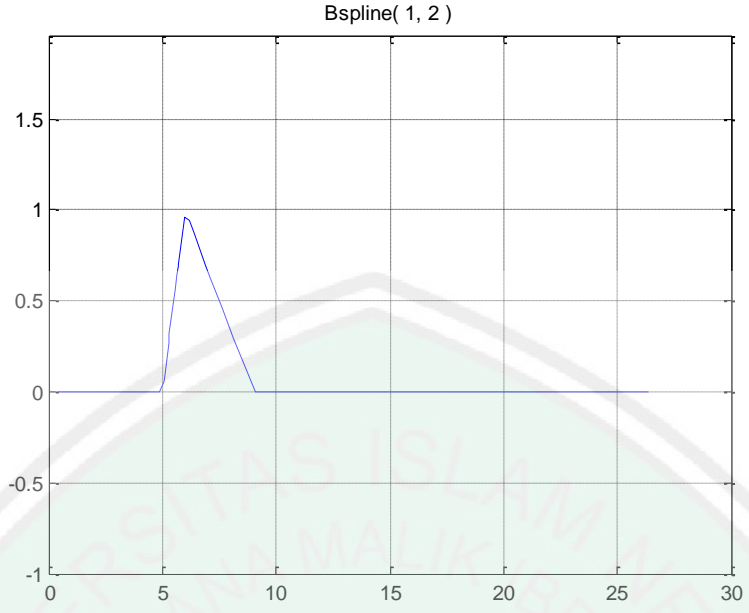
Hasil output matriks *B-Spline* linier untuk data Radiasi UV Matahari maret 2013 dengan 5 knot pada posisi 5, 6, 9, 16, 20

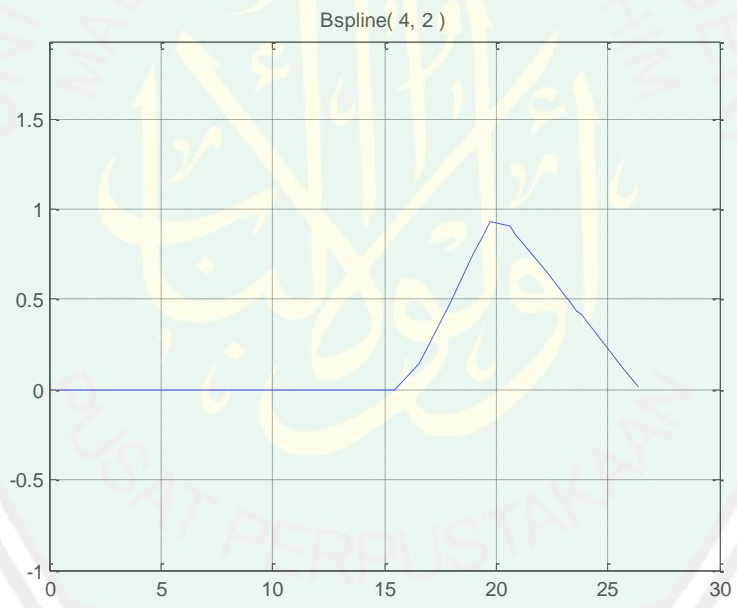
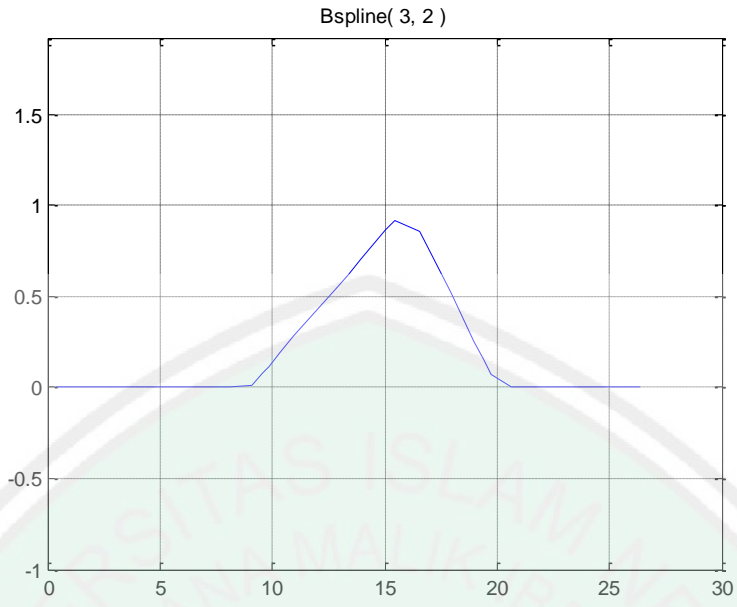
0.9787	0.0213	0	0	0	0	0
0.2979	0.7021	0	0	0	0	0
0.1454	0.8546	0	0	0	0	0
0.0887	0.9113	0	0	0	0	0
0.0213	0.9787	0	0	0	0	0
0	0.9429	0.0571	0	0	0	0
0	0.7333	0.2667	0	0	0	0
0	0.7286	0.2714	0	0	0	0
0	0.6833	0.3167	0	0	0	0
0	0.6222	0.3778	0	0	0	0
0	0.4385	0.5615	0	0	0	0
0	0.3625	0.6375	0	0	0	0
0	0.3077	0.6923	0	0	0	0
0	0.3000	0.7000	0	0	0	0
0	0.0400	0.9600	0	0	0	0
0	0	0.9417	0.0583	0	0	0
0	0	0.8771	0.1229	0	0	0
0	0	0.7000	0.3000	0	0	0
0	0	0.6333	0.3667	0	0	0
0	0	0.4542	0.5458	0	0	0
0	0	0.2938	0.7062	0	0	0
0	0	0	0.9882	0.0118	0	0
0	0	0	0.9227	0.0773	0	0
0	0	0	0.9160	0.0840	0	0
0	0	0	0.8832	0.1168	0	0
0	0	0	0.8076	0.1924	0	0
0	0	0	0.7193	0.2807	0	0
0	0	0	0.7176	0.2824	0	0

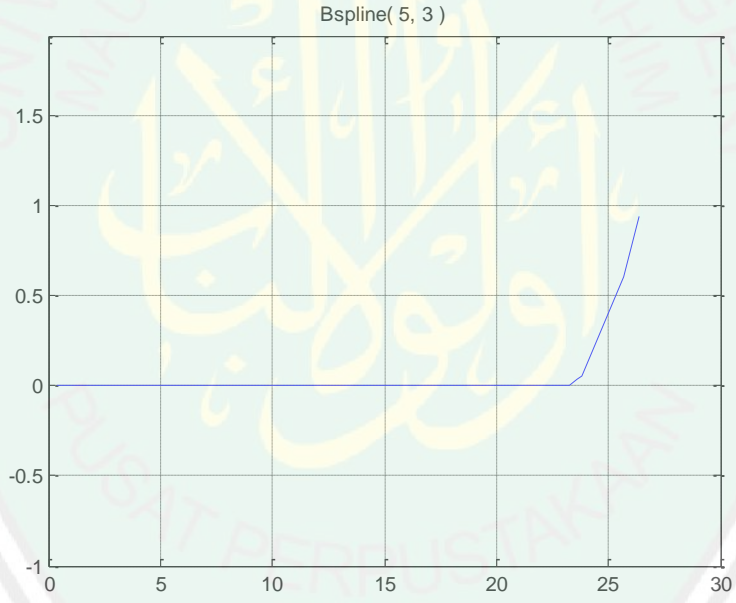
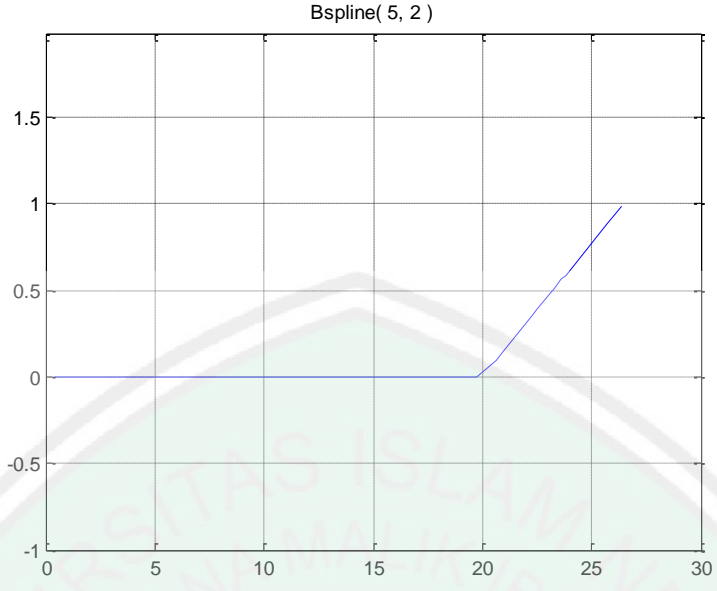
0	0	0	0.4571	0.5429	0	0
0	0	0	0.3794	0.6206	0	0
0	0	0	0.2944	0.7056	0	0
0	0	0	0.1373	0.8627	0	0
0	0	0	0.1023	0.8977	0	0
0	0	0	0.0807	0.9193	0	0
0	0	0	0	0.8579	0.1421	0
0	0	0	0	0.5200	0.4800	0
0	0	0	0	0.2487	0.7513	0
0	0	0	0	0.1538	0.8462	0
0	0	0	0	0.0700	0.9300	0
0	0	0	0	0	0.9071	0.0929
0	0	0	0	0	0.8658	0.1342
0	0	0	0	0	0.6461	0.3539
0	0	0	0	0	0.6112	0.3888
0	0	0	0	0	0.5060	0.4940
0	0	0	0	0	0.4927	0.5073
0	0	0	0	0	0.4379	0.5621
0	0	0	0	0	0.4147	0.5853
0	0	0	0	0	0.1182	0.8818
0	0	0	0	0	0.0155	0.9845

Grafik basis $m=2$ dan $K=5$ pada posisi knot 5, 6, 9, 16, 20









LAMPIRAN 2

Hasil output matriks *B-Spline* kuadratik untuk data Radiasi UV Matahari maret 2013 dengan 5 knot pada posisi 5, 6, 9, 22, 23

0.9579	0.0417	0.0004	0	0	0	0	0
0.0887	0.5048	0.4065	0	0	0	0	0
0.0211	0.3766	0.6022	0	0	0	0	0
0.0079	0.3073	0.6848	0	0	0	0	0
0.0005	0.2097	0.7898	0	0	0	0	0
0	0.1560	0.8432	0.0008	0	0	0	0
0	0.0943	0.8879	0.0178	0	0	0	0
0	0.0931	0.8885	0.0184	0	0	0	0
0	0.0819	0.8930	0.0251	0	0	0	0
0	0.0679	0.8964	0.0357	0	0	0	0
0	0.0337	0.8874	0.0788	0	0	0	0
0	0.0231	0.8753	0.1016	0	0	0	0
0	0.0166	0.8636	0.1198	0	0	0	0
0	0.0158	0.8617	0.1225	0	0	0	0
0	0.0003	0.7693	0.2304	0	0	0	0
0	0	0.6651	0.3343	0.0006	0	0	0
0	0	0.5770	0.4202	0.0028	0	0	0
0	0	0.3675	0.6156	0.0169	0	0	0
0	0	0.3008	0.6740	0.0252	0	0	0
0	0	0.1547	0.7894	0.0559	0	0	0
0	0	0.0647	0.8418	0.0935	0	0	0
0	0	0	0.8022	0.1977	0.0000	0	0
0	0	0	0.7463	0.2521	0.0016	0	0
0	0	0	0.7406	0.2575	0.0019	0	0
0	0	0	0.7135	0.2828	0.0037	0	0
0	0	0	0.6528	0.3372	0.0100	0	0
0	0	0	0.5855	0.3933	0.0212	0	0
0	0	0	0.5842	0.3943	0.0215	0	0

0	0	0	0.4069	0.5137	0.0793	0	0
0	0	0	0.3602	0.5361	0.1037	0	0
0	0	0	0.3124	0.5536	0.1340	0	0
0	0	0	0.2330	0.5667	0.2004	0	0
0	0	0	0.2168	0.5662	0.2170	0	0
0	0	0	0.2072	0.5653	0.2275	0	0
0	0	0	0.1418	0.5434	0.3147	0	0
0	0	0	0.0800	0.4828	0.4372	0	0
0	0	0	0.0431	0.4069	0.5500	0	0
0	0	0	0.0329	0.3746	0.5926	0	0
0	0	0	0.0250	0.3436	0.6314	0	0
0	0	0	0.0094	0.2512	0.7393	0	0
0	0	0	0.0062	0.2201	0.7737	0	0
0	0	0	0	0.0364	0.9452	0.0183	0
0	0	0	0	0.0171	0.9244	0.0585	0
0	0	0	0	0	0.6928	0.3042	0.0030
0	0	0	0	0	0.6567	0.3369	0.0064
0	0	0	0	0	0.5188	0.4480	0.0332
0	0	0	0	0	0.4652	0.4839	0.0509
0	0	0	0	0	0.0378	0.3549	0.6073
0	0	0	0	0	0.0006	0.0564	0.9430

Grafik basis $m=3$ dan $K=5$ pada posisi knot 5, 6, 9, 22, 23

