PENURUNAN PERSAMAAN BOUSSINESQ PADA GELOMBANG YANG MELALUI SEBUAH GUNDUKAN

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMMAD SUKRON
NIM. 10610067

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

PENURUNAN PERSAMAAN BOUSSINESQ PADA GELOMBANG YANG MELALUI SEBUAH GUNDUKAN

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MUHAMMAD SUKRON
NIM. 10610067

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

PENURUNAN PERSAMAAN BOUSSINESQ PADA GELOMBANG YANG MELALUI SEBUAH GUNDUKAN

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMMAD SUKRON
NIM. 10610067

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 05 Semtember 2014:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	**Achmad Nashichuddin, M.A**
NIP. 19810502 200501 1 004	**NIP. 19730705 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENURUNAN PERSAMAAN BOUSSINESQ PADA GELOMBANG YANG MELALUI SEBUAH GUNDUKAN

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMMAD SUKRON
NIM. 10610067

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 11 September 2014

Penguji Utama	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	______________________
Ketua Penguji	:	Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	______________________
Sekretaris Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si NIP. 19810502 200501 1 004	______________________
Anggota Penguji	:	Achmad Nashichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 002	______________________

Mengesahkan,

Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: MUHAMMAD SUKRON
NIM	: 10610067
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Penurunan Persamaan Boussinesq pada Gelombang yang Melalui Sebuah Gundukan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 September 2014
Yang membuat pernyataan,

Muhammad Sukron
NIM. 10610067

MOTO

فَإِذَا عَزَمۡتَ فَتَوَكَّلۡ عَلَى ٱللَّهِۚ إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلۡمُتَوَكِّلِينَ ١٥٩

"Apabila kamu telah membulatkan tekad, Maka bertawakkallah kepada Allah. Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang bertawakkal kepada-Nya" (QS. Al-Imran:159).

"إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡ"

"Sesungguhnya Allah tidak akan merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri" (QS. Ar-Ra'd: 11).

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dalam iringan doa dan rasa syukur ke hadirat Allah Swt, skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah-Ibu tercinta Maryadi dan Yoni serta kakak Nur Khoiriyah dan Umar Sa'id, dan keponakan muhammad marfu'an syarofani yang selalu memberikan dukungan, kasih sayang dan mengorbankan segalanya untuk mewujudkan cita-cita penulis.

Orang terdekat penulis yang selalu memberi dukungan, motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
Terima kasih atas motivasi dan do'a yang telah diberikan kepada penulis selama ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh

Alhamdulillahi robbil alamin, puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, hidayah serta inayahnya kepada penulis sehingga mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, serta dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul " *Penurunan Persamaan Boussinesq pada Gelombang yang Melalui Sebuah Gundukan* ". Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing dan memberikan jalan yang terang.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan terselesaikan dengan baik tanpa adanya bimbingan, arahan, saran, do'a dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing dan memberikan saran kepada penulis demi selesainya penyusunan skripsi ini.

5. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
6. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen wali yang telah banyak memberikan arahan dan nasihat kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah.
8. Ayah dan ibu tercinta yang selalu memberikan segalanya untuk penulis, dan menjadi sosok motivator terbaik untuk penulis.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2010, terutama Khafidhoh Nurul Aini, Andri Eka Prasetya, Abdul Jalil, Muhlis, Syifa'ul Amamah, Farida Maslucah, Binti Tsamrotul, Fatma Mufidah, dan "Keluarga Cemara" yang memberikan kenangan dan motivasi kepada penulis.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi pembaca pada umumnya. Amin.

Wassalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh

Malang, September 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Sukron, Muhammad. 2014. **Penurunan Persamaan Boussinesq pada Gelombang yang Melalui Sebuah Gundukan**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Achmad Nashichuddin, MA.

Kata kunci: Persamaan Boussinesq, Gelombang Soliter, Gelombang pada Gundukan.

Dalam penelitian ini dibahas tentang penurunan model gelombang permukaan yang disebabkan oleh aliran yang melalui sebuah gundukan. Penurunan model ini dilakukan dengan mangasumsikan bahwa aliran fluida berada pada saluran dua dimensi yang memiliki dasar tidak rata dan memiliki kecepatan seragam. Kemudian aliran mengalami gangguan berupa gundukan pada dasar saluran, sehingga kecepatan aliran tersebut berubah dan menimbulkan gelombang pada permukaan fluida.

Dalam penurunan model gelombang permukaan ini, langkah-langkah yang dilakukan sebagai berikut: menurunkan persamaan-persamaan dasar fluida, penskalaan, aproksimasi dengan deret, peninjauan tiap orde, menyederhanakan ke dalam model matematika. Model gelombang yang dihasilkan berupa sistem persamaan differensial parsial nonlinier yang dikategorikan dalam bentuk persamaan *Boussinesq*.

ABSTRACT

Sukron, Muhammad. 2014. **Derivation of Boussinesq equation on a wave passing a bump.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Tecnology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Achmad Nashichuddin, MA.

Keywords: *Boussinesq* Equation, Solitery Wave, Wave of Bump.

This study discusses about derivation of surface wave models generated by flow passing a bump. In the derivation, we assume the flowing fluid is at two dimensional channel having an lineven bottom and uniform speed. The flow is disturbed by a bump on the bottom of channel, so the flow velocity changed and generated waves on the fluid surface.

The steps of a derivation surface wave models can be generated as follows: deriving a governing equation of fluid, scaling, approximation to the system of equation using series function, reviewing each order of approximation, simplifying the solution into the mathematical model. The model generated is a wave equation of a nonlinear equations system which are categorized into *Boussinesq* equation.

ملخص

شكرا, محمّد.٢٠١٤. الإستقاق لمعادلة بوسنسق على موجة تحرير التلة. أطروحة . قسم الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا,الجامعة الاسلامية الحكومية مولانا ملك إبرهيم مالانج.
مشرف : (١) محمّد خمهوري, الماجستير,(٢) أحمد نصحدّين, الماجستير

كلمات البحث: المعادلة بوسنسق, موجة الانفرادي, موجة على التلة.

تناقش هذه الدراسة الانخفاض في نماذج الموجات السطحية تنشج عن تدفق من خلال التلة. ويتم خفض هذا النموذج من قبل افتراض تدفق السائل هو في قناة من البعد الثاني التى لديها الأساس غير مكافئ ولها سرعة موحدة.ثم لتدفق اضطراب بشكل التلة في أساس قناة, بحيث تغير سرعة تدفق وسبّب الموجة على سطح السائل.
خطوات انخفاضا في نموذج الموجات السطحية على النحو التالى: خفض المعادلات الأساسية من السوائل, والتحجيم, وتقريب مقارب لهذه السلسلة, واستعراض لكل رتبة, وتبسيط حل النموذج الرياضي. النموذج المحصول في شكل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية التي أجبرت تصنيفها إلى شكل المعادلة بوسنسق.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah ilmu pengetahuan yang memiliki objek pembahasan yang luas. Ilmu matematika juga banyak mendasari beberapa disiplin ilmu pengetahuan yang lain untuk membantu dalam memodelkan dan menyelesaikan suatu masalah. Salah satunya adalah penerapan persamaan differensial dalam ilmu fisika yang menjelaskan masalah-masalah fisis atau masalah yang berkaitan dengan hukum alam yang memiliki sebab akibat.

Salah satu contoh masalah fisis dalam fisika adalah gelombang. Gelombang merupakan bentuk dari suatu getaran yang merambat pada suatu medium. Ada berbagai macam gelombang di alam semesta. Gelombang permukaan adalah fenomena yang akan ditemui ketika mengamati permukaan air laut. Gelombang tersebut terjadi karena karena perbedaan rapat massa air dan udara. Salah satu gelombang permukaan adalah gelombang soliter (Pangaribuan, 2008).

Fenomena gelombang permukaan ini merupakan suatu tanda kebesaran Allah yang sesuai dengan firman-Nya dalam surat Al-Baqarah ayat 164, sebagai berikut:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ وَٱلْفُلْكِ ٱلَّتِي تَجْرِي فِي ٱلْبَحْرِ بِمَا يَنفَعُ
ٱلنَّاسَ وَمَآ أَنزَلَ ٱللَّهُ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مِن مَّآءٖ فَأَحْيَا بِهِ ٱلْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِن كُلِّ دَآبَّةٖ
وَتَصْرِيفِ ٱلرِّيَٰحِ وَٱلسَّحَابِ ٱلْمُسَخَّرِ بَيْنَ ٱلسَّمَآءِ وَٱلْأَرْضِ لَأٓيَٰتٖ لِّقَوْمٖ يَعْقِلُونَ ١٦٤

Artinya: "Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna *bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hidupkan bumi sesudah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan"* (QS. Al Baqarah: 164).

Dalam tafsir Al-Aisar (2006) dijelaskan bahwa dalam ayat tersebut mengandung enam ayat kauniyah (bukti fenomena alam) yang menunjukkan adanya Allah, kekuasaan, ilmu, hikmah dan rahmat-Nya. Semuanya itu mengharuskan ibadah kepada Allah semata. yaitu (1) Penciptaan langit dan bumi adalah penciptaan yang agung, tidak ada yang mampu melakukannya kecuali Tuhan yang Maha Kuasa, (2) Pergantian malam dan siang secara beraturan, yang satu masanya panjang dan yang satu masanya pendek, (3) Berlayarlah perahu dan kapal diatas permukaan air laut dengan muatan dan bobot yang berton-ton baik dari makanan ataupun kebutuhan hidup manusia, (4) Allah menurunkan hujan langit untuk kehidupan bumi dengan menghidupkan tumbuhan-tumbuhan dan tanaman setelah sebelumnya kering dan mati, (5) Berhembusnya angin baik panas, dingin, kering dan basah, angin timur dan angin barat, angin utara dan selatan, sesuai kebutuhan hidup manusia, (6) Awan yang berjalan di antara langit dan bumi, terkadang bergantian antara suatu negeri dengan lainnya, hingga terjadi hujan di sebuah tempat dan tidak terjadi pada tempat lain, sesuai dengan kehenak Allah ta'ala yang Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana.

Ayat kauniyah ini merupakan dalil yang sangat kuat, menunjukkan bahwa adanya Allah, ilmu, kekuasaan, kebijakan, dan rahmat-Nya. Di akhir surat tersebut tersiratkan lafadz "لأيت لقوم يعقلون", artinya tanda-tanda kebesaran tersebut hanya bisa dilihat bagi orang-orang yang berfikir.

Selain itu, Allah berfirman dalam QS. Yunus ayat 101 sebagai berikut:

قُلِ ٱنظُرُواْ مَاذَا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِۚ وَمَا تُغۡنِي ٱلۡأٓيَٰتُ وَٱلنُّذُرُ عَن قَوۡمٖ لَّا يُؤۡمِنُونَ ١٠١

Artinya: "Katakanlah: "Perhatikanlah apa yang ada di langit dan di bumi, tidaklah bermanfaat tanda kekuasaan Allah dan Rasul-rasul yang memberi peringatan bagi orang-orang yang tidak beriman" (QS. Yunus:101).

Ayat tersebut menganjurkan manusia untuk melakukan pengkajian, penelitian, dan pengamatan tentang fenomena alam yang ada di langit dan di bumi. Dengan harapan manusia dapat mengambil manfaatnya sebagai ilmu pengetahuan agar dapat digunakan untuk kebutuhan dan kesejahteraan hidupnya. Selain itu, hal pokok yang harus diperoleh dengan mengamati tanda-tanda kekuasaan Allah tersebut, yaitu agar dapat mengambil pelajaran untuk meningkatkan keimanan dan ketakwaan dirinya kepada Allah Swt. Sehingga dari itu mendorong banyak ilmuan untuk mengamati dan mempelajari fenomena alam, salah satunya adalah fenomena angin yang menimbulkan gelombang dengan berbagai asumsi sehingga muncul berbagai teori gelombang.

Menurut Wiryanto (2010) gelombang tunggal (*Solitary Wave*) adalah gelombang berjalan yang terdiri dari satu puncak gelombang. Gelombang tunggal merupakan gelombang translasi, di mana kecepatan partikel airnya bergerak dalam arah penjalaran gelombang.

Pembahasan dalam tulisan ini adalah berkaitan dengan model 1-D gerak arus bebas melalui gundukan. Gundukan yang berada dibagian bawah saluran menyebabkan aliran menjadi non-seragam yang dapat diamati dari ketinggian permukaan bebas. Hal-hal yang berpengaruh penting disini adalah karakteristik aliran, kedalaman aliran dan kecepatan aliran.

Telah banyak penelitian yang sudah dilakukan oleh para ahli mengenai masalah gelombang seperti Cole (1985) yang memecahkan masalah aliran bagian hilir, dengan mendefinisikan bilangan Froude berdasarkan aliran hulu seragam yang dipilih cukup dekat. Serta banyak muncul karya numerik pada gelombang di atas gundukan, seperti penelitian yang dilakukan oleh Forbes dan Schwartz (1982). Vanden-Broeck (1987) dan Forbes (1988). Mereka merumuskan masalah dalam penelitian tersebut dengan persamaan integral dan diselesaikan secara numerik dengan metode elemen hingga.

Penelitian pada gelombang juga dilakukan oleh L.H Wiryanto (2010) yang meneliti perambatan gelombang tunggal yang melalui sebuah gundukan. Penelitian tersebut ditulis dalam sebuah artikel dengan judul "*A Solitary-like wave generated by flow passing a bump*". Dalam artikel tersebut dijelaskan bahwasanya aliran gelombang seragam yang melalui sebuah gundukan berubah menjadi tidak seragam. Artikel tersebut berkaitan dengan persamaan *Boussinesq* sebagai model aliran gelombang permukaan yang melalui sebuah gundukan. Model aliran gelombang tersebut diperoleh dari fungsi potensial yaitu dengan mengaproksimasi masalah nilai batas persamaan *Laplace* dari fungsi potensial menjadi persamaan *Boussinesq* dengan asumsi bahwa fluida dangkal, dan gelombang yang dihasilkan panjang tetapi amplitudonya kecil. Dalam menyelesaikan persamaan *Boussinesq* pada penelitian tersebut menggunakan metode beda-hingga prediktor-korektor, dengan skema Adam-Bashforth untuk prediktor dan skema Adam-Moultan untuk korektor.

Sehingga dalam penelitian tugas akhir ini adalah difokuskan pada penjabaran penurunan persamaan *Bousinessq* pada gelombang yang melalui sebuah gundukan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana penurunan persamaan *Boussinesq* pada gelombang yang melalui sebuah gundukan.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menurunkan persamaan *Boussinesq* pada gelombang yang melalui sebuah gundukan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini diharapkan dapat menjelaskan bagaimana penurunan persamaan persamaan *Boussinesq* pada perjalanan gelombang permukaan yang melalui sebuah gundukan
2. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi landasan untuk melakukan penelitian ulang yang terkait dengan gelombang tersebut.

1.5 Batasan Masalah

Berikut batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu:

1. Permasalahan ditinjau sebagai masalah satu dimensi dan diturunkan terhadap waktu.
2. Fluida diasumsikan ideal, yaitu tak termampatkan, tak kental, dan mempunyai kerapatan konstan.
3. Fluida diasumsikan sebagai fluida tak berotasi.
4. Fluida diasumsikan memiliki rapat massa yang homogen atau konstan.
5. Tekanan hidrostatiknya diasumsikan sangat kecil, sehingga dapat diabaikan.

1.6 Metode Penelitian

Teknik yang digunakan penulis dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelusuran dan penelaahan terhadap beberapa literatur yang berhubungan dengan topik bahasan. Langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menurunkan persamaan-persamaan dasar dari hukum–hukum kesetimbangan yang terjadi pada aliran fluida.
2. Melakukan penskalaan yang bertujuan untuk menondimensionalkan variabel-variabel yang digunakan.
3. Mengaproksimasi variabel-variabel yang digunakan.
4. Menyelesaikan sistem dengan melakukan peninjauan pada tiap-tiap orde dari deret, mulai dari orde terkecil sampai orde yang dikehendaki.
5. Memberikan kesimpulan dari sistem yang diperoleh.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari laporan penelitian ini yang terbagi menjadi lima bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan tentang penurunan persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan *Bernoulli*, kondisi batas, dan persamaan *Laplace*.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penulisan yang menjabarkan tentang bagaimana penurunan persamaan *Boussinesq* pada perambatan gelombang permukaan yang melalui sebuah gundukan.

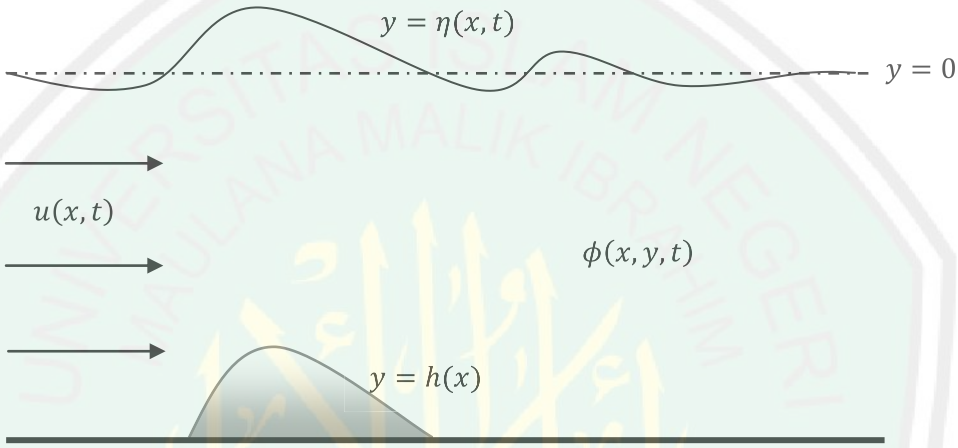
Bab IV Penutup

Pada bab ini dibahas tentang rangkuman hasil penelitian yang berupa kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian yang telah dibahas dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan mengenai hukum-hukum kesetimbangan massa yang terjadi pada aliran fluida yang melalui sebuah gundukan yang diilustrasikan pada Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1 Sketsa Aliran Gelombang

Dimana dari gambar diatas dapat dijelaskan bahwasanya $u(x,t)$ merupakan kecepatan gelombang dari sebelah kiri dan $y = h(x)$ merupakan fungsi gundukan, sehingga aliran fluida secara alami akan mengalami sebuah gelombang permukaan yaitu $y = \eta(x,t)$ yang bergantung terhadap ruang dan waktu.

2.1 Persamaan *Boussinesq*

Menurut Patiroi (2010) persamaan *Boussinesq* menggambarkan aliran air dangkal yang diturunkan dari persamaan Euler yang incompressible dan irrotational. Ada dua parameter penting dalam pengembangan persamaan *Boussinesq* yaitu nonlinearitas dan dispersifitas. Model *Boussinesq* dapat digunakan untuk memprediksi elevasi gelombang di dalam pelabuhan dan interaksi gelombang di daerah dekat pantai.

Menurut Djohan (1997) Persamaan *Boussinesq* merupakan model bagi persamaan gelombang air dua arah di atas dasar tak rata. Di atas dasar rata, persamaan *Boussinesq* mempunyai solusi gelombang berjalan periodik, yaitu gelombang yang menjalar tanpa berubah bentuk dan kecepatan, yang disebut gelombang cnoidal.

Beberapa teori mendasar yang akan digunakan sebagai landasan dalam melakukan penelitian ini adalah kekekalan massa, kekekalan momentum, persamaan *Bernoulli*, dan persamaan *Laplace*, yang akan dijelaskan sebagai berikut.

2.2 Penurunan Persamaan Kontinuitas

Kekekalan massa fluida mempersyaratkan bahwa dalam suatu volume zat massa selalu konstan, dan karena itu laju perubahan massanya sama dengan nol (Olson, 1993).

Douglas (2001), menyatakan massa jenis dinotasikan dengan ρ yang didefinisikan sebagai masa per satuan volume, yaitu

$$\rho = \frac{m}{V}$$

sehingga

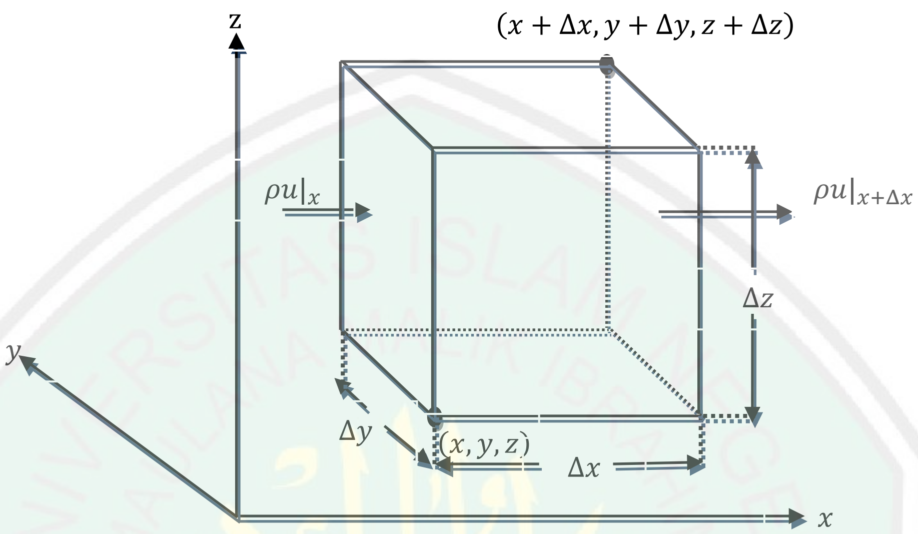
$$m = \rho V$$

$$m = \rho(\Delta x \Delta y \Delta z)$$

dimana ρ merupakan massa jenis dan V adalah volume$(\Delta x \Delta y \Delta z)$. Sehingga peruhan massa terhadap waktu dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)$$

Pada elemen volume, perubahan massa merupakan selisih antara massa yang masuk dan keluar, seperti ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Laju Perubahan Massa

Berdasarkan Gambar 2.2, $\rho u|_x \Delta y \Delta z$, $\rho v|_y \Delta x \Delta z$ dan $\rho w|_z \Delta x \Delta y$ masing-masing menyatakan massa yang masuk searah dengan koordinat *x, y* dan *z* per satuan waktu. Besaran $\rho u|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$, $\rho v|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$ dan $\rho w|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$ masing-masing menyatakan massa yang keluar per satuan waktu. Jadi, sesuai dengan hukum kekekalan massa maka laju perubahan massa pada elemen volume dapat dituliskan pada persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} &= (\rho u|_x \, \Delta y \Delta z - \rho u|_{x+\Delta x} \, \Delta y \Delta z) \\ &+ \left(\rho v|_y \, \Delta x \Delta z - \rho v|_{y+\Delta y} \, \Delta x \Delta z\right) \\ &+ (\rho w|_z \, \Delta x \Delta y - \rho w|_{z+\Delta z} \, \Delta x \Delta y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

atau dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z\left(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y}\right) \\ + \Delta x \Delta y(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dengan membagi persamaan (2.2) dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z})}{\Delta z} \quad (2.3)$$

Dari persamaan (2.3) untuk $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0}$ dan $\lim\limits_{\Delta z \to 0}$ pada setiap koordinat adalah:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} = -\frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z})}{\Delta z} = -\frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y} - \frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

Dengan menggunakan asumsi fluida tak termampatkan, yaitu fluida yang mengalir tanpa mengalami perubahan volume atau massa jenis, maka kepadatan massa akan konstan $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (yaitu semua turunan ρ terhadap waktu adalah nol) maka persamaan tersebut tereduksi menjadi persamaan (2.4) yang disebut dengan persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

dalam notasi vektor dapat dituliskan:

$$\nabla \cdot \bar{q} = 0$$

dimana:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \bar{q} = (u, v, w)$$

Aliran yang kerapatan massanya dalam persamaan kontinuitas dianggap konstan disebut aliran tak termampatkan (Olson, 1993).

2.3 Kekekalan Momentum

Menurut Holthuijsen (2007) untuk mendapatkan persamaan kekekalan momentum dalam aliran fluida, maka diberikan μ sebagai momentum dari air, yang menurut definisi yaitu hasil perkalian dari massa dengan kecepatan partikel air (besaran vektor) dan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mu = \rho\bar{u} = (\rho u_x , \rho u_y , \rho u_z)$$

Berdasarkan hukum II Newton bahwa gaya total adalah perkalian massa dengan percepatan, dapat dinotasikan $F = ma$ dengan menggunakan definisi percepatan sebagai turunan dari kecepatan (v) terhadap waktu, sehingga $F = m\frac{dv}{dt}$, sehingga apabila diintegralkan terhadap dt maka akan diperoleh

$$\int F\,dt = mv \tag{2.5}$$

Ruas kanan dari persamaan (2.5) merupakan definisi dari momentum. Sehingga ketika persamaan (2.5) diturunkan terhadap waktu sehingga

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \tag{2.6}$$

yang berarti bahwa gaya total adalah rata-rata perubahan momentum persatuan waktu, karena $m = \rho V$, maka diperoleh

$$F = p = \rho V_{vol} v \tag{2.7}$$

Berdasarkan teorema momentum maka keseimbangan momentum pada elemen volume dapat dinyatakan dengan perubahan momentum terhadap waktu adalah momentum yang masuk dikurangi dengan momentum yang keluar dan ditambah dengan jumlah gaya ekternal, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P_{masuk} - P_{keluar} + jumlah\ gaya\ eksternal.$$

Sehingga momentum yang melintasi bidang x adalah

$$(\rho u|_x)\Delta y \Delta z\,.\,u|_x = (\rho u^2|_x)\Delta y \Delta z$$

Dimana ρ merupakan rapat masa dan u adalah kecepatan searah x.

dan momentum yang keluar dari x adalah

$$(\rho u|_{x+\Delta x})\Delta y \Delta z\,.\,u|_{x+\Delta x} = (\rho u^2|_{x+\Delta x})\Delta y \Delta z$$

serta resultan gaya-gaya dalam arah x adalah

$$(P|_x - P|_{x+\Delta x})\Delta y \Delta z + \rho g_x \Delta y \Delta z$$

$P|_x$ menyatakan tekanan pada bidang x, dan g_x menyatakan percepatan akibat gravitasi dalam arah x.

Selanjutnya untuk momentum yang melintasi y adalah sebesar

$$(\rho u|_y)\Delta x \Delta z\,.\,v|_y = (\rho uv|_y)\Delta x \Delta z$$

dengan v merupakan kecepatan bidang y

dan yang keluar melintasi y adalah

$$(\rho u|_{y+\Delta y})\Delta x \Delta z\,.\,v|_{y+\Delta y} = (\rho uv|_{y+\Delta y})\Delta x \Delta z$$

Sedangkan untuk momentum yang melintasi z adalah

$$(\rho u|_z)\Delta x \Delta y\,.\,w|_z = (\rho uw|_z)\Delta x \Delta y$$

dengan w merupakan kecepatan bidang z

dan momentum yang keluar melintasi z adalah

$$(\rho u|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y\,.\,w|_{z+\Delta z} = (\rho uw|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y$$

Sehingga perubahan momentum untuk arah x, yaitu

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}(\Delta x\Delta y\Delta z) = [(\rho u^2|_x)\Delta y\Delta z - (\rho u^2|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z]$$

$$+[(\rho uv|_y)\Delta x\Delta z - (\rho uv|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z]$$

$$+[(\rho uw|_z)\Delta x\Delta y - (\rho uw|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y]$$

$$+(p|_x - p|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z + \rho g_x \Delta y\Delta z$$

Selanjutnya dikalikan dengan $\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}$, sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \left[\frac{(\rho u^2|_x) - (\rho u^2|_{x+\Delta x})}{\Delta x}\right] + \left[\frac{(\rho uv|_y) - (\rho uv|_{y+\Delta y})}{\Delta y}\right]$$

$$+\left[\frac{(\rho uw|_z) - (\rho uw|_{z+\Delta z})}{\Delta z}\right] + \frac{(p|_x - p|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{\rho g_x}{\Delta x}$$

maka $\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to 0}$ diperoleh sebagai berikut:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to 0}\left[\frac{(\rho u^2|_x) - (\rho u^2|_{x+\Delta x})}{\Delta x}\right] + \left[\frac{(\rho uv|_y) - (\rho uv|_{y+\Delta y})}{\Delta y}\right]$$

$$+\left[\frac{(\rho uw|_z) - (\rho uw|_{z+\Delta z})}{\Delta z}\right] + \frac{(p|_x - p|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{\rho g_x}{\Delta x}$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial \rho uv}{\partial y}\right] - \left[\frac{\partial \rho uw}{\partial z}\right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\rho\left[\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z}\right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

atau

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Dikalikan $\frac{1}{\rho}$ sehingga diperoleh

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{(\partial u^2)}{\partial x}+\frac{(\partial uv)}{\partial y}+\frac{(\partial uw)}{\partial z}\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+g_x \tag{2.8}$$

dengan cara yang sama dapat dilakukan untuk arah aliran fluida lainnya, yaitu arah sumbu y dan arah sumbu z. Sehingga untuk kekekalan momentum yang searah sumbu y diperoleh

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{(\partial uv)}{\partial x}+\frac{(\partial v^2)}{\partial y}+\frac{(\partial vw)}{\partial z}\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+g_y \tag{2.9}$$

dan kekekalan momentum yang searah z diperoleh

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{(\partial uw)}{\partial x}+\frac{(\partial vw)}{\partial y}+\frac{(\partial w^2)}{\partial z}\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z \tag{2.10}$$

sehingga dari persamaan (2.8), (2.9) dan (2.10) dapat dituliskan dalam notasi vektor, dengan $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, dan $\bar{q}=(u,v,w)$, sehingga dapat ditulis

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}+(\,\bar{q}\cdot\nabla\,)\bar{q}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\bar{g} \tag{2.11}$$

dengan $\bar{g}=-\nabla gy$, karena gaya gravitasi hanya berpengaruh pada arah y.

2.4 Penurunan Persamaan *Bernoulli*

Menurut Munson, dkk (2004) persamaan *Bernoulli* diturunkan dengan penerapan secara langsung hukum kedua Newton terhadap sebuah partikel fluida yang bergerak sepanjang sebuah garis arus.

Penurunan persamaan Bernoulli dimulai dari dalam bentuk vektor yaitu

$$\begin{aligned}\bar{q}\times(\nabla\times\bar{q})&=(\bar{q}\cdot\bar{q})\nabla-(\bar{q}\cdot\nabla)\bar{q}\\&=\left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right)\nabla-(\bar{q}\cdot\nabla)\bar{q}\end{aligned} \tag{2.12}$$

(pembuktian persamaan (2.12) ada pada lampian 1)

Karena untuk fluida dengan aliran seragam dan tidak berotasi artinya $(\nabla \times \bar{q}) = 0$, maka persamaan (2.12) menjadi

$$\bar{q} \times 0 = (\bar{q} \cdot \bar{q})\nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}$$

$$0 = \nabla\left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right) - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right) = (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}$$

Sehingga persamaan (2.11) menjadi

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right) = \frac{1}{\rho}\nabla P + \bar{g} \tag{2.13}$$

Dengan $\bar{g} = -\nabla g y$, maka

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla g y \tag{2.14}$$

Dengan $\bar{q} = \nabla\phi(x, y, z) = (\phi_x, \phi_y, \phi_z) = (u, v, w)$, maka

$$|\bar{q}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$|\bar{q}|$ adalah besarnya laju (kecepatan), sehingga persamaan (2.13) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + \nabla\left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla g y$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + \nabla\left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right) + \frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla g y = 0$$

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right) + \frac{1}{\rho}P + g y\right) = 0 \tag{2.15}$$

Dengan mengintegralkan terhadap persamaan (2.15) terhadap variabel x, y, dan z sehingga menjadi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right) + \frac{1}{\rho}P + g y = f(t) \tag{2.16}$$

dimana $f(t)$ merupakan fungsi sebarang dari *t* akibat pengintegralan terhadap x, y, dan z dan persamaan (2.16) merupakan persamaan *Bernoulli*.

2.5 Penurunan Persamaan *Laplace*

Aliran potensial adalah aliran nonrotasi yang komponen-komponen kecepatannya boleh diturunkan dari fungsi-fungsi potensial kecepatan. Kondisi ini berlaku untuk fluida tak mampat dan karena aliran fluida tersebut non rotasi, persamaan Bernoulli berlaku untuk medan alirannya secara keseluruhan. Variasi-variasi kecepatan dan tekanan untuk sebuah medan aliran dapat diketahui dari pola arus dan dari penerapan Bernoulli (Olson,1993).

Selanjutnya, dengan asumsi bahwa partikel fluida yang ditinjau tak berotasi yaitu $\nabla \times \bar{q} = 0$, maka terdapat fungsi potensial ϕ. Menurut Holthuijsen (2007) fungsi potensial $\phi(x, y, t)$ didefinisikan sebagai:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2.17}$$

atau dalam notasi vektor $\bar{q} = \nabla \phi$

Jika dilakukan subtitusi persamaan (2.17) ke persamaan kontinuitas, maka akan diperoleh persamaan *Laplace* berikut:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.18}$$

atau dapat dinotasikan dalam bentuk vektor

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

Persamaan (2.18) merupakan persamaan *Laplace.*

2.6 Kondisi Batas

Masalah pada aliran fluida merupakan permasalahan differensial parsial terhadap bidang atau terhadap waktu, sehingga kondisi batas sangat diperlukan untuk dapat menyelesaikan model yang ada. Kondisi batas ada dua jenis yaitu kondisi batas kinematik dan kondisi batas dinamik. Kondisi batas dinamik hanya berlaku pada permukaan bebas.

2.6.1 Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Fluida

Kondisi batas kinematik pada permukaan fluida $y = \eta(x, t)$, secara implisit dapat ditulis:

$$y - \eta(x, t) = 0 \tag{2.19}$$

Persamaan (2.19) dapat kita nyatakan sebagai persamaan $F(x, y, t) = 0$, secara implisit untuk suatu partikel yang berada pada koordinat (x, y) dan partikel tersebut tetap pada permukaan, maka dapat dinyatakan dalam operator turunan total dari fungsi F adalah:

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

karena

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

maka

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}u + \frac{\partial F}{\partial y}v \tag{2.20}$$

Subtitusikan fingsi F kedalam persamaan (2.20), sehingga diperoleh:

$$0=\frac{\partial\big(y-\eta(x,t)\big)}{\partial t}+\frac{\partial\big(y-\eta(x,t)\big)}{\partial x}u+\frac{\partial\big(y-\eta(x,t)\big)}{\partial y}v$$

$$=-\eta_t-u\eta_x+v \tag{2.21}$$

Dengan $u=\phi_x$ dan $v=\phi_y$, maka:

$$0=-\eta_t-\phi_x\eta_x+\phi_y \tag{2.22}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}=0 \tag{2.23}$$

persamaan (2.23) merupakan kondisi batas kinematik pada permukaan fluida.

2.6.2 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Fluida

Kondisi batas dinamik diturunkan dari persamaan *Bernoulli* yang berlaku pada permukaan fluida. Adapaun persamaan *Bernoulli* pada 2D yaitu:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\left({\phi_x}^2+{\phi_y}^2\right)\right)+\frac{1}{\rho}P+gy=f(t) \tag{2.24}$$

Kondisi batas dinamik pada permukaan fluida pada $y=\eta(x,t)$. Pada permukaan fluida tekanan diabaikan sehingga $P=0$, maka persamaan (2.24) menjadi:

$$\phi_t+\frac{1}{2}\left({\phi_x}^2+{\phi_y}^2\right)+g\big(\eta(x,t)\big)=f(t) \tag{2.25}$$

Karena keadaan seragam (*uniform*) maka ruas kiri dari persamaan *Bernoulli* berlaku kecepatan vertikal $\phi_y=0$, kecepatan horizantal $\phi_x=U_0$, dan $\phi_t=0$, karena tidak ada perubahan terhadap waktu, sehingga diperoleh:

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left({\phi_x}^2 + {\phi_y}^2\right) + g\big(\eta(x,t)\big) = f(t)$$

$$0 + \frac{1}{2}\left({U_0}^2 + 0^2\right) = f(t)$$

$$\frac{1}{2}{U_0}^2 = f(t) \tag{2.26}$$

Selanjutnya subtitusikan persamaan (2.26) kedalam persamaan (2.24), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\rho}P + g\big(\eta(x,t)\big) = \frac{1}{2}{U_0}^2 \tag{2.27}$$

Karena pada batas kondisi dinamik tekanan udara konstan sehingga $P = 0$, maka:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\rho}(0) + g\big(\eta(x,t)\big) = \frac{1}{2}{U_0}^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g\eta(x,t) = \frac{1}{2}{U_0}^2 \tag{2.28}$$

Persamaan (2.28) merupakan kondisi batas dinamik pada permukaan fluida.

2.6.3 Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Fluida

Kondisi batas kinematik pada dasar fluida $y = -h(x)$ secara eksplisit dapat ditulis:

$$y + h(x) = 0 \tag{2.29}$$

Persamaan (2.29) dapat kita nyatakan sebagai persamaan $F(x, y, t) = 0$. secara implisit untuk suatu partikel yang berada koodinat (x, y) dan partikel tersebut tetap pada permukaan tersebut, dapat dinyatakan dalam operator turunan total:

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

karena

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

maka

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}u+\frac{\partial F}{\partial y}v \qquad (2.30)$$

Subtitusikan fingsi F kedalam persamaan (2.30), sehingga diperoleh

$$0=\frac{\partial(y+h(x))}{\partial t}+\frac{\partial(y+h(x))}{\partial x}u+\frac{\partial(y+h(x))}{\partial y}v$$

$$=\frac{\partial h}{\partial x}u+v \qquad (2.31)$$

Dengan $u=\frac{\partial \phi}{\partial x}$ dan $v=\frac{\partial \phi}{\partial y}$, maka:

$$0=\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (2.32)$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}=0 \qquad (2.33)$$

atau

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\phi_y=-h_x\phi_x \qquad (2.34)$$

Persamaan (2.34) merupakan kondisi batas kinematik pada dasar fluida pada $y=-h(x)$.

2.7 Kajian Alam Semesta dalam Al-Qur'an

Menurut Abdusysyakir (2007), alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada.

Alam semesta dan segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan rumus-rumus serta persamaan-persamaan yang seimbang dan rapi. Sebagaimana firman Allah dalah Al-Qur'an surat Al-Qomar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (QS. Al-Qomar: 49).

Ayat di atas merupakan sebuah pemberitahuan dari Allah tentang aturan alam semesta yang telah Dia ciptakan, bahwa segala kejadian yang terjadi di alam semesta ini telah diketahui oleh ilmu Allah dan telah ditentukan (Al-Jazairi, 2009). Dalam tafsir *Fi Zhilalil Qur'an* dijelaskan bahwa pada hakikatnya segala sesuatu diciptakan oleh Allah menurut ukuran yang menentukan sifat, kadar, waktu, tempat, dan kaitannya dengan segala perkara yang ada disekitarnya serta pengaruh terhadap keberadaan alam semesta (Quthb, 2004).

Secara global, menurut tafsir *Muyassar* ayat diatas menjelaskan bahwasanya Allah menciptakan segala sesuatu dan menentukan ukurannya sesuai dengan ketetapan, ilmu pengetahuan, dan suratan takdir-Nya. Jadi, semua yang terjadi di alam semesta ini pastilah berdasarkan takdir Allah SWT (Al-Qarni, 2007).

Selain ayat di atas, Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Furqaan ayat 2:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *"Dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"* (QS. Al-Furqaan: 2).

Firman Allah ini memiliki makna bahwa segala sesuatu selain Dia adalah *makhluk* (yang diciptakan) dan *marbub* (yang berada di bawah kekuasaan-Nya). Dialah pencipta segala sesuatu, Rabb, Raja dan Ilahnya. Sedangkan segala sesuatu berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan dan takdir-Nya (Ibnu Katsiir, 2003).

Maksud dari kata "فقدّره تقديرا" dalam tafsir Al-Qurthubi yaitu menetapkan segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, dan bukan karena nafsu dan kelalaian, melainkan segala sesuatu berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya hingga hari kiamat dan setelah kiamat (Al-Qurthubi, 2009). Dalam tafsir *Al-Aisar* makna dari kata tersebut adalah Allah menetapkan ukuran dengan serapi-rapinya tanpa ada celah atau kebongkokan di dalamnya, tidak perlu ada penambahan atau pengurangan walaupun dengan alasan atau suatu hikmah atau maslahat. Dan semua yang Allah tentukan adalah demi kemslahatan manusia (Al-Jazairi, 2009).

Dalam buku Al-Qur'an dan Tafsirnya dijelaskan bahwa meskipun Allah sudah menetapkam ukuran-ukurannya dengan tepat, tetapi manusia diwajibkan untuk berusaha. Sesuai dengan hadits sahih yang diriwayatkan oleh Ahmad dan Muslim dari Abu Hurairah: Rosulullah SAW bersabda, "Minta tolonglah kepada Allah dan jangan bersikap lemah. Bila sesuatu menimpamu maka katakanlah Allah telah menetapkannya. Apa yang Dia kehendaki, Dia kerjakan, dan jangan kamu berkata: seandainya aku berbuat begini maka akan begitu. Sesungguhnya kata "seandainya" membuka perbuatan setan" (Kementerian Agama RI, 2010).

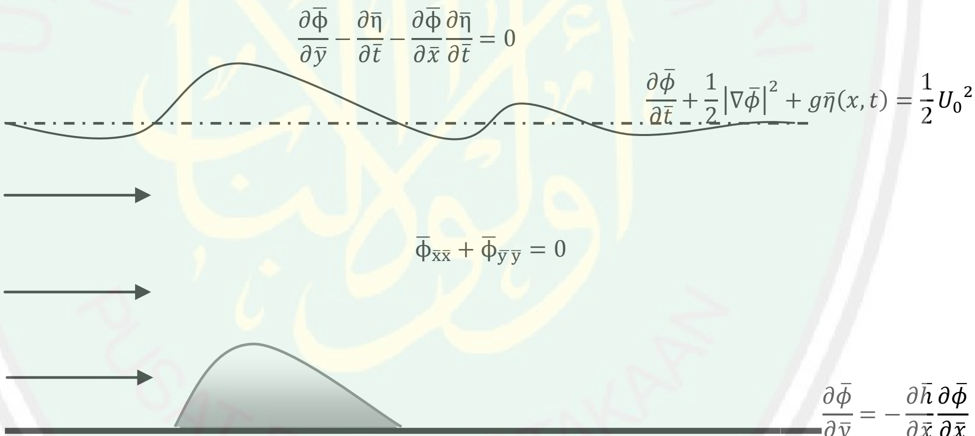
Ayat-ayat tersebut menjelaskan bahwasanya setiap segala sesuatu yang ada di bumi ini ada ukurannya, ada perhitungannya dan juga ada persamaannya. Sesungguhnya dengan ayat tersebut, Ahli matematika tidak dapat membuat rumus sedikitpun, tetapi mereka menemukan rumus atau persamaan dari sebagian yang di ciptakan Allah. Albert Einstein tidak membuat rumus $e = mc^2$ tetapi dia menemukan dan menyimbulkannya. Archimedes menemukan hitungan mengenai volume benda melalui media air. Hukum Archimedes itu sudah ada sebelumnya dan dialah yang menemukan pertama kali melalui hasil menelaah dan membaca ketetapan Allah (Abdusysyakir, 2007).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penurunan Persamaan *Boussinesq*

Bab ini akan dijelaskan bagaimana penurunan persamaan *Bousinesq* pada aliran gelombang yang melalui sebuah gundukan. Sebelumnya telah peroleh persamaan kontinuitas yang menghasilakn persamaan laplace, persamaan momentum yang memperoleh persamaan serta kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan fluida, serta kondisi batas kinematik dasar fluida. Sehingga dapat ditunjukkan dengan gambar berikut.



Gambar 3.1: Sketsa aliran gelombang dengan kondisi batas

Dimana nantinya pada persamaan-persamaan yang diperoleh diatas akan dilakukan penskalaan, setelah itu dilakukan ekspansi dengan deret, dan selanjutnya melakukan peninjauan tiap-tiap orde pada deret, dan selanjutnya membawa ke dalam model matematika yaitu gelombang permukaan, dengan pembahasan sebagai berikut:

3.1.1 Penskalaan

Skala digunakan untuk membandingkan antara keadaan nyata dengan model atau gambaran dan penskalaan digunakan untuk mengubah ukuran baik memperbesar atau mengecilkan. Sebagai contohnya, ketika dalam menggambar sebuah gedung, maka akan cukup sulit apabila menggambar sesuai dengan keadaan aslinya, sehingga terlebih dahulu dilakukan penskalaan. Begitu juga model gelombang soliter, sehingga sebelum diperoleh modelnya terlebih dahulu dilakukan penskalaan terhadap persamaan *Laplace* beserta kondisi batas pada permukaan fluida dan kondisi batas pada dasar fluida.

Suatu saluran fluida yang memiliki panjang gelombang λ jauh lebih besar dibanding dengan kedalaamannya h_0, sehingga dapat didefinisikan sebuah parameter yang sangat kecil μ sebagai $\mu = \frac{h_0}{\lambda}$. Serta memiliki amplitudo yang kecil yaitu a.

Skala-skala yang digunakan diantaranya:

$$x = \frac{\bar{x}}{\lambda} \qquad t = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\bar{t}$$

$$y = \frac{\bar{y}}{h_0} \qquad \phi(x,y,t) = \frac{h_0}{\lambda a U_0}\bar{\phi}(x,y,t)$$

$$h = \frac{\bar{h}}{a} \qquad \eta(x,t) = \frac{\bar{\eta}(x,t)}{a}$$

Selanjutnya dari skala-skala tersebut nantinya akan disubtitusikan kedalam persamaan (2.18), persamaan (2.23), persamaan (2.28) dan persamaan (2.34).

Pertama, dilakukan penskalaan variabel pada persamaan (2.18).

Skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi$, $\phi = \frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi$, dan $\bar{x} = x\lambda$ disubstitusikan kedalam $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2}$ diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\bar{x}}{\lambda}\right)$$

Dengan $\phi = \frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi$ sehingga persamaan diatas menjadi

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda a U_0}{h_0}\left(\frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi\right)\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\bar{x}}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda U_0\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \frac{\lambda a U_0}{h_0}\Phi\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\bar{x}}{\lambda}\right)$$

$$= \left(\lambda U_0 + \frac{\lambda a U_0}{h_0}\Phi_{\mathrm{x}}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= U_0 + \frac{a U_0}{h_0}\Phi_{\mathrm{x}} \tag{3.1}$$

Selanjutnya

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(U_0 + \frac{a U_0}{h_0}\Phi_{\mathrm{x}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\bar{x}}{\lambda}\right)$$

$$= \left(0 + \frac{a U_0}{h_0}\Phi_{\mathrm{xx}}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{a U_0}{\lambda h_0}\Phi_{\mathrm{xx}} \tag{3.2}$$

Skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi$, $\phi = \frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi$, dan $\bar{y} = yh_0$ disubstitusikan kedalam $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2}$ diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi\right)\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\bar{y}}{h_0}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda a U_0}{h_0}\left(\frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi\right)\right)\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\bar{y}}{h_0}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda U_0\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \frac{\lambda a U_0}{h_0}\Phi\right)\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\bar{y}}{h_0}\right)$$

$$= \left(0 + \frac{\lambda a U_0}{h_0}\Phi_{\mathrm{y}}\right)\left(\frac{1}{h_0}\right)$$

$$= \frac{\lambda a U_0}{{h_0}^2}\Phi_{\mathrm{y}} \tag{3.3}$$

Selanjutnya

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda a U_0}{{h_0}^2}\Phi_{\mathrm{y}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\bar{y}}{h_0}\right)$$

$$= \left(\frac{\lambda a U_0}{{h_0}^2}\Phi_{\mathrm{yy}}\right)\left(\frac{1}{h_0}\right)$$

$$= \frac{\lambda a U_0}{{h_0}^3}\Phi_{\mathrm{yy}} \tag{3.4}$$

Persamaan (3.2) dan persamaan (3.4) disubstitusikan kedalam persamaan (2.18), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

$$\frac{aU_0}{\lambda h_0}\Phi_{xx} + \frac{\lambda a U_0}{h_0^3}\Phi_{yy} = 0$$

Dengan dikali dengan $\frac{h_0}{aU_0}$, maka diperoleh:

$$\frac{1}{\lambda}\Phi_{xx} + \frac{\lambda}{{h_0}^2}\Phi_{yy} = 0$$

$$\frac{{h_0}^2\Phi_{xx} + \lambda^2\Phi_{yy}}{\lambda {h_0}^2} = 0$$

$${h_0}^2\Phi_{xx} + \lambda^2\Phi_{yy} = 0$$

$$\frac{{h_0}^2}{\lambda^2}\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \tag{3.5}$$

Dimana $\frac{h_0}{\lambda} = \mu$, sehingga $\frac{{h_0}^2}{\lambda^2} = \mu^2$, maka persamaan (3.5) menjadi:

$$\mu^2\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \tag{3.6}$$

Kedua, dilakukan penskalaan pada persamaan (2.23):

skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi$, $\phi = \frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi$, $\bar{x} = x\lambda$ dan $\bar{y} = yh_0$ disubstitusikan kedalam $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}$ diperoleh persamaan (3.1) dan $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}}$ diperoleh persamaan (3.3).

Selanjutnya skala $\bar{\eta} = a\eta$, dan $\bar{x} = x\lambda$ disubstitusikan kedalam $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}$ diperoleh

$$\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{x}} = \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\bar{x}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(a\eta)\ \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\bar{x}}{\lambda}\right)$$

$$= (a\eta_x)\ \left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{a}{\lambda}\eta_x \tag{3.7}$$

Dengan skala $\bar{\eta} = a\eta$, dan $\bar{t} = \frac{t\lambda}{\sqrt{gh_0}}$ disubstitusikan kedalam $\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{t}}$ diperoleh:

$$\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{t}} = \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\bar{t}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(a\eta)\ \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\frac{\bar{t}\sqrt{gh_0}}{\lambda}\right)$$

$$= (a\eta_t)\ \left(\frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda}\eta_t \tag{3.8}$$

Dari persamaan (3.1), (3.3), (3.7), dan (3.8) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.23), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{y}} = \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{t}} + \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{x}}$$

$$\frac{\lambda a U_0}{{h_0}^2}\Phi_y = \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda}\eta_t + \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)\left(\frac{a}{\lambda}\eta_x\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda}\eta_t + \frac{a}{\lambda}\left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)\eta_x$$

$$= \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda}\eta_t + \frac{a}{\lambda}U_0\left(1 + \frac{a}{h_0}\Phi_x\right)\eta_x$$

Selanjutnya dikalikan dengan $\frac{1}{U_0}$ sehingga diperoleh

$$\frac{\lambda a}{{h_0}^2}\Phi_y = \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda U_0}\eta_t + \frac{a}{\lambda}\left(1 + \frac{a}{h_0}\Phi_x\right)\eta_x$$

$$\Phi_y = \frac{{h_0}^2}{\lambda^2}\frac{\sqrt{gh_0}}{U_0}\eta_t + \frac{{h_0}^2}{\lambda^2}\left(1 + \frac{a}{h_0}\Phi_x\right)\eta_x$$

Dengan dikalikan $\frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}$, maka diperoleh

$$\frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}\Phi_y = \frac{{h_0}^2}{\lambda^2}\eta_t + \frac{{h_0}^2}{\lambda^2}\frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}\left(1 + \frac{a}{h_0}\Phi_x\right)\eta_x \tag{3.9}$$

Dimana $\frac{h_0}{\lambda} = \mu$, sehingga $\frac{{h_0}^2}{\lambda^2} = \mu^2$, $\frac{a}{h_0} = \epsilon$ dan $\frac{U_0}{\sqrt{gh_0}} = F$, maka persamaan (3.9) menjadi:

$$F\Phi_y = \mu^2\eta_t + \mu^2 F(1 + \epsilon\Phi_x)\eta_x \tag{3.10}$$

Ketiga, dilakukan penskalaan pada persamaan (2.28):

Skala yang digunakan $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi$, $\phi = \frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi$, $\bar{x} = x\lambda$ dan $\bar{y} = yh_0$ disubstitusikan kedalam $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}}$ diperoleh persamaan (3.1) dan $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{y}}$ diperoleh persamaan (3.3). Sehingga dari persamaan (3.1) maka untuk $\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}}\right)^2$ diperoleh

$$\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}}\right)^2 = \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)^2$$

$$= \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)\left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)$$

$$= {U_0}^2 + 2\frac{a{U_0}^2}{h_0}\Phi_x + \left(\frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)^2 \tag{3.11}$$

Dari persamaan (3.3) diperoleh $\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{y}}\right)^2$

$$\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{y}}\right)^2 = \left(\frac{\lambda a U_0}{{h_0}^2}\Phi_y\right)^2 \tag{3.12}$$

Selanjutnya skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi$, $\phi = \frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi$, dan $\bar{t} = \frac{t\lambda}{\sqrt{gh_0}}$ disubstitusikan kedalam $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{t}}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{t}} &= \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\frac{\bar{t}\sqrt{gh_0}}{\lambda}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda a U_0}{h_0}\left(\frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi\right)\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\frac{\bar{t}\sqrt{gh_0}}{\lambda}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda U_0\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \frac{\lambda a U_0}{h_0}\Phi\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\frac{\bar{t}\sqrt{gh_0}}{\lambda}\right) \\
&= \left(-\frac{\lambda U_0 F}{2} + \frac{\lambda a U_0}{h_0}\Phi_t\right)\left(\frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\right) \\
&= -\frac{U_0 F\sqrt{gh_0}}{2} + \frac{aU_0\sqrt{gh_0}}{h_0}\Phi_t
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Persamaan (3.11), (3.12), (3.13) dan $\bar{\eta} = a\eta$ disubstitusikan kedalam persamaan (2.28) diperoleh

$$\left(-\frac{U_0 F\sqrt{gh_0}}{2} + \frac{aU_0\sqrt{gh_0}}{h_0}\Phi_t\right) + \frac{1}{2}\left({U_0}^2 + 2\frac{a{U_0}^2}{h_0}\Phi_x + \left(\frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)^2 + \left(\frac{\lambda a U_0}{{h_0}^2}\Phi_y\right)^2\right)$$

$$+ ga\eta = \frac{1}{2}{U_0}^2$$

Karena $F = \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}$, sehingga

$$\left(-\frac{{U_0}^2}{2}+\frac{aU_0\sqrt{gh_0}}{h_0}\Phi_t\right)+\frac{1}{2}\left({U_0}^2+2\frac{a{U_0}^2}{h_0}\Phi_x+\left(\frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)^2+\left(\frac{\lambda aU_0}{{h_0}^2}\Phi_y\right)^2\right)$$
$$+ga\eta=\frac{1}{2}{U_0}^2$$

Dengan ruas kanan dan kiri ditambahkan dengan $\frac{{U_0}^2}{2}$, sehingga menjadi

$$\left(\frac{aU_0\sqrt{gh_0}}{h_0}\Phi_t\right)+\frac{1}{2}\left({U_0}^2+2\frac{a{U_0}^2}{h_0}\Phi_x+\left(\frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)^2+\left(\frac{\lambda aU_0}{{h_0}^2}\Phi_y\right)^2\right)+ga\eta$$
$$={U_0}^2$$

atau

$$\left(\frac{aU_0\sqrt{gh_0}}{h_0}\Phi_t\right)+\frac{1}{2}{U_0}^2\left(1+2\frac{a}{h_0}\Phi_x+\left(\frac{a}{h_0}\Phi_x\right)^2+\left(\frac{\lambda a}{{h_0}^2}\Phi_y\right)^2\right)+ga\eta={U_0}^2$$

Selanjunya dikalikan dengan $\frac{1}{gh_0}$, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{aU_0}{h_0\sqrt{gh_0}}\Phi_t\right)+\frac{1}{2}\frac{{U_0}^2}{gh_0}\left(1+2\frac{a}{h_0}\Phi_x+\left(\frac{a}{h_0}\Phi_x\right)^2+\left(\frac{\lambda a}{{h_0}^2}\Phi_y\right)^2\right)+\frac{a\eta}{h_0}={U_0}^2$$

Dimana $\frac{a}{h_0}=\epsilon$, sehingga:

$$\epsilon F\Phi_t+\frac{1}{2}F^2\left(1+2\epsilon\Phi_x+\epsilon^2{\Phi_x}^2+\frac{\epsilon^2}{\mu^2}{\Phi_y}^2\right)+\epsilon\eta={U_0}^2 \qquad (3.14)$$

Dengan kecepatan awalnya $U_0=0$, sehingga diperoleh:

$$\epsilon F\Phi_t+\frac{1}{2}F^2\left(1+2\epsilon\Phi_x+\epsilon^2{\Phi_x}^2+\frac{\epsilon^2}{\mu^2}{\Phi_y}^2\right)+\epsilon\eta=0 \qquad (3.15)$$

Keempat, dilakukan penskalaan variabel pada persamaan (2.34):

Sehingga dengan skala-skala $\bar{\phi}=\frac{\lambda aU_0}{h_0}\phi$, $\phi=\frac{h_0}{a}\left(x-\frac{Ft}{2}\right)+\Phi$, $\bar{y}=yh_0$ dan $\bar{x}=x\lambda$ disubstitusikan kedalam $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}}$ diperoleh persamaan (3.1) dan $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{y}}$ diperoleh persamaan (3.3).

Selanjutnya skala-skala $h = \frac{\bar{h}}{a}$, dan $x = \frac{\bar{x}}{\lambda}$, disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(ah)\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\bar{x}}{\lambda}\right)\\ &= (ah_{\mathrm{x}})\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ &= \left(\frac{a}{\lambda}h_{\mathrm{x}}\right) \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Persamaan (3.1), (3.3), dan (3.16) disubstitusikan kedalam persamaan (2.34), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\lambda a U_0}{{h_0}^2}\Phi_{\mathrm{y}} &= -\left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0}\Phi_{\mathrm{x}}\right)\left(\frac{a}{\lambda}h_{\mathrm{x}}\right)\\ &= -\frac{a}{\lambda}\left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0}\Phi_{\mathrm{x}}\right)h_{\mathrm{x}}\\ &= -\frac{aU_0}{\lambda}\left(1 + \frac{a}{h_0}\Phi_{\mathrm{x}}\right)h_{\mathrm{x}}\end{aligned}$$

Dengan dikalikan $\frac{1}{U_0}$, maka persamaan diatas menjadi

$$\frac{\lambda a}{{h_0}^2}\Phi_{\mathrm{y}} = -\frac{a}{\lambda}\left(1 + \frac{a}{h_0}\Phi_{\mathrm{x}}\right)h_{\mathrm{x}}$$

$$\Phi_{\mathrm{y}} = -\frac{h_0^2}{\lambda^2}\left(1 + \frac{a}{h_0}\Phi_{\mathrm{x}}\right)h_{\mathrm{x}} \qquad (3.17)$$

Dimana $\frac{h_0}{\lambda} = \mu$, sehingga $\frac{{h_0}^2}{\lambda^2} = \mu^2$, dan $\frac{a}{h_0} = \epsilon$, maka persamaan (3.17) menjadi:

$$\Phi_{\mathrm{y}} = -\mu^2(1 + \epsilon\Phi_{\mathrm{x}})h_{\mathrm{x}} \qquad (3.18)$$

3.1.2 Aproksimasi Variabel yang digunakan

Langkah berikutnya yaitu menentukan nilai Φ dari persamaan (3.6) dan persamaan (3.18) dengan fungsi potensial yang diekspresikan sebagai deret, sebagaimana menurut L.H. Wiryanto (2010) yaitu sebagai berikut berikut:

$$\Phi = \Phi_0 + \mu^2\Phi_1 + \mu^4\Phi_2 + \cdots \tag{3.19}$$

Selanjutnya disubstitusikan persamaan (3.19) ke persamaan (3.6) dan (3.18), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} &\mu^2\left[(\Phi_0)_{xx} + \mu^2(\Phi_1)_{xx} + \mu^4(\Phi_2)_{xx} + \cdots\right] \\ &\qquad + \left[(\Phi_0)_{yy} + \mu^2(\Phi_1)_{yy} + \mu^4(\Phi_2)_{yy} + \cdots\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

dan

$$\begin{aligned} &\mu^2 h_x + \mu^2\epsilon\left[(\Phi_0)_x + \mu^2(\Phi_1)_x + \mu^4(\Phi_2)_x + \cdots\right]h_x \\ &\qquad + \left[(\Phi_0)_y + \mu^2(\Phi_1)_y + \mu^4(\Phi_2)_y + \cdots\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Persamaan di atas dapat dituliskan menjadi:

$$(\Phi_0)_{yy} + \mu^2[(\Phi_0)_{xx} + (\Phi_1)_{yy}] + \mu^4\left[(\Phi_1)_{xx} + (\Phi_2)_{yy}\right] + \cdots = 0 \tag{3.22}$$

dan

$$\begin{aligned} &(\Phi_0)_y + \mu^2\left[(\Phi_1)_y + \left(1 + \epsilon(\Phi_0)_x\right)h_x\right] + \\ &\mu^4\left[\epsilon h_x(\Phi_1)_x + (\Phi_2)_y\right] + \cdots = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Sehingga untuk orde I diperoleh

a. Persamaan (3.22)

$$(\Phi_0)_{yy}(x, y, t) = 0 \tag{3.24}$$

b. Kondisi batas kinematik (3.23) pada $y = -1$

$$(\Phi_0)_y(x,y,t) = 0 \tag{3.25}$$

dan orde μ^2 diperoleh

a. Persamaan (3.22)

$$(\Phi_0)_{xx} + (\Phi_1)_{yy} = 0 \tag{3.26}$$

b. Kondisi batas kinematik (3.23) pada $y = -1$

$$(\Phi_1)_y + h_x = 0 \tag{3.27}$$

Sehingga untuk solusi dari orde I, langkah pertama yaitu dari persamaan (3.24) diintegralkan terhadap y sehingga

$$\int (\Phi_0)_{yy}(x,y,t)\,dy = \int 0\,dy$$

$$(\Phi_0)_y(x,y,t) = C \tag{3.28}$$

dengan C merupakan konstanta terhadap y yang dapat dituliskan sebagai $C(x,t)$. Dengan kondisi batas di $y = -1$

$$(\Phi_0)_y(x,-1,t) = 0$$

Jika disubstitusikan $y = -1$ pada persamaan (3.28) diperoleh

$$(\Phi_0)_y(x,-1,t) = C(x,t)$$

berakibat nilai $C(x,t) = 0$, sehingga persamaan (3.28) menjadi

$$(\Phi_0)_y(x,y,t) = 0$$

Selanjutnya $(\Phi_0)_y(x,y,t) = 0$ diintegralkan kembali terhadap y, sehingga

$$\int (\Phi_0)_y(x,y,t)\,dy = \int 0\,dy$$

$$\Phi_0(x,y,t) = A(x,t) \tag{3.29}$$

Dari orde μ^2 mempunyai:

$$(\Phi_0)_{xx} + (\Phi_1)_{yy} = 0$$

atau

$$(\Phi_1)_{yy}(x,y,t) = -(\Phi_0)_{xx}(x,y,t) \tag{3.30}$$

Dari persamaan (3.29) dapat diketahui bahwa

$$(\Phi_0)_{xx}(x,y,t) = \mathrm{A}_{xx}(x,t)$$

Sehingga berakibat pada persamaan (3.30) menjadi:

$$(\Phi_1)_{yy}(x,y,t) = -\mathrm{A}_{xx}(x,t)$$

$$\int (\Phi_1)_{yy}(x,y,t)\,dy = \int -\mathrm{A}_{xx}(x,t)\,dy$$

$$(\Phi_1)_{y}(x,y,t) = -\mathrm{A}_{xx}(x,t)y + B \tag{3.31}$$

Dimana B merupakan konstanta pengintegralan terhadap y yang dapat dituliskan $B(x,t)$.

Dari persamaan (3.27) diperoleh:

$$(\Phi_1)_{y}(x,-1,t) = -h_x$$

Sehingga persamaan (3.31) diperoleh:

$$-\mathrm{A}_{xx}(x,t)(-1) + B(x,t) = (\Phi_1)_{y}(x,-1,t)$$

$$\mathrm{A}_{xx}(x,t) + B(x,t) = -h_x$$

$$B(x,t) = -\mathrm{A}_{xx}(x,t) - h_x \tag{3.32}$$

Sehingga persamaan (3.32), maka persamaan (3.31) menjadi:

$$(\Phi_1)_{y}(x,y,t) = -A_{xx}(x,t)y - \mathrm{A}_{xx}(x,t) - h_x \tag{3.33}$$

Selanjutnya untuk mencari Φ_1, maka diintegralkan kembali, sehingga diperoleh

$$\int (\Phi_1)_y(x,y,t)\,dy = \int -A_{xx}(x,t)y - A_{xx}(x,t) - h_x\,dy$$

$$\Phi_1(x,y,t) = -\frac{1}{2}A_{xx}(x,t)y^2 - A_{xx}(x,t)y - h_x y + B$$

$$= -A_{xx}(x,t)\left(\frac{1}{2}y^2 + y\right) - h_x y + B$$

$$= -A_{xx}(x,t)\left(\frac{y^2+2y}{2}\right) - h_x y + B$$

Dimana B merupakan konstanta pengintegralan terhadap y yang dapat dituliskan $B(x,t)$.

Dengan manipulasi aljabar sehingga diperoleh:

$$\Phi_1(x,y,t) = -\frac{1}{2}(y^2+2y+1)A_{xx}(x,t) - h_x y$$

$$+\left\{B(x,t) + \frac{1}{2}A_{xx}(x,t)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}(y^2+2y+1)A_{xx}(x,t) - h_x y + F(x,t)$$

$$= -A_{xx}(x,t)\frac{(y+1)^2}{2} - h_x y + F(x,t) \qquad (3.34)$$

Selanjutnya persamaan(3.29) dan (3.34) disubstitusikan pada persamaan (3.25), sehingga $\Phi(x,y,t)$ diperoleh

$$\Phi(x,y,t) = A(x,t) + \mu^2\left[-A_{xx}(x,t)\frac{(y+1)^2}{2} - h_x y + F(x,t)\right] \qquad (3.35)$$

$$+ O(\mu^4)$$

Karena tujuannya adalah mencari model gelombang permukaan, sehingga langkah selanjutnya yaitu dari persamaan (3.35) disubstitusikan pada kondisi batas permukaan fluida yaitu persamaan (3.10) dan (3.15). dimana dari persamaan (3.35) diperoleh nilai dari $\Phi_x(x,y,t)$ sabagai berikut

$$\Phi_x(x,y,t) = A_x + \mu^2\left[-A_{xxx}\frac{(y+1)^2}{2} - h_{xx} + F_x\right]$$

Sehingga jika $y = 0$ maka menjadi

$$\Phi_x(x,0,t) = A_x + \mu^2\left[-\frac{1}{2}A_{xxx} - h_{xx} + F_x\right]$$

Dari persamaan (3.35) diperoleh $\Phi_y(x,y,t)$ sabagai berikut

$$\Phi_y(x,y,t) = \mu^2[-A_{xx}(y+1) - h_x]$$

Sehingga jika $y = 0$ maka menjadi

$$\Phi_y(x,0,t) = \mu^2[-A_{xx} - h_x]$$

Dari persamaan (3.35) diperoleh $\Phi_t(x,y,t)$ sabagai berikut

$$\Phi_t(x,y,t) = A_t + \mu^2\left[-A_{xxt}\frac{(y+1)^2}{2} + F_t\right]$$

Sehingga jika $y = 0$ maka menjadi

$$\Phi_t(x,0,t) = A_t + \mu^2\left[-\frac{1}{2}A_{xxt} + F_t\right]$$

Sehingga persamaan(3.10) menjadi:

$$F\mu^2[-A_{xx} - h_x] = \mu^2\eta_t + \mu^2 F\left(1 + \epsilon A_x + \epsilon\mu^2\left[-\frac{1}{2}A_{xxx} - h_{xx} + F_x\right]\right)\eta_x$$

Atau

$$F[-A_{xx} - h_x] = \eta_t + F\left(1 + \epsilon A_x + \epsilon\mu^2\left[-\frac{1}{2}A_{xxx} - h_{xx} + F_x\right]\right)\eta_x$$

Dengan asumsi bahwa $\epsilon = \mu^2$, sehingga persamaan diatas menjadi:

$$F[-A_{xx} - h_x] = \eta_t + F\left(1 + \epsilon A_x + \epsilon^2\left[-\frac{1}{2}A_{xxx} - h_{xx} + F_x\right]\right)\eta_x$$

Jika persamaan diatas diambil sampai orde ϵ saja, maka diperoleh:

$$F[-A_{xx} - h_x] = \eta_t + F(1 + \epsilon A_x)\eta_x$$

$$\eta_t + F[A_{xx} + h_x] + F\eta_x + \epsilon F A_x \eta_x = 0 \qquad (3.36)$$

Selanjutnya persamaan (3.15) menjadi:

$$\epsilon F\Phi_{\mathrm{t}} + \frac{1}{2}F^2\left(1 + 2\epsilon\Phi_{\mathrm{x}} + \epsilon^2{\Phi_{\mathrm{x}}}^2 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2}{\Phi_{\mathrm{y}}}^2\right) + \epsilon\eta = 0$$

$$\epsilon F\left(\mathrm{A}_t + \mu^2\left[-\frac{1}{2}\mathrm{A}_{xxt} + F_t\right]\right)$$
$$+\frac{1}{2}F^2\left(1 + 2\epsilon\left(\mathrm{A}_x + \mu^2\left[-\frac{1}{2}\mathrm{A}_{xxx} - h_{xx} + F_x\right]\right)\right.$$
$$+\epsilon^2\left(\mathrm{A}_x + \mu^2\left[-\frac{1}{2}\mathrm{A}_{xxx} - h_{xx} + F_x\right]\right)^2$$
$$\left.+\frac{\epsilon^2}{\mu^2}(\mu^2[-\mathrm{A}_{xx} - h_x])^2\right) + \epsilon\eta = 0$$

Karena $\epsilon = \mu^2$, sehingga

$$\epsilon F\left(\mathrm{A}_t + \epsilon\left[-\frac{1}{2}\mathrm{A}_{xxt} + F_t\right]\right)$$
$$+\frac{1}{2}F^2\left(1 + 2\epsilon\left(\mathrm{A}_x + \epsilon\left[-\frac{1}{2}\mathrm{A}_{xxx} - h_{xx} + F_x\right]\right)\right.$$
$$\left.+\epsilon^2\left(\mathrm{A}_x + \epsilon\left[-\frac{1}{2}\mathrm{A}_{xxx} - h_{xx} + F_x\right]\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon}(\epsilon[-\mathrm{A}_{xx} - h_x])^2\right)$$
$$+\epsilon\eta = 0$$

Persamaan diatas diambil sampai dengan orde ϵ, maka diperoleh

$$\epsilon F(\mathrm{A}_t) + \frac{1}{2}F^2\big(1 + 2\epsilon(\mathrm{A}_x)\big) + \epsilon\eta = 0$$

Atau dapat disederhanakan menjadi

$$\epsilon F\mathrm{A}_t + \epsilon F^2\mathrm{A}_x + \epsilon\eta + \frac{1}{2}F^2 = 0$$

$$\epsilon(F\mathrm{A}_t + F^2\mathrm{A}_x + \eta) + \frac{1}{2}F^2 = 0 \tag{3.37}$$

Dengan didefinisikan bahwa kecepatan rata-rata adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\epsilon\eta + 1 + \epsilon h}\int_{-(1+\epsilon h)}^{\epsilon\eta} \phi_x \; dy \approx \frac{1}{\epsilon} + \mathrm{A}_x \tag{3.38}$$

Dari persamaan (3.38) maka diperoleh

$$u = \frac{1}{\epsilon} + \mathrm{A}_x$$

$$\mathrm{A}_x = u - \frac{1}{\epsilon}$$

$$\mathrm{A}_{xx} = u_x$$

Sehingga persamaan (3.36) menjadi:

$$\eta_t + F[u_x + h_x] + F\eta_x + \epsilon F\left(u - \frac{1}{\epsilon}\right)\eta_x = 0$$

Atau dapat dituliskan sebagai

$$\eta_t + Fu_x + Fh_x + F\eta_x + \epsilon Fu\eta_x - F\eta_x = 0$$

Sehingga dari persamaan (3.36) diperoleh bentuk sederhana sebagai berikut

$$\eta_t + Fu_x + Fh_x + \epsilon Fu\eta_x = 0 \tag{3.39}$$

Selanjutnya untuk persamaan (3.37) mempunyai variabel A_t, sehingga terlebih dahulu untuk mencari nilai dari A, yaitu bahwasanya dari persamaan (3.38) diperoleh

$$u = \frac{1}{\epsilon} + \mathrm{A}_x$$

$$\mathrm{A}_x = u - \frac{1}{\epsilon}$$

Sehingga untuk mencari nilai A, maka diintegralkan terhadap x, sehingga diperoleh

$$\int A_x\, dx = \int u - \frac{1}{\epsilon}\, dx$$

$$A = \int u\, dx - \frac{1}{\epsilon} x$$

Sehingga dengan demikian A_t diperoleh

$$A_t = \int u_t\, dx$$

Sehingga persamaan (3.37) menjadi

$$\epsilon\left(F\int u_t\, dx + F^2\left(u - \frac{1}{\epsilon}\right) + \eta\right) + \frac{1}{2}F^2 = 0$$

Atau

$$\epsilon\left(F\int u_t\, dx + F^2 u - F^2\frac{1}{\epsilon} + \eta\right) + \frac{1}{2}F^2 = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$F\int u_t\, dx + F^2 u - F^2\frac{1}{\epsilon} + \eta + \frac{1}{2\epsilon}F^2 = 0$$

$$F\int u_t\, dx + F^2 u + \eta - \frac{1}{2\epsilon}F^2 = 0$$

Sehingga untuk menghilangkan integral terhadap x, maka diturunkan terhadap x, sehingga diperoleh

$$Fu_t + F^2 u_x + \eta_x = 0 \tag{3.40}$$

Dari (3.39) dan (3.40) diperoleh sistem persamaan differensial parsial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_t + F(u_x + h_x) + \epsilon F u \eta_x &= 0 \\ Fu_t + F^2 u_x + \eta_x &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Persamaan (3.41) merupakan model persamaan *Boussinesq* untuk gelombang permukaan yang melalui sebuah gundukan dimana $\eta(x,t)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $u(x,t)$ adalah kecepatan rata-rata pada aliran fluida, h_x adalah representasi dari gundukan pada dasar saluran, F adalah froud number, dan ϵ adalah perbandingan dari amplitudo gelombang dengan kedalaman aliran.

Untuk mencari solusi dari persamaan (3.41) dibutuhkan kondisi awal η dan u. Dengan diberikan $\eta(x,0) = 0$ yang menggambarkan bahwa pada saat permulaan belum terjadi gelombang. Selanjutnya akan dicari $u(x,0)$ dengan memberikan suatu fungsi $z = x - ct$ yang disubstitusikan dalam persamaan (3.40) sehingga

$$Fu_t + F^2 u_x + \eta_x = 0$$

$$Fu_t + F^2 u_x = -\eta_x$$

$$u_t + Fu_x = -\frac{1}{F}\eta_x$$

karena

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = u_z(-c) \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = u_z(1) \qquad \text{dan} \qquad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \eta_z(1)$$

Sehingga diperoleh

$$u_z(-c) + Fu_z = -\frac{1}{F}\eta_z$$

$$(F-c)u_z = -\frac{1}{F}\eta_z \qquad (3.42)$$

Maka dari persamaan (3.42) diperoleh

$$u_z = -\frac{1}{F(F-c)}\eta_z$$

Sehingga untuk memperoleh u maka diintegralkan terhadap z, sehingga

(3.43)

$$\int u_z \, dz = -\int \frac{1}{F(F-c)} \, \eta_z \, dz$$

$$u = -\frac{1}{F(F-c)}\eta + C$$

Sehingga persamaan (3.38) dan persamaan (3.43) pada $t = 0$ diperoleh

$$u(x,0) = u(x,0)$$

$$\frac{1}{\epsilon} + A_x(x,0) \approx -\frac{1}{F(F-c)}\eta(x,0) + C \qquad (3.44)$$

Sehingga nilai C pada persamaan (3.44) dapat diperoleh dari

$$\lim_{x\to-\infty} A_x(x,0) + \frac{1}{\epsilon} \approx \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{F(F-c)}\eta(x,0) + C$$

$$0 + \frac{1}{\epsilon} \approx 0 + C$$

Sehingga

$$u(x,0) = u(x,0)$$

$$C = \frac{1}{\epsilon}$$

$$u(x,0) = C = \frac{1}{\epsilon}$$

Sehingga diperoleh kondisi awal $\eta(x,0) = 0$ dan $u(x,0) = \frac{1}{\epsilon}$.

3.3 Kajian Persamaan Boussinesq dalam Al-Qur'an

Persamaan

$$\eta_t + F(u_x + h_x) + \epsilon F u \eta_x = 0$$

$$F u_t + F^2 u_x + \eta_x = 0$$

merupakan persamaan Boussinesq yang diturunkan dari persamaan Laplace beserta kondisi batas pada permukaan fluida dan kondisi batas pada dasar fluida.

Dengan diperoleh persamaan ini maka membuktikan bahwa terdapat model matematika untuk fenomena alam yang terkait dengan gelombang permukaan. Adanya model ini menjelaskan bahwa keteraturan alam ini membuktikan hubungan yang menjelaskan Al-Qur'an surat Al-Qomar ayat 49. Sehingga dengan model matematika ini, selain dapat menambah pengetahuan juga dapat meningkatkan keimanan dan ketaqwaan kepada Allah SWT, sebab Allah telah menciptakan alam semesta ini dengan perhitungannya masing masing. Sebagaimana Allah berfirman dalam surat Al-Hijr ayat 21:

وَإِن مِّن شَىْءٍ إِلَّا عِندَنَا خَزَآئِنُهُۥ وَمَا نُنَزِّلُهُۥٓ إِلَّا بِقَدَرٍ مَّعْلُومٍ ﴿٢١﴾

Artinya: *"Dan tidak ada sesuatupun melainkan pada sisi Kami-lah khazanahnya dan Kami tidak menurunkannya melainkan dengan ukuran yang tertentu"* (QS. Al-Hijr: 21).

Oleh karena itu, perlu diingat bahwa apa yang diketahui sekarang, hanyalah sebagian kecil dari keluasan ilmu Allah SWT yang sangat luas, ibarat sebutir pasir dari pasir di pantai. Oleh karena itu, tidak boleh menyombongkan diri atas penemuan kita, karena sesungguhnya masih amatlah luas apa yang diciptakan Allah SWT.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dapat di simpulkan bahwa langkah-langkah untuk mendapatkan model gelombang permukaan dengan gangguan berupa gundukan pada dasar saluran yaitu: menurunkan persamaan-persamaan kesetimbangan yang diturunkan dari hukum-hukum kekekalan yang terjadi pada aliran fluida, selanjutnya dilakukan penskalaan, aproksimasi variabel, peninjauan tiap-tiap orde dengan deret, dan menyederhanakan kedalam sebuah model matematika. Model yang diperoleh berupa sistem persamaan differensial parsial nonlinier yang dapat dikategorikan sebagai persamaan *Boussinesq*. Adapun persamaan tersebut adalah sebagai berikut:

$$\eta_t + F(u_x + h_x) + \epsilon F u \eta_x = 0$$

$$F u_t + F^2 u_x + \eta_x = 0$$

dimana $\eta(x,t)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $u(x,t)$ adalah kecepatan rata-rata pada aliran fluida, h_x adalah representasi dari gundukan pada dasar saluran, F adalah froud number, dan ϵ adalah perbandingan dari amplitudo gelombang dengan kedalaman aliran.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini penulis hanya melakukan penurunan model terhadap masalah yang dibahas. Selanjutnya penulis menyarankan agar pada penelitian selanjutnya untuk menentukan solusi dari sistem persamaan differensial parsial yang di hasilkan.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusyasyakir. 2007. *Ketika kiai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Al-Jazairi. 2006. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 1*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Jazairi. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 7*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Qarni, A.. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press.

Al-Qurthubi, S.I.. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi*. Terjemahan Muhyiddin Mas Rida dan Muhammad Rana Mengala. Jakarta: Pustaka Azzam.

Cole, S.L.. 1985. Transient Waves Produced by Flow Past A Bump. *Wave Motion,* Volume 7 Halaman 579-587.

Djohan, W.. 1997. Dinamika Gelombang Cnoidal di Atas Dasar Tak Rata Menggunakan Persamaan Gelombang Dua Arah Boussinesq. *JMB*, Volume 2 Halaman 87-98.

Douglas, G.. 2001. *Fisika Edisi kelima.* Jakarta: Erlangga.

Forbes, L.K.. 1988. Critical free surface flow over a semi-circular obstruction. *J. Eng. Math*, Volume 22 Halaman 3-13

Forbes, L.K. & Schwartz, L.W.. 1982. Free surface flow over a semi-circular obstruction. *J. Fluid Mech, Volume* 144 Halaman 299-314.

Holthuijsen, L.. 2007. *Waves in Oceanic and Coastal Waters.* New York: Cambridge University Press.

Ibnu Katsir. 2003. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Kementrian Agama RI. 2010. *Al-Qur'an dan Tafsirnya.*Jakarta: Departeman Agama RI.

Munson, B., Young, D., & Okiishi, T.. 2004. *Mekanika Fluida Edisi Keempat Jilid 1. Jakarta*: Erlangga.

Olson, R. M.. 1993. *Dasar-Dasar Mekanika Fluida Teknik.* Jakarta: PT Gramedia Pustaka Umum.

Pangaribuan, R. U.. 2008. *Formulasi Hamiltonian untuk Menggambarkan Gerak Gelombang Soliter Dimensi Tiga Di Permukaan Laut*. Skripsi tidak diterbitkan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Patiroi, A.. 2010. *Pemodelan Numerik Persamaan Boussinesq Menggunakan Metode Elemen Hingga 2 Langkah Taylor-Galerkin*. Tesis tidak diterbitkan. Yogyakarta: Program Pascasarjana Universitas Gajah Mada.

Quthb, S.. 2004. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an*. Jakarta: Gema Insani.

Vanden-Broeck, J.M.. 1987. Free Surface Flow Over A Semi-Circular Obstruction In A Channel. *Phys. Fluids*, Volume 30 Halaman 2315-2317.

Wiryanto, L.H.. 2010. A Solitary-like Wave Generated by Flow Passing a Bump. *ICMSA 2010*(1176-1183). Kuala Lumpur: Proceedings of the 6th IMT-GT Conference on Mathematics, Statistic and its Application.

Lampiran 1

Akan dibuktikan

$$\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) = (\bar{q} \cdot \bar{q})\nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\, \bar{q}$$

dengan

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right)$$

$$\bar{q} = u\,\mathrm{i} + v\,\mathrm{j} + w\,\mathrm{k}$$

maka

$$(\nabla \times \bar{q}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

dan

$$\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{vmatrix}$$

$$= i\left(v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)$$

$$- j\left(u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - w\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right)$$

$$+ k\left(u\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right)$$

$$= i\left(v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ j\left(w\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

$$+ k\left(u\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-v\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right)$$

$$= i\left(v\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$+ j\left(w\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+ k\left(u\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial w}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}-w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$= i\left(\frac{\partial}{\partial x}(uu+vv+ww)-\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)u\right)$$

$$+ j\left(\frac{\partial}{\partial y}(uu+vv+ww)-\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)v\right)$$

$$+ k\left(\frac{\partial}{\partial z}(uu+vv+ww)-\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)w\right)$$

$$= i\left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{q}\cdot\bar{q})-(\bar{q}\cdot\nabla)u\right)+j\left(\frac{\partial}{\partial y}(\bar{q}\cdot\bar{q})-(\bar{q}\cdot\nabla)v\right)$$

$$+ k\left(\frac{\partial}{\partial z}(\bar{q}\cdot\bar{q})-(\bar{q}\cdot\nabla)w\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{q}\cdot\bar{q})i-(\bar{q}\cdot\nabla)u\,i\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}(\bar{q}\cdot\bar{q})j-(\bar{q}\cdot\nabla)v\,j\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z}(\bar{q}\cdot\bar{q})k-(\bar{q}\cdot\nabla)w\,k\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{q}\cdot\bar{q})i+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{q}\cdot\bar{q})j+\frac{\partial}{\partial z}(\bar{q}\cdot\bar{q})k\right)$$

$$- \left((\bar{q}\cdot\nabla)u\,i+(\bar{q}\cdot\nabla)vj+(\bar{q}\cdot\nabla)wk\right)$$

$$= (\bar{q}\cdot\bar{q})\left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right) - (\bar{q}\cdot\nabla)(u\,i + v\,j + w\,k)$$

$$\boldsymbol{\bar{q}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\bar{q}}) = (\boldsymbol{\bar{q}} \cdot \boldsymbol{\bar{q}})\boldsymbol{\nabla} - (\boldsymbol{\bar{q}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\bar{q}}$$

Selanjutnya akn dibuktikan bahwa

$$(\boldsymbol{\bar{q}} \cdot \boldsymbol{\bar{q}})\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,|\boldsymbol{\bar{q}}|^2\right)\boldsymbol{\nabla}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{q}\cdot\bar{q})\nabla &= (\bar{q}\cdot\bar{q})\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right)\\
&= (u\,i + v\,j + w\,k)\cdot(u\,i + v\,j + w\,k)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right)\\
&= (u\,u + v\,v + w\,w)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i}(u\,u + v\,v + w\,w) + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j}(u\,u + v\,v + w\,w)\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}(u\,u + v\,v + w\,w)\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}u\,u + \frac{\partial}{\partial x}v\,v + \frac{\partial}{\partial x}w\,w\right)\mathrm{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}u\,u + \frac{\partial}{\partial y}v\,v + \frac{\partial}{\partial y}w\,w\right)\mathrm{j}\\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial z}u\,u + \frac{\partial}{\partial z}v\,v + \frac{\partial}{\partial z}w\,w\right)k\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(2\frac{\partial}{\partial x}u\,u + 2\frac{\partial}{\partial x}v\,v + 2\frac{\partial}{\partial x}w\,w\right)\mathrm{i}\right.\\
&\qquad + \left(2\frac{\partial}{\partial y}u\,u + 2\frac{\partial}{\partial y}v\,v + 2\frac{\partial}{\partial y}w\,w\right)\mathrm{j}\\
&\qquad \left. + \left(2\frac{\partial}{\partial z}u\,u + 2\frac{\partial}{\partial z}v\,v + 2\frac{\partial}{\partial z}w\,w\right)k\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}u^2 + \frac{\partial}{\partial x}\,v^2 + \frac{\partial}{\partial x}\,w^2\right)\mathrm{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}u^2 + \frac{\partial}{\partial y}\,v^2 + \frac{\partial}{\partial y}\,w^2\right)\mathrm{j}\right.\\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial z}u^2 + \frac{\partial}{\partial z}\,v^2 + \frac{\partial}{\partial z}\,w^2\right)\mathrm{k}\right]\\
&= \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right)\\
&= \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\nabla\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\right)^2\nabla\\
&= \left(\frac{1}{2}\,|\bar{q}|^2\right)\nabla
\end{aligned}$$

sehingga

$$(\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \overline{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ |\overline{\boldsymbol{q}}|^2\right)\boldsymbol{\nabla}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{q}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \overline{\boldsymbol{q}}) &= (\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \overline{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\nabla} - (\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\ \overline{\boldsymbol{q}} \\ &= \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ |\overline{\boldsymbol{q}}|^2\right)\boldsymbol{\nabla} - (\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\ \overline{\boldsymbol{q}}\ \blacksquare\end{aligned}$$