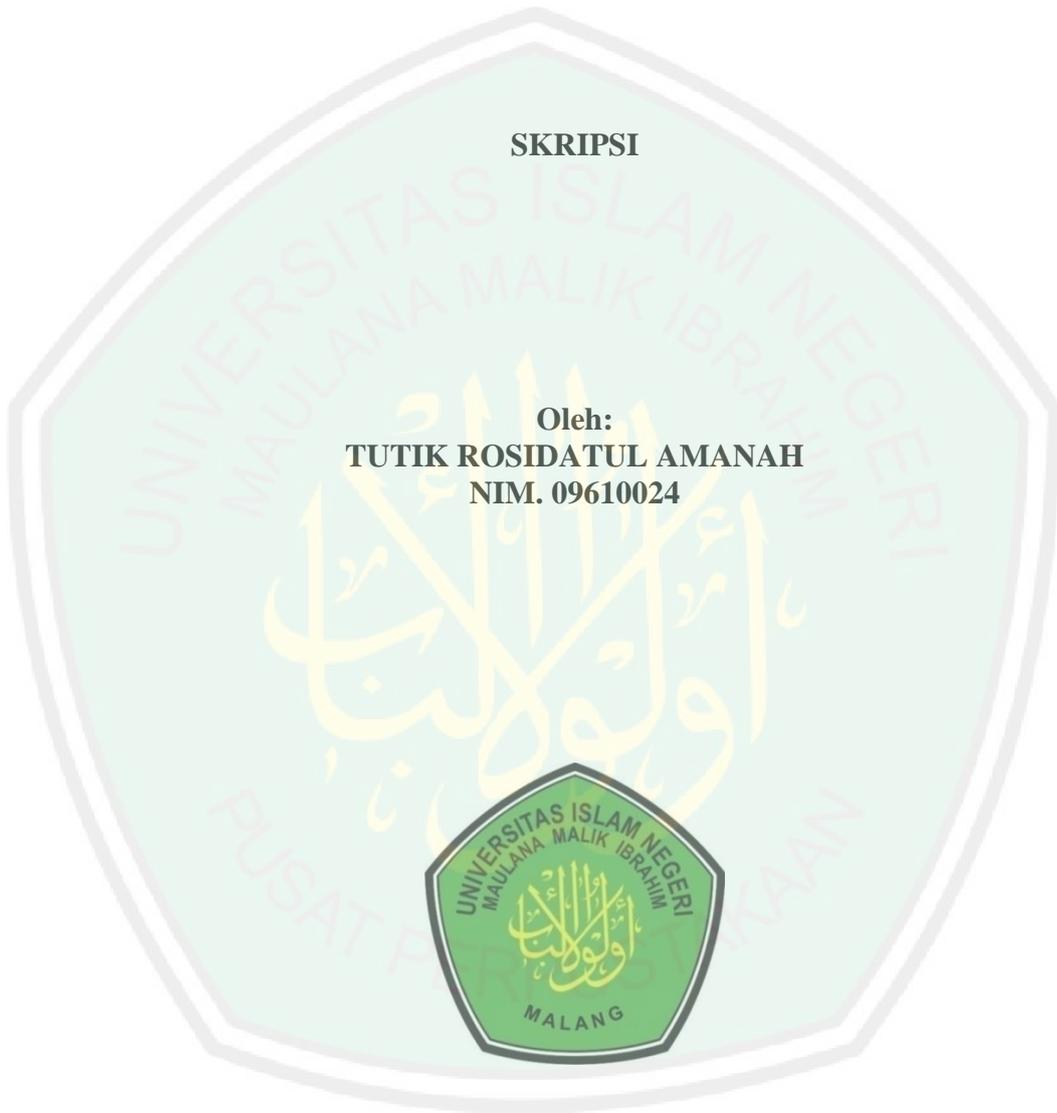


**SOLUSI NUMERIK MODEL RESPON MAKROFAG TERHADAP  
INFEKSI *MYCROBACTERIUN TUBERCULOSIS* DENGAN METODE  
BEDA HINGGA SKEMA *CRANK-NICOLSON***

**SKRIPSI**

Oleh:  
**TUTIK ROSIDATUL AMANAH**  
**NIM. 09610024**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**SOLUSI NUMERIK MODEL RESPON MAKROFAG TERHADAP  
INFEKSI *MYCOBACTERIUM TUBERCULOSIS* DENGAN METODE  
BEDA HINGGA SKEMA *CRANK-NICOLSON***

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**TUTIK ROSIDATUL AMANAH**  
**NIM. 09610024**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**SOLUSI NUMERIK MODEL RESPON MAKROFAG TERHADAP  
INFEKSI *MYCOBACTERIUM TUBERCULOSIS* DENGAN METODE  
BEDA HINGGA SKEMA *CRANK-NICOLSON***

**SKRIPSI**

Oleh:  
**TUTIK ROSIDATUL AMANAH**  
**NIM. 09610024**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal: 28 Mei 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

Ach. Nashichuddin, M.A  
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP.19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK MODEL RESPON MAKROFAG TERHADAP  
INFEKSI *MYCOBACTERIUM TUBERCULOSIS* DENGAN METODE  
BEDA HINGGA SKEMA *CRANK-NICOLSON***

**SKRIPSI**

**Oleh:  
TUTIK ROSIDATUL AMANAH  
NIM. 09610024**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 15 Juni 2013

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004 \_\_\_\_\_

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002 \_\_\_\_\_

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001 \_\_\_\_\_

Anggota Penguji : Ach. Nashichuddin, M.A  
NIP. 19730705 200003 1 002 \_\_\_\_\_

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Tutik Rosidatul Amanah

NIM : 09610024

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Solusi Numerik Model Respon Makrofag terhadap Infeksi  
*Mycobacterium tuberculosis* dengan Metode Beda Hingga Skema  
*Crank-Nicolson*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Mei 2013

Yang membuat pernyataan,

Tutik Rosidatul Amanah  
NIM. 09610024

## MOTTO



## ***PERSEMBAHAN***

Skripsi ini akan dipersembahkan kepada:

*Ayah Zainal Arif & Ibu Husnawiyah*

*Kakak Radiul Huda & Kakak Syaifur Ridho*

*Keponakan Tersayang Ahmad Fahmi & Fithra Akbar Raditya*

*Serta*

*Seluruh keluarga*

Terimakasih atas doa, kasih sayang, nasihat, motivasi, dan bimbingannya.

## KATA PENGANTAR

السَّلَامُ عَلَيْكُمْ وَرَحْمَةُ اللَّهِ وَبَرَكَاتُهُ

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan ridho-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **“Solusi Numerik Model Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson”** dengan baik. Shalawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, dan para sahabat beliau. Semoga penulis dapat meneladani beliau dalam berakhlaq.

Ucapan terimakasih penulis haturkan pada berbagai pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Dengan iringan syukur penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen wali.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku pembimbing skripsi bidang matematika.

6. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing skripsi bidang agama.
7. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan ilmu yang dapat dijadikan bekal di masa depan.
8. Bapak Zainal Arif dan Ibu Husnawiyah serta segenap keluarga yang tidak pernah berhenti memberikan doa, inspirasi, motivasi, dan mengajarkan kesabaran serta *positive thinking* kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
9. Chandra Ali Wijaya, A.Md, yang selalu mendukung dan memberi motivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009, khususnya Siti Mutmainnah, Novita I. S., Febrina M., S.Si, Arni Hartanti, Iswahyuni P., S.Si, Khuzaimah, dan Dhurrotun Nafisa, yang telah memberi semangat tiada henti selama penulis menyelesaikan skripsi ini.
11. Semua pihak yang yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual, penulis ucapkan terimakasih.  
Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته

Malang, Mei 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

|  |      |
|--|------|
| <b>HALAMAN JUDUL</b>   |      |
| <b>HALAMAN PENGAJUAN</b>                                       |      |
| <b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>                                     |      |
| <b>HALAMAN PENGESAHAN</b>                                      |      |
| <b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>                     |      |
| <b>HALAMAN MOTTO</b>   |      |
| <b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>                                     |      |
| <b>KATA PENGANTAR</b> .....                                    | viii |
| <b>DAFTAR ISI</b> .....  | x    |
| <b>DAFTAR GAMBAR</b> .....                                     | xii  |
| <b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....                                   | xiv  |
| <b>ABSTRAK</b> .....   | xv   |
| <b>ABSTRACT</b> .....  | xvi  |
| <b>ملخص</b> .....  | xvii |
| <br>   |      |
| <b>BAB I PENDAHULUAN</b>                                       |      |
| 1.1 Latar Belakang.....  | 1    |
| 1.2 Rumusan Masalah .....                                      | 4    |
| 1.3 Tujuan Penelitian.....                                     | 4    |
| 1.4 Batasan Masalah.....                                       | 4    |
| 1.5 Manfaat Penelitian.....                                    | 5    |
| 1.6 Metode Penelitian.....                                     | 5    |
| 1.7 Sistematika Penulisan.....                                 | 5    |
| <br>   |      |
| <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>                                   |      |
| 2.1 Sistem Persamaan Diferensial Parsial .....                 | 7    |
| 2.1.1 Persamaan Diferensial Parsial Orde Dua .....             | 7    |
| 2.1.2 Persamaan Parabola.....                                  | 9    |
| 2.1.3 Persamaan Diferensial Parsial Linier dan Nonlinier ..... | 10   |
| 2.2 Deret Taylor.....  | 11   |
| 2.2.1 Deret Taylor Orde Nol.....                               | 11   |
| 2.2.2 Deret Taylor Orde Satu .....                             | 12   |
| 2.2.3 Deret Taylor Orde Dua.....                               | 12   |
| 2.3 Kesalahan Pemotongan.....                                  | 12   |
| 2.4 Diferensial Numerik terhadap Variabel Lain .....           | 13   |
| 2.5 Skema Beda Hingga .....                                    | 16   |
| 2.5.1 Skema Eksplisit .....                                    | 17   |
| 2.5.2 Skema Implisit.....                                      | 18   |
| 2.5.3 Skema <i>Crank-Nicolson</i> .....                        | 19   |
| 2.6 Kondisi Batas.....   | 21   |
| 2.7 Tuberkulosis Paru .....                                    | 22   |
| 2.8 Makrofag .....   | 22   |
| 2.9 Penyakit dalam Pandangan Islam .....                       | 23   |

|  |    |
|--|----|
| <b>BAB III PEMBAHASAN</b>  |    |
| 3.1 Analisis Model Respon Makrofag terhadap Infeksi <i>Mycobacterium tuberculosis</i> .....  | 27 |
| 3.1.1 Variabel yang Berperan pada Model Respon Makrofag terhadap Infeksi <i>Mycobacterium tuberculosis</i> .....                               | 27 |
| 3.1.2 Pembentukan Model Matematik pada Respon Makrofag terhadap Infeksi <i>Mycobacterium tuberculosis</i> .....                                | 28 |
| 3.2 Diskritisasi Model Respon Makrofag terhadap Infeksi <i>Mycobacterium tuberculosis</i> dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson ..... | 29 |
| 3.2.1 Diskritisasi Populasi Bakteri .....  | 29 |
| 3.2.1 Diskritisasi Populasi Makrofag .....   | 32 |
| 3.3 Solusi Numerik Model Respon Makrofag terhadap Infeksi <i>Mycobacterium tuberculosis</i> .....  | 37 |
| 3.4 Interpretasi Hasil Diskritisasi Model Respon Makrofag terhadap Infeksi <i>Mycobacterium tuberculosis</i> .....                             | 48 |
| 3.5 Cara Kerja Makrofag menurut Pandangan Islam.. .....  | 59 |
| <b>BAB IV PENUTUP</b>  |    |
| 4.1 Kesimpulan.....  | 64 |
| 4.2 Saran .....  | 65 |
| <b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....  | 66 |
| <b>LAMPIRAN</b> .....  | 68 |

## DAFTAR GAMBAR

|   |    |
|---|----|
| Gambar 2.1 Jaringan Titik Hitungan Sistem Ruang-Waktu ( $x-t$ ) .....   | 16 |
| Gambar 2.2 Skema Eksplisit pada Persamaan Perambatan Panas .....  | 18 |
| Gambar 2.3 Skema Implisit pada Persamaan Perambatan Panas .....   | 19 |
| Gambar 2.4 Skema <i>Crank-Nicolson</i> .....  | 20 |
| Gambar 3.1 Stensil Metode Beda Hingga Skema <i>Crank-Nicolson</i> untuk<br>Persamaan (3.4a) .....                     | 37 |
| Gambar 3.2 Stensil Metode Beda Hingga Skema <i>Crank-Nicolson</i> untuk<br>Persamaan (3.4b) .....                     | 37 |
| Gambar 3.3 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dengan $\nu = 0,1$ .....   | 41 |
| Gambar 3.4 Grafik Diskrit Persamaan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,1$ .....   | 42 |
| Gambar 3.5 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,1$ .....                                    | 42 |
| Gambar 3.6 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dengan $\nu = 0,2$ .....   | 43 |
| Gambar 3.7 Grafik Diskrit Persamaan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,2$ .....   | 43 |
| Gambar 3.8 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,2$ .....                                    | 44 |
| Gambar 3.9 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dengan $\nu = 0,3$ .....   | 44 |
| Gambar 3.10 Grafik Diskrit Persamaan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,3$ .....  | 44 |
| Gambar 3.11 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,3$ .....                                   | 45 |
| Gambar 3.12 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dengan $\nu = 0,4$ .....  | 45 |
| Gambar 3.13 Grafik Diskrit Persamaan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,4$ .....  | 46 |
| Gambar 3.14 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,4$ .....                                   | 46 |
| Gambar 3.15 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dengan $\nu = 0,5$ .....  | 47 |
| Gambar 3.16 Grafik Diskrit Persamaan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,5$ .....  | 47 |
| Gambar 3.17 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,5$ .....                                   | 48 |
| Gambar 3.18 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,1$<br>pada Saat $0 \leq t < 1$ .....       | 50 |
| Gambar 3.19 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,1$<br>pada Saat $1 \leq t < 8,5$ .....     | 51 |
| Gambar 3.20 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,1$<br>pada Saat $8,5 \leq t \leq 10$ ..... | 51 |
| Gambar 3.21 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $\nu = 0,2$   |    |

|  |    |
|--|----|
| pada Saat $0 \leq t \leq 2$ .....  | 52 |
| Gambar 3.22 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,2$<br>pada Saat $2 < t < 7,5$ .....         | 53 |
| Gambar 3.23 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,2$<br>pada Saat $7,5 \leq t < 10$ .....     | 53 |
| Gambar 3.24 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,3$<br>pada Saat $0 \leq t \leq 3$ .....     | 54 |
| Gambar 3.25 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,3$<br>pada Saat $3 < t \leq 6,5$ .....      | 54 |
| Gambar 3.26 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,3$<br>pada Saat $6,5 < t \leq 10$ .....     | 55 |
| Gambar 3.27 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,4$<br>pada Saat $0 \leq t < 4$ .....        | 56 |
| Gambar 3.28 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,4$<br>pada Saat $4 \leq t < 5,7$ .....      | 56 |
| Gambar 3.29 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,4$<br>pada Saat $5,7 \leq t \leq 10$ .....  | 57 |
| Gambar 3.30 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,5$<br>pada Saat $0 \leq t \leq 4,5$ .....   | 57 |
| Gambar 3.31 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,5$<br>pada Saat $4,5 \leq t \leq 5,6$ ..... | 58 |
| Gambar 3.32 Grafik Diskrit Persamaan $B(x,t)$ dan $M(x,t)$ dengan $v = 0,5$<br>pada Saat $5,6 \leq t \leq 10$ .....  | 58 |

## DAFTAR LAMPIRAN

|   |    |
|---|----|
| Lampiran 1 Program MATLAB 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter $\nu = 0,1$ ..... | 68 |
| Lampiran 2 Program MATLAB 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter $\nu = 0,2$ ..... | 70 |
| Lampiran 3 Program MATLAB 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter $\nu = 0,3$ ..... | 72 |
| Lampiran 4 Program MATLAB 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter $\nu = 0,4$ ..... | 74 |
| Lampiran 5 Program MATLAB 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter $\nu = 0,5$ ..... | 76 |

## ABSTRAK

Amanah, Tutik Rosidatul. 2013. **Solusi Numerik Model Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si  
(II) Ach. Nashichuddin, M. A

**Kata Kunci:** Metode Beda Hingga, Sistem Persamaan Model Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis*, Skema *Crank-Nicolson*

Metode beda hingga merupakan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier dalam bentuk diskritisasi. Model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* merupakan sistem persamaan diferensial parsial nonlinier bertipe parabolik yang menggambarkan proses bakteri yang menginfeksi paru-paru yang kemudian difagositosis oleh makrofag.

Digunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* beda maju waktu dan beda pusat ruang untuk menyelesaikan model. Dideskripsikan bahwa dengan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* diperoleh penyelesaian yang stabil dan mendekati solusi analitik. Bentuk diskrit yang diperoleh yaitu:

$$\begin{cases} -D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) B_i^{n+1} - D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-1}^{n+1} = \left(D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) B_{i+1}^n + [1 + \Delta t\alpha - \\ \Delta t\lambda(M_0 + M_i^n) - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}] B_i^n + \left(\frac{v\Delta t}{2\Delta x} + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\right) B_{i-1}^n + \Delta t(\mu + \beta_1) M_i^n \\ -D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) M_i^{n+1} - D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^{n+1} = \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i+1}^n - (\Delta t(\lambda B_i^n + \\ \mu + \psi + \beta_1) + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 1) M_i^n + \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i-1}^n + \Delta t\lambda B_i^n M_0 \end{cases}$$

Hasil solusi numerik model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dapat disimulasikan dengan menggunakan program MATLAB 7.6. Berdasarkan hasil pengamatan, perbedaan nilai  $v$  yang dibatasi pada interval  $0 < v \leq 0,5$  berpengaruh pada lama kestabilan bakteri dan banyaknya makrofag terinfeksi. Nilai  $v$  yang paling baik untuk memperoleh kestabilan yang cepat dengan waktu stabil yang cukup lama ialah 0,1.

## ABSTRACT

Amanah, Tutik Rosidatul. 2013. **Numerical Solution Macrophage Response to *Mycobacterium tuberculosis* Infection Model by Crank-Nicolson Scheme Finite Difference Method**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si  
(II) Ach. Nashichuddin, M. A

**Keywords:** *Crank-Nicolson* Scheme, Finite Difference Method, System of Equations Macrophage Response to *Mycobacterium tuberculosis* Infection Model

Finite difference method is a numerical method that can be used to solve the nonlinear partial differential equations in discretization form. Macrophage response to *Mycobacterium tuberculosis* infection models is a system of nonlinear partial differential equations that describe the parabolic type of bacteria that infects the lungs then phagocytosis by macrophages.

*Crank-Nicolson* scheme finite difference method forward with different for time and center different for space is used to complete the model. Described that the finite difference method of *Crank-Nicolson* scheme obtained stable and approaching completion analytic solutions. Discrete form is obtained which:

$$\left\{ \begin{array}{l} -D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) B_i^{n+1} - D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-1}^{n+1} = \left(D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) B_{i+1}^n + [1 + \Delta t\alpha - \\ \Delta t\lambda(M_0 + M_i^n) - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}] B_i^n + \left(\frac{v\Delta t}{2\Delta x} + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\right) B_{i-1}^n + \Delta t(\mu + \beta_1) M_i^n \\ -D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) M_i^{n+1} - D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^{n+1} = \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i+1}^n - (\Delta t(\lambda B_i^n + \\ \mu + \psi + \beta_1) + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 1) M_i^n + \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i-1}^n + \Delta t\lambda B_i^n M_0 \end{array} \right.$$

The results of numerical solution macrophage response to *Mycobacterium tuberculosis* infection model can be simulated by using MATLAB 7.6 program. Based on observations, difference in the value of  $v$  is restricted to the interval  $0 < v \leq 0,5$  effect on the number of bacteria and the number of infected macrophages.  $v$  is the best value for a quick gain stability with stable long time is 0,1.

## ملخص

أمانة، توتيك رسيده . ٢٠١٣. تصفية العددي الأسلوب الاستجابة إلى عدوى نموذج بلعم ضد المتفطرة السلية بطريقة المختلفة المحددة مخطط لكرنك نيكلسون. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.  
المشرف: (١) الدكتور. عثمان فاغلي، الماجستير  
(٢) أحمد نصيح الدين، الماجستير

**كلمات البحث:** طريقة المختلفة المحددة، مخطط لكرنك نيكلسون، النظام المناسب بأسلوب الاستجابة إلى عدوى نموذج بلعم ضد المتفطرة.

طريقة المختلفة المحددة هي طريقة العددية التي يمكن استخدامها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية نون لينيار في شكل منفصل. نماذج استجابة بلعم للإصابة بعدوى المتفطرة السلية هو نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية التي تصف نوع مكافئ من البكتيريا التي تصيب الرئتين والتي ثم تؤكل من قبل الضامة.

يتم استخدام طريقة المختلفة المحددة-نيكلسون مخطط الفر في وقت سابق ومركز الفضاء مختلفة لإكمال هذا النموذج. توصف بأن طريقة الفروق المحددة من مخطط الساعد-نيكلسون التي تم الحصول عليها مستقرة وتقترب من الحلول التحليلية الانتهاء. يتم الحصول على شكل منفصلة:

$$\left\{ \begin{array}{l} -D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) B_i^{n+1} - D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-1}^{n+1} = \left(D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) B_{i+1}^n + [1 + \Delta t\alpha - \\ \Delta t\lambda(M_0 + M_i^n) - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}] B_i^n + \left(\frac{v\Delta t}{2\Delta x} + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\right) B_{i-1}^n + \Delta t(\mu + \beta_1) M_i^n \\ -D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) M_i^{n+1} - D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^{n+1} = \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i+1}^n - (\Delta t(\lambda B_i^n + \\ \mu + \psi + \beta_1) + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 1) M_i^n + \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i-1}^n + \Delta t\lambda B_i^n M_0 \end{array} \right.$$

يمكن للنتائج العددية حل نماذج استجابة بلعم للإصابة بعدوى المتفطرة السلية تكون محاكاة باستخدام برنامج مطالب ٧،٦. بناء على الملاحظات، محدودة القيمة  $v$  الفرق إلى فاصل  $v > 0, 0.5 \geq 0$  تأثير على عدد من البكتيريا وعدد من الضامة المصابة.  $v$  هو أفضل قيمة لاستقرار مكاسبسبر معفطرة طويلة مستقرة هو ٠،١.

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Permasalahan yang ada dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan dapat digambarkan dalam bentuk rumus matematik dari berbagai fenomena yang berpengaruh yang disebut dengan pemodelan matematika. Misalnya, sistem imun terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis*, penularan virus influenza, infeksi HIV, dan sebagainya, dapat digambarkan dalam bentuk rumus matematik.

أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ﴿١﴾

Artinya: “ Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan.”

Ayat tersebut menjelaskan bahwa manusia harus membaca, bukan hanya membaca bacaan, melainkan membaca berbagai fenomena yang terjadi di dunia ini, baik pada alam, manusia, hewan, dan lain sebagainya.

Merujuk pada ayat di atas, maka manusia dapat membaca bagaimana respon makrofag yang ada dalam tubuh manusia pada saat tubuh manusia yaitu paru-paru terinfeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Pada skripsi ini, dibahas tentang model matematika pada respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* yang bersumber dari penelitian Gammack, dkk. (2004) yang berjudul *Macrophage Response to Mycobacterium tuberculosis infection* dan Pagalay (2009) dalam penelitiannya yang berjudul *Dinamik Makrofag pada Infeksi Mikobakterium tuberkulosis*.

*Mycobacterium tuberculosis* merupakan patogen penting pada manusia. Setiap tahun 3 juta penduduk dunia meninggal akibat bakteri ini. *Mycobacterium tuberculosis* merupakan kuman intraseluler, termasuk genus *Mycobacterium* yang berbentuk batang. *Mycobacterium* mempunyai dinding sel dengan sifat-sifat kimiawi tertentu yang memungkinkan untuk bertahan hidup dan bermultiplikasi di dalam makrofag (Farida, 2005:48).

Makrofag sebagai sel pertahanan dapat melakukan aktivitasnya dengan berbagai cara, yang salah satunya ialah fagositosis. Aktifitas makrofag merupakan fenomena yang kompleks. Makrofag berperan penting pada respon imun bersama-sama dengan APC (*Antigen Presenting Cell*) yang lain akan memproses dan menampilkan antigen kepada sel T, sehingga menimbulkan respon imun (Farida, 2005:48).

Respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* yang terjadi di dalam tubuh adalah satu tanda yang mengajak manusia untuk mau berpikir dan melihat kejadian yang timbul di dalam tubuh manusia yang terinfeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Allah SWT berfirman dalam surat Adz-Dzaariyaat ayat 21, yang berbunyi:

وَفِي أَنفُسِكُمْ أَفَلَا تُبْصِرُونَ ﴿٢١﴾

Artinya: “Dan (juga) pada dirimu sendiri. Maka apakah kamu tidak memperhatikan?”

Semuanya telah diatur oleh hukum-hukum alam (*sunnatullah*) kekuatan yang menguasai, aturan-aturan yang berlaku, detail, indah, dan seimbang. Allah SWT berfirman,

الَّذِي أَحْسَنَ كُلَّ شَيْءٍ خَلَقَهُ... ﴿٧﴾

Artinya: “Yang membuat segala sesuatu yang Dia ciptakan sebaik-baiknya” (Q.S. As-Sajdah:7).

Pada penelitian Gammack, dkk. (2004) persamaan yang dibentuk adalah suatu sistem persamaan diferensial parsial orde dua yang meliputi bakteri ( $B(x,t)$ ), makrofag tak terinfeksi sebagai fagositosis  $M_0(x,t)$ , makrofag fagositosis yang mampu membunuh bakteri  $M_1(x,t)$ , makrofag fagositosis tetapi tidak mampu membunuh bakteri  $M_2(x,t)$ , dan makrofag non-fagositosis atau mampu membunuh bakteri  $M_3(x,t)$ . Pergerakan bakteri maupun makrofag di dalam paru melalui proses difusi dan kecepatan internal. Pada penelitian Pagalay (2009), model yang dibentuk bersumber dari Gammack, dkk. (2004) dengan mengurangi efek parsialnya, sehingga pada penelitian ini penulis ingin meneliti tentang bagaimana kompetisi antara bakteri  $B(x,t)$  dan makrofag terinfeksi yang mampu membunuh bakteri  $M_1(x,t)$  dengan  $M_0(x,t)$  berupa konstanta. Persamaan yang digunakan adalah persamaan diferensial parsial nonlinier. Bentuk model yang dibentuk oleh Gammack, dkk. (2004) adalah model kontinu, sehingga salah satu studi yang dapat diterapkan pada model tersebut adalah dilakukannya diskritisasi.

Diskritisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Kuantisasi diartikan sebagai proses pengelompokan sifat-sifat kontinu pada selang-selang tertentu (*step size*). Kegunaan diskritisasi adalah untuk mereduksi dan menyederhanakan data, sehingga didapatkan data diskrit yang lebih mudah dipahami, digunakan, dan dijelaskan. Oleh karena itu, hasil pembelajaran dengan

bentuk diskrit dipandang Dougherty (1995) sebagai hasil yang cepat dan akurat dibandingkan hasil dari bentuk kontinu (Liu dan Husain, 2012:2).

Salah satu metode yang dapat memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit ialah dengan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* yang merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Kelebihan dari skema *Crank-Nicolson* adalah nilai *error* yang lebih kecil dari pada skema eksplisit dan implisit.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis memilih judul “*Solusi Numerik Model Respon Makrofag terhadap Infeksi Mycobacterium tuberculosis dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson*”.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana solusi numerik model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dengan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*.

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk solusi secara numerik model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dengan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*.

## **1.4 Batasan Masalah**

Model matematika yang digunakan dalam skripsi ini berbentuk sistem persamaan diferensial parsial nonlinier orde dua yang dirumuskan oleh Gammack,

dkk. (2004) dalam karya tulis yang berjudul *Macrophage Response to Mycobacterium tuberculosis Infection*, dan difokuskan pada bakteri  $B(x,t)$  dan makrofag terinfeksi  $M_1(x,t)$ .

### 1.5 Manfaat Penelitian

Pembaca diharapkan dapat mengetahui bagaimana cara menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier dengan metode beda hingga, serta mengetahui bagaimana respon makrofag di dalam paru-paru pada saat terinfeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis* dengan mencari solusi numerik model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis*.

### 1.6 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis model makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis*.
2. Mendiskritkan model persamaan dengan menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*.
3. Mencari selesaian numerik dengan bantuan Matlab 7.6.
4. Menganalisis grafik dari penyelesaian numerik.
5. Membuat interpretasi dan kesimpulan.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Pembahasan dalam skripsi ini terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

**BAB I Pendahuluan**

Pada bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

**BAB II Kajian Pustaka**

Pada bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi: persamaan diferensial parsial, deret Taylor, kesalahan pemotongan, diferensial numerik, skema beda hingga, tuberkulosis paru, dan makrofag.

**BAB III Pembahasan**

Pada bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

**BAB IV Penutup**

Pada bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Sistem Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas (Pamuntjak, 1990:1).

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat sebanyak  $n$  persamaan diferensial, dengan banyak  $n$  fungsi yang tidak diketahui, di mana  $n \geq 2$  (Finizio dan Ladas, 1982:132). Sebagai contoh suatu sistem persamaan diferensial parsial adalah model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \alpha B(x,t) - \lambda B(x,t)(M_0 + M_1(x,t)) + \mu M_1(x,t) + \beta_1 M_1(x,t) + D_B \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial M_1(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial M_1(x,t)}{\partial x} = -\lambda B(x,t)M_1(x,t) + \lambda M_0 B(x,t) - \mu M_1(x,t) - \psi M_1(x,t) - \beta_1 M_1(x,t) + D_M \frac{\partial^2 M_1(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

(Gammack, dkk., 2004).

##### 2.1.1 Persamaan Diferensial Parsial Orde Dua

Orde (tingkat) suatu persamaan diferensial adalah orde dari turunan yang terdapat pada persamaan itu, yang tingkatannya paling tinggi (Pamuntjak, 1990:1).

Sedangkan derajat atau *degree* dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi dalam persamaan diferensial itu.

Persamaan diferensial parsial orde dua secara umum memiliki bentuk persamaan sebagai berikut:

$$G(x, y) = A(x, y)u_{xx}(x, y) + B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y) \quad (2.3a)$$

atau

$$G(x, y) = A(x, y)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + B(x, y)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + E(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + F(x, y)u(x, y) \quad (2.3b)$$

(Ross, 1989:717).

Dengan  $A, B, C, D, E, F$ , dan  $G$  adalah fungsi dari variabel  $x$  dan  $y$ . Jika  $G(x, y) = 0$  untuk semua  $(x, y)$ , persamaan (2.3b) menjadi:

$$0 = A(x, y)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + B(x, y)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + E(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + F(x, y)u(x, y) = 0 \quad (2.4)$$

dengan kondisi batas,

$$u(x, y_0) = b_{y_0}(x), \quad u(x, y_f) = b_{y_f}(x)$$

$$u(x_0, y) = b_{x_0}(y) \quad \text{dan} \quad u(x_f, y) = b_{x_f}(y)$$

Persamaan diferensial parsial diklasifikasikan menjadi tiga, yaitu:

Persamaan diferensial parsial eliptik: jika  $B^2 - 4AC < 0$

Persamaan diferensial parsial parabola: jika  $B^2 - 4AC = 0$

Persamaan diferensial parsial hiperbola: jika  $B^2 - 4AC > 0$

(Yang, dkk., 2005:401).

Contoh:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \alpha B(x,t) + D_M \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2}$$

### 2.1.2 Persamaan Parabola

Dikatakan sebagai persamaan parabola jika  $b^2 - 4ac = 0$ . Persamaan parabola ini biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan batas (Triatmodjo, 2002:201). Contoh persamaan parabola adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \alpha B(x,t) + \mu M(x,t) + D_M \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

keterangan,  $B$  : bakteri

$M$  : makrofag terinfeksi

$D_M$  : difusi makrofag

$\alpha$  : pertumbuhan

$\mu$  : mati secara alami

$t$  : waktu

$x$  : jarak

Berdasarkan, sub bab 2.1.2 dapat ditentukan:

$$A = D_M$$

$$B = 0$$

$$C = 0$$

sehingga  $b^2 - 4.a.c = 0^2 - 4.D_M.0 = 0$ , maka persamaan di atas merupakan persamaan parabola.

### 2.1.3 Persamaan Diferensial Parsial Linier dan Nonlinier

Persamaan diferensial parsial (PDP) dikelompokkan menjadi dua bagian yaitu diferensial parsial linier dan nonlinier. Didefinisikan persamaan diferensial parsial pada persamaan (2.3b). Linieritas persamaan (2.3b) ditentukan oleh fungsional dari koefisien  $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y), E(x, y), F(x, y)$ , dan  $G(x, y)$ . Jika koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas  $[F(x, y) = 0]$ , maka persamaan diferensial parsial tersebut adalah linier. Jika koefisien-koefisien tersebut merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua  $[F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0]$ , maka persamaan diferensial parsial tersebut adalah nonlinier (Zauderer, 2006). Lebih jelasnya diberikan beberapa PDP berikut :

$$1. \frac{\partial M_1(x, t)}{\partial t} = \psi M_1(x, t) + D_M \frac{\partial^2 M_1(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{PDP Linier})$$

$$2. \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \alpha B(x, t) + D_B \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{PDP Linier})$$

$$3. \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \lambda B(x, t)(M_0 + M_1(x, t)) +$$

$$D_B \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{PDP Nonlinier})$$

$$4. \frac{\partial M_1(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial M_1(x, t)}{\partial x} = \lambda M_0 B(x, t) - \beta_1 M_1(x, t) +$$

$$D_M \frac{\partial^2 M_1(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{PDP Nonlinier})$$

## 2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi  $B(x)$  diketahui di titik  $x_i$  dan semua turunan dari  $B(x)$  terhadap  $x$  diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor (persamaan (2.6)) dapat dinyatakan nilai  $B(x)$  pada titik  $x_{i+1}$  yang terletak pada jarak  $\Delta x$  dari titik  $x_i$ .

$$B(x_{i+1}) = B(x_i) + B'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + B''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + B'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + B^{(n)}(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (2.6)$$

keterangan:

- $B(x_i)$  : fungsi di titik  $x_i$
- $B(x_{i+1})$  : fungsi di titik  $x_{i+1}$
- $B', B'', B''', \dots, B^{(n)}$  : turunan pertama, kedua, ketiga, ..., ke- $n$  dari fungsi
- $\Delta x$  : langkah ruang, yaitu jarak antara  $x_i$  dan  $x_{i+1}$
- $R_n$  : kesalahan pemotongan
- ! : operator faktorial

(Triatmodjo, 2002:7-8).

### 2.2.1 Deret Taylor Orde Nol

Deret Taylor yang memperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan, maka disebut perkiraan orde nol, sehingga persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk:

$$B(x_{i+1}) \approx B(x_i) \quad (2.7)$$

(Triatmodjo, 2002:8).

### 2.2.2 Deret Taylor Orde Satu

Deret Taylor yang memperhitungkan dua suku pertama dari ruas kanan, maka disebut perkiraan orde satu yang merupakan bentuk garis lurus (linier). Sehingga persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$B(x_{i+1}) \approx B(x_i) + B'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} \quad (2.8)$$

(Triatmodjo, 2002:8).

### 2.2.3 Deret Taylor Orde Dua

Deret Taylor yang memperhitungkan tiga suku pertama dari ruas kanan, disebut perkiraan orde dua. Maka persamaan (2.6) dapat ditulis menjadi:

$$B(x_{i+1}) \approx B(x_i) + B'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + B''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} \quad (2.9)$$

(Triatmodjo, 2002:9).

### 2.3 Kesalahan Pemotongan

Deret Taylor hanya memperhitungkan beberapa suku pertama saja, sehingga hasil perhitungan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Adanya kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor menyebabkan kesalahan pemotongan.

Kesalahan pemotongan (*truncation error*,  $R_n$ ) yang terdapat pada persamaan (2.6), diberikan oleh bentuk berikut:

$$R_n = B^{n+1}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + B^{n+2}(x_i) \frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \quad (2.10a)$$

atau

$$R_n = O(\Delta x^{n+1}) \quad (2.10a)$$

Indeks  $n$  menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke  $n$ , sedangkan subskrip  $n + 1$  menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order  $n + 1$ . Notasi  $O(\Delta x^{n+1})$  berarti bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order  $\Delta x^{n+1}$  atau kesalahan adalah sebanding dengan langkah ruang pangkat  $n + 1$ . Kesalahan pemotongan tersebut adalah kecil apabila:

- a. interval  $\Delta x$  adalah kecil
- b. memperhitungkan lebih banyak suku dari deret Taylor

Pada perkiraan order satu, besarnya kesalahan pemotongan adalah:

$$O(\Delta x^2) = B''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + B'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (2.11)$$

(Triatmodjo, 2002:9).

#### 2.4 Diferensial Numerik terhadap Variabel Lain

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor (Triatmodjo, 2002:9).

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, seperti  $B(x, t)$ , maka bentuk deret Taylor menjadi:

$$B(x_{i+1}, t_{n+1}) = B(x_i, t_n) + \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots \quad (2.12)$$

sehingga deret Taylor turunan pertama terhadap variabel  $x$  dan  $t$  berturut-turut dapat ditulis dalam bentuk (diferensial) dalam bentuk beda hingga maju:

$$B(x_{i+1}, t_n) = B(x_i, t_n) + \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \Delta x \quad (2.13)$$

atau

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \frac{B(x_{i+1}, t_n) - B(x_i, t_n)}{\Delta x} \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = \frac{B(x_i, t_{n+1}) - B(x_i, t_n)}{\Delta t} \quad (2.13b)$$

(Triatmodjo, 2002:12).

Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya bentuk  $B(x_i, t_n)$  ditulis menjadi  $B_i^n$  dengan subskrip  $i$  dan  $n$  menunjukkan komponen dalam arah sumbu  $x$  dan sumbu  $t$ . Apabila fungsi berada dalam sistem tiga dimensi (sistem koordinat  $x, y, z$ ), maka  $B(x_i, y_j, z_k)$  ditulis menjadi  $B_{i,j,k}$ . Dengan cara seperti itu maka persamaan (2.13a) dan (2.13b) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \frac{B_{i+1}^n - B_i^n}{\Delta x} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = \frac{B_i^{n+1} - B_i^n}{\Delta t} \quad (2.15)$$

(Triatmodjo, 2002:13).

Disebut diferensial maju karena menggunakan data pada titik  $x_i$  dan  $x_{i+1}$  untuk memperhitungkan diferensial. Jika data yang digunakan adalah pada titik  $x_i$  dan  $x_{i-1}$ , maka disebut diferensial mundur (Triatmodjo, 2002:10), dan deret Taylor menjadi:

$$B(x_{i-1}, t_{n-1}) = B(x_i, t_n) - \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} - \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} - \dots \quad (2.16)$$

dan turunan pertama untuk variabel  $x$  dan  $t$  berturut-turut dapat ditulis:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \frac{B_i^n - B_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = \frac{B_i^n - B_i^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.18)$$

Apabila data yang digunakan untuk memperkirakan diferensial dari fungsi adalah pada titik  $x_{i-1}$  dan  $x_{i+1}$ , maka perkiraannya disebut diferensial terpusat. Jika persamaan (2.12) dikurangi persamaan (2.16) didapat:

$$B(x_{i+1}, t_{n+1}) - B(x_{i-1}, t_{n-1}) = 2 \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + 2 \frac{\partial B(x,t)}{\partial t} \frac{\Delta t}{1!} + 2 \frac{\partial^3 B(x,t)}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + 2 \frac{\partial^3 B(x,t)}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \quad (2.19)$$

(Triatmodjo, 2002:11)

dan turunan pertama terhadap variabel  $x$  dan  $t$  untuk metode beda terhitung pusat bentuk di atas menjadi:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \frac{B_{i+1}^n - B_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = \frac{B_i^{n+1} - B_i^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.21)$$

(Triatmodjo, 2002:11).

Turunan kedua suatu fungsi dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.12) dan (2.16):

$$B(x_{i+1}, t_{n+1}) + B(x_{i-1}, t_{n-1}) = 2B(x_i, t_n) + 2 \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + 2 \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + 2 \frac{\partial^4 B(x,t)}{\partial x^4} \frac{\Delta x^4}{4!} + 2 \frac{\partial^4 B}{\partial t^4} \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots \quad (2.22)$$

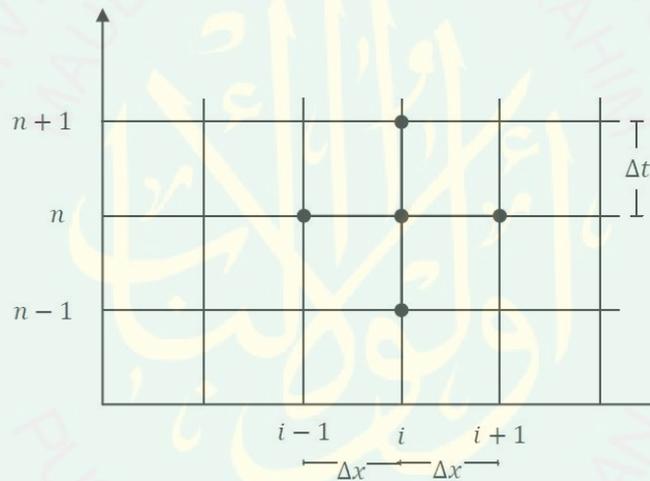
(Triatmodjo, 2002:11).

Dengan cara yang sama, turunan kedua terhadap  $x$  dan  $t$  dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} = \frac{B_{i-1}^n - 2B_i^n + B_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} = \frac{B_i^{n-1} - 2B_i^n + B_i^{n+1}}{\Delta t^2} \quad (2.24)$$

Gambar 2.1 menunjukkan jaringan titik hitungan yang digunakan untuk memperkirakan diferensial parsial fungsi  $B(x,t)$  terhadap  $x$  dan  $t$ .



Gambar 2.1 Jaringan Titik Hitungan Sistem Ruang-Waktu ( $x-t$ )

(Triatmodjo, 2002:13).

## 2.5 Skema Beda Hingga

Untuk mempelajari skema beda hingga, misal diberikan persamaan parabola sebagai berikut:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \quad (2.25)$$

dengan syarat awal adalah:

$$T(x,0) = a_0(x), \quad 0 < x < L$$

dengan syarat batas sebagai berikut:

$$T(0,t) = b_0(t), \quad t < 0$$

$$T(L,t) = b_L(t), \quad t < 0$$

(Yang, dkk., 2005:406).

Untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas dengan skema beda hingga akan dihitung nilai pendekatan  $T(x,t)$  (temperatur) pada jaringan titik  $(x_i, t_i)$  dengan domain komputasi didiskritkan menggunakan *grid* yang *uniform* baik pada arah  $x$  maupun arah  $t$  sebagai berikut:

$$t_n = n \cdot \Delta t, \quad t \geq 0$$

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad 0 \leq i \leq m$$

di mana  $m$  adalah banyaknya pias (Mutholi'ah, 2008).

### 2.5.1 Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu  $n+1$  dihitung berdasarkan variabel pada waktu  $n$  yang diketahui. Dengan menggunakan skema diferensial maju untuk turunan pertama terhadap  $t$ , serta diferensial terpusat untuk turunan kedua terhadap  $x$ , fungsi variabel (temperatur)  $T(x,t)$  didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x,t) = T_i^n$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (2.26)$$

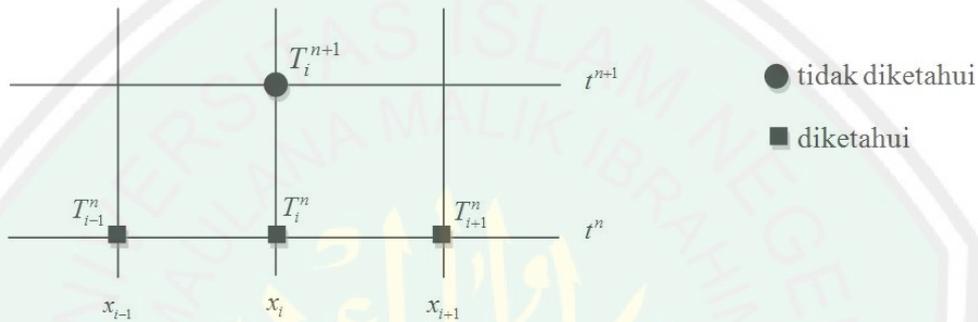
$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.27)$$

dengan menggunakan skema di atas, dengan anggapan bahwa  $K$  konstan, maka persamaan (2.25) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K \left( \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (2.28a)$$

atau

$$T_i^{n+1} = T_i^n + K \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \quad (2.28b)$$



Gambar 2.2 Skema Eksplisit pada Persamaan Perambatan Panas

(Triatmodjo, 2002:207).

Dari gambar 2.2, jarak antara titik hitung (panjang pias) adalah  $\Delta x = \frac{L}{m}$ , dengan

$m$  adalah jumlah pias pada  $x$ , sedangkan interval waktu hitungan adalah  $\Delta t = \frac{T}{r}$ ,

dengan  $r$  adalah jumlah pada  $t$  (Yang, dkk., 2005:406). Nilai  $T_i^{n+1}$  dapat

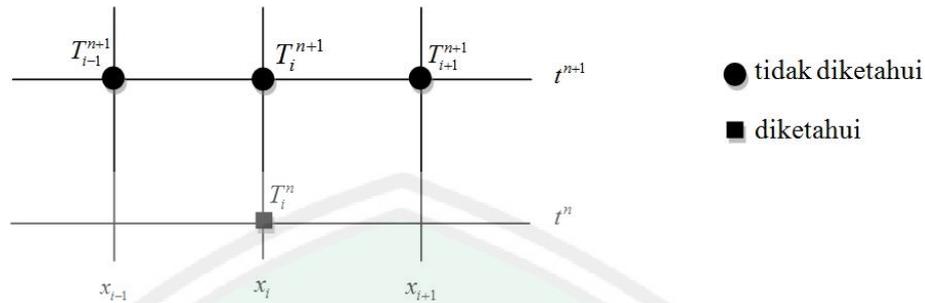
diperoleh secara eksplisit dari nilai sebelumnya, yaitu  $T_{i-1}^n$ ,  $T_i^n$ ,  $T_{i+1}^n$ . Dengan

nilai  $n$  yang sudah diketahui, memungkinkan untuk menghitung

$T_i^{n+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) (Triatmodjo, 2002:208).

### 2.5.2 Skema Implisit

Pada skema eksplisit, ruas kanan ditulis pada waktu  $n$  yang sudah diketahui nilainya, akan tetapi pada skema implisit ruas kanan ditulis pada waktu  $n + 1$  yang tidak diketahui nilainya. Gambar 2.3 merupakan jaringan titik hitung pada skema implisit, di mana turunannya didekati sebuah waktu pada saat  $n + 1$ .



Gambar 2.3. Skema Implisit pada Persamaan Perambatan Panas

Dari gambar 2.3 di atas, fungsi  $T(x, t)$  dan turunannya didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x, t) = T_i^n \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.31)$$

sehingga persamaan (2.25) dapat ditulis dalam bentuk beda hingga menjadi:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K \left( \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (2.32)$$

(Triatmodjo, 2002:216).

### 2.5.3 Skema Crank-Nicolson

Skema *Crank-Nicolson* merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Pada skema eksplisit, ruas kanan dari persamaan (2.25) ditulis pada waktu ke  $n$ . Pada skema implisit, ruas kanan dari persamaan tersebut ditulis untuk waktu  $n+1$ . Dalam kedua skema tersebut diferensial terhadap waktu ditulis dalam bentuk:

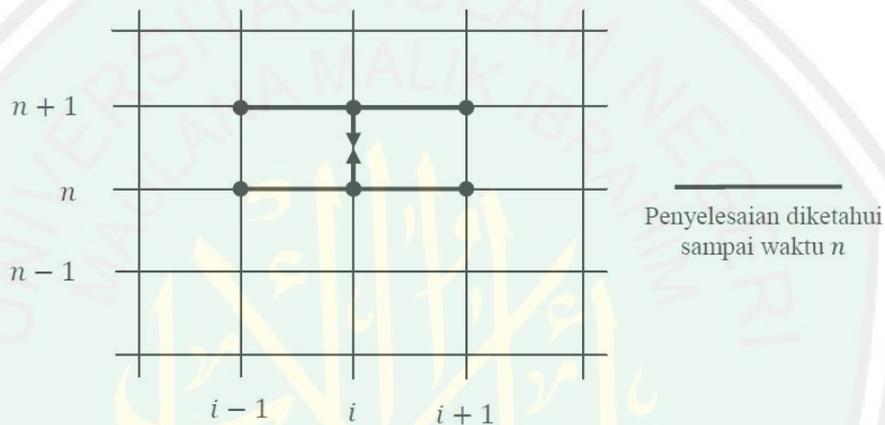
$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (2.33)$$

yang berarti diferensial terpusat terhadap waktu  $n + \frac{1}{2}$ . Skema *Crank-Nicolson*

menulis ruas kanan dari persamaan (2.25) pada waktu  $n + \frac{1}{2}$  yang merupakan

nilai rerata dari skema eksplisit dan implisit. Skema jaringan titik hitungan

diberikan oleh gambar 2.4.



Gambar 2.4 Skema *Crank-Nicolson*

Turunan kedua fungsi terhadap  $x$  adalah :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (2.34)$$

Dengan menggunakan skema di atas, persamaan panas dapat ditulis :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \right\} \quad (2.35a)$$

(Triatmodjo, 2002:221-222).

atau

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} K \left\{ \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right\} \quad (2.35b)$$

Sebagai kesimpulan dari ketiga skema yang dijelaskan di atas, pada persamaan (2.28a), persamaan (2.32), dan persamaan (2.35a). Persamaan panas dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1-\alpha) \left( \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (2.36)$$

Dengan  $\alpha$  adalah koefisien pembobot dengan nilai:

$\alpha = 0$ , jika skema adalah eksplisit

$\alpha = 1$ , jika skema adalah implisit

$\alpha = \frac{1}{2}$ , jika skema adalah *Crank-Nicolson*

Bentuk persamaan (2.25) adalah stabil tanpa syarat untuk  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  dan stabil

dengan syarat untuk  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  (Triatmodjo, 2002:223).

## 2.6 Kondisi Batas

Untuk mempelajari kondisi batas, misal diberikan persamaan (2.1) yang akan diselesaikan pada daerah tertentu misal  $x_0 < x < L$ . Persamaan (2.1) memiliki kondisi batas *Dirichlet* jika:

$$B(x_0, t) = f_0(x)$$

$$B(L, t) = f_L(x)$$

Persamaan (2.1) memiliki kondisi *Neumann* jika:

$$\frac{\partial B(x_0, t)}{\partial x} = f_0(x)$$

$$\frac{\partial B(L, t)}{\partial x} = f_L(x)$$

Persamaan (2.1) memiliki kondisi campuran jika:

$$\frac{\partial B(x_0, t)}{\partial x} = f_0(x)$$

$$B(L, t) = f_L(x)$$

(Tovmasyan, 1994:105).

## 2.7 Tuberkulosis Paru

Tuberkulosis terjadi di mana saja dalam tubuh, namun kebanyakan timbul sebagai infeksi jaringan paru. Berbagai manifestasi yang timbul akibat infeksi *Mycobacterium tuberculosis* menggambarkan adanya keseimbangan antara *Mycobacterium tuberculosis* dengan mekanisme pertahanan tubuh *host* (*host immunity*) di mana mekanisme pertahanan tubuh *host* menentukan hasil akhir yang ditimbulkan (Pagalay, 2009:101)

Tuberkulosis paru adalah suatu penyakit menular yang disebabkan oleh basil Mikobakterium tuberkulosis (Alsagaff dan Mukti, 2006:73). Mikobakterium tuberkulosis merupakan kuman intraseluler, termasuk genus *Mycobacterium* (Widoyono, 2005:17).

## 2.8 Makrofag

Makrofag merupakan fagosit profesional yang terpenting. Sel ini diproduksi di sumsum tulang dari sel induk myeloid melalui stadium promonosit. Sel yang belum berkembang sempurna ini kemudian masuk ke dalam aliran darah sebagai monosit dan apabila sel itu meninggalkan sirkulasi dan sampai di jaringan ia mengalami berbagai perubahan tambahan dan menjadi sel matang kemudian menetap di jaringan sebagai makrofag. Sel-sel yang terdapat di paru-paru sebagai

makrofag alveolar. Beberapa di antaranya berdiferensiasi menjadi sel lain, misalnya sel dendritik (Kresno, 2003:33).

Populasi makrofag terdiri dari makrofag non-aktif (*resting*), makrofag teraktifasi, dan makrofag terinfeksi. Makrofag non-aktif dapat menjadi aktif pada respon IFN- $\gamma$  bersama-sama dengan bakteri Ag. Juga dapat menjadi infeksi kronis. Makrofag teraktifasi cukup efektif membunuh *Mycobacterium tuberculosis*. Di samping menghasilkan oksigen radikal dan molekul antimikrobal juga memproduksi phagosom dan lysosom.

Populasi makrofag yang terinfeksi kronis merupakan populasi klas makrofag yang penting karena berisi sejumlah besar bakteri tetapi belum menerima stimulasi yang cukup untuk pengaktifan, sehingga makrofag tersebut dapat teraktifasi kembali dan membersihkan bakteri (Pagalay, 2009:59).

## 2.9 Penyakit dalam Pandangan Islam

Penyakit merupakan suatu hal yang memang sudah pasti menyerang setiap tubuh manusia. Ribuan jenis penyakit yang ada di dunia ini, dari yang tampak sampai yang tidak tampak, penyakit yang jenisnya ringan sampai yang sangat berbahaya. Maha Adil Allah SWT yang telah menciptakan penyakit serta menurunkan obatnya. Riwayat Nabi Muhammad SAW:

مَا أَنْزَلَ اللَّهُ دَاءً إِلَّا أَنْزَلَ اللَّهُ لَهُ شِفَاءً

Artinya: “Allah tidak menurunkan penyakit, melainkan sekaligus dengan obatnya.” (HR. Al-Bukhori).

“Sesungguhnya Allah SWT ketika menciptakan penyakit” yaitu mengadakan dan mentakdirkannya. “Dia juga menciptakan obatnya maka

*berobatlah kalian (dengannya)*” yaitu ditekankan kepada umat manusia agar mengkonsumsi obat-obatan yang higienis lagi halal (Al-Albani, 2008:51).

Menurut Ibnu Qayyim r.a. hadits Nabi SAW ini mencakup segenap jenis penyakit baik penyakit hati, penyakit rohani, dan penyakit jasmani sekaligus dengan penawarnya (Al-Albani, 2008:52).

Namun masalah kesembuhan janganlah mempertaruhkan terapi, tapi semua itu serahkanlah kepada-Nya semata. *“Karena sesungguhnya Allah tidak pernah menempatkan satu jenis penyakit melainkan Dia menempatkan (pula) obat baginya”* Dialah Allah SWT (Al-Albani, 2008:53).

*“Kecuali satu jenis penyakit...(yaitu) ketuarentanan”* yaitu lanjut usia. Ketuarentanan, lanjut usia, kepikunan, dan hal semisalnya diserupakan dengan penyakit beliau SAW, karena pada umumnya orang yang memasuki usia seperti ini amat dekat dengan kematian (Al-Albani, 2008:53).

Menurut Al-Jauziyah (2004:15), hadits di atas mengandung pengabsahan terhadap adanya sebab musabab dan sanggahan terhadap orang yang menolak kenyataan tersebut. Ungkapan *“Setiap penyakit pasti ada obatnya,”* artinya dapat bersifat umum, sehingga termasuk di dalamnya penyakit-penyakit mematikan dan berbagai penyakit yang tidak dapat disembuhkan oleh para dokter karena belum ditemukan obatnya. Padahal Allah SWT telah menurunkan obat untuk penyakit-penyakit tersebut, akan tetapi manusia belum dapat menemukan ilmu obat penyakit tersebut, atau Allah SWT belum memberikan petunjuk kepada manusia untuk menemukan obat penyakit itu, karena ilmu pengetahuan yang dimiliki oleh manusia hanyalah sebatas yang diajarkan oleh Allah SWT.

Namun, perlu diketahui bahwa sesungguhnya tubuh manusia sendiri dapat menjadi obat. Sebagaimana firman-Nya:

لَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ فِي أَحْسَنِ تَقْوِيمٍ ﴿٤﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dalam bentuk yang sebaik-baiknya.*” (Q.S. At-Tin: 4).

Menurut Al-Qarni (2008:630) ayat di atas memiliki arti bahwa sungguh Allah SWT telah menciptakan manusia dalam bentuk yang paling bagus, perawakan yang paling indah, dan rupa yang enak dipandang. Anggota tubuhnya selaras, bentuknya serasi, dan perawakannya seimbang.

Pada tafsir Ibnu Katsir, “*Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dalam bentuk yang sebaik-baiknya*”. Inilah yang menjadi obyek sumpah, yaitu bahwa Allah Ta’ala telah menciptakan manusia dalam wujud dan bentuk yang sebaik-baiknya, dengan perawakan yang sempurna serta beranggotakan badan yang normal (Syaikh, 2007:501).

Sedangkan menurut Faqih dan Tim Ulama (2006:171), istilah *Taqwîm* berarti membentuk sesuatu menjadi sebuah rupa yang tepat dalam sebuah aturan yang seimbang. Keluasan dari pengertian ini merujuk pada suatu fakta bahwa Allah SWT telah menciptakan manusia secara proporsional dari segala aspek, baik secara ragawi maupun secara spiritual, dan rasional. Karena, Allah SWT telah menetapkan semua kekuatan pada manusia dan menyiapkannya secara tepat untuk melindungi diri dalam mengarungi jalan besar menuju perkembangan tertentu. Sekalipun manusia adalah “mikrokosmos”, Allah SWT telah menata “makrokosmos” dalam dirinya dan telah mengangkatnya pada posisi (*maqam*)

yang tinggi seperti yang dikemukakan dalam surah Al-Isrâ: 70, “*Kami telah memuliakan anak-anak Adam...*”. Begitu pula dengan penciptaannya, seperti difirmankan Allah, “*...Maka Maha sucilah Allah, Pencipta yang Paling Baik*” (Q.S. Al-Mu’minûn: 14).

Yahya (2002:8), menyatakan bahwa manusia diciptakan bersama perlindungan sempurna yang dibutuhkannya. Karena itu, manusia bukanlah sepenuhnya tak berdaya melawan mikroorganisme penyebab penyakit. Pasukan penjaga “mikro” (antibodi) dalam tubuh manusia tidak pernah meninggalkan tubuhnya, makrofag bertempur untuk manusia dibanyak garis depan. Antibodi merupakan senjata yang tersusun dari protein dan dibentuk untuk melawan sel-sel asing (musuh) yang masuk ke tubuh manusia.

Tubuh manusia mampu memproduksi masing-masing antibodi yang cocok untuk hampir setiap musuh yang dihadapinya. Antibodi bukan berjenis tunggal. Sesuai dengan struktur setiap musuh, maka tubuh menciptakan antibodi khusus yang cukup kuat untuk menghadapi si musuh. Hal ini karena antibodi yang dihasilkan untuk suatu penyakit belum tentu mangkus bagi penyakit lainnya (Yahya, 2002:20).

Allah SWT menciptakan hal tersebut hanya untuk melindungi kesehatan manusia. Menjadikan antibodi sebagai obat di dalam tubuh ketika manusia diserang penyakit. “*...Maha suci Allah, bahkan apa yang ada di langit dan di bumi adalah kepunyaan Allah, semua tunduk kepada-Nya*” (Q.S. Al-Baqarah, 2:116).

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Analisis Model Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis*

##### 3.1.1 Variabel yang Berperan pada Model Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis*

Penelitian ini merujuk pada studi yang dilakukan oleh Gammack, dkk. (2004). Variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah kepadatan bakteri ekstraseluler ( $B(x, t)$ ) dan makrofag terinfeksi ( $M_1(x, t)$ ).

Sedangkan variabel yang digunakan pada model ialah:

- $M_0$  = konstanta yang menyatakan populasi makrofag yang tak terinfeksi
- $\alpha$  = pertumbuhan bakteri ekstraseluler
- $\lambda$  = tingkat fagositosis
- $\mu$  = tingkat kematian makrofag
- $D_M$  = perpindahan makrofag melalui difusi
- $D_B$  = perpindahan bakteri intraseluler melalui difusi
- $\psi$  = laju makrofag membunuh bakteri intraseluler
- $\beta_1$  = laju pertumbuhan bakteri intraseluler
- $v$  = kecepatan internal bakteri atau makrofag

### 3.1.2 Pembentukan Model Matematik pada Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis*

Model yang digunakan diambil dari jurnal yang dirumuskan oleh Gammack, dkk. (2004) dalam karya tulis yang berjudul *Macrophage response to Mycobacterium tuberculosis infection*. Misalkan  $B(x,t)$  dan  $M_1(x,t)$  (yang selanjutnya akan ditulis  $M(x,t)$ ) berturut-turut menyatakan banyaknya populasi bakteri dan populasi makrofag terinfeksi pada saat  $t$ . Laju perubahan dari populasi-populasi tersebut diperoleh dengan asumsi berikut:

#### a. Bakteri Ekstraseluler

Perubahan populasi bakteri ekstraseluler ( $B(x,t)$ ) dari waktu ke waktu dipengaruhi oleh pertumbuhan bakteri pada laju  $\alpha$  yang dirumuskan dengan  $\alpha B(x,t)$ , bakteri ekstraseluler akan difagositosis oleh makrofag pada tingkat  $\lambda$  yang dirumuskan dengan  $\lambda B(x,t)(M_0 + M(x,t))$ . Ketika bakteri dicerna oleh makrofag, bakteri akan melakukan penggandaan, ketika penggandaan terjadi melewati ambang batas, makrofag akan meledak (mati) pada laju  $\mu$  dan melepaskan bakteri ekstraseluler pada laju  $\beta_N \cdot N$ , dengan asumsi  $N$  (beban maksimal bakteri intraseluler) sebesar 1, maka diperoleh  $\beta_1$ . Akhirnya, bakteri berpindah/bergerak melalui difusi dan kecepatan internal (Gammack, dkk., 2004).

Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \alpha B(x,t) - \lambda B(x,t)(M_0 + M(x,t)) + \mu M(x,t) + \beta_1 M(x,t) + D_B \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

### b. Makrofag Terinfeksi

Perubahan populasi makrofag terinfeksi  $M(x,t)$  dari waktu ke waktu dipengaruhi oleh kerugian makrofag yang terinfeksi namun masih memfagositosis bakteri ( $\lambda B(x,t)M(x,t)$ ), makrofag tak terinfeksi  $M_0$  yang memfagositosis bakteri ekstraseluler  $B(x,t)$  pada laju  $\lambda$  dirumuskan dengan  $\lambda M_0 B(x,t)$ , makrofag traktifasi mati secara alami pada laju  $\mu$ . Makrofag yang teraktifasi akan menjadi tak terinfeksi dengan laju  $\psi$  adalah  $\psi M(x,t)$ . Namun, terdapat pula makrofag yang tidak mampu membunuh bakteri intaseluler, bakteri tersebut tumbuh di dalam makrofag pada laju  $\beta_1$ . Akhirnya, makrofag terinfeksi bergerak melalui kecepatan internal  $v$  dan difusi (Gammack, dkk., 2004), yang dapat dituliskan dalam bentuk persamaan,

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -\lambda B(x,t)M(x,t) + \lambda M_0 B(x,t) - \mu M(x,t) - \psi M(x,t) - \beta_1 M(x,t) + D_M \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

## 3.2 Diskritisasi Model Persamaan dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson

### 3.2.1 Diskritisasi Populasi Bakteri

Berikut merupakan persamaan populasi bakteri pada model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis*:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \alpha B(x,t) - \lambda B(x,t)(M_0 + M(x,t)) + \mu M(x,t) + \beta_1 M(x,t) + D_B \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

dinotasikan,

$$M(x_i, t_n) = M_i^n \quad (3.1.1)$$

$$B(x_i, t_n) = B_i^n \quad (3.1.2)$$

Transformasi beda hingga maju untuk turunan  $t$  dan beda hingga pusat untuk turunan  $x$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = \frac{B_i^{n+1} - B_i^n}{\Delta t} \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \frac{B_{i+1}^n - B_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{B_{i-1}^{n+1} - 2B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{B_{i-1}^n - 2B_i^n + B_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (3.1.5)$$

Bentuk beda hingga di atas disubstitusikan ke persamaan (3.1), sehingga diperoleh bentuk persamaan diskrit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{B_i^{n+1} - B_i^n}{\Delta t} + \nu \left( \frac{B_{i+1}^n - B_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) &= \alpha B_i^n - \lambda B_i^n (M_0 + M_i^n) + \mu M_i^n + \beta_1 M_i^n + \\ D_B \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{B_{i-1}^{n+1} - 2B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{B_{i-1}^n - 2B_i^n + B_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \right] & \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Penyederhanaan persamaan (3.1.6),

$$\begin{aligned} \frac{B_i^{n+1} - B_i^n}{\Delta t} &= -\nu \left( \frac{B_{i+1}^n - B_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \alpha B_i^n - \lambda B_i^n (M_0 + M_i^n) + \mu M_i^n + \beta_1 M_i^n + \\ D_B \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{B_{i-1}^{n+1} - 2B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{B_{i-1}^n - 2B_i^n + B_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \right] & \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_i^{n+1}}{\Delta t} = & \frac{B_i^n}{\Delta t} - \frac{v}{2\Delta x} (B_{i+1}^n - B_{i-1}^n) + \alpha B_i^n - \lambda B_i^n (M_0 + M_i^n) + \mu M_i^n + \beta_1 M_i^n + \\ & \frac{D_B}{2\Delta x^2} \left[ (B_{i-1}^{n+1} - 2B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}) + (B_{i-1}^n - 2B_i^n + B_{i+1}^n) \right] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Dengan mengalikan  $\Delta t$  dengan ruas kanan maka diperoleh:

$$\begin{aligned} B_i^{n+1} = & B_i^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (B_{i+1}^n - B_{i-1}^n) + \Delta t \alpha B_i^n - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^n) B_i^n + \Delta t \mu M_i^n + \\ & \Delta t \beta_1 M_i^n + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left[ (B_{i-1}^{n+1} - 2B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}) + (B_{i-1}^n - 2B_i^n + B_{i+1}^n) \right] \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Persamaan (3.1.9) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B_i^{n+1} = & B_i^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (B_{i+1}^n - B_{i-1}^n) + \Delta t \alpha B_i^n - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^n) B_i^n + \Delta t \mu M_i^n + \\ & \Delta t \beta_1 M_i^n + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-1}^{n+1} - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B_i^{n+1} + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+1}^{n+1} + \\ & D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-1}^n - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B_i^n + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+1}^n \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Penyederhanaan persamaan (3.1.10) ialah:

$$\begin{aligned} B_i^{n+1} + D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B_i^{n+1} = & - \left( \frac{v\Delta t}{2\Delta x} - D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \right) B_{i+1}^n + \\ & \left[ 1 + \Delta t \alpha - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^n) - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right] B_i^n + \\ & \left( \frac{v\Delta t}{2\Delta x} + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \right) B_{i-1}^n + \Delta t (\mu + \beta_1) M_i^n + \\ & D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-1}^{n+1} + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+1}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

yang dapat ditulis ulang sebagai,

$$\left( 1 + D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) B_i^{n+1} = \left( D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} \right) B_{i+1}^n +$$

$$\begin{aligned}
& \left[ 1 + \Delta t \alpha - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^n) - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right] B_i^n + \\
& \left( \frac{v \Delta t}{2 \Delta x} + D_B \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2} \right) B_{i-1}^n + \Delta t (\mu + \beta_1) M_i^n + \\
& D_B \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2} B_{i-1}^{n+1} + D_B \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2} B_{i+1}^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

yang dapat disederhanakan dalam bentuk,

$$\begin{aligned}
& -D_B \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2} B_{i+1}^{n+1} + \left( 1 + D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) B_i^{n+1} - D_B \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2} B_{i-1}^{n+1} = \left( D_B \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2} - \frac{v \Delta t}{2 \Delta x} \right) B_{i+1}^n + \\
& \left[ 1 + \Delta t \alpha - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^n) - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right] B_i^n + \\
& \left( \frac{v \Delta t}{2 \Delta x} + D_B \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2} \right) B_{i-1}^n + \Delta t (\mu + \beta_1) M_i^n
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Didefinisikan,

$$R = D_B \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2}$$

$$S = \frac{v \Delta t}{2 \Delta x}$$

$$T = D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Sehingga persamaan (3.1.13) menjadi:

$$\begin{aligned}
& -R B_{i+1}^{n+1} + (1 + T) B_i^{n+1} - R B_{i-1}^{n+1} = (R - S) B_{i+1}^n + \left[ 1 + \Delta t \alpha - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^n) - T \right] B_i^n + \\
& (S + R) B_{i-1}^n + \Delta t (\mu + \beta_1) M_i^n
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

### 3.2.2 Diskritisasi Populasi Makrofag

Persamaan makrofag terinfeksi pada model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -\lambda B(x,t)M(x,t) + \lambda M_0 B(x,t) - \mu M(x,t) - \psi M(x,t) - \beta_1 M(x,t) + D_M \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

dinotasikan,

$$M(x_i, t_n) = M_i^n \quad (3.2.1)$$

$$B(x_i, t_n) = B_i^n \quad (3.2.2)$$

Transformasi beda hingga maju untuk turunan  $t$  dan beda hingga pusat untuk turunan  $x$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} = \frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = \frac{M_{i+1}^n - M_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_{i-1}^{n+1} - 2M_i^{n+1} + M_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{M_{i-1}^n - 2M_i^n + M_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (3.2.5)$$

Bentuk hingga di atas disubstitusikan ke persamaan (3.2), sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} + v \left( \frac{M_{i+1}^n - M_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) = & -\lambda B_i^n M_i^n + \lambda B_i^n M_0 - \mu M_i^n - \psi M_i^n - \beta_1 M_i^n + \\ & D_M \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M_{i-1}^{n+1} - 2M_i^{n+1} + M_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left( \frac{M_{i-1}^n - 2M_i^n + M_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \right] \quad (3.2.6) \end{aligned}$$

Penyederhanaan persamaan (3.2.6),

$$\frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} = -v \left( \frac{M_{i+1}^n - M_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - \lambda B_i^n M_i^n + \lambda B_i^n M_0 - \mu M_i^n - \psi M_i^n - \beta_1 M_i^n +$$

$$D_M \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M_{i-1}^{n+1} - 2M_i^{n+1} + M_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{M_{i-1}^n - 2M_i^n + M_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \right] \quad (3.2.7)$$

Persamaan (3.2.7) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{M_i^{n+1}}{\Delta t} &= \frac{M_i^n}{\Delta t} - \frac{v}{2\Delta x} (M_{i+1}^n - M_{i-1}^n) - \lambda B_i^n M_i^n + \lambda B_i^n M_0 - \mu M_i^n - \psi M_i^n - \beta_1 M_i^n + \\ &\frac{D_M}{2\Delta x^2} \left[ (M_{i-1}^{n+1} - 2M_i^{n+1} + M_{i+1}^{n+1}) + (M_{i-1}^n - 2M_i^n + M_{i+1}^n) \right] \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Dengan mengalikan  $\Delta t$  dengan ruas kanan maka diperoleh:

$$\begin{aligned} M_i^{n+1} &= M_i^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (M_{i+1}^n - M_{i-1}^n) + \Delta t \lambda B_i^n M_0 - (\Delta t (\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1)) M_i^n + \\ &D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left[ (M_{i-1}^{n+1} - 2M_i^{n+1} + M_{i+1}^{n+1}) + (M_{i-1}^n - 2M_i^n + M_{i+1}^n) \right] \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Persamaan (3.2.9) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_i^{n+1} &= M_i^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} M_{i+1}^n + \frac{v\Delta t}{2\Delta x} M_{i-1}^n + \Delta t \lambda B_i^n M_0 - (\Delta t (\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1)) M_i^n + \\ &D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^{n+1} - D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} M_i^{n+1} + D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^{n+1} + \\ &D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^n - D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} M_i^n + D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^n \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Persamaan (3.2.10) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} M_i^{n+1} + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} M_i^{n+1} &= -\frac{v\Delta t}{2\Delta x} M_{i+1}^n + \frac{v\Delta t}{2\Delta x} M_{i-1}^n + \Delta t \lambda B_i^n M_0 - \\ &(\Delta t (\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1) - 1) M_i^n + D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^{n+1} + \\ &D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^{n+1} + D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^n - \\ &D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} M_i^n + D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^n \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

yang dapat ditulis ulang sebagai,

$$\begin{aligned} \left(1 + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) M_i^{n+1} = & \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i+1}^n - \\ & \left(\Delta t(\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1) + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 1\right) M_i^n + \\ & \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i-1}^n + \Delta t \lambda B_i^n M_0 + \\ & D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^{n+1} + D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Persamaan (3.2.12) dapat disederhanakan dalam bentuk,

$$\begin{aligned} -D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) M_i^{n+1} - D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^{n+1} = & \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i+1}^n - \\ & \left(\Delta t(\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1) + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 1\right) M_i^n + \\ & \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i-1}^n + \Delta t \lambda B_i^n M_0 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Didefinisikan,

$$S = \frac{v\Delta t}{2\Delta x}$$

$$V = D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}$$

$$W = D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Sehingga persamaan (3.2.13) menjadi,

$$\begin{aligned} -VM_{i+1}^{n+1} + (1+W)M_i^{n+1} - VM_{i-1}^{n+1} = & (V-S)M_{i+1}^n - \\ & \left(\Delta t(\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1) + W - 1\right) M_i^n + \end{aligned}$$

$$(V + S)M_{i-1}^n + \Delta t \lambda M_0 B_i^n \quad (3.2.14)$$

Sehingga persamaan (3.1.14) dan (3.2.14) dapat dituliskan sebagai berikut:

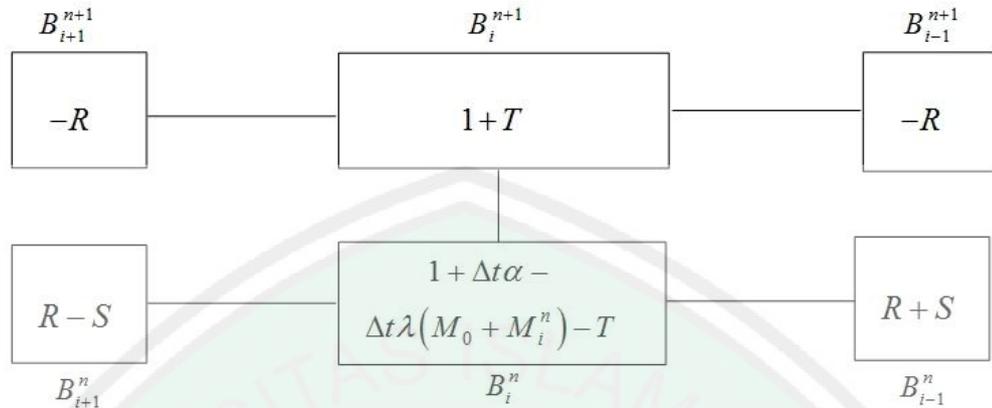
$$\left\{ \begin{array}{l} -RB_{i+1}^{n+1} + (1+T)B_i^{n+1} - RB_{i-1}^{n+1} = (R-S)B_{i+1}^n + \\ \quad \left[ 1 + \Delta t \alpha - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^n) - T \right] B_i^n + (R+S)B_{i-1}^n + \\ \quad \Delta t (\mu + \beta_1) M_i^n \\ -VM_{i+1}^{n+1} + (1+W)M_i^{n+1} - VM_{i-1}^{n+1} = (V-S)M_{i+1}^n - \\ \quad \left( \Delta t (\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1) + W - 1 \right) M_i^n + (V+S)M_{i-1}^n + \\ \quad \Delta t \lambda M_0 B_i^n \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Jika iterasi  $n$  dimulai dari  $n-1$  maka persamaan (3.3) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned} -RB_{i+1}^n + (1+T)B_i^n - RB_{i-1}^n &= (R-S)B_{i+1}^{n-1} + \\ &\quad \left[ 1 + \Delta t \alpha - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^{n-1}) - T \right] B_i^{n-1} + (R+S)B_{i-1}^{n-1} + \\ &\quad \Delta t (\mu + \beta_1) M_i^{n-1} \end{aligned} \quad (3.4a)$$

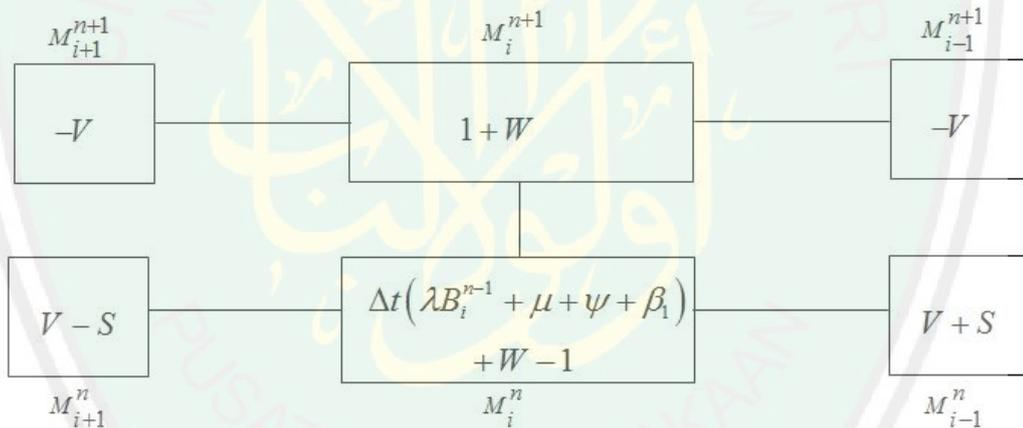
$$\begin{aligned} -VM_{i+1}^n + (1+W)M_i^n - VM_{i-1}^n &= (V-S)M_{i+1}^{n-1} - \\ &\quad \left( \Delta t (\lambda B_i^{n-1} + \mu + \psi + \beta_1) + W - 1 \right) M_i^{n-1} + (V+S)M_{i-1}^{n-1} + \\ &\quad \Delta t \lambda M_0 B_i^{n-1} \end{aligned} \quad (3.4b)$$

Stensil metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* untuk persamaan (3.4a) adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Stensil Metode Beda Hingga Skema *Crank-Nicolson* untuk persamaan (3.4a)

Stensil metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* untuk persamaan (3.4b) adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 Stensil Metode Beda Hingga Skema *Crank-Nicolson* untuk persamaan (3.4b)

### 3.3 Solusi Numerik Model Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis*

Setelah mengetahui skema solusi numerik model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dengan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*, maka selanjutnya akan dilakukan penyelesaian numerik dengan bantuan Matlab 7.6. Model tersebut akan diselesaikan pada daerah batas  $0 < x < 10$  dan  $0 < t < 10$ . Nilai parameter yang digunakan bersumber dari penelitian Gammack, dkk. (2004). Makrofag tak terinfeksi  $M_0 = 200$ ,

pertumbuhan bakteri ekstraseluler  $\alpha = 10^{-8} s^{-1}$ , pertumbuhan bakteri intraseluler

$\beta_1 = \frac{\beta_0}{1,01}$  dengan  $\beta_0 = 10^{-8} s$ , tingkat fagositosis  $\lambda = 10^{-5} s^{-1}$ , laju kematian

makrofag  $\mu = 10^{-6} s^{-1}$ , difusi makrofag  $D_M = 10^{-15} m^2 s^{-1}$ , difusi bakteri

intraseluler  $D_B = 10^{-16} m^2 s^{-1}$  laju makrofag membunuh bakteri intraseluler

$\psi = 10^{-14} s^{-1}$ , dan kecepatan internal  $v$  yang digunakan berbatas pada

$0 < v \leq 0,5$ . Sehingga persamaan (3.1) dan (3.2) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = 10^{-8} B(x,t) - 10^{-5} B(x,t)(200 + M(x,t)) + 10^{-6} M(x,t) + \left( (1,01)^{-1} 10^{-8} \right) M(x,t) + 10^{-16} \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -10^{-5} B(x,t)M(x,t) + 200 \cdot 10^{-5} B(x,t) - 10^{-6} M(x,t) - 10^{-14} M(x,t) - \left( (1,01)^{-1} 10^{-8} \right) M(x,t) + 10^{-15} \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

Dikarenakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* merupakan skema yang stabil, maka dipilih nilai  $\Delta x = 0,1$  dan  $\Delta t = 0,1$ . Untuk mempermudah perhitungan, penulis menggunakan persamaan (3.1.14) dan persamaan (3.2.14) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} -RB_{i+1}^{n+1} + (1+T)B_i^{n+1} - RB_{i-1}^{n+1} &= (R-S)B_{i+1}^n + \\ &\left[ 1 + \Delta t\alpha - \Delta t\lambda(M_0 + M_i^n) - T \right] B_i^n + (R+S)B_{i-1}^n + \\ &\Delta t(\mu + \beta_1)M_i^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-VM_{i+1}^{n+1} + (1+W)M_i^{n+1} - VM_{i-1}^{n+1} &= (V-S)M_{i+1}^n - \\
&\left(\Delta t(\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1) + W - 1\right)M_i^n + (V+S)M_{i-1}^n + \\
&\Delta t \lambda M_0 B_i^n
\end{aligned}$$

Jika iterasi  $n$  dimulai dari  $n-1$ , maka persamaan (3.1.14) dan (3.2.14) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
-RB_{i+1}^n + (1+T)B_i^n - RB_{i-1}^n &= (R-S)B_{i+1}^{n-1} + \\
&\left[1 + \Delta t \alpha - \Delta t \lambda (M_0 + M_i^{n-1}) - T\right]B_i^{n-1} + \\
&(R+S)B_{i-1}^{n-1} + \Delta t(\mu + \beta_1)M_i^{n-1}
\end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned}
-VM_{i+1}^n + (1+W)M_i^n - VM_{i-1}^n &= (V-S)M_{i+1}^{n-1} - \\
&\left(\Delta t(\lambda B_i^{n-1} + \mu + \psi + \beta_1) + W - 1\right)M_i^{n-1} + \\
&(V+S)M_{i-1}^{n-1} + \Delta t \lambda M_0 B_i^{n-1}
\end{aligned} \quad (3.9b)$$

Substitusi nilai-nilai parameter,  $\Delta t$ , dan  $\Delta x$  pada persamaan (3.9a) dengan,

$$R = D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} = 10^{-16} \frac{0,1}{2.(0,1)^2} = 5.10^{-16}$$

$$S = \frac{v\Delta t}{2\Delta x} = \frac{v(0,1)}{2(0,1)} = \frac{v}{2}$$

$$T = D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 10^{-15} \frac{0,1}{(0,1)^2} = 10^{-14}$$

Sehingga diperoleh,

$$\left(-5.10^{-16}\right)B_{i+1}^n + \left(1+10^{-14}\right)B_i^n - \left(5.10^{-16}\right)B_{i-1}^n = \left(\left(5.10^{-16}\right) - \frac{v}{2}\right)B_{i+1}^{n-1} +$$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + 0,1 \cdot 10^{-8} - 0,1 \cdot 10^{-15} \cdot (200 + M_i^{n-1}) - 10^{-14} \right] B_i^{n-1} + \\ & \left( (5 \cdot 10^{-16}) + \frac{v}{2} \right) B_{i-1}^{n-1} + 0,1 \left( 10^{-6} + \frac{10^{-8}}{1,01} \right) M_i^{n-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substitusi nilai-nilai parameter,  $\Delta t$ , dan  $\Delta x$  pada persamaan (3.9b) dengan,

$$\begin{aligned} S &= \frac{v\Delta t}{2\Delta x} = \frac{v(0,1)}{2(0,1)} = \frac{v}{2} \\ V &= D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} = 10^{-15} \frac{0,1}{2(0,1)^2} = 5 \cdot 10^{-15} \\ W &= D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 10^{-15} \frac{0,1}{(0,1)^2} = 10^{-14} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} - (5 \cdot 10^{-15}) M_{i+1}^n + (1 + 10^{-14}) M_i^n - (5 \cdot 10^{-15}) M_{i-1}^n &= \left( (5 \cdot 10^{-15}) - \frac{v}{2} \right) M_{i+1}^{n-1} - \\ & \left( 0,1 \left( 10^{-5} B_i^{n-1} + 10^{-6} + 10^{-14} + \frac{10^{-8}}{1,01} \right) + 10^{-14} - 1 \right) M_i^{n-1} + \\ & \left( 5 \cdot 10^{-15} + \frac{v}{2} \right) M_{i-1}^{n-1} + 0,1 (10^{-5}) 200 B_i^{n-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu  $x$  adalah  $l + 1$  dengan nilai  $l$  sebagai berikut:

$$l = \frac{L - x_0}{\Delta x} = \frac{10 - 0}{0,1} = 100$$

dan banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu  $t$  adalah  $r + 1$  dengan nilai  $r$  sebagai berikut:

$$r = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{0,1} = 100$$

Kondisi awal serta kondisi batas untuk fungsi  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$

berturut-turut dinyatakan sebagai berikut:

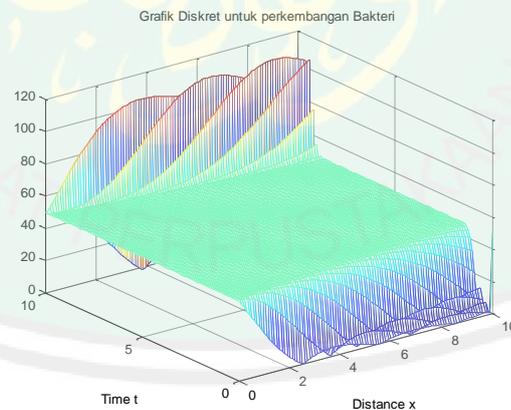
Kondisi awal :  $B(x,0) = 50$  dan  $M(x,0) = 40$  (Pagalay, 2009)

Kondisi batas :  $B(0,t) = 50$  dan  $B(10,t) = 50$  (kondisi awal *Dirichlet*)

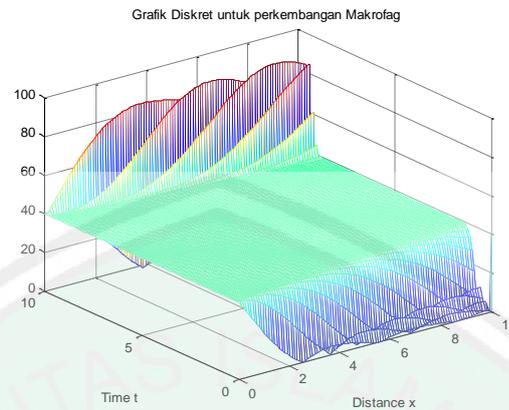
$$M(0,t) = 40 \text{ dan } M(10,t) = 40$$

Selanjutnya dilakukan iterasi pada persamaan (3.10) dan (3.11) dengan kondisi awal dan kondisi batas yang telah ditentukan. Perhitungan akan dilakukan dengan menggunakan bantuan Matlab 7.6.

Misalnya diambil  $\nu = 0,1$  dan hasil perhitungan dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 1.



Gambar 3.3 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dengan  $\nu = 0,1$



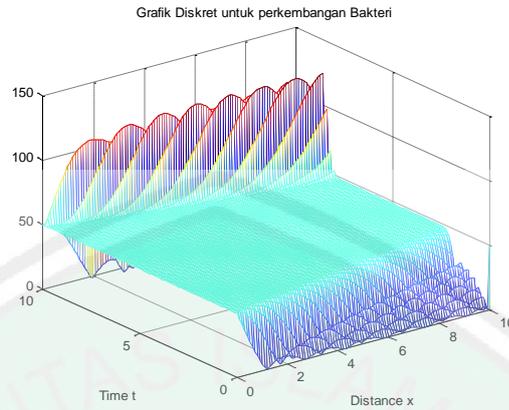
Gambar 3.4 Grafik Diskrit Persamaan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,1$

Pada gambar 3.3, perubahan banyaknya bakteri dari waktu ke waktu dengan kecepatan internal  $\nu$  sebesar 0,1 cenderung naik pada interval  $0 \leq t < 1$  dan stabil pada saat  $1 \leq t \leq 8,5$ . Pada gambar 3.4 ditunjukkan bahwa perubahan banyaknya makrofag yang terinfeksi hampir sama dengan perubahan banyaknya bakteri dan makrofag, yang stabil pada saat  $1 \leq t \leq 8,5$ . Pada gambar 3.5 dapat dilihat kompetisi antara keduanya.

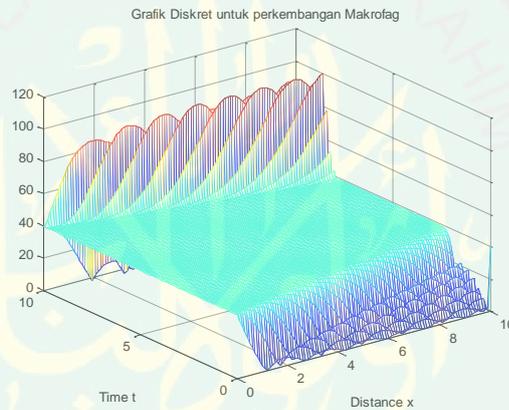


Gambar 3.5 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,1$

Contoh simulasi yang kedua diambil nilai kecepatan internal  $\nu = 0,2$ , dan hasil perhitungan dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 2.

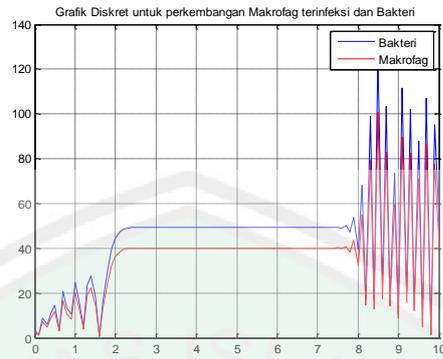


Gambar 3.6 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dengan  $\nu = 0,2$



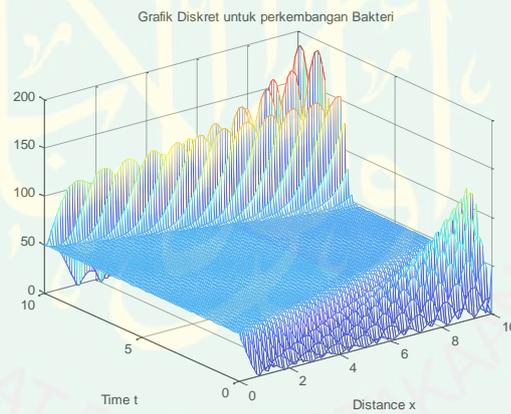
Gambar 3.7 Grafik Diskrit Persamaan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,2$

Pada gambar 3.6 dan 3.7 dengan kecepatan internal  $\nu$  sebesar 0,2, dapat dilihat bahwa perubahan banyaknya bakteri dan makrofag hampir sama dengan gambar 3.3 dan 3.4, namun banyaknya bakteri dan makrofag lebih besar. Bakteri dan makrofag terinfeksi stabil pada saat  $2 < t < 7,5$ . Kompetisi antara makrofag dan bakteri dapat dilihat pada gambar 3.8.

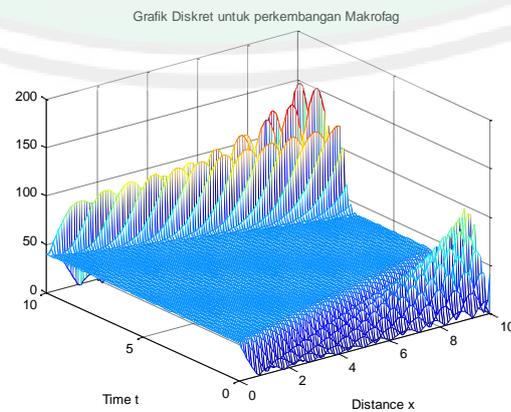


Gambar 3.8 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,2$

Contoh yang ketiga diambil nilai  $\nu = 0,3$ , dan hasil perhitungan dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 3. Berikut grafik yang dihasilkan:



Gambar 3.9 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dengan  $\nu = 0,3$



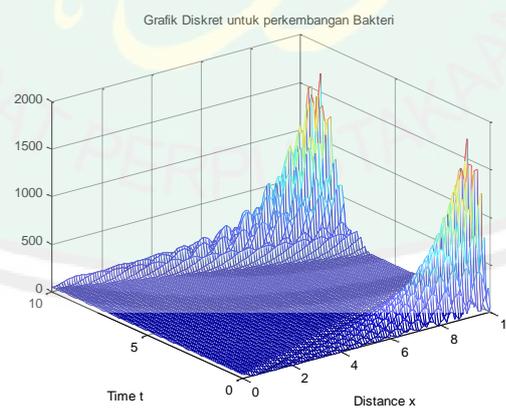
Gambar 3.10 Grafik Diskrit Persamaan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,3$

Pada gambar 3.9 dan 3.10 terlihat terjadinya perubahan banyaknya bakteri dan makrofag yang meningkat dengan cepat pada saat awal infeksi dan stabil pada saat  $3 < t \leq 6,5$ . Pada gambar 3.11 ditunjukkan kompetisi antara bakteri dan makrofag.

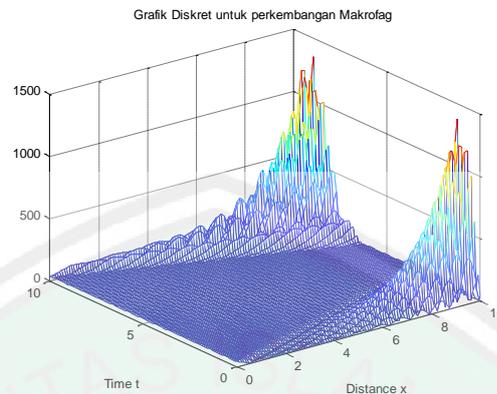


Gambar 3.11 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x, t)$  dan  $M(x, t)$  dengan  $\nu = 0,3$

Contoh selanjutnya dengan diambil nilai  $\nu = 0,4$ . Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 4. Program tersebut akan menghasilkan grafik sebagai berikut:



Gambar 3.12 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x, t)$  dengan  $\nu = 0,4$



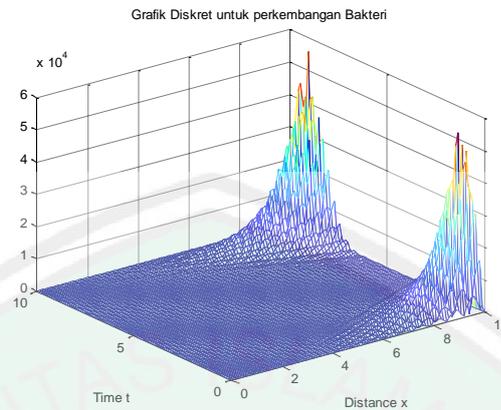
Gambar 3.13 Grafik Diskrit Persamaan  $M(x, t)$  dengan  $\nu = 0,4$

Perubahan banyaknya bakteri dan makrofag dengan kecepatan internal  $\nu$  sebesar 0,4 berturut-turut ditunjukkan pada gambar 3.12 dan 3.13. Populasi bakteri dan makrofag terinfeksi stabil pada saat  $4 < t < 5,7$ . Gabungan perubahan banyaknya bakteri dan makrofag ditunjukkan pada gambar 3.14.

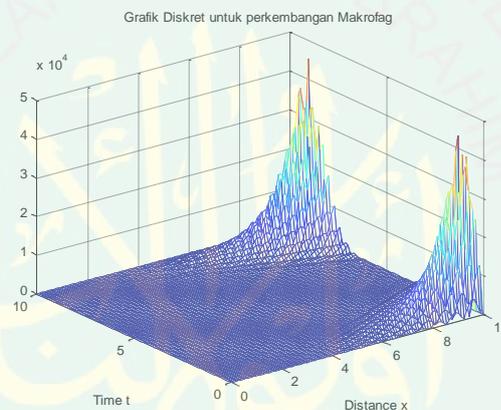


Gambar 3.14 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x, t)$  dan  $M(x, t)$  dengan  $\nu = 0,4$

Contoh simulasi yang terakhir diambil nilai kecepatan internal  $\nu = 0,5$  dan hasil perhitungan dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 5 yang akan menghasilkan grafik sebagai berikut:

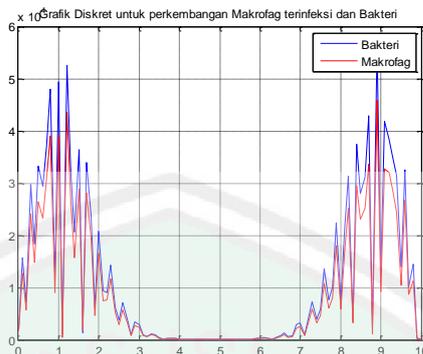


Gambar 3.15 Grafik Diskret Persamaan  $B(x,t)$  dengan  $v = 0,5$



Gambar 3.16 Grafik Diskret Persamaan  $M(x,t)$  dengan  $v = 0,5$

Pada gambar 3.15 menunjukkan bahwa dengan kecepatan internal  $v$  sebesar 0,5 perubahan banyaknya bakteri meningkat drastis sejak awal infeksi, dan mengalami penurunan pada waktu tertentu dan tidak terdapat kestabilan bakteri dan makrofag terinfeksi. Begitu juga dengan perubahan banyaknya makrofag yang terinfeksi yang ditunjukkan pada gambar 3.16. Pada gambar 3.17 berikut menunjukkan kompetisi antara bakteri dan makrofag terinfeksi.



Gambar 3.17 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,5$

Kesamaan grafik perubahan banyaknya bakteri dan makrofag yang ditunjukkan pada gambar 3.5, 3.8, 3.11, 3.14, dan 3.17 menunjukkan bahwa berapapun banyaknya bakteri *Mycobacterium tuberculosis* yang menginfeksi, maka bakteri akan berada pada kondisi stabil ketika banyaknya mencapai 50 dan banyaknya makrofag terinfeksi mencapai 40. Di mana kondisi stabil tersebut dapat dinyatakan bahwa bakteri berada dalam keadaan tidak menginfeksi (tidak terjadi infeksi pada paru).

### 3.4 Interpretasi Hasil Diskritisasi Model Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis*

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, apabila model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* yang akan diselesaikan menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* dengan kondisi batas yaitu:

$$B(x_0 = 0, t) = 50 \text{ dan } B(L = 10, t) = 50$$

$$M(x_0 = 0, t) = 40 \text{ dan } M(L = 10, t) = 40$$

Hal tersebut diinterpretasikan bahwa  $x_0$  dan  $L$  merupakan batas daerah kompetisi antara bakteri dan makrofag terinfeksi yang diselesaikan sehingga perubahan nilai

sebelum  $x_0$  dan setelah  $L$  diabaikan. Nilai batas 50 dapat dimaknai bahwa banyaknya bakteri pada titik  $x_0 = L$  sebesar 50 pada bakteri untuk semua waktu maka bakteri berada dalam keadaan stabil. Nilai batas 40 dapat dimaknai bahwa banyaknya makrofag terinfeksi pada titik  $x_n = L$  sebesar 40 pada makrofag untuk semua waktu maka makrofag berada dalam keadaan stabil. Dengan adanya kondisi batas yang diberikan maka dapat memberikan batasan daerah yang akan diselesaikan.

Kondisi awal yang digunakan dalam pembahasan ini adalah:

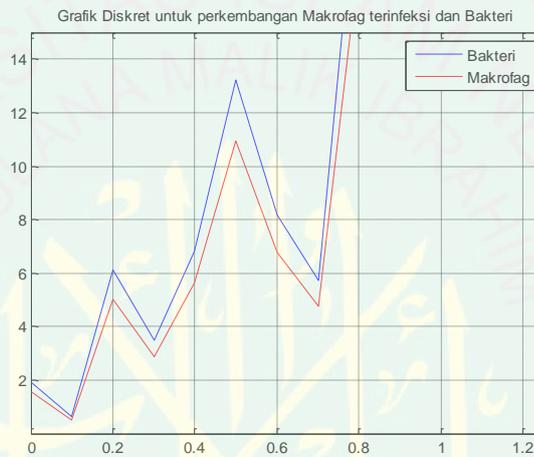
$$B(x, t_0 = 0) = 50 \text{ dan } M(x, t_0 = 0) = 40$$

Kondisi tersebut dapat dinyatakan bahwa banyaknya bakteri dan makrofag pada titik  $x$  dan pada waktu  $t_0$  berturut-turut adalah 50 dan 40, sehingga hal tersebut dapat dimaknai bahwa banyaknya makrofag yang terinfeksi lebih sedikit dibandingkan dengan banyaknya bakteri yang masuk ke paru-paru, yang mana satu makrofag dapat memfagositosis lebih dari satu bakteri atau satu makrofag dapat memfagositosis satu bakteri saja.

Berdasarkan penyelesaian nilai  $B(x, t)$  dan  $M(x, t)$  yang telah dilakukan pada bab-bab sebelumnya yang mana perhitungannya dilakukan dengan menggunakan bantuan program Matlab 7.6, dengan nilai  $\nu$  yang diberikan  $0 < \nu \leq 0,5$ . Perbedaan nilai  $\nu$  mempengaruhi kecepatan internal bakteri dan makrofag terinfeksi yang dipengaruhi oleh sistem pertahanan tubuh (salah satunya makrofag teraktifasi). Semakin baik sistem pertahanan tubuh maka semakin kecil

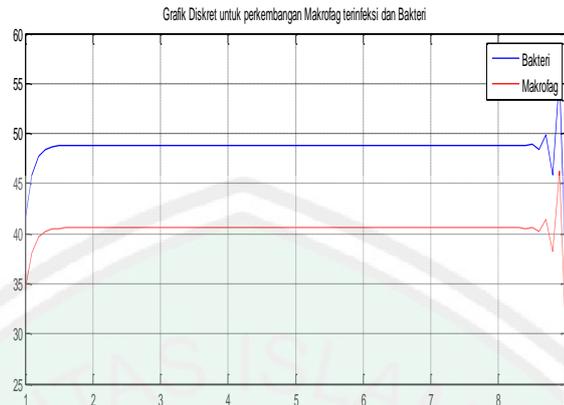
nilai  $\nu$ . Sebaliknya, semakin buruk sistem pertahanan tubuh maka semakin besar nilai  $\nu$ . Listing program dipaparkan pada halaman lampiran.

Berdasarkan hasil simulasi gambar 3.5 pada saat  $\nu = 0,1$  yang berarti bahwa sistem pertahanan tubuh sangat baik, dapat dilihat pada waktu  $0 \leq t < 1$  berikut:



Gambar 3.18 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,1$  pada Saat  $0 \leq t < 1$

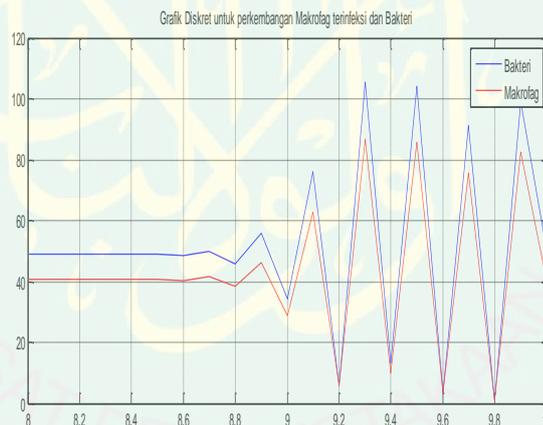
Ketidakstabilan grafik menunjukkan bahwa pada masa ini (awal infeksi) dapat dikatakan terdapat gejala awal yang menyebabkan kerusakan pada organ lain, sehingga perkembangan bakteri pada saat awal infeksi tidak beraturan yang diikuti dengan dilakukannya pengobatan terhadap infeksi bakteri. Keadaan sistem pertahanan tubuh yang sangat baik menyebabkan proses infeksi tidak berlangsung lama, sehingga bakteri dan makrofag terinfeksi lebih cepat stabil pada  $1 \leq t < 8,5$  yang digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.19 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $v = 0,1$  pada Saat  $1 \leq t < 8,5$

Pada masa ini dapat dikatakan bahwa bakteri tidak lagi menginfeksi (“tidur”).

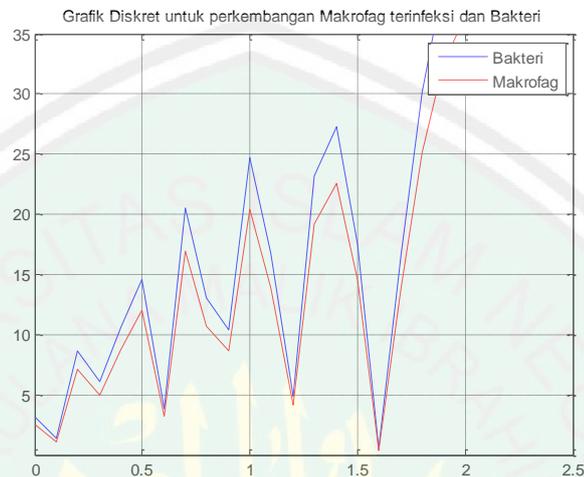
Bakteri yang tidur dapat kembali aktif pada saat  $8,5 \leq t \leq 10$  berikut:



Gambar 3.20 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $v = 0,1$  pada Saat  $8,5 \leq t \leq 10$

Terjadinya pengaktifan kembali (reaktifasi) dapat dikarenakan penurunan pertahanan tubuh pada penderita, atau terinfeksi kembali dikarenakan penularan, atau pengaruh obat sudah tidak berpengaruh terhadap bakteri, yang berarti bakteri tidak akan mati dengan pengobatan yang telah dilakukan (Aditama, 2006:iii), sehingga menyebabkan infeksi lebih parah dari sebelumnya.

Pada saat  $\nu = 0,2$  dihasilkan simulasi pada gambar 3.8, yang dapat dilihat pada saat  $0 \leq t \leq 2$  berikut:



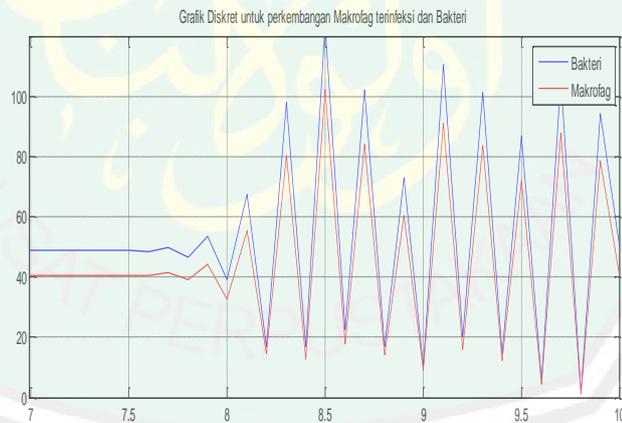
Gambar 3.21 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,2$  pada Saat  $0 \leq t \leq 2$

Grafik tersebut menunjukkan ketidakstabilan perkembangan bakteri dan makrofag pada waktu  $0 \leq t \leq 2$ , dengan jumlah bakteri dan makrofag terinfeksi yang lebih banyak dari sebelumnya. Hal tersebut dapat dinyatakan sistem pertahanan tubuh masih dikategorikan cukup baik. Kestabilan bakteri dan makrofag terinfeksi dapat dicapai pada waktu  $2 < t < 7,5$ . Jika dibandingkan dengan pada saat  $\nu = 0,1$ , kestabilan pada saat  $\nu = 0,2$  memiliki tenggang waktu yang lebih sedikit. Berikut simulasi yang dihasilkan:



Gambar 3.22 Grafik Diskret Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,2$  pada Saat  $2 < t < 7,5$

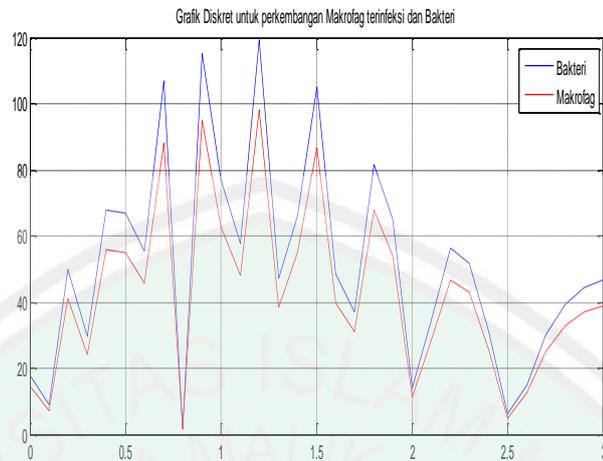
Ketidakstabilan pada  $7,5 \leq t \leq 10$  menunjukkan bahwa pada masa ini bakteri kembali aktif sehingga makrotag terinfeksi juga berkembang. Berikut hasil simulasinya:



Gambar 3.23 Grafik Diskret Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,2$  pada Saat  $7,5 \leq t \leq 10$

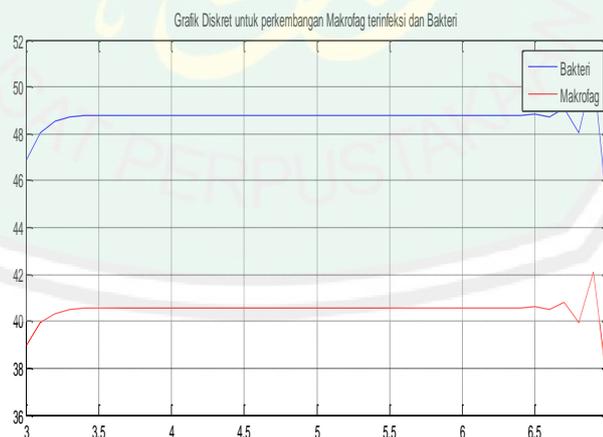
Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa reaktifasi bakteri dapat terjadi karena pertahanan tubuh menurun atau dikarenakan bakteri telah resisten terhadap obat.

Berikutnya pada saat nilai  $\nu$  sebesar 0,3 yang menghasilkan simulasi pada gambar 3.11. Hasil simulasi pada saat  $0 \leq t \leq 3$  sebagai berikut:



Gambar 3.24 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,3$  pada Saat  $0 \leq t \leq 3$

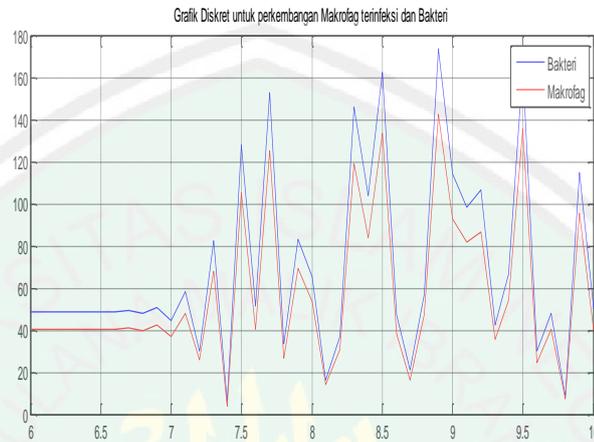
Perubahan perkembangan bakteri dan makrofag terinfeksi yang tidak beraturan dapat dikatakan bahwa pada awal infeksi keadaan sistem pertahanan tubuh (makrofag teraktifasi) dalam keadaan buruk, sehingga kestabilan bakteri dan makrofag membutuhkan waktu yang dapat dikatakan cukup lama yaitu pada saat  $3 < t \leq 6,5$  yang digambarkan pada grafik berikut:



Gambar 3.25 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,3$  pada Saat  $3 < t \leq 6,5$

Pada waktu tertentu sistem pertahanan tubuh akan mengalami penurunan atau bakteri akan resisten terhadap pengobatan yang dilakukan, sehingga

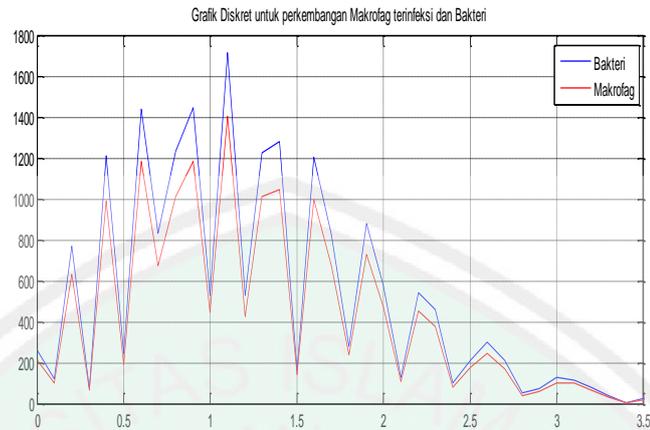
menyebabkan bakteri aktif kembali pada saat  $6,5 < t \leq 10$ , dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar 3.26 Grafik Diskret Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,3$  pada Saat  $6,5 < t \leq 10$

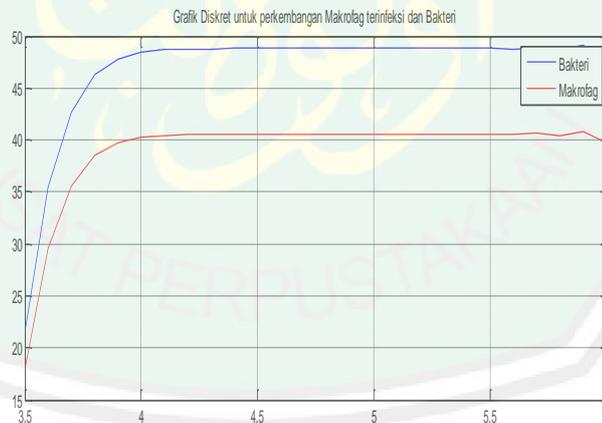
Ketidakstabilan grafik di atas dapat dinyatakan bahwa respon sistem pertahanan tubuh sudah mulai melambat, sehingga infeksi mungkin saja tidak dapat disembuhkan.

Tinjau kecepatan internal bakteri dan makrofag terinfeksi sebesar 0,4 yang menghasilkan simulasi pada gambar 3.14. Pada saat  $0 \leq t < 4$  perkembangan bakteri dan makrofag terinfeksi tidak beraturan, yang digambarkan pada 3.27 berikut:



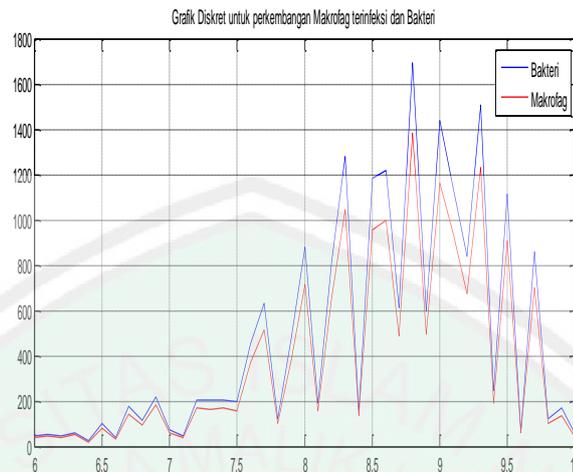
Gambar 3.27 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,4$  pada Saat  $0 \leq t < 4$

Pada saat awal infeksi tersebut dapat dikatakan bahwa keadaan sistem pertahanan tubuh buruk/menurun. Meskipun dilakukannya pengobatan, bakteri membutuhkan waktu yang lama untuk mencapai titik kestabilan di mana infeksi dapat dinyatakan berhenti/sembuh yaitu pada  $4 \leq t < 5,7$ .



Gambar 3.28 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,4$  pada Saat  $4 \leq t < 5,7$

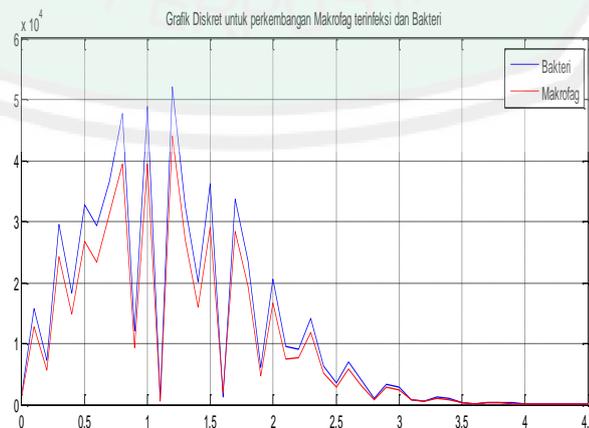
Ketika keadaan bakteri dan makroflag terinfeksi telah sampai pada keadaan stabil pada saat  $4 \leq t < 5,7$  di atas, tidak dibutuhkan waktu yang lama untuk bakteri mulai aktif kembali pada saat  $5,7 \leq t \leq 10$  yang digambarkan sebagai berikut:



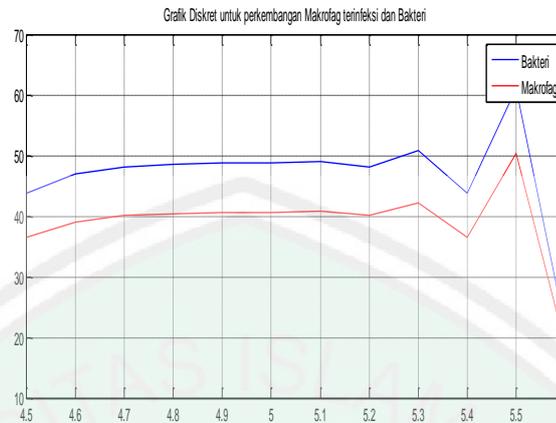
Gambar 3.29 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,4$  pada Saat  $5,7 \leq t \leq 10$

Pada infeksi ini dapat dikatakan bahwa infeksi mulai bangkit lagi dikarenakan lambatnya respon sistem pertahanan tubuh atau resistennya bakteri terhadap obat yang dapat menyebabkan kematian yang tidak dapat dihindari (Usada, 1999:17).

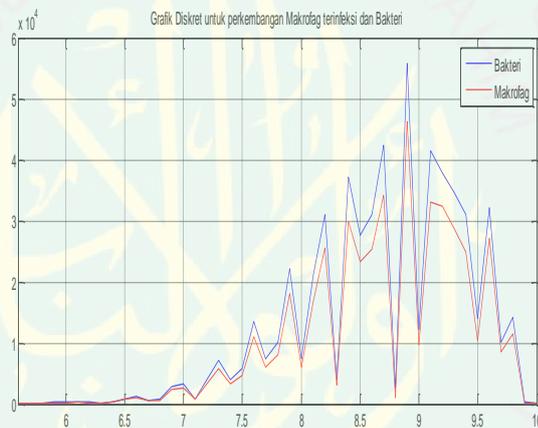
Selanjutnya, tinjau ketika kecepatan internal bakteri sebesar 0,5 di mana pada keadaan ini status nutrisi pada penderita sangat buruk. Simulasi yang dihasilkan ialah pada gambar 3.17. Jika gambar 3.17 diperbesar pada  $0 \leq t \leq 4,5$ ,  $4,5 \leq t \leq 5,6$ , dan  $5,6 \leq t \leq 10$ , maka dihasilkan:



Gambar 3.30 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,5$  pada Saat  $0 \leq t \leq 4,5$



Gambar 3.31 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,5$  pada Saat  $4,5 \leq t \leq 5,6$



Gambar 3.32 Grafik Diskrit Persamaan  $B(x,t)$  dan  $M(x,t)$  dengan  $\nu = 0,5$  pada Saat  $5,6 \leq t \leq 10$

Pada ketiga grafik di atas, dengan kecepatan internal sebesar 0,5, bakteri dan makrofag tidak stabil selama waktu  $t$  yang ditentukan. Keadaan ini dapat dikatakan bahwa infeksi bakteri berlangsung lama dan dapat menyebabkan kematian. Pada penderita dengan status sistem pertahanan tubuh yang buruk/jelek bila ada infeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis*, limfosit tidak dapat memberikan *signal*-nya kepada makrofag, sehingga makrofag tidak aktif. Akibatnya penyakit menjadi progresif, sehingga infeksi *Mycobacterium*

*tuberculosis* merupakan penyebab kematian utama pada individu dengan mal nutrisi berat (Usada, 1999:19).

### 3.5 Cara Kerja Makrofag Menurut Pandangan Islam

Di dalam nodus limfa pecah pertempuran antara penyerang tubuh dan pasukan pertahanan. Ketika bakteri masuk melalui saluran limfatis, makrofag menelan sebagian penyerang itu, menghancurkannya, dan menunjukkan penanda identitas bakteri itu di permukaannya sendiri (Yahya, 2002:5). Makrofag mampu mengenali mikroba asing berbahaya yang masuk dalam tubuh, seperti bakteri dan virus. Makrofag tidak mempunyai keterampilan untuk mempelajari berbagai macam jenis virus dan bakteri, tidak pula ia punya waktu untuk mempelajarinya, karena hal itu akan menyebabkan antigen yang memasuki tubuh, dan tubuh akan kalah dalam pertempuran itu (Yahya, 2002:25).

Ada makna tersendiri dibalik kenyataan bahwa sistem yang mencengangkan umat manusia bahkan pada titik pemahaman ini ditempatkan pada sebuah sel yang tidak memiliki kemampuan untuk berpikir dan bernalar. Ini merupakan cerminan dari keunikan ciptaan Allah Yang Maha Mengetahui, pada sel yang sangat kecil (Yahya, 2002:25). Dalam Al-Qur'an menyatakan bahwa ke-Mahabijaksanaan Allah meliputi segalanya:

وَلَا يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلَّا بِمَا شَاءَ ۚ وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ  
وَلَا يَئُودُهُ حِفْظُهُمَا ۚ وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ ﴿٢٥٥﴾

Artinya: "...dan mereka tidak mengetahui apa-apa dari ilmu Allah melainkan apa yang dikehendaki-Nya. Kursi Allah meliputi langit dan bumi. Dan Allah tidak merasa berat memelihara keduanya, dan Allah Maha Tinggi lagi Maha besar." (Q.S. Al-Baqarah, 2:255).

Tafsir dari ayat tersebut ialah:

وَلَا يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلَّا بِمَا شَاءَ

Artinya: “Dan mereka tidak mengetahui apa-apa dari ilmu Allah melainkan apa yang dikehendaki-Nya...”. Al-Thabari berkata bahwa maksud firman Allah di atas adalah bahwasannya Allah adalah Dzat Yang Maha Mengetahui. Segala sesuatu tidak pernah samar bagi Allah. Allah meliputi terhadap segala sesuatu. Segala sesuatu itu terang bagi Allah, sedangkan semua selain Allah tidak demikian adanya. Tak seorang pun selain Allah dapat mengetahui segala sesuatu kecuali dengan kehendak Allah untuk mengajarkannya dan memberikan ilmu-Nya terhadap orang tersebut.

Al-Hafizh Ibn Katsir berkata: “Adapun firman Allah di atas yang berarti bahwa seseorang tidak akan dapat memahami segala sesuatu dari ilmu Allah kecuali Allah berkenan memberi tahu dan memahamkan terhadap orang tersebut”. Dengan kata lain, maksud firman Allah tersebut adalah bahwa mereka tidak akan dapat mengetahui Dzat dan sifat kecuali Allah berkenan memberikan pemahaman kepada mereka (‘Athif, 2007:155-156).

Sesuai dengan firman-Nya:

يَعْلَمُ مَا بَيْنَ أَيْدِيهِمْ وَمَا خَلْفَهُمْ وَلَا يُحِيطُونَ بِهِ عِلْمًا

Artinya: “Dia mengetahui apa yang ada di hadapan mereka dan apa yang ada di belakang mereka, sedang ilmu mereka tidak dapat meliputi ilmu-Nya” (Q.S. Thaha, 20:110).

Berdasarkan ayat tersebut, Maka makrofag hanyalah sel yang diberi ilmu serta kemampuan oleh Allah SWT untuk mampu mengenali dan menyerang

mikroba asing yang dapat membahayakan tubuh. Makrofag hanya bertindak sesuai kehendak-Nya.

وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ

Artinya: “...kursi Allah meliputi langit dan bumi...” kemudian kekuasaan dan kedaulatan Allah meliputi keseluruhan langit dan bumi, dan pengetahuan-Nya (*Kursiy*) meliputi segala bentangan tersebut, sehingga tiada sesuatu pun yang berada di luar kekuasaan dan kewenangan-Nya.

Bahkan dari beberapa hadits, diketahui bahwa cakupan *Kursiy* itu lebih luas dari semua langit dan bumi. Misalnya dalam sebuah hadits, Imam Shâdiq berkata, “Seluruh langit dan bumi dibandingkan dengan *Kursiy* adalah bagaikan cincin di tengah-tengah padang pasir, dan *Kursiy* dibandingkan dengan *Arsy* adalah bagaikan cincin di tengah-tengah padang pasir”.

Tentu saja, ilmu pengetahuan belum menemukan rahasia makna ini (Imani, 2006:34).

وَلَا يَؤُدُّهُ حِفْظُهُمَا

Artinya: “Dan Allah tidak merasa berat memelihara keduanya.” Maksudnya, tidak memberatkan-Nya dan tidak mengganggu-Nya sama sekali memelihara langit dan bumi serta semua makhluk yang ada pada keduanya, bahkan hal tersebut mudah dan sangat ringan bagi-Nya. Dia-lah yang mengatur semua jiwa beserta semua apa yang diperbuatnya, Dia-lah yang mengawasi segala sesuatu. Tidak ada sesuatu pun yang terhalang dari-Nya, dan tiada sesuatu pun yang gaib bagi-Nya (Ad-Dimasyqi, 2000:40). Makrofag adalah sel yang sangat kecil, sangat mudah bagi-Nya untuk mengendalikannya. Hal tersebut sama sekali tidak ada

apa-apanya. Maha besar Allah, menguasai semua yang ada di dunia ini sampai pada bagian terkecil pada tubuh manusia bahkan sampai apa yang tidak diketahui oleh manusia.

وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ

Artinya: “*Dan Dia Maha Tinggi lagi Maha Besar.*” Maha Tinggilah Allah daripada perumpamaan. Kekuasaan-Nya yang meliputi langit dan bumi, demikian tinggi dan agungnya, sehingga terasa oleh tiap-tiap orang yang berpengetahuan tentang alam dalam serbi-serbi cabangnya. Ilmu hayat dalam segala seginya, dan ilmu tubuh manusia (anatomi) dengan segala keajaibannya (Hamka, 2008:27).

Makrofag hanyalah sel kecil yang tak terlihat oleh mata telanjang, yang tidak memiliki kapasitas untuk berpikir. Makrofag adalah makhluk hidup yang hanya menuruti perintah yang lebih tinggi (hanya melaksanakan tugas dari-Nya) (Yahya, 2002:44). Ini adalah kehendak Allah, seperti yang telah dijelaskan pada surat Al-Baqarah ayat 117, yang berbunyi:

فَإِنَّمَا يَقُولُ لَهُ كُنْ فَيَكُونُ

Artinya: “*Dia hanya mengatakan kepadanya: “Jadilah!” lalu jadilah ia.*”

Melalui ayat ini Allah SWT menerangkan kesempurnaan kekuasaan-Nya dan kebesaran pengaruh-Nya. Apabila dia menetapkan sesuatu, lalu Dia berkehendak akan mengadakannya, maka sesungguhnya Dia hanya mengatakan kepadanya, “Jadilah kamu!” yakni hanya sekali ucap, maka terjadilah sesuatu yang dikehendaki-Nya itu sesuai dengan apa yang dikehendaki-Nya, seperti yang disebutkan oleh firma-Nya yang lain, yaitu:

إِنَّمَا أَمْرُهُ إِذَا أَرَادَ شَيْئًا أَنْ يَقُولَ لَهُ كُنْ فَيَكُونُ ﴿٨٢﴾

Artinya: “*Sesungguhnya keadaan-Nya apabila Dia menghendaki sesuatu hanyalah berkata kepadanya: "Jadilah!" Maka terjadilah ia.*” (Q.S. Yasin, 36:82).

Makrofag diciptakan untuk melindungi tubuh manusia, yang mampu memusnahkan sejumlah besar musuh (virus dan bakteri) sekaligus di dalam tubuh manusia. Dengan ukurannya yang kecil (10-15 mikrometer), Allah SWT menjadikannya sel pemakan yang sangat luar biasa, yang mampu menyerap dan memakan molekul besar dengan cara fagositosis, menjadikannya mampu hidup dalam waktu yang sangat panjang, berbulan-bulan bahkan bertahun-tahun.

Karakteristik fagositosisnya menjadikan makrofag pasukan “penyapu” dalam sistem pertahanan. Makrofag memusnahkan semua bahan yang harus dibersihkan, seperti mikroorganisme, kompleks antigen-antibodi, dan bahan-bahan lain dengan struktur serupa antigen. Di akhir proses, bahan yang dikelompokkan sebagai antigen akan dicerna, sehingga tidak lagi menjadi ancaman bagi tubuh (Yahya, 2002:43).

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab 3, diperoleh solusi numerik model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dengan menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*, dengan ditransformasikan beda hingga maju untuk turunan waktu  $t$  dan beda hingga pusat untuk turunan ruang  $x$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 -D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) B_i^{n+1} - D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-1}^{n+1} &= \left(D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) B_{i+1}^n + \\
 \left[1 + \Delta t\alpha - \Delta t\lambda(M_0 + M_i^n) - D_B \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] B_i^n &+ \left(\frac{v\Delta t}{2\Delta x} + D_B \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\right) B_{i-1}^n + \\
 \Delta t(\mu + \beta_1) M_i^n &. \\
 -D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i+1}^{n+1} + \left(1 + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) M_i^{n+1} - D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} M_{i-1}^{n+1} &= \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i+1}^n - \\
 \left(\Delta t(\lambda B_i^n + \mu + \psi + \beta_1) + D_M \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 1\right) M_i^n &+ \\
 \left(D_M \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\right) M_{i-1}^n + \Delta t\lambda B_i^n M_0 &
 \end{aligned}$$

dengan kondisi awal  $B(x,0) = 50$  dan  $M(x,0) = 40$ , serta kondisi batas  $B(0,t) = 50$ ,  $B(10,t) = 50$ ,  $M(0,t) = 40$  dan  $M(10,t) = 40$ , diperoleh simulasi dengan perbedaan nilai kecepatan internal ( $v$ ). Pada saat nilai  $v = 0,1$  diperoleh infeksi awal ketika  $0 \leq t < 1$ , kestabilan bakteri dan makrofag terinfeksi pada

interval  $1 \leq t < 8,5$ , dan terinfeksi kembali pada  $8,5 \leq t \leq 10$ . Ketika  $\nu = 0,2$ , diperoleh awal infeksi pada  $0 \leq t < 2$ , yang stabil pada saat  $2 \leq t < 7,5$ , dan kembali menginfeksi ketika  $7,5 \leq t \leq 10$ . Pada saat nilai  $\nu$  sebesar 0,3, diperoleh waktu infeksi awal selama  $0 \leq t \leq 3$ , stabil pada waktu  $3 < t \leq 6,5$ , dan kembali terinfeksi pada waktu  $6,5 < t \leq 10$ . Selanjutnya, untuk  $\nu = 0,4$ , waktu awal infeksi adalah  $0 \leq t < 4$ , bakteri dan makrofag terinfeksi stabil pada saat  $4 \leq t < 5,7$ , dan terinfeksi kembali ketika  $5,7 \leq t \leq 10$ . Pada saat  $\nu$  bernilai 0,5 infeksi berlangsung selama waktu  $t$  yaitu  $0 \leq t \leq 10$ .

Berdasarkan paparan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa nilai  $\nu$  yang paling baik untuk memperoleh kestabilan yang cepat (waktu awal infeksi paling sedikit), dengan waktu stabil yang cukup lama ialah ketika  $\nu = 0,1$ .

#### 4.2 Saran

Pada pengembangan penelitian selanjutnya, disarankan untuk melakukan penyelesaian numerik model respon makrofag terhadap infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dengan kondisi batas yang berbeda, serta nilai awal yang berbeda-beda.

## DAFTAR PUSTAKA

- ‘Athif, A M.. 2007. *Kemukjizatan Ayat Kursi*. Yogyakarta: Mitra Pustaka.
- Ad-Dimasyqi, A.. 2000. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bandung: Sinar Baru Algesindo.
- Aditama, T.Y.. 2006. Perkembangan Teknologi, Perkembangan Kuman. *Jurnal Tuberkulosis indonesia*, Vol. 3 No. 2 Halaman i-iv.
- Al-Albani, M.N.. 2008. *Shahih Ensiklopedi Hadits Qudsi Jilid 2*. Surabaya: Duta Ilmu.
- Al-Jauziyah, I.Q.. 2004. *Metode Pengobatan Nabi*. Jakarta: Griya Ilmu.
- Al-Qarni, ‘A.. 2008. *Tafsir Muyassar Jilid 4*. Jakarta: Qisthi Press.
- Alsagaff, H. dan Mukti, A.. 2006. *Dasar-Dasar Ilmu Penyakit Paru*. Surabaya: Airlangga University Press.
- Faqih, A.K. dan Tim Ulama. 2006. *Tafsir Nurul Quran: Sebuah Tafsir Sederhana Menuju Cahaya Al-Quran (Jilid XX)*. Jakarta: Al-Huda.
- Farida. 2005. Studi Perbandingan Aktivitas Fagositosis Makrofag terhadap *Mycobacterium tuberculosis* Sensitif dan Resisten Isoniazid. *Jurnal Logika*, Vol. 2 No. 2 Halaman 47-56.
- Finizio, N. dan Ladas, G.. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Terjemahan Widiati Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Gammack, D., Doering, C.R., dan Kirschner, D.E.. 2004. Response Macrophage to *Mycobacterium tuberculosis* Infection. *Journal Mathematical Biologi*, Vol. 48 Halaman 218-242.
- Hamka. 2008. *Tafsir Al Azhar Juzu' III*. Jakarta: PT Pustaka Panjimas.
- Imani, A.K.F.. 2006. *Tafsir Nurul Quran Jilid 3*. Jakarta: Al-Huda.
- Kresno, S.B.. 2003. *Imunologi: Diagnosis dan Prosedur Laboratorium*. Jakarta: FKUI.
- Liu dan Husain, T.T.. 2012. *Discretization: An Enabling Technique*. Arizona: Departement of Computer Science and Engineering-arizona State University.

- Mutholi'ah, E.. 2008. Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Malang: Universitas Islam Negeri Malang.
- Pagalay, U.. 2009. Dinamik Makrofag pada Infeksi Mikobakterium tuberkulosis. *Paper Tidak Diterbitkan*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- . 2009. *Mathematical Modeling (Aplikasi Pada Kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan)*. Malang: UIN-Malang Press.
- Pamuntjak, S.. 1990. *Persamaan diferensial Biasa*, Fakultas MIPA. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Ross, L.S.. 1989. *Differential Equation 3<sup>th</sup>*. New York: University of New Hampshire .
- Syaikh, 'A.. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Tovmasyan, N.E.. 1994. *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics*. Singapore: Utopia Press.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Usada, I.B.. 1999. Karakteristik Gambaran Status nutrisi pada Penderita Tuberkulosis Paru. *Laporan Penelitian Karya Ilmiah Tidak Diterbitkan*. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Widoyono. 2005. *Penyakit Tropis (Epidemiologi, Penularan, Pencegahan, dan Pemberantasannya)*. Jakarta: Erlangga.
- Yahya, H.. 2002. *Sistem Kekebalan Tubuh dan Keajaiban di Dalamnya*. Bandung: Dzikra.
- Yang, W., Cao, W., Chung, T., dan Morris, J.. 2005. *Applied Numerical Methods Using Matlab*. New Jersey: Willey Interscience.
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations Of Applied Mathematics*. New Jersey: Willey Interscience.



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Tutik Rosidatul Amanah  
NIM : 09610024  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Respon Makrofag terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis* dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson  
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si  
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

| No. | Tanggal          | Hal                               | Tanda Tangan |
|-----|------------------|-----------------------------------|--------------|
| 1.  | 05 Februari 2013 | Konsultasi Bab I, II              | 1.           |
| 2.  | 08 Februari 2013 | Konsultasi Kajian Agama Bab I, II | 2.           |
| 3.  | 11 Februari 2013 | ACC Bab I, II                     | 3.           |
| 4.  | 11 Februari 2013 | ACC Kajian Agama Bab I, II        | 4.           |
| 5.  | 19 Maret 2013    | Konsultasi Bab III                | 5.           |
| 6.  | 27 Maret 2013    | Revisi Bab III                    | 6.           |
| 7.  | 01 April 2013    | Konsultasi Kajian Agama Bab II    | 7.           |
| 8.  | 03 April 2013    | ACC Kajian Agama Bab II           | 8.           |
| 9.  | 17 April 2013    | Konsultasi Bab III                | 9.           |
| 10. | 15 Mei 2013      | Konsultasi Bab III                | 10.          |
| 11. | 21 Mei 2013      | ACC Bab III, Konsultasi Bab IV    | 11.          |
| 12. | 24 Mei 2013      | ACC Kajian Agama Bab III          | 12.          |
| 13. | 27 Mei 2013      | ACC Keseluruhan                   | 13.          |

Malang, 30 Mei 2013  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## LAMPIRAN

## Lampiran 1

Program Matlab 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter  $v = 0,1$

```

% Kondisi awal
% B(x,0)=50
% M(x,0)=40
% Kondisi batas
% B(0,t) =50
% B(10,t) =50
% M(0,t) =40
% M(10,t) =40
format short
clc
clear all
% parameter
M0=100;
alfa=1/(10^8);
lamda=1/(10^5);
miu=1/(10^6);
beta=1/(10^8)/1.01;
DM=1/(10^5);
DB=DM/10;
psi=1/(10^14);
v=0.1;
% Interval
del_x=0.1;
del_t=0.1;
x=0:del_x:10;
m=length(x)-1;
t=0:del_t:10;
r=length(t)-1;
M=zeros(m,r);
B=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    B(i,1)=50;
    M(i,1)=40;
end
%kondisi batas
for k=1:r+1
    M(1,k)=40;
    B(1,k)=50;
    M(m+1,k)=40;
    B(m+1,k)=50;
end
a=DB*del_t/(2*(del_x)^2);
b=v*del_t/(2*del_x);
c=DB*del_t/((del_x)^2);
d=DM*del_t/(2*(del_x)^2);

```

```

e=DM*del_t/((del_x)^2);
for n=1:m-1
for i=1:r
if i==1
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    (del_t*lamda*(M0+M(i,n)))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+...
    miu+psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((del_t*lamda*M0)/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i+1,n+1);
else if i==r
B(i,n+1)=((1+del_t*alfa-del_t*lamda*(M0+M(i,n)))-c)...
    /(1+c))*B(i,n)+((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1);
M(i,n+1)=-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+psi+beta)...
    +e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+(del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+...
    (d/(1+e))*M(i-1,n+1);
else
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    del_t*lamda*(M0+M(i,n)))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    ((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+(del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+...
    psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+...
    (del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i-1,n+1)+...
    (d/(1+e))*M(i+1,n+1);
end end end
drawnow;
end
%plot hasil
figure (1)
mesh(x,t,abs(B))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Bakteri')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (2)
mesh(x,t,abs(M))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (3)
plot (x,abs(B(:,i)),'b-')
grid on;
hold on;
plot(t,abs(M(:,i)),'r-')
grid on;
hold off;
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag terinfeksi
dan Bakteri')
legend('Bakteri','Makrofag');

```

## Lampiran 2

Program Matlab 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter  $\nu = 0,2$

```

% Kondisi awal
% B(x,0)=50
% M(x,0)=40
% Kondisi batas
% B(0,t) =50
% B(10,t) =50
% M(0,t) =40
% M(10,t) =40
format short
clc
clear all
% parameter
M0=100;
alfa=1/(10^8);
lamda=1/(10^5);
miu=1/(10^6);
beta=1/(10^8)/1.01;
DM=1/(10^5);
DB=DM/10;
psi=1/(10^14);
v=0.2;
% Interval
del_x=0.1;
del_t=0.1;
x=0:del_x:10;
m=length(x)-1;
t=0:del_t:10;
r=length(t)-1;
M=zeros(m,r);
B=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    B(i,1)=50;
    M(i,1)=40;
end
%kondisi batas
for k=1:r+1
    M(1,k)=40;
    B(1,k)=50;
    M(m+1,k)=40;
    B(m+1,k)=50;
end
a=DB*del_t/(2*(del_x)^2);
b=v*del_t/(2*del_x);
c=DB*del_t/((del_x)^2);
d=DM*del_t/(2*(del_x)^2);
e=DM*del_t/((del_x)^2);
for n=1:m-1
for i=1:r

```

```

if i==1
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    (del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+...
    miu+psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((del_t*lamda*M0)/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i+1,n+1);
else if i==r
B(i,n+1)=((1+del_t*alfa-del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)...
    /(1+c))*B(i,n)+((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1);
M(i,n+1)=-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+psi+beta)...
    +e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+(del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+...
    (d/(1+e))*M(i-1,n+1);
else
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    ((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+(del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+...
    psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+...
    (del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i-1,n+1)+...
    (d/(1+e))*M(i+1,n+1);
end end end
drawnow;
end
%plot hasil
figure (1)
mesh(x,t,abs(B))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Bakteri')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (2)
mesh(x,t,abs(M))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (3)
plot (x,abs(B(:,i)),'b-')
grid on;
hold on;
plot(t,abs(M(:,i)),'r-')
grid on;
hold off;
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag terinfeksi
dan Bakteri')
legend('Bakteri','Makrofag');

```

## Lampiran 3

Program Matlab 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter  $\nu = 0,3$

```

% Kondisi awal
% B(x,0)=50
% M(x,0)=40
% Kondisi batas
% B(0,t) =50
% B(10,t) =50
% M(0,t) =40
% M(10,t) =40
format short
clc
clear all
% parameter
M0=100;
alfa=1/(10^8);
lamda=1/(10^5);
miu=1/(10^6);
beta=1/(10^8)/1.01;
DM=1/(10^5);
DB=DM/10;
psi=1/(10^14);
v=0.3;
% Interval
del_x=0.1;
del_t=0.1;
x=0:del_x:10;
m=length(x)-1;
t=0:del_t:10;
r=length(t)-1;
M=zeros(m,r);
B=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    B(i,1)=50;
    M(i,1)=40;
end
%kondisi batas
for k=1:r+1
    M(1,k)=40;
    B(1,k)=50;
    M(m+1,k)=40;
    B(m+1,k)=50;
end
a=DB*del_t/(2*(del_x)^2);
b=v*del_t/(2*del_x);
c=DB*del_t/((del_x)^2);
d=DM*del_t/(2*(del_x)^2);
e=DM*del_t/((del_x)^2);
for n=1:m-1
for i=1:r

```

```

if i==1
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    (del_t*lamda*(M0+M(i,n)))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+...
    miu+psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((del_t*lamda*M0)/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i+1,n+1);
else if i==r
B(i,n+1)=((1+del_t*alfa-del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)...
    /(1+c))*B(i,n)+((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1);
M(i,n+1)=-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+psi+beta)...
    +e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+(del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+...
    (d/(1+e))*M(i-1,n+1);
else
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    ((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+(del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+...
    psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+...
    (del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i-1,n+1)+...
    (d/(1+e))*M(i+1,n+1);
end end end
drawnow;
end
%plot hasil
figure (1)
mesh(x,t,abs(B))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Bakteri')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (2)
mesh(x,t,abs(M))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (3)
plot (x,abs(B(:,i)),'b-')
grid on;
hold on;
plot(t,abs(M(:,i)),'r-')
grid on;
hold off;
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag terinfeksi
dan Bakteri')
legend('Bakteri','Makrofag');

```

## Lampiran 4

Program Matlab 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter  $\nu = 0,4$

```

% Kondisi awal
% B(x,0)=50
% M(x,0)=40
% Kondisi batas
% B(0,t) =50
% B(10,t) =50
% M(0,t) =40
% M(10,t) =40
format short
clc
clear all
% parameter
M0=100;
alfa=1/(10^8);
lamda=1/(10^5);
miu=1/(10^6);
beta=1/(10^8)/1.01;
DM=1/(10^5);
DB=DM/10;
psi=1/(10^14);
v=0.4;
% Interval
del_x=0.1;
del_t=0.1;
x=0:del_x:10;
m=length(x)-1;
t=0:del_t:10;
r=length(t)-1;
M=zeros(m,r);
B=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    B(i,1)=50;
    M(i,1)=40;
end
%kondisi batas
for k=1:r+1
    M(1,k)=40;
    B(1,k)=50;
    M(m+1,k)=40;
    B(m+1,k)=50;
end
a=DB*del_t/(2*(del_x)^2);
b=v*del_t/(2*del_x);
c=DB*del_t/((del_x)^2);
d=DM*del_t/(2*(del_x)^2);
e=DM*del_t/((del_x)^2);
for n=1:m-1
for i=1:r

```

```

if i==1
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    (del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+...
    miu+psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((del_t*lamda*M0)/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i+1,n+1);
else if i==r
B(i,n+1)=((1+del_t*alfa-del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)...
    /(1+c))*B(i,n)+((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1);
M(i,n+1)=-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+psi+beta)...
    +e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+(del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+...
    (d/(1+e))*M(i-1,n+1);
else
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    ((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+(del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+...
    psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+...
    (del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i-1,n+1)+...
    (d/(1+e))*M(i+1,n+1);
end end end
drawnow;
end
%plot hasil
figure (1)
mesh(x,t,abs(B))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Bakteri')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (2)
mesh(x,t,abs(M))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (3)
plot (x,abs(B(:,i)),'b-')
grid on;
hold on;
plot(t,abs(M(:,i)),'r-')
grid on;
hold off;
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag terinfeksi
dan Bakteri')
legend('Bakteri','Makrofag');

```

## Lampiran 5

Program MATLAB 7.6 untuk Grafik Diskrit dengan Nilai Parameter  
 $\nu = 0,5$

```

% Kondisi awal
% B(x,0)=50
% M(x,0)=40
% Kondisi batas
% B(0,t) =50
% B(10,t) =50
% M(0,t) =40
% M(10,t) =40
format short
clc
clear all
% parameter
M0=100;
alfa=1/(10^8);
lamda=1/(10^5);
miu=1/(10^6);
beta=1/(10^8)/1.01;
DM=1/(10^5);
DB=DM/10;
psi=1/(10^14);
v=0.5;
% Interval
del_x=0.1;
del_t=0.1;
x=0:del_x:10;
m=length(x)-1;
t=0:del_t:10;
r=length(t)-1;
M=zeros(m,r);
B=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    B(i,1)=50;
    M(i,1)=40;
end
%kondisi batas
for k=1:r+1
    M(1,k)=40;
    B(1,k)=50;
    M(m+1,k)=40;
    B(m+1,k)=50;
end
a=DB*del_t/(2*(del_x)^2);
b=v*del_t/(2*del_x);
c=DB*del_t/((del_x)^2);
d=DM*del_t/(2*(del_x)^2);
e=DM*del_t/((del_x)^2);
for n=1:m-1

```

```

for i=1:r
if i==1
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    (del_t*lamda*(M0+M(i,n)))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+...
    miu+psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((del_t*lamda*M0)/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i+1,n+1);
else if i==r
B(i,n+1)=((1+del_t*alfa-del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)...
    /(1+c))*B(i,n)+((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+...
    (del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1);
M(i,n+1)=-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+psi+beta)...
    +e-1)/(1+e))*M(i,n)+...
    ((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+(del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+...
    (d/(1+e))*M(i-1,n+1);
else
B(i,n+1)=((a-b)/(1+c))*B(i+1,n)+((1+del_t*alfa-...
    del_t*lamda*(M0+M(i,n))-c)/(1+c))*B(i,n)+...
    ((a+b)/(1+c))*B(i-1,n)+(del_t*(miu+beta)/(1+c))*M(i,n)+...
    (a/(1+c))*B(i-1,n+1)+(a/(1+c))*B(i+1,n+1);
M(i,n+1)=((d-b)/(1+e))*M(i+1,n)-((del_t*(lamda*B(i,n)+miu+...
    psi+beta)+e-1)/(1+e))*M(i,n)+((d+b)/(1+e))*M(i-1,n)+...
    (del_t*lamda*M0/(1+e))*B(i,n)+(d/(1+e))*M(i-1,n+1)+...
    (d/(1+e))*M(i+1,n+1);
end end end
drawnow;
end
%plot hasil

figure (1)
mesh(x,t,abs(B))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Bakteri')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (2)
mesh(x,t,abs(M))
shading interp
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (3)
plot (x,abs(B(:,i)),'b-')
grid on;
hold on;
plot(t,abs(M(:,i)),'r-')
grid on;
hold off;
title('Grafik Diskret untuk perkembangan Makrofag terinfeksi
dan Bakteri')
legend('Bakteri','Makrofag');

```