SISTEM *DYNKIN* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
FARID GHOZI
NIM. 09610017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

SISTEM *DYNKIN* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FARID GHOZI
NIM. 09610017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

SISTEM *DYNKIN* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
FARID GHOZI
NIM. 09610017

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 13 Juni 2013

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Hairur Rahman, S.Pd., M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP.19800429 200604 1 003	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SISTEM *DYNKIN* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
FARID GHOZI
NIM. 09610017

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 8 Juli 2013

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	________________
Ketua Penguji	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	________________
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, S.Pd., M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Farid Ghozi

NIM : 09610017

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Juni 2013
Yang membuat pernyataan,

Farid Ghozi
NIM. 09610017

MOTTO

مَنْ أَرَادَ الدُّنْيَا فَعَلَيْهِ بِالْعِلْمِ وَ مَنْ أَرَادَ ْالآخِرَةِ فَعَلَيْهِ بِالْعِلْمِ وَ مَنْ أَرَادَ هُمَا فَعَلَيْهِ بِالْعِلْمِ (رواه الطبراني)

***"Barangsiapa yang menginginkan kehidupan dunia, maka ia harus memiliki ilmu, dan barang siapa yang menginginkan kehidupan akhirat maka itupun harus dengan ilmu, dan barang siapa yang menginginkan keduanya maka itupun harus dengan ilmu."* (HR. Thabrani)**

PERSEMBAHAN

Dengan Menyebut Nama Allah
Yang Maha Pengasih dan Penyayang,

Penulis mempersembahkan
karya ini untuk:

Ibunda tercinta, Umrati
sosok ibu yang kuat, tegar dan penyayang.
Penulis bangga telah menjadi anaknya dan
semoga amal ibadah beliau diterima disisiNya.
Ayahanda tersayang, Muhamad Sukri
yang selalu gigih dan pekerja keras demi
masa depan anak-anaknya,
dan adik terkasih, Usman Affan
berlian masa depan yang ibunda
titipkan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan ridho-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "Sistem *Dynkin* dan Sifat-sifatnya'' dengan baik. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad, keluarga, dan para sahabat beliau. Semoga penulis dapat meneladani beliau dalam berakhlaq.

Ucapan terima kasih penulis haturkan pada berbagai pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Dengan iringan syukur penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, S.Pd, M.Si dan Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan bimbingan dengan baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan ilmu yang

dapat dijadikan bekal di masa depan.

6. Kedua orang tua penulis Bapak Sukri dan Ibu Umrati, yang mengajarkan optimisme, kerja keras, sabar, dan tawakkal dalam mencapai kesuksesan. Berkat do'a, kebaikan, dan ridho mereka pula Allah memberi berbagai kemudahan pada penulis.
7. Adik penulis Usman Affan yang memberi motivasi penulis untuk menjadi teladan.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009.
9. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juli 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

No.	Simbol	Keterangan
1	$\subset$	Subset dari
2	$\supset$	Superset
3	$\in$	Elemen
4	$\exists$	Beberapa/ada
5	$\forall$	Untuk setiap/semua
6	$\emptyset/\{\}$	Himpunan kosong
7	$\wedge$	Konjungsi dibaca “dan”
8	$\vee$	Disjungsi dibaca “atau”
10	^{c}	Komplemen
11	$\dot{\cup}$	*Disjoint union*
12	$\cup$	Gabungan
13	$\cap$	Irisan
14	( )	Interval terbuka
15	[ ]	Interval tertutup
16	( ]	Interval buka tutup
17	[ )	Interval tutup buka
18	$\rightarrow$	Implikasi
19	$\leftrightarrow$	Biimplikasi
20	$\uparrow$	Urutan himpunan yang meningkat
21	$\downarrow$	Urutan himpunan yang menurun
22	μ	Fungsi yang dikenakan pada ruang terukur

ABSTRAK

Ghozi, Farid. 2013. **Sistem *Dynkin* dan Sifat-Sifatnya.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, S.Pd., M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata kunci: Aljabar Himpunan, σ-Aljabar, Ukuran, dan Sistem *Dynkin*

Matematika mempelajari teori ukuran yang mengkonstruksikan ukuran umum dan integral terhadap ukuran umum pada himpunan semesta sembarang. Hingga akhirnya seorang matematikawan dari *Universitas Moskow*, Eugene Dynkin seorang yang ahli di bidang aljabar mengembangkan konsep σ-aljabar sebelum belajar integral terhadap ukuran umum. Konsepnya yaitu kumpulan himpunan bagian dari sembarang himpunan semesta X yang harus memenuhi beberapa aksioma yang lebih lemah dibandingkan σ-aljabar. Selanjutnya konsep tersebut diberi nama sistem *Dynkin* atau kadang disebut d-sistem (Eugene Dynkin sendiri menggunakan istilah ini). Salah satu yang menarik dari konsep ini yaitu menganalisis sifat-sifat dari sistem *Dynkin*.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis akan mengkaji tentang sifat-sifat sistem *Dynkin* beserta teorema-teoremanya. Dalam kajian ini, penulis mendeskripsikan tentang aljabar himpunan, σ-aljabar, ukuran secara umum dan sistem *Dynkin*. Setelah mengetahui definisi dari sistem *Dynkin* kemudian penulis mendeskripsikan sifat-sifat sistem *Dynkin* dan membuktikan teorema-teorema beserta mendeskripsikan contoh-contohnya.

Sistem *Dynkin* merupakan keluarga subset dari sembarang himpunan kuasa $\mathcal{P}(X)$, yang harus memenuhi aksioma (i) $X \in \mathcal{D}$, (ii) $D \in \mathcal{D} \rightarrow D^C \in \mathcal{D}$ dan (iii) Jika $\left(D_j\right)_{j \in N} \subset \mathcal{D}$ himpunan-himpunan yang saling asing maka $\dot{\bigcup} D_{j \in N} \in \mathcal{D}$. Pada penelitian ini menganalisis beberapa teorema yang merupakan sifat dari sistem *Dynkin*, yakni: (1) sistem himpunan $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$, terdapat sistem *Dynkin* terkecil $\delta(\mathcal{G})$ yang memuat $\mathcal{G}$, (2) Sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ juga temasuk σ-Aljabar jika dan hanya jika $\mathcal{D}$ irisan stabil yang berhingga ($\cap$-stabil) dan (3) Jika $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$ irisan stabil yang berhingga ($\cap$-stabil), maka $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$.

ABSTRACT

Ghozi, Farid. 2013. **Dynkin System and its Properties**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (I) Hairur Rahman, S.Pd., M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Key words: Algebras Set, σ-Algebras, Measures, and *Dynkin* System.

Mathematics learn the measure theory that construct a measure and integral to the measure of another universal set. Until finally a mathematician from the University of Moskow, Eugene Dynkin an algebra expert developed the concept of σ-Algebras before learning integral to the measure. The concept is collection of subsets of another universal set X satisfying a set of axioms weaker than those of σ-algebras. Then the concept is given the name Dynkin sistem or sometimes referred to as d-system (Eugene Dynkin himself used this term). One of the highlights is a Dynkin system and properties. One of the highlights of this concept is to analyze the properties of Dynkin sytem.

Based on this background, the authors will examine the properties and their Dynkin system theorems. In this study, the authors describe the set algebra, σ-algebra, the measure and Dynkin system. After learning the definition of Dynkin system then the author describes the properties of Dynkin system and prove theorems along with examples describe.

Dynkin system is a family of any subsets of the power set $\mathcal{P}(X)$, which should satisfy the axioms (i) $X \in \mathcal{D}$, (ii) $D \in \mathcal{D} \rightarrow D^C \in \mathcal{D}$ and (iii) if $\left(D_j\right)_{j \in N} \subset \mathcal{D}$ pairwise disjoint than $\dot{\bigcup} D_{j \in N} \in \mathcal{D}$. In this research analyze several theorems that constitute properties of the Dynkin system, namely: (1) system of set $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$, then there is a smallest Dynkin system $\delta(\mathcal{G})$ containing $\mathcal{G}$, (2) Dynkin system $\mathcal{D}$ is a σ-Algebra if, and only if, $\mathcal{D}$ is stable under finite intersections ($\bigcap$-stable) and (3) if $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$ is stable under finite intersections ($\bigcap$-stable), then $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$.

ملخص

غازي، فريد . ٣ ١ ٠ ٢. **نظام *Dynkin* وأوصافه** . رسالة البحث. الشعبة الرياضيات في كلية العلوم التكنولوجيا جامعة مولانامالك إبراهيم مالانج.

المشرف: (١) حير الرحمن الماجستر
(٢) فخر الرازي الماجستر

كلمات البحث: رابطة الجبر، σ-الجبر، قياس ةةونظام *Dynkin*

في علم الرياضيات تعرف في علم الرياضيات تعرف نظرية القياس ومتكاملة لبناء مقياس عام لقياس الجمهور على مجموعة من القواعد التعسفية. ولأجل ذالك علماء الرياضيات من الجامعة موسكو يوجين Dynkin خبراء في مجال جبر تطوير مفهوم σ-الجبر قبل التعلم جزء لا يتجزأ من القياس. هذا المفهوم هو عبارة عن مجموعة من مجموعات فرعية من أي مجموعة من X القواعد التي يجب تلبية بعض البديهيات أضعف من σ-الجبر. وعلاوة على ذلك، يدعى مفهوم النظام *Dynkin* أو تسمى أحيانا د- نظام. واحد من أبرز من هذا المفهوم هو تحليل خصائص النظام *Dynkin*.

ولذا من خلفية تابحث, المكاتب سيسدرس خصائص النظام *Dynkin* مع جنسها. في هذا البحث, تامكاتب يشرح عن رابطة الجبر، σ-الجبر، قياس ونظام *Dynkin* بعد تفهيم عن تعريف ونظام *Dynkin* ثم يصف المكاتب خصائص نظام *Dynkin* وإثبات النظريات تصف إلى جانب أمثلة.

نظام *Dynkin* هو جزء من عائلة من أي مجموعة القوة $\mathcal{P}(X)$, ويملآ بديهية (i) $X \in \mathcal{D}$ (ii) $D \in \mathcal{D} \rightarrow D^C \in \mathcal{D}$ و إذا $\mathcal{D} \subset \left(D_j\right)_{j \in N}$ رابطة المتبادل الأجنبية ثم $\bigcup D_{j \in N} \in \mathcal{D}$ (iii). في هذاالبحث يحصل بضع جنس الذي هو من صفة نظام *Dynkin*, هونظام رابطة $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ وجد نظام *Dynkin* أصغر $\delta(\mathcal{G})$ تحتوي على $\mathcal{G}$. نظرية الثاني نظام *Dynkin* هو σ-الجبرإذا فقط إذا⋂- مستقر. نظرية المقبل وإذا $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ ⋂- مستقرثم $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah SWT berfirman dalam surat Al-Kahfi ayat 109 sebagai berikut:

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا ١٠٩

Artinya: *Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)* (QS. Al-Kahfi:109).

Dalam ayat di atas menjelaskan keluasan ilmu Allah dan Al-Qur’an sebagai *kalamullah*, dan islam mewajibkan umatnya untuk menuntut ilmu sampai akhir hayatnya. Sesungguhnya Allah tidak pernah mempersulit umatNya untuk menuntut ilmu karena ilmu tersebut telah terangkum dalam Al-Qur’an. Salah satu ilmu yang dibahas di dalam Al-Qur’an adalah teori ukuran yang terdapat dalam surat Al-Qamar ayat 49, yang berbunyi:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

Artinya: *Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran* (QS. Al-Qamar:49).

Menurut Shihab (2002:482), dari segi bahasa kata *qadar* dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti “kuasa”. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspek saja

Dalam matematika, konsep ukuran umumnya merujuk pada pengertian seperti panjang, luas dan volume. Satu contoh yang sangat penting adalah ukuran pada ruang Euclidean yang memberikan konvensional panjang, luas, dan volume pada geometri Euclidean untuk himpunan bagian yang sesuai dari ruang dimensi-n *Euclidean* $\mathbb{R}^n$. Cabang matematika yang juga membahas ukuran adalah teori ukuran. Teori ukuran adalah cabang analisis real yang membahas tentang σ-aljabar, ukuran, fungsi ukuran, dan integral. Pengertian ukuran pada teori ukuran menurut Bogachev (2007:15) adalah fungsi yang memberikan bilangan non-negatif (positif) nyata untuk subset dari X set (pada σ-Aljabar) dan harus menetapkan 0 untuk himpunan kosong.

Kembali pada pembahasan Al-Qur'an sebagai sumber hukum Islam. Dalam hal ini Hadits juga merupakan sumber ajaran Islam kedua setelah Al-Qur'an dalam hierarki sumber hukum Islam. Imam Syafi'i mengatakan bahwa Hadits tidak dapat dipisahkan dengan Al-Qur'an karena Hadits berisi penjelasan dan pelengkap dari yang dikatakan dalam Al-Qur'an. Berawal dari sinilah Imam Syafi'i menetapkan salah satu kaidahnya bahwa dalil agama Islam adalah Al-Qur'an dan Hadits. kemudian ketetapan tersebut dilengkapi dengan dalil yang mengatakan bahwa:

هُوَ ٱلَّذِى بَعَثَ فِى ٱلْأُمِّيِّـۧنَ رَسُولًا مِّنْهُمْ يَتْلُوا۟ عَلَيْهِمْ ءَايَـٰتِهِۦ وَيُزَكِّيهِمْ وَيُعَلِّمُهُمُ ٱلْكِتَـٰبَ
وَٱلْحِكْمَةَ وَإِن كَانُوا۟ مِن قَبْلُ لَفِى ضَلَـٰلٍ مُّبِينٍ ﴿٢﴾

Artinya: *Dia-lah yang mengutus kepada kaum yang buta huruf seorang Rasul di antara mereka, yang membacakan ayat-ayat-Nya kepada mereka, mensucikan mereka dan mengajarkan mereka kitab dan Hikmah (As Sunnah) dan Sesungguhnya mereka sebelumnya benar-benar dalam kesesatan yang nyata* (QS. Al-Jumuah:2).

Berdasarkan ayat ini, penulis terinspirasi bahwasannya suatu cabang ilmu perlu adanya penjelasan dan pelengkap untuk menyempurnakannya, begitu pula dengan teori ukuran, di dalam teori ukuran membahas tentang σ-aljabar. Dimana dalam σ-aljabar jika himpunan-himpunan elemen σ-aljabar bersifat saling asing maka perlu adanya sistem yang menunjang untuk melengkapi kekurangannya. Eugene Dynkin adalah seorang yang ahli di bidang aljabar yang pertama kali mengembangkan konsep yang kurang pada σ-aljabar tersebut. Selanjutnya konsep tersebut diberi nama sistem *Dynkin* atau kadang disebut d-sistem (Eugene Dynkin sendiri menggunakan istilah ini). Menurut Rene (2005:31), sistem *Dynkin* adalah konsep baru yang dibutuhkan untuk menyelesaikan suatu kasus yang tidak dapat diselesaikan menggunakan σ-Aljabar. Salah satu yang menarik dari konsep sistem *Dynkin* yaitu ketika menganalisis sifat-sifat dari sitem *Dynkin* itu sendiri.

Rene (2005:31) menyatakan bahwa sistem *Dynkin* didefinisikan untuk sembarang himpunan kuasa $\mathcal{P}(X)$ dan X sebagai himpunan semesta, dengan sebuah keluarga $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$, adalah sistem *Dynkin* jika memenuhi ketiga aksioma berikut:

1. $X \in \mathcal{D}$,
2. Jika himpunan D elemen dari $\mathcal{D}$ $(D \in \mathcal{D})$, maka himpunan yang anggota-anggota tidak termasuk dalam D elemen dari $\mathcal{D}$ $(D^C \in \mathcal{D})$,
3. Jika $(D_j)_{j \in N} \subset \mathcal{D}$ himpunan-himpunan yang saling asing maka $\biguplus_{j \in N} \in \mathcal{D}$.

Billingsley (1995:73) menguraikan bahwa X bukan himpunan kosong dan X elemen dari $\mathcal{D}$. Syarat agar $\mathcal{D}$ termasuk dalam sistem *Dynkin* yaitu jika $D \in \mathcal{D}$

maka D komplemen juga elemen dari $\mathcal{D}$ ($D^C \in \mathcal{D}$) dan irisan dari semua anggota D elemen dari $\mathcal{D}$.

Menurut Williams (2007:45), fakta yang penting bahwa sistem *Dynkin* juga merupakan σ-Aljabar. Diketahui setiap elemen j himpunan bagian dari X, ada sistem *Dynkin* unik dinotasikan D_j yang minimal mempunyai satu elemen dari j. Artinya, jika $\mathcal{D}$ adalah sistem *Dynkin* memuat j, maka $(D_j)_{j\in N} \subseteq \mathcal{D}$. D_j disebut sistem *Dynkin* diperumum oleh j, perhatikan $D_j = \{\emptyset, X\}$. Sebagai contoh lain yaitu $X = \{1,2,3,4\}$ dan $j = \{1\}$, kemudian $D_j = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, X\}$.

Dalam skripsi ini, akan menganalisis sistem *Dynkin* dan sifat-sifat yang dimiliki sistem tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan dan membahas secara terperinci sifat-sifat dari sistem *Dynkin*. Oleh karena itu, peneliti merancang penelitian yang terdiri dari proses analasis definisi selanjutnya pembuktian dari masing-masing teorema dan lema, serta pemberian contoh untuk kasus-kasus tertentu.

Penelitian terdahulu yang terkait dengan teori ukuran adalah ukuran lebesgue yang hanya diterapkan pada garis bilangan real (Muthmainnah, 2008), namun penelitian tersebut adalah pembahasan setelah σ-aljabar. Untuk penelitian yang menganalisis sistem *Dynkin* belum ada sebelumnya sehingga penulis tertarik untuk melakukan penelitian menganalisis sistem *Dynkin* dan juga menganalisis sifat-sifat dari sistem *Dynkin*.

Penelitian ini juga penting dilakukan dalam rangka memperdalam khasanah ilmu analisis matematika terutama dalam teori ukuran dan untuk memberikan tambahan wawasan keilmuan bagi para pembaca. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tersebut dan menyajikannya dalam judul Sistem *Dynkin* dan Sifat-Sifatnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan judul dan uraian dari latar belakang, maka masalah yang dapat dirumuskan adalah sebagai berikut:

1. Apakah yang dimaksud dengan sistem *Dynkin* terkecil dan bagaimana pembuktiannya?
2. Bagaimana $\cap$-stabil pada sistem *Dynkin*?
3. Bagaimana jika sistem *Dynkin* terkecil membentuk $\cap$-stabil?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas, penulisan skripsi ini bertujuan untuk menganalisis sifat-sifat yang ada di dalam sistem *Dynkin* dengan membuktikan teorema-teorema yang ada pada sistem *Dynkin*, antara lain:

1. Teorema sistem *Dynkin* terkecil.
2. Teorema $\cap$-stabil pada sistem *Dynkin*.
3. Teorema sistem *Dynkin* terkecil yang membentuk $\cap$-stabil.

1.4 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, agar pembahasan tidak melebar maka penulis membatasi masalah yang akan diteliti. Batasan tersebut meliputi pembuktian teorema yangberlaku pada sifat-sifat sistem *Dynkin* yaitu:

1. Teorema sifat pertama dari sistem *Dynkin* yaitu himpunan kosong adalah elemen sistem *Dynkin* dan irisan dari sembarang dua elemen dari sistem *Dynkin* elemen sistem *Dynkin*.
2. Teorema sistem *Dynkin* terkecil yang akan dibuktikan sistem terkecil tersebut juga sistem *Dynkin*.
3. Teorema $\cap$-stabil pada sistem *Dynkin*.
4. Teorema sistem *Dynkin* terkecil yang membentuk $\cap$-stabil.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, di antaranya:

1. Bagi Penulis

   Sebagai bentuk pengamalan ilmu yang sudah diperoleh dari bangku perkuliahan, khususnya di bidang teori ukuran dan analisis real. Selain itu penelitian ini merupakan analisis ilmu yang cukup penting dalam teori ukuran sehingga dapat menambah wawasan penulis dalam bidang keilmuan analisis.
2. Bagi Pembaca
   a. Dapat menambah khazanah keilmuan matematika khususnya di bidang teori ukuran.
   b. Dapat dijadikan sebagai salah satu rujukan dalam melakukan kajian teori ukuran atau penelitian selanjutnya.
   c. Dapat menambah wawasan baru bagi pembaca.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan adalah studi literatur, yaitu dengan menelaah buku, dan referensi lain yang mendukung. Secara rinci, langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Menganalisis setiap sifat-sifat (teorema-teorema dan lema) dari sistem *Dynkin*.
2. Membuktikan setiap sifat-sifat (teorema-teorema dan lema) dari sistem *Dynkin.*
3. Memberikan contoh untuk sifat-sifat (teorema-teorema dan lema) dari sistem *Dynkin*.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan.

BAB II Tinjauan Pustaka

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi definisi himpunan, operasi himpunan, aljabar himpunan, σ-aljabar, dan ukuran umum.

BAB III Pembahasan

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

BAB IV Penutup

Bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Di dalam bab kedua ini, memuat tentang pengertian-pengertian himpunan, relasi, fungsi, definisi aljabar himpunan, dan definisi σ-aljabar, teorema-teorema yang berkaitan dengan σ-aljabar serta pendefinisian ukuran umum. Di bab kedua ini juga memuat tentang pengertian Hadits dan fungsi-fungsi Hadits terhadap Al-Qur'an.

2.1 Himpunan

2.1.1 Pengertian Himpunan

Definisi 2.1.1 *Himpunan atau set adalah kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek yang menyusun himpunan disebut sebagai anggota atau elemen atau unsur dari himpunan.*

Himpunan dinotasikan dengan huruf besar seperti $A, B, C, \ldots$ Sedangkan anggota himpunan dengan huruf kecil $a, b, c, \ldots$ pernyataan "a adalah anggota dari himpunan A" di tulis $a \in A$, sedangkan pernyataan "b bukan anggota A" di tulis $b \notin A$ (Silaban, 1995:1).

2.1.2 Himpunan Bagian

Definisi 2.1.2 *Himpunan bagian atau subset adalah himpunan A disebut himpunan bagian dari B jika dan hanya jika setiap anggota A juka merupakan anggota B. Himpunan bagian dilambangkan dengan notasi $\subset$, sehingga pernyataan "A himpunan bagian dari B" ditulis $A \subset B$ atau dapat ditulis*

$B \supset A$ *dibaca* B *memuat* A *atau dikatakan* B *superset* A*, jika definisi himpunan bagian ditulis secara simbolik yaitu:*

$$A \subset B \leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$$

Dua himpunan A dan B dikatakan sama jika dan hanya jika setiap anggota A juga merupakan angota B, demikian juga setiap anggota B juga merupakan anggota A. Berdasarkan pada pengertian himpunan bagian di atas diperoleh bahwa dua himpunan A dan B sama, yaitu $A = B$, jika dan hanya jika memenuhi $A \subset B$ dan $B \subset A$. Secara simbolik dapat ditulis

$$A = B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Dalam hal $A \subset B$, tetapi $A \neq B$ dikatakan A himpunan bagian murni atau proper subset B, yaitu $\exists x \in B$ sedemikian hingga $x \notin A$ (Silaban, 1995:3).

2.1.3 Himpunan Kosong

Definisi 2.1.3 *Himpunan kosong atau void set adalah himpunan yang tidak memiliki anggota, dalam arti jika persyaratan keanggotaan himpunan dikenakan maka tidak ada yang memenuhinya. Himpunan kosong dinotasikan* $\emptyset$ *atau* $\{\ \}$ (Silaban, 1995:3).

Proposisi 2.1.3 *Himpunan kosong* $(\emptyset)$ *merupakan himpunan bagian dari sembarang himpunan termasuk himpunan kosong itu sendiri.*

2.1.4 Keluarga Himpunan

Sering terjadi bahwa obyek-obyek sebuah himpunan-himpunan, untuk menghindari sebutan “himpunan-himpunan dari himpunan”, maka secara praktis dikatakan “keluarga himpunan”. Dalam keadaan seperti ini dan untuk menghindari kekeliruan, akan digunakan huruf-huruf tulisan-tangan (*script*),

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$$

untuk menyatakan keluarga dari himpunan-himpunan, karena huruf besar telah menyatakan unsur-unsurnya (Silaban, 1995:4).

Contoh: Himpunan $\{\{2,3\},\{2\},\{5,6\}\}$ adalah keluarga himpunan. Anggota-anggotanya adalah himpunan-himpunan {2,3}, {2}, dan {5,6}.

2.1.5 Himpunan Semesta

Dalam setiap pemakaian teori himpunan, semua himpunan yang ditinjau adalah himpunan bagian dari himpunan tertentu. Himpunan ini dikatakan **himpunan semesta** (*universe of discourse*). Himpunan ini dinyatakan dengan X (Silaban, 1995:5).

Contoh: Dalam ilmu ukur bidang, himpunan semesta terdiri dari semua titik-titik dalam bidang.

2.1.6 Himpunan Kuasa

Keluarga dari semua himpunan bagian adalah himpunan S dikatakan himpunan kuasa dari S (Silaban, 1995:5). Himpunan kuasa dari S dinyatakan dengan:

$$2^S$$

Contoh: Misalkan $M = \{a, b\}$, maka $2^M = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$.

2.1.7 Operasi Himpunan

Definisi 2.1.7 *Operasi adalah aturan untuk mendapatkan unsur tunggal dari satu atau beberapa unsur tertentu. Jika operasi berlaku dalam suatu himpunan semesta S yaitu merupakan aturan untuk mendapatkan unsur tunggal dalam S*

dari satu atau lebih unsur dalam S. Jika hasil dari suatu operasi termasuk dalam semesta S, maka operasi yang demikian disebut tertutup atau closure.

Operasi dalam himpunan berkenaan dengan satu atau lebih himpunan untuk mendapatkan himpunan tunggal dalam suatu kelas himpunan. Beberapa operasi yang berlaku dalam himpunan didefinisikan sebagai berikut:

1. Gabungan atau (*Union*)

   Gabungan dua himpunan A dan B, ditulis $A \cup B$, adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan unsur dari A atau B, secara simbolik ditulis:

   $$A \cup B = \{x : x \in A \text{ atau } x \in B \text{ atau } x \in A \text{ dan } B\}$$

2. Irisan

   Irisan dua himpunan A dan B di tulis $A \cap B$, adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan unsur dari A dan B, secara simbolik ditulis:

   $$A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

3. Selisih atau Komplemen Relatif

   Selisih dua himpunan A dan B ditulis $A \backslash B$, adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan unsur dari A tetapi bukan unsur B, secara simbolik ditulis:

   $$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ atau } x \notin B\}$$

4. Komplemen atau Komplemen Mutlak

   Komplemen dari himpunan A di tulis A^C adalah himpunan yang anggota-anggota tidak termasuk dalam A, tetapi masih termasuk anggota semesta S, secara simbolik ditulis:

   $$A^C = \{x : x \in S \text{ dan } x \notin A\} = S - A$$

5. *Disjoint Union*

Secara khusus ditulis $A \uplus B$ untuk *disjoint union* yaitu untuk $A \cup B$ jika $A \cap B = \emptyset$ (Rene, 2005:5).

Rene (2005:5) menyatakan bahwa beberapa teorema-teorema berikut merupakan hukum aljabar dalam himpunan:

Teorema 2.1.7

Hukum Distributif:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Hukum *de Morgan's*:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Teorema 2.1.8 *Hukum de Morgan's yang diperumum. Untuk kelas himpunan* $\{A_i\}_{i \in I}$ *dari himpunan bagian dalam semesta S, maka:*

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i \in I} A_i^C$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C$$

2.2 Relasi dan Fungsi

Definisi 2.2.1 *Relasi adalah jika diketahui dua himpunan A dan B, maka secara intuitif relasi dari A ke B didefinikan sebagai hubungan antara anggota-anggota* *himpunan A dengan anggota himpunan B atau pernyataan yang menghubungkan anggota A dengan anggota B* (Silaban, 1995:48).

Definsi 2.2.2 *Fungsi adalah relasi yang memetakan setiap anggota suatu himpunan ke satu dan hanya satu anggota himpunan lainnya. Jadi fungsi merupakan relasi khusus sehingga fungsi merupakan himpunan bagian dari relasi. Fungsi dari himpunan A ke himpunan B di tulis dengan* $f: A \to B$ (Silaban, 1995:49).

2.3 Aljabar Himpunan

Definisi 2.3.1 *Misalkan diberikan himpunan semesta* X *dan himpunan kuasa* $P(X)$, keluarga $\mathcal{A} \subset P(X)$ *disebut aljabar himpunan apabila:*

1. $A \in \mathcal{A} \to A^C \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A}$ dan $B \in \mathcal{A} \to A \cup B \in \mathcal{A}$

Karena rumus *de Morgan's* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, maka $A \cap B \in \mathcal{A}$. Akibatnya jika $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, \cdots, k$ maka $\bigcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{A}$ dan $\bigcap_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{A}$. Di dalam setiap aljabar himpunan $\mathcal{A}$ berlaku $\emptyset \in \mathcal{A}$ dan $X \in \mathcal{A}$ (Munroe, 1953:11).

Proposisi 2.3.1 *Diberikan* $\mathcal{C} \subset P(X)$*, terdapat aljabar himpunan terkecil* $\mathcal{A}$ *yang memuat* $\mathcal{C}$ (Munroe, 1953:11).

Bukti:

Misalkan $\mathcal{F} = \{\mathcal{B} | \mathcal{B}$ aljabar himpunan yang memuat $\mathcal{C}\}$. Dibentuk $\mathcal{A} = \cap \mathcal{B},\ \mathcal{B} \in \mathcal{F}$. Jika $A \in \mathcal{A}$ maka $A^C \in \mathcal{B}$, untuk semua $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ sehingga $A^C \in \mathcal{A}$. Jika $A \in \mathcal{A}$ dan $B \in \mathcal{A}$ maka $A \cup B \in \mathcal{B}$, untuk semua $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$

sehingga $A \cup B \in \mathcal{A}$. Jadi $\mathcal{A}$ merupakan aljabar himpunan yang memuat $\mathcal{C}$. Jika $\mathcal{D}$ sembarang aljabar himpunan yang memuat $\mathcal{C}$, maka $\mathcal{D} \in \mathcal{F}$ sehingga $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$.

Contoh: Jika diberikan himpnan semesta X dan himpunan kuasa $\mathcal{P}(X)$ maka $\mathcal{A}_1 = \{A, A^C, \emptyset, X\}$ dan $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X\}$ merupakan aljabar himpunan.

2.4 σ-Aljabar

Rene (2005:15) mendefinisikan σ-aljabar di dalam bukunya sebagai berikut:

Definisi 2.4.1 *Menyatakan bahwa keluarga himpunan $\mathcal{A}$ disebut σ-aljabar, jika $\mathcal{A}$ aljabar himpunan dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ untuk $A_1, A_2, A_3, \ldots$ anggota $\mathcal{A}$. Jadi secara utuh definisinya σ-aljabar $\mathcal{A}$ pada himpunan X adalah keluarga himpunan bagian dari X dengan sifat sebagai berikut:*

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \rightarrow A^C \in \mathcal{A}$
3. $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

Suatu himpunan $A \in \mathcal{A}$ dikatakan ($\mathcal{A}$-) terukur.

Contoh:

1. $\mathcal{P}(X)$ σ-aljabar terbesar di X.
2. $\{\emptyset, X\}$ σ-aljabar terkecil di X.
3. $\mathcal{A} = \{\emptyset, B, B^C, X\}, B \subset X$, $\mathcal{A}$ σ-aljabar.
4. $\mathcal{H} = \{\emptyset, B, B^C, X\}$, $\mathcal{H}$ bukan σ-aljabar (kecuali kalau $B = \emptyset$ atau $B = X$).

2.5 Sifat-sifat σ-Aljabar

Setelah diberikan penjelasan tentang σ-aljabar yang juga disertai dengan beberapa contoh pada definisi 2.4.1, selanjutnya Rene (2005:15) juga memberikan penjelasan tentang sifat-sifat dari σ-aljabar, yaitu:

Teorema 2.5.1 Sifat-sifat dari σ-aljabar:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$

   jelas: $\emptyset = X^C \in A$ dari definisi σ-aljabar aksioma pertama dan kedua.

2. $A, B \in \mathcal{A} \to A \cup B \in \mathcal{A}$

   jelas: Jika himpunan $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$, maka $A \cup B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ dari definisi σ-aljabar aksioma ketiga.

3. $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \to \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

   Jelas: Jika $A_j \in \mathcal{A}$, maka $A_j^C \in \mathcal{A}$ dari definisi σ-aljabar aksioma ke dua, karena $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^C \in \mathcal{A}$ menurut definisi σ-aljabar aksioma ketiga dan menurut definisi σ-aljabar aksioma ke dua, $\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^C\right)^C = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$. ■

Menurut Rene (2005:32) σ-aljabar adalah ∩-stabil, karena telah diketahui pada teorema 4 yang ke-3 bahwasannya setiap σ-aljabar $\mathcal{A}$ berlaku $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \to \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

2.5.1 Himpunan Terbuka pada σ-Aljabar

Definisi 2.5.1 *Untuk sebarang σ-aljabar $\mathcal{A}$ pada himpunan X. Anggota-anggota dari $\mathcal{A}$ dikatakan* ***himpunan terbuka****.*

2.5.2 Himpunan Tertutup pada σ-Aljabar

Definisi 2.5.2 *Untuk sebarang σ-aljabar $\mathcal{A}$ pada himpunan X, suatu himpunan* *bagian A dari X yaitu $A \subset X$ dikatakan* ***himpunan tertutup*** *jika dan hanya jika komplomentnya (A^C) merupakan himpunan terbuka.*

2.5.3 Penutup (*Closure*)

Definisi 2.5.3 *Misalkan σ-aljabar $\mathcal{A}$ pada himpunan X, dan A himpunan bagian dari X. Penutup atau closure dari A ditulis $\bar{A}$ adalah irisan dari semua himpunan bagian tutup dari X yang memuat A. Dengan kata lain jika $\{F_i : i \in I\}$ adalah kelas dari semua himpunan bagian tutup dari X yang memuat A, maka:*

$$\bar{A} = \bigcap_i F_i$$

Berdasarkan uraian tersebut tentu $\bar{A}$ tertutup karena $\bar{A}$ merupakan irisan dari semua himpunan tutup dan $\bar{A}$ merupakan *superset* tutup terkecil yang memuat A, yaitu: $A \subset \bar{A} \subset F$

2.5.4 σ-Aljabar *Coarset* dan *Finer*

Definisi 2.5.4 *Misalkan $\mathcal{G}$ dan $\mathcal{P}$ adalah σ-aljabar pada himpunan tidak kosong X. Setiap himpunan buka anggota $\mathcal{G}$, himpuan bagian X, adalah anggota $\mathcal{P}$ himpunan bagian X. Dengan demikian $\mathcal{G}$ adalah kelas bagian dari $\mathcal{P}$, yaitu $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$. Dikatakan bahwa $\mathcal{G}$ adalah coarset $\mathcal{P}$ atau dengan kata lain $\mathcal{P}$ adalah finer terhadap $\mathcal{G}$.*

Teorema 2.5.4

1. Irisan $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ dari sembarang banyaknya σ-aljabar $\mathcal{A}_i$ pada X juga termasuk σ-aljabar pada X.

2. Diberikan sistem himpunan $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$, terdapat σ-aljabar terkecil yang memuat $\mathcal{G}$. ini adalah σ-Aljabar yang diperumum oleh $\mathcal{G}$, dinotasikan dengan $\sigma(\mathcal{G})$. (Rene, 2005:16).

Bukti:

1. Adapun bukti dari teorema pertama di atas yaitu:

   (1). Dari definisi σ-Aljabar diketahui $X \in \mathcal{A}_i$ untuk setiap $i \in I$ maka $X \in \bigcap_i A_i$ (teorema 2.5.1 ke-3).

   (2). Jika $A \in \bigcap_i \mathcal{A}_i$ untuk semua $i \in I$, jadi $A^C \in \bigcap_i \mathcal{A}_i$ (definisi σ-Aljabar aksioma 2).

   (3). Maka $A_k \in \mathcal{A}_i$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$ dan semua $i \in I$. Karena $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}_i$ untuk masing-masing $i \in I$ jadi $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

2. Misalkan $\mathcal{D}$ ={ $\mathcal{B}$ | $\mathcal{B}$ σ-aljabar yang memuat $\mathcal{G}$}. Dibentuk $\mathcal{A} = \cap\, \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{D}$. Dari definisi σ-aljabar, Jika $A \in \mathcal{B}$ maka $A^C \in \mathcal{B}$, untuk setiap $\mathcal{B} \in \mathcal{D}$, karena $\mathcal{A} = \cap\, \mathcal{B}$ maka $A \in \mathcal{A}$ dan $A^C \in \mathcal{A}$. Jika $A_k \in \mathcal{B}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ maka $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{B}$, karena $\mathcal{A} = \cap\, \mathcal{B}$ maka $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$. Jadi $\mathcal{A}$ adalah σ-aljabar himpunan yang memuat $\mathcal{G}$. Jika $\mathcal{A}'$ adalah sembarang σ-aljabar himpunan yang memuat $\mathcal{G}$, maka $\mathcal{A}' \in \mathcal{D}$ sehingga $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

2.6 Himpunan *Borel*

Definisi 2.6.1 *Keluarga himpunan Borel $\mathcal{B}$ adalah σ-aljabar terkecil yang memuat semua himpunan terbuka (open set)* (Munroe, 1953:60).

Catatan: Keluarga himpunan Borel $\mathcal{B}$ juga merupakan σ-aljabar terkecil yang memuat semua himpunan tertutup dan merupakan σ-aljabar terkecil yang memuat interval-interval. Gabungan terbilang himpunan tertutup belum tentu himpunan tertutup dan irisan terbilang himpunan terbuka belum tentu himpunan terbuka. Jadi keluarga himpunan *Borel* $\mathcal{B}$ memuat tipe-tipe himpunan yang lebih umum dari pada himpunan terbuka dan himpunan tertutup.

Aksioma Pemilihan (*Axiom of Choice*)

Misalkan $\mathcal{A}$ suatu keluarga himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan tidak kosong, maka ada suatu fungsi F didefinisikan pada $\mathcal{A}$, yang mengawankan setiap himpunan $A \in \mathcal{A}$ dengan satu elemen $F(A) = a \in \mathcal{A}$.

Sifat 2.6.1 Himpunan *Borel* dari garis bilangan Real $\mathbb{R}$ juga dihasilkan oleh salah satu sistem berikut (Rene, 2005:19):

$$\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\},$$

$$\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\},$$

$$\{(c, \infty) : c \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{(c, \infty) : c \in \mathbb{R}\},$$

$$\{[d, \infty) : c \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{[d, \infty) \ : d \in \mathbb{R}\}.$$

2.7 Ukuran Umum

Barra (2003:93) menyatakan bahwa sebelum mendefinisikan ukuran umum terlebih dahulu didefinisikan tentang fungsi himpunan, ruang terukur, dan himpunan terukur yang akan di berikan pada definisi-definisi di bawah

Definisi 2.7.1 *Fungsi himpunan μ adalah suatu fungsi yang didefinikan pada suatu keluarga himpunan ke dalam himpunan semua bilangan real diperluas $\mathbb{R}^*$.*

Definisi 2.7.2 *Diberikan himpunan sembarang X dan σ-aljabar $\mathcal{B}$ terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari X. Pasangan $(X, \mathcal{B})$ disebut **ruang terukur** .*

Definisi 2.7.3 *Misalkan* $(X, \mathcal{B})$ *sembarang ruang terukur. Himpunan bagian* A *dari* X *disebut himpunan terukur apabila* $A \in \mathcal{B}$.

Definisi 2.7.4 *Diberikan ruang terukur sembarang* $(X, \mathcal{B})$*. Ukuran* μ *pada* $(X, \mathcal{B})$ *adalah fungsi himpunan yang didefinisikan pada* $\mathcal{B}$ *sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:*

1. $A \in \mathcal{B} \rightarrow \mu(A) \geq 0$ (non negatif).
2. $\mu(\emptyset) = 0$.
3. Jika $< A_n > n \in \mathbb{N}$ barisan himpunan-himpunan terukur saling assing maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(*countably additive*).

Jika μ ukuran pada ruang terukur $(X, \mathcal{B})$ maka $(X, \mathcal{B}, \mu)$ disebut **ruang ukuran** .

Sedangkan Rene (2005:22) menyatakan bahwa definisi ukuran μ pada X pemetaan $\mu\colon \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ didefinisikan pada σ-aljabar $\mathcal{A}$ yang memenuhi:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

dan, sembarang keluarga terbilang dari himpunan yang berpasangan saling asing $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$,

$$\mu\left(\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Menurut Rene (2005:22) bahwa sebuah ukuran berhingga adalah ukuran dengan $\mu(X) < \infty$ dan ukuran probabilitas adalah ukuran dengan $\mu(X) = 1$. Kesamaan dengan ruang ukuran adalah sama-sama ruang terukur berhingga.

Urutan jenuh $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ adalah urutan meningkat dari himpunan $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ sehingga $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X$. A ukuran μ dikatakan σ-berhingga dan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ disebut ruang terukur σ-berhingga, jika $\mathcal{A}$ memuat ukuran jenuh $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sehingga $\mu(A_j)_{j\in\mathbb{N}} < \infty$.

Urutan jenuh himpunan $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ yang meningkat, jika $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ dan kasus seperti ini ditulis dengan $A_j \uparrow A$ dengan $limit\ A = \bigcup_j A_j$. Sedangkan urutan menurun dari himpunan ditulis dengan $limit\ A = \bigcap_j A_j$. Semua σ-aljabar adalah urutan meningkat yang stabil atau *limit* anggotanya menurun.

Contoh: Adapun contoh dari ruang ukuran yaitu:

1. $(\mathbb{R}, M, m)$ dengan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real, M adalah σ-aljabar himpunan terdiri dari himpunan-himpunan terukur *Lebesgue* dan m ukuran *Lebesgue*.
2. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ dengan $\mathcal{B}$ adalah kelas himpunan *Borel*.

Barra (2003:96) menyatakan bahwa ukuran bersifat monoton, yang akan diberikan pada teorema-teorema di bawah:

Proposisi 2.7.1 *Jika* $A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B}$ *dan* $A \subset B$ *maka* $\mu(A) \geq \mu(B)$.

Bukti:

Karena $B = A \cup (B - A)$ gabungan 2 himpunan saling asing maka $\mu(A) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$.

Proposisi 2.7.2 *Jika* $E_i \in \mathcal{B}, \mu(E_1) < \infty$ *dan* $E_i \supset E_{1+i}$ *untuk semua* $i \in \mathbb{N}$ *maka:*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i).$$

Bukti:

Misalkan $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ maka $E_1 = E \cup \bigcup_{1=1}^{\infty}(E_i - E_{i+1})$. Karena merupakan gabungan himpunan-himpunan terukur saling asing maka:

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i + E_{i+1})$$

Karena $E_i = E_{i+1} \cup (E_i + E_{i+1})$ maka $\mu(E_i) - \mu(E_{i+1}) = (E_i - E_{i+1})$, sebab $\mu(E_{i+1}) \leq \mu(E_i) \leq \mu(E_1) < \infty$.

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} [\mu(E_i) - \mu(E_{i+1})]$$

$$= \mu(E) + \mu(E_1) - \lim_{n \to \infty} \mu(E_i).$$

Karena $\mu(E_1) < \infty$ maka

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_i).$$

Contoh:

1. Diberikan F himpunan tertutup dengan anggota 0 dan 1, secara simbolik dapat ditulis:

$$F = [0,1]$$

maka ukuran dari $F = 1 - 0 = 1$.

2. Diberikan

$$F = \left\{0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$$

Maka

$$\Delta = [0,1]$$

dan

$$\Delta - F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$$

dan

$$l(\Delta - F) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots = 1$$

Sehingga didapatkan

$$l(F) = (1 - 0) - l([0,1] - F) = 1 - 1 = 0.$$

Definisi 2.7.5 *Diberikan G himpunan buka berhingga dengan komponen interval $\{(a_k, b_k): k = 1, \dots\}$. Ukuran dari G ditulis $l(G)$, didefinisikan dengan:*

$$l(G) = \sum_{k} (b_k - a_k).$$

Proposisi 2.7.3 *(countably subadditive) jika $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ dengan $E_n \in \mathcal{B}$ maka*

$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$ Barra (2003:97).

Bukti:

Misalkan $G_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ maka $G_n \subset E_n$, $\langle G_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ barisan himpunan-himpunan terukur saling asing dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Karena $\mu(G_n) \leq \mu(E_n)$ maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Contoh:

1. Diberikan F himpunan *Carton ternary*. Selanjutnya $\Delta = [0,1]$ dan

$$\Delta - F = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \cup \left\{\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\right\} \cup \dots$$

Maka ukuran untuk F, pertama-tama mencari ukutan Δ, yaitu:

$$l(\Delta) = 1 - 0 = 1$$

Selanjutnya mencari ukuran $l(\Delta - F)$, yaitu:

$$l(\Delta - F) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = 1$$

Sehingga didapatkan ukuran dari F yaitu:

$$l(F) = (1-0) - l([0,1] - F) = 1 - 1 = 0.$$

2. Diberikan himpunan $F = \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$, sedemikian hingga

$$\{[a_k, b_k]: k = 1,2,\dots,n\}$$

kelas dari interval himpunan-himpunan yang saling asing. Maka sesuai definisi 2.7.5 didapatkan

$$l(F) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

Definisi 2.7.6 *Diberikan ruang ukuran* $(X, \mathcal{B}, \mu)$. *Ukuran* μ *disebut ukuran berhingga jika* $\mu(X) < \infty$ *dan disebut ukuran* σ *berhingga jika ada barisan himpunan-himpunan terukur* $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *sedemikian hingga* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *dan* $\mu(X_n) < \infty$ (Barra, 2003:94).

Definisi 2.7.7 *Diberikan suatu ruang ukuran* $(X, \mathcal{B}, \mu)$. E *himpunan bagian dari* X *disebut terukur lokal (locally measureble) apabila* $E \cap B \in \mathcal{B}$ *untuk setiap* $B \in \mathcal{B}$ *dengan* $\mu(\mathcal{B}) < \infty$ (Barra, 2003:94).

Lema 2.7.1 *Keluarga himpunan $\mathcal{A}$ terdiri dari himpunan-himpunan terukur lokal membentuk σ-aljabar yang memuat $\mathcal{B}$* (Barra, 2003:95).

Bukti:

$\mathcal{A} = \{E \subset X | E \cap B \in \mathcal{B}, \forall B \in \mathcal{B}$ dengan $\mu(B) < \infty\}$. Karena $E^C \cap B = B - E \cap B$, jika $E \in \mathcal{A}$ maka $E^C \in \mathcal{A}$. Misalkan $\langle E_n \rangle$ barisan himpunan-himpunan anggota $\mathcal{A}$. Jadi $E_n \cap B \in \mathcal{B}$ untuk setiap B dengan $\mu(B) < \infty$, maka $[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n] \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap B) \in \mathcal{B}$. Oleh sebab itu $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Jika $E \in \mathcal{B}$ maka $E \cap B \in \mathcal{B}$ untuk setiap $B \in \mathcal{B}$ sehingga $E \in \mathcal{A}$. Jadi $\mathcal{A}$ adalah σ-aljabar yang memuat $\mathcal{B}$.

Definisi 2.7.8 *Diberikan suatu ruang ukuran $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Ukuran μ disebut jenuh* (*saturated*) *jika setiap himpunan terukur lokal adalah terukur* (Munroe, 1953:115).

Lema 2.7.2 *Jika $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ruang ukuran σ-berhingga maka μ ukuran jenuh* (*saturated*) (Munroe, 2003:115).

Bukti:

Misal $\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ barisan himpunan-himpunan saling asing pada $\mathcal{B}$ dengan $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ dan $\mu(X_n) < \infty$. Ambil $E \in \mathcal{A}$ maka $E \cap X_n \in \mathcal{B}$, untuk setiap n. Karena $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap X_n)$ maka $E \in \mathcal{B}$. Sehingga setiap himpunan terukur lokal adalah terukur. Menurut definisi 2.7.8 setiap himpunan terukur lokal yang terukur maka ukuran tersebut jenuh. Jadi terbukti $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ruang ukuran σ-berhingga maka μ ukuran jenuh.

2.8 Pengertian Hadits Nabi SAW

Kata Hadits berasal dari bahasa arab. Menurut ibn manzhur, kata ini berasal dari kata *al-Hadits*, jamaknya: *al-Haditsan al-Hadatsan*, secara etimologi, kata ini memiliki banyak arti, diantaranya:

1. *Al-Jadid*, artinya baru. Makna ini antonim dari kata *al-qadim*. Barangkali makna ini mempunyai konteks teologis, bahwa segala kalam selain kalam Allah termasuk kalam Rasul SAW bersifat (baru), sedangkan kalam Allah bersifat *qadim* (terdahulu).
2. *Al-Qarib*, artinya dekat, dalam waktu yang dekat.
3. *Al-Khabar*, artinya berita. Oleh karena itu pemberitaan Hadits selalu menggunakan ungkapan.

Secara terminologis, Hadits dirumuskan dalam pengertian yang berbeda-beda diantara para ulama. Perbedaan-perbedaan itu lebih diakibatkan karena terbatas dan luasnya obyek tinjauan masing-masing, yang tentu saja mengandung kecendrungan pada aliran ilmu yang didalaminya.

Menurut istilah para Ulama Hadits (*Muhadditsin*) antara lain Al-Hafidh dalam syarah Al-Bukhari menerangkan, bahwa Hadits ialah “Segala sesuatu yang diberitakan dari Nabi SAW baik berupa sabda, perbuatan, *taqrir*, sifat-sifat dan hal ihwal Nabi”. Sedangkan menurut para istilah ahli Ushul Figih , Hadits adalah “segala perkataan, perbuatan dan *taqrir* Nabi Muhammad SAW, yang bersangkut paut dengan Hukum Syara” (Soetari, 2008:2).

Dari definisi ini dapat dijelaskan bahwa Hadits memiliki kriteria sebagai berikut:

1. Segala sesuatu yang disandarkan kepada Nabi Muhammad SAW, artinya segala sesuatu yang disandarkan selain kepada Nabi Muhammad bukan termasuk Hadits seperti sabda Nabi Musa, Isa dan lain lain.
2. Penyandaran sesuatu yang disebut Hadits terjadi sesudah Muhammad diangkat menjadi Nabi dan Rasul.
3. Sesuatu yang disandarkan kepada Nabi baik berupa perkataan, perbuatan, dan sifat, baik sifat fisik seperti sifat-sifat organ tubuh, rambut kriting, jenggot tebal dan lain-lain. Bisa juga penyifatan nonfisik atau akhlak beliau, seperti sopan santun dengan siapa saja, sayang terhadap fakir miskin, dan lain lain.

2.9 Hadits sebagai Dasar *Tasyri'*

Yang dimaksud dengan *tasyri'* adalah menetapkan ketentuan syariat Islam atau hukum Islam. Hukum Islam adalah firman syariat yang berhubungan dengan perbuatan orang *mukallaf*, yang mengandung tuntutan, membolehkan sesuatu atau menjadikan sesuatu sebagai syarat adanya yang lain.

Pengertian hukum Islam menurut Ushul Fiqh ialah firman (*nash*) dari pembuat syara' baik firman Allah maupun Hadits Nabi SAW.

Syariat adalah hukum yang ditetapkan Allah SWT untuk para hamba-Nya dengan perantara Nabi SAW supaya para hamba melaksanakan dasar iman, baik hukum itu mengenai amaliah lahiriah, maupun yang mengenai akhlak dan aqidah yang bersifat batiniah.

Syariat Islam meliputi segala yang berhubungan dengan aqidah, akhlak, ibadah, dan muammalah.

Dasar syariah dan hukum Islam dalam arti pegangan, sumber atau *mashdar* perumusan perundang-undangan Islam adalah Al-Qur'an, Hadits dan Ijtihad.

Al-Qur'an sebagai pokok hukum merupakan dasar pertama dan Hadits sebagai dasar kedua, dengan kata lain ada *rutbah* atau urutan derajat, Al-Qur'an lebih tinggi *rutbah* derajatnya dari Hadits (Hasbi, 1972:175).

2.10 Fungsi Hadits sebagai *Bayan* Al-Qur'an

Al-Qur'an dan Hadits sebagai pedoman hidup, sumber hukum dan ajaran dalam Islam, keduanya merupakan satu kesatuan yang tidak dapat dipisahkan. Al-Qur'an sebagai sumber utama yang banyak memuat ajaran-ajaran yang bersifat umum dan global. Oleh karena itulah kehadiran Hadits, sebagai sumber ajaran kedua tampil untuk menjelaskan (*bayan*) keumuman isi Al-Qur'an tersebut. Hai ini sesuai dengan firman Allah SWT:

بِٱلْبَيِّنَٰتِ وَٱلزُّبُرِ ۗ وَأَنزَلْنَآ إِلَيْكَ ٱلذِّكْرَ لِتُبَيِّنَ لِلنَّاسِ مَا نُزِّلَ إِلَيْهِمْ وَلَعَلَّهُمْ يَتَفَكَّرُونَ ﴿٤٤﴾

Artinya : *"Keterangan-keterangan (mukjizat) dan kitab-kitab. dan kami turunkan kepadamu Al Quran, agar kamu menerangkan pada umat manusia apa yang Telah diturunkan kepada mereka (perintah-perintah, larangan-larangan, aturan dan lain-lain yang terdapat dalam Al Quran) dan supaya mereka memikirkan"* (QS. An-Nahl: 44).

Allah SWT, menurunkan Al-Qur'an bagi umat manusia, agar Al-Qur'an ini dapat dipahami oleh manusia, maka Rasul SAW diperintahkan untuk menjelaskan kandungan dan cara-cara melaksanakan ajarannya kepada mereka melalui Hadits-Haditsnya.

Soetari (2008) menyatakan bahwa fungsi Hadits Nabi SAW sebagai dasar hukum Islam dan fungsi Hadits sebagai penjelas, interprestasi dan *bayan* terhadap Al-Qur'an menurut Imam Malik yaitu:

1. *Bayan at-taqrir* ialah menetapkan dan memperkuat apa yang telah diterangkan di dalam Al-Qur'an. Fungsi hadits dalam hal ini memperkokoh isi kandungan Al-Qur'an.
2. *Bayan al-tafsir* ialah bahwa kehadiran hadits berfungsi untuk memberikan rincian dan tafsiran terhadap ayat-ayat Al-Qur'an yang masih bersifat global (*mujmal*), memberikan persyaratan atau batasan (*taqyid*) ayat-ayat Al-Qur'an yang bersifat mutlak dan mengkhususkan (*takhsish*) ayat-ayat Al-Qur'an yang bersifat umum.
3. *Bayan at-tasyri* adalah mewujudkan suatu hukum atau ajaran-ajaran yang tidak didapati dalam Al-Qur'an atau dalam Al-Qur'an hannya terdapat pokok-pokoknya (*ushl*) saja.

Dari uraian di atas jelaslah bahwa Hadits merupakan dasar bagi hukum-hukum Islam setelah Al-Qur'an. Umat islam harus mengikuti petunjuk Hadits sebagaimana dituntut mengikuti petunjuk Al-Qur'an.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan tentang definisi sistem *Dynkin* beserta contoh-contohnya. Kemudian dipaparkan juga bukti dari sifat-sifat sistem *Dynkin* yang disertai beberapa contoh dan akan dijelaskan teorema baru tentang keunikan dari ukuran.

3.1 Sistem *Dynkin*

Sistem *Dynkin* adalah konsep baru yang dibutuhkan untuk menyelesaikan suatu kasus yang tidak dapat diselesaikan menggunakan σ-Aljabar. Seperti halnya σ-Aljabar, sistem juga harus memenuhi beberapa aksioma namun ada beberapa hal yang sama dengan aksioma σ-Aljabar. Rene (2005:31) mendefinisikan sistem *Dynkin* yakni sebagai berikut:

Definisi 3.1 Dipandang himpunan semesta X dan himpunan kuasanya $\mathcal{P}(X)$. Suatu keluarga $\mathcal{D}$ yang beranggotakan himpunan bagian dari X, yaitu $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$, dikatakan sistem *Dynkin* jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. $X \in \mathcal{D}$,
2. $D \in \mathcal{D} \rightarrow D^C \in \mathcal{D}$,
3. Jika $\left(D_j\right)_{j\in N} \subset \mathcal{D}$ himpunan-himpunan yang saling asing maka $\biguplus D_{j\in N} \in \mathcal{D}$.

Contoh:

1. Diberikan himpunan semesta $X = \{a, b, c\}$ dan dibentuk himpunan kuasa $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

Apakah $\mathcal{D}_1$ sistem *Dynkin* dengan $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$?

Jawab:

Untuk membuktikan $\mathcal{D}_1$ sistem *Dynkin* harus memenuhi ketiga aksioma:

(1). Ambil $X \in \mathcal{D}_1$, X elemen dari $\mathcal{D}_1$ maka aksioma pertama terbukti.

(2). Ambil $\{a\} \in \mathcal{D}_1$ dan $\{a\}^C = \{b,c\} \in \mathcal{D}_1$, selanjutnya ambil $X \in \mathcal{D}_1$ dan $X^C = \emptyset \in \mathcal{D}_1$, karena setiap himpunan komplemennya elemen $\mathcal{D}_1$ maka aksioma kedua terbukti bahwa setiap anggota elemen $\mathcal{D}_1$, komplemennya juga elemen $\mathcal{D}_1$.

(3). Ambil $\{a\}, \{b,c\}, \emptyset \in \mathcal{D}_1$ dan $\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset$, maka $\{a\} \uplus \{b,c\} = \{a,b,c\} = X \in \mathcal{D}_1$. $\{a\} \cap \emptyset = \emptyset$ dan $\emptyset \cap \{b,c\} = \emptyset$ maka $\{a\} \uplus \emptyset = \{a\} \in \mathcal{D}_1$ dan $\emptyset \uplus \{b,c\} = \{b,c\} \in \mathcal{D}_1$. Jadi aksioma ketiga terbukti, untuk setiap elemen dari $\mathcal{D}_1$ adalah himpunan-himpunan yang saling asing dan *disjoint union* dari himpunan-himpunan $\mathcal{D}_1$ hasilnya elemen dari $\mathcal{D}_1$.

2. Diberikan himpunan semesta $X = \{a,b,c\}$ dan dibentuk himpunan kuasa $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$.

   Apakah $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sistem *Dynkin* dengan $\mathcal{D}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b,c\}, X\}$ dan $\mathcal{D}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, X\}$?

   Jawab:

   (1). Untuk membuktikan $\mathcal{D}_2$ sistem *Dynkin*, ambil $\{b\} \in \mathcal{D}_2$ dan $\{b\}^C = \{a,c\}$, karena $\{a,c\} \notin \mathcal{D}_2$, maka aksioma kedua sistem *Dynkin* tidak terbukti. Ada anggota elemen $\mathcal{D}_2$ yang komplemennya bukan elemen $\mathcal{D}_2$. Sehingga didapatkan $\boldsymbol{\mathcal{D}_2}$ **bukan sistem *Dynkin***.

(2). Untuk membuktikan $\mathcal{D}_3$ sistem *Dynkin*, ambil $\{b\},\{b,c\} \in \mathcal{D}_3$ dan $\{b\}\cap\{b,c\}$={b}, karena ada elemen dari $\mathcal{D}_3$ yang bukan himpunan-himpunan yang saling asing maka dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{\mathcal{D}_3}$ **bukan sistem *Dynkin***.

3. Diberikan sembarang himpunan semesta X dan himpunan kuasa $\mathcal{P}(X)$, dengan $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ maka $\mathcal{D} = \{\emptyset, D, D^C, X\}$ merupakan sistem *Dynkin*.

4. Diberikan himpunan semesta X, dibentuk $\mathcal{D} = \{G|G = \emptyset$ atau G^C *finite*$\}$ yaitu himpunan yang angotanya komplemen dari semua himpunan buka dari $\mathcal{D}$ *finite*. $\mathcal{D}$ juga sistem *Dynkin* dari X.

   Dapat dibuktikan sebagai berikut:

   (1) Ambil $\emptyset \in \mathcal{D}$, karena $\emptyset \in \mathcal{D}$ dan $X^C = \emptyset$ *finite*, maka $X \in \mathcal{D}$, sehingga didapatkan $X \in \mathcal{D}$.

   (2) Ambil $G_i \in \mathcal{D}$, karena $G_i \in \mathcal{D}$ maka $G_i^C \in \mathcal{D}$.

   (3) Misal $G_i \in \mathcal{D}$, berarti G_i^C *finite*, dipandang $(\uplus_i G_i)^C = \cap_i G_i^C$ karena $\boldsymbol{G_i^C}$ *finite* tentu $\cap_i G_i^C$ juga *finite*, jadi benar $\uplus_i G_i \in \mathcal{D}$.

   Jadi terbukti untuk $\mathcal{D} = \{G|G = \emptyset$ atau G^C *finite*$\}$ adalah sistem *Dynkin*.

5. Dipandang $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilanagan real. Dibentuk $\mathcal{D} = \{G|G = \emptyset \vee x \in G \Longrightarrow (\exists I)\, x \in I \subset G\}$ dengan I interval terbuka dalam $\mathbb{R}$, G dapat berbentuk:

   $\{x|a < x < b\} = (a,b); \{x|a < x < b\}\cup\{x|c < x < d\} = \{a,b\}\cup\{c,d\}$;

   $\{x|x > b\} = \{b,\infty\}; \{x|x < a\} = \{-\infty, a\}$.

   Untuk membuktikan $\mathcal{D}$ sistem *Dynkin* harus memenuhi 3 aksioma yaitu:

   (1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{D}$,

(2) $G_i \in \mathcal{D} \Longrightarrow G_i^C \in \mathcal{D}$,

(3) $\biguplus_i G_i \in \mathcal{D}$.

Terbukti $\mathcal{D} = \{G | G = \emptyset \vee x \in G \Longrightarrow (\exists I)\ x \in I \subset G\}$ adalah sistem *Dynkin*.

3.2 Sifat-Sifat Sistem *Dynkin*

Telah diberikan definisi sistem *Dynkin* beserta beberapa contohnya, mulai dari contoh himpunan berhingga dan himpunan yang tak berhingga yang dilengkapi dengan penbuktiannya. Selanjutnya akan diberikan sifat pertama dari sistem *Dynkin*.

Sifat 3.1 *Misalkan $\mathcal{D}$ sistem Dynkin, maka akan memenuhi dua sifat di bawah:*

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$
2. $\mathcal{D}: D, E \in \mathcal{D}, D \cap E = \emptyset \rightarrow D \uplus E \in \mathcal{D}$.

Bukti:

1. Diketahui $\mathcal{D}$ sistem *Dynkin* maka sesuai definisi sistem *Dynkin* aksioma pertama $X \in \mathcal{D}$, karena $X \in \mathcal{D}$ maka $X^C \in \mathcal{D}$ (menurut defini sistem *Dynkin* aksioma 2). $\emptyset = X^C$ sehingga didapatkan $\emptyset \in \mathcal{D}$.
2. Diketahui sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ serta dua himpunan D dan E dengan $D, E \in \mathcal{D}, D \cap E = \emptyset$, jika dimisalkan himpunan $D_1 = D$, $D_2 = E$ dan $D_3 = D_4 = \cdots = \emptyset$ maka $D \cup E = \biguplus D_{j \in N}$. Dari definisi sistem *Dynkin* aksioma 3 diketahui $\biguplus D_{j \in N} \in \mathcal{D}$. Dengan demikian $D \cup E \in \mathcal{D}$.

Contoh:

Misalkan $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{ab, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ adalah himpunan kuasa dengan himpunan semesta $X = \{a, b, c, d\}$. Diberikan himpunan $E = \{a, b\}$, $D = \{c, d\}$ dengan $D, E \in \mathcal{D}$ dan $\mathcal{D} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$, akan dibuktikan $D \cup E \in \mathcal{D}$.

Perhatikan bahwa $D, E \in \mathcal{D}, D \cap E = \{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, karena irisan dari himpunan D dan himpunan E adalah himpunan kosong, maka *disjoint union* dari himpunan E dan D elemen dari sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ yaitu $D \uplus E = \{a, b, c, d\} = X \in \mathcal{D}$ dan $\emptyset \in \mathcal{D}$.

3.3 Sistem *Dynkin* Terkecil

Pada teorema 2.5.4 telah dibuktikan bahwa dalam sembarang σ-aljabar terdapat σ-aljabar terkecil dan ternyata hal ini juga berlaku pada sistem *Dynkin* yang akan dibuktikan pada proposisi di bawah.

Proposisi 3.1 *Diberikan sistem himpunan $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$, terdapat sistem Dynkin terkecil $\delta(\mathcal{G})$ yang memuat $\mathcal{G}$. Sehingga $\delta(\mathcal{G})$ dikatakan sistem Dynkin yang diperumum oleh $\mathcal{G}$ dan juga $\mathcal{G} \subset \delta(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$.*

Bukti:

Misalkan $\mathcal{D}$ ={ $\mathcal{B}$ | $\mathcal{B}$ sistem *Dynkin* yang memuat $\mathcal{G}$}. Dibentuk $\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{D}$. Dari definisi sistem *Dynkin*, Jika $A \in \mathcal{B}$ maka $A^C \in \mathcal{B}$, untuk setiap $\mathcal{B} \in \mathcal{D}$, karena $\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B}$ maka $A \in \mathcal{A}$ dan $A^C \in \mathcal{A}$. Jika $A_k \in \mathcal{B}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ maka $\biguplus_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{B}$, karena $\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B}$ maka $\biguplus_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$. Jadi $\mathcal{A}$ adalah sistem *Dynkin* yang memuat $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ dapat di lambangkan dengan $\delta(\mathcal{G})$. Jika $\sigma(\mathcal{G})$ adalah sembarang sistem *Dynkin* yang memuat $\mathcal{G}$, maka $\sigma(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}$ sehingga $\delta(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$. Dengan demikian $\mathcal{G} \subset \delta(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$. ■

Hal ini penting untuk mengetahui ketika sistem *Dynkin* sudah menjadi σ-Aljabar.

Contoh:

Diberikan himpunan $\mathcal{G} = \{b\}$ dan himpunan kuasa $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ dengan himpunan semesta $X = \{a,b,c\}$ diketahui $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$, maka terdapat sistem *Dynkin* terkecil yang memuat $\mathcal{G}$.

Bukti:

Misalkan sistem *Dynkin* yang memuat $\mathcal{G}$ adalah $\delta(\mathcal{G})$, sesuai definisi sistem *Dynkin*, keluarga $\delta(\mathcal{G})$ harus memenuhi 3 aksioma, yaitu:

(1). Menurut aksioma pertama $\delta(\mathcal{G})$ harus memuat himpunan X dan himpunan kosong $(\emptyset)$.

(2). Menurut definisi sistem *Dynkin* aksioma kedua, setiap elemen himpunan-himpunan pada $\delta(\mathcal{G})$, komplemennya juga elemen dari keluarga $\delta(\mathcal{G})$. Diketahui $\mathcal{G} = \{b\} \in \delta(\mathcal{G})$ maka $\mathcal{G}^C = \{a,c,d\} \in \delta(\mathcal{G})$.

(3). Ambil himpunan $\{b\}$,$\{a,c,d\} \in \delta(\mathcal{G})$, diketahui himpunan $\{b\}$ dan $\{a,c,d\}$ adalah himpunan-himpunan yang saling asing, maka aksioma ketiga pada definisi sistem *Dynkin* secara otomatis telah berlaku yaitu $\{b\} \cap \{a,c,d\} = \emptyset$ dan $\{b\} \cup \{a,c,d\} = \{a,b,c,d\} = X \in \delta(\mathcal{G})$. Diperoleh sistem *Dynkin* $\delta(\mathcal{G})$ yaitu:

$\delta(\mathcal{G}) = \{\emptyset, \{b\}, \{a,c,d\}, X\}$ dengan himpunan semesta $X = \{a,b,c,d\}$ dan $\mathcal{G} \subset \delta(\mathcal{G})$. Dengan demikian diperoleh $\delta(\mathcal{G})$ sistem *Dynkin* terkecil yang memuat $\mathcal{G}$.

3.4 ∩-Stabil Sistem *Dynkin*

Sistem *Dynkin* jika dipandang dari ketiga aksiomanya hampir sama dengan σ-aljabar namun sistem *Dynkin* anggotanya adalah himpunan-himpunan yang saling asing, tapi bisa saja sistem *Dynkin* termasuk σ-aljabar jika dan hanya jika sistem *Dynkin* termasuk irisan stabil yang berhingga.

Lema 3.1 *Sistem Dynkin $\mathcal{D}$ juga temasuk σ-Aljabar jika dan hanya jika $\mathcal{D}$ irisan stabil yang berhingga* (∩-*stabil*).

Bukti:

Menurut Rene (2005:32) irisan stabil yang berhingga (∩-stabil) pada sistem *Dynkin* yaitu untuk sembarang dua himpunan E, $D \in \mathcal{D}$ maka irisan dari himpunan E dan D juga elemen dari sistem Dynkin $\mathcal{D}$. Secara simbolik dapat ditulis

$$D, E \in \mathcal{D} \rightarrow D \cap E \in \mathcal{D}$$

Pada uraian di atas telah dijelaskan ∩-stabil, tetapi hanya diterapkan pada dua himpunan. Karena ∩-stabil membahas tentang operasi irisan yang berhingga, maka operasi tersebut dapat diperluas untuk tiga himpunan atau lebih dengan menggunakan sifat assosiatif. Ambil $D, E, F \in \mathcal{D}$ maka $D \cap (E \cap F) = (D \cap E) \cap F \in \mathcal{D}$ selanjutnya operasi irisan tersebut ditulis dengan menghilangkan tanda kurung, yaitu $D \cap (E \cap F) = (D \cap E) \cap F = D \cap E \cap F$, jika operasi irisan tersebut dilakukan berulang dengan memperluas sifat assosiatif kepada sejumlah himpunan yang banyaknya berhingga sesuai definisi ∩-stabil yang termuat dalam kelas himpunan $\{D_i\}_{i \in I}$ dengan $I = \{1,2,3, \dots, n\}$ maka didefinisikan ∩-stabil yang diperumum sebagai berikut:

$$(D_i)_{i\in I} \in \mathcal{D} \to \bigcap_{i\in I} D_i \in \mathcal{D} \text{ dengan } I = \{1,2,3,\dots,n\}$$

(→). Diketahui sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ termasuk σ-Aljabar, akan dibuktikan sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ adalah ∩-stabil: $(D_i)_{i\in I} \in \mathcal{D} \to \bigcap_{i\in I} D_i \in \mathcal{D}$ dengan $I = \{1,2,3,\dots,n\}$. Untuk membuktikannya ambil sebarang $D_i \in \mathcal{D}$ untuk setiap $i \in I$, karena sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ adalah σ-Aljabar, maka dapat menggunaka definisi σ-Aljabar aksioma kedua yaitu:

$$D_i \in \mathcal{D} \to D_i^C \in \mathcal{D}$$

Selanjutnya digunakan definisi aljabar aksioma ketiga:

$$(D_i^C)_{i\in I} \subset \mathcal{D} \to \bigcup_{i\in I} D_i^C \in \mathcal{D}$$

Digunakan kembali definisi aljabar aksioma kedua:

$$\bigcup_{i\in I} D_i^C \in \mathcal{D} \to \left(\bigcup_{i\in I} D_i^C\right)^C \in \mathcal{D}$$

dengan menggunakan hukum *de Morgan's* yang diperumum maka persamaan $\left(\bigcup_{i\in I} D_i^C\right)^C$ menjadi:

$$\bigcup_{i\in I} D_i^C = \left(\bigcap_{i\in I} D_i\right)^C \in \mathcal{D}$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} D_i^C\right)^C = \left(\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right)^C\right)^C = \bigcap_{i\in I} D_i \in \mathcal{D}$$

sehingga diperoleh:

$$\left(\bigcup_{i\in I} D_i^C\right)^C = \bigcap_{i\in I} D_i \in \mathcal{D}$$

Dengan demikian terbukti bahwa sistem *Dynkin* yang termasuk σ-aljabar adalah ⋂-stabil.

(←). Diketahui sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ adalah irisan stabil yang berhingga (⋂-stabil): $(D_i)_{i\in I} \in \mathcal{D} \to \bigcap_{i\in I} D_i \in \mathcal{D}$ dengan $I = \{1,2,3,\ldots,n\}$. Akan dibuktikan apakah $\mathcal{D}$ juga σ-aljabar.

Definisi sistem *Dynkin* aksioma pertama:

$$X \in \mathcal{D}$$

hal ini juga belaku pada definisi σ-aljabar aksioma pertama. Selanjutnya definisi sistem *Dynkin* aksioma kedua:

$$D \in \mathcal{D} \to D^C \in \mathcal{D}$$

untuk σ-aljabar aksioma kedua juga berlaku hal tersebut. Selanjutnya untuk membuktikan aksioma ketiga pada σ-aljabar, diketahui sistem *Dynkin* adalah ⋂-stabil, yaitu:

$$(D_i)_{i\in I} \in \mathcal{D} \to \bigcap_{i\in I} D_i \in \mathcal{D} \text{ dengan } I = \{1,2,3,\ldots,n\}$$

Menurut sistem *Dynkin* aksioma kedua:

$$\bigcap_{i\in I} D_i \in \mathcal{D} \to \left(\bigcap_{i\in I} D_i\right)^C \in \mathcal{D}.$$

Selanjutnya dengan menggunakan hukum *de Morgan's* yang di perumum diperoleh:

$$\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right)^C = \bigcup_{i\in I} D_i^C \in \mathcal{D}$$

$$\left(\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right)^C\right)^C = \left(\bigcup_{i\in I} D_i^C\right)^C \in \mathcal{D}$$

$$\bigcap_{i\in I} D_i = \left(\bigcup_{i\in I} D_i^C\right)^C \in \mathcal{D}$$

menurut definisi sistem *Dynkin* aksioma kedua:

$$\left(\bigcup_{i\in I} D_i^C\right)^C \in \mathcal{D} \to \bigcup_{i\in I} D_i^C \in \mathcal{D}$$

karena $D_i^C \in \mathcal{D} \to \left(D_i^C\right)^C = D_i \in \mathcal{D}$ untuk $I = \{1,2,3,\dots,n\}$. Sehingga aksioma ketiga σ-aljabar berlaku:

$$(D_i)_{i\in I} \in \mathcal{D} \to \bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{D}$$

Terbukti bahwa sistem *Dynkin* yang ⋂-stabil (irisan stabil berhingga) termasuk σ-aljabar.

Contoh:

(1). Diberikan sistem *Dynkin* $\mathcal{D} = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}, \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ dengan himpunan semesta $X = \{a,b,c\}$ dan himpunan kuasa $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$. Akan dibuktikan sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ termasuk σ-aljabar.

Bukti:

Untuk membuktikan keluarga sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ termasuk σ-aljabar cukup dengan membuktikan sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ termasuk ⋂-stabil yaitu:

Ambil $\{a\}, \{b,c\} \in \mathcal{D}$ dan $\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset \in \mathcal{D}$. Maka terbukti sesuai definisi ⋂-stabil: $D, E \in \mathcal{D} \to D \cap E \in \mathcal{D}$. Dapat disimpulkan bahwa sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ juga termasuk σ-aljabar.

(2). Diberikan sistem *Dynkin* yang termasuk σ-aljabar yaitu $\mathcal{D} = \{\emptyset, D, D^C, X\}$ dengan sembarang himpunan semesta X dan himpunan kuasa $\mathcal{P}(X)$. Akan dibuktikan sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ adalah ⋂-stabil: $D, E \in \mathcal{D} \rightarrow D \cap E \in \mathcal{D}$.

Bukti:

Ambil sebarang $D, D^C \in \mathcal{D}$ dan $D \cap D^C = \emptyset$, diketahui $\emptyset \in \mathcal{D}$. Terbukti sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ adalah ⋂-stabil.

Lema 3.1 di atas tidak berlaku untuk sistem *Dynkin* yang diperumum oleh $\mathcal{G}$. Teorema berikutnya adalah teorema yang penting untuk memperluas Lema 3.1 ke dalam aturan yang lebih baik untuk sistem *Dynkin* yang diperumum oleh $\mathcal{G}$.

Teorema 3.1 *Jika* $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ *irisan stabil yang berhingga* (⋂-*stabil*), *maka* $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$.

Bukti:

Untuk membuktikan $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$ harus menunjukkan $\delta(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$ dan $\sigma(\mathcal{G}) \subset \delta(\mathcal{G})$. Dari proposisi 3.1 Telah diperoleh $\delta(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\sigma(\mathcal{G}) \subset \delta(\mathcal{G})$, jika $\sigma(\mathcal{G})$ σ-aljabar yang memuat $\mathcal{G}$, dengan $\sigma(\mathcal{G}) \in \mathcal{A}$. Maka $\sigma(\mathcal{G})$ adalah σ-aljabar yang diperumum oleh $\mathcal{G}$. Misalkan $\delta(\mathcal{G})$ sembarang σ-aljabar yang memuat $\mathcal{G}$, maka $\delta(\mathcal{G}) \in \mathcal{A}$ sehingga $\sigma(\mathcal{G}) \subset \delta(\mathcal{G})$. Dengan demikian terbukti bahwa $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$.

Diketahui $\delta(\mathcal{G})$ adalah ∩-stabil sesuai dengan yang ditunjukkan Lema 3.1. Untuk memperbaiki $D \in \delta(\mathcal{G})$ dan memperkenalkan keluarga

$$\mathcal{D}_D = \{Q \subset X : Q \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}.$$

Memeriksa $\mathcal{D}_D$ sistem *Dynkin*: untuk definisi *Dynkin* aksioma 1 jelas benar., dan untuk definisi *Dynkin* aksioma 2: mengambil $Q \in \mathcal{D}_D$ maka

$$Q^C \cap D = (Q^C \cup D^C) \cap D = (Q \cap D)^C \cap D = \left((Q \cap D) \dot{\cup} D^C\right)^C,$$

$$(Q \cap D) \in \delta(\mathcal{G}), \quad D^C \in \delta(\mathcal{G})$$

dan *disjoint unions* dari himpunan $\delta(\mathcal{G})$ masih element dari $\delta(\mathcal{G})$. Sehingga $Q^C \in \mathcal{D}_D$, jadi definisi sistem *Dynkin* aksioma 2 terbukti selanjutnya untuk membuktikan definisi sistem *Dynkin* aksioma 3: diberikan $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ suatu urutan himpunan-himpunan yang saling asing dari keluarga $\mathcal{D}_D$. Menurut definisi, $(Q_j \cap D)_{j \in \mathbb{N}}$ adalah urutan beririsan di $\delta(\mathcal{G})$ dan untuk sistem *Dynkin* $\delta(\mathcal{G})$

$$\left(\dot{\bigcup_{j \in \mathbb{N}}} Q_j\right) \cap D = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (Q_j \cap D) \in \delta(\mathcal{G}),$$

yang berarti bahwa $\dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} Q_j \in \mathcal{D}_D$.

Karena $\mathcal{G} \in \delta(\mathcal{G})$ dan $\mathcal{G}$ adalah $\cap$-stabil, didapatkan $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_G$ untuk setiap $G \in \mathcal{G}$. Tapi $\mathcal{D}_G$ sistem *Dynkin* jadi $\delta(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}_G$ untuk setiap $G \in \mathcal{G}$. Akibatnya, jika $D \in \delta(\mathcal{G})$, $G \in \mathcal{G}$ didapatkan $\delta(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}_G$ dan definisi paling tepat dari $\mathcal{D}_G$ yaitu:

$$G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \qquad \forall\, G \in \mathcal{G}, \qquad \forall D \in \delta(\mathcal{G})$$

jadi $\quad \mathcal{G} \subset \mathcal{D}_D \qquad \forall D \in \delta(\mathcal{G})$

dan $\quad \delta(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}_D \qquad \forall D \in \delta(\mathcal{G})$.

Ini hanya untuk mengatakan bahwa $\delta(\mathcal{G})$ adalah irisan stabil yang berhingga ($\cap$-stabil) dengan $D \in \delta(\mathcal{G})$. Menurut lema 3.1 $\delta(\mathcal{G})$ adalah σ-aljabar.

Contoh:

Diberikan himpunan $\mathcal{G} = \{b, c\}$ dan himpunan kuasa $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ dengan himpunan semesta $X =$

$\{a,b,c\}$ diketahui $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$, jika keluarga yang memuat $\mathcal{G}$ adalah irisan stabil yang terbatas maka ada keluarga $\sigma(\mathcal{G})$ dan $\delta(\mathcal{G})$ yang memuat $\mathcal{G}$ adalah keluarga yang sama $\left(\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})\right)$.

Bukti:

Sistem *Dynkin* yang memuat $\mathcal{G} = \{b,c\}$, sesuai definisi aksioma pertama harus memuat X dan $\emptyset$, sehingga $X, \emptyset \in \sigma(\mathcal{G})$ dan $X, \emptyset \in \delta(\mathcal{G})$. Aksioma kedua yaitu untuk $\mathcal{G} = \{b,c\} \in \sigma(\mathcal{G})$ dan $\mathcal{G} = \{b,c\} \in \delta(\mathcal{G})$ maka $\mathcal{G}^C = \{a\} \in \sigma(\mathcal{G}), \delta(\mathcal{G})$. Untuk aksioma ketiga karena $\mathcal{G}$ dan $\mathcal{G}^C$ adalah himpunan yang saling maka secara otomatis aksioma ketiga berlaku. Jadi terbukti bahwasannya $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$.

3.5 Keunikan Ukuran

Pada definisi 2.8.4 telah dijelaskan definisi ukuran umum, setelah ditemukannya sistem *Dynkin* maka didapatkan teorema keunikan pada ukuran, yang akan dijelaskan pada teorema di bawah.

Teorema 3.2 *Misalkan* $(X, \mathcal{A})$ *ruang terukur dan ruang ukuran* $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$ *diperumum oleh keluarga* $\mathcal{G}$ *sehingga:*

1. $\mathcal{G}$ *irisan stabil yang berhingga* ($\bigcap$*-stabil*): $G, H \in \mathcal{G} \to G \cap H \in \mathcal{G}$;
2. *terdapat urutan jenuh* $\left(G_j\right)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ *dengan* $G_j \uparrow X$.

Setiap dua ukuran μ, v *yang bersama* $\mathcal{G}$ *dan berhingga untuk semua anggota dari urutan jenuh* $\mu\left(G_j\right) = v\left(G_j\right) < \infty$, *adalah sama pada* $\mathcal{A}$, $\mu(A) = v(A)$ *untuk setiap* $A \in \mathcal{A}$.

Bukti:

Untuk $j \in \mathbb{N}$ didefinisikan

$$\mathcal{D}_j = \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_j \cap A) = \nu(G_j \cap A)(< \infty!)\}$$

dan dinyatakan untuk $\mathcal{D}_j$ adalah sistem *Dynkin* untuk setiap j. Untuk membuktikannya harus memenuhi 3 aksioma sistem *Dynkin*,adapun aksioma 1 sudah jelas terbukti yaitu $X \in \mathcal{D}_j$. Untuk definisi *Dynkin* aksioma 2: jika $A \in \mathcal{D}_j$ didapatkan

$$\begin{aligned}\mu(G_j \cap A^C) = \mu(G_j \setminus A) &= \mu(G_j) - \mu(G_j \cap A)\\ &= \nu(G_j) - \nu(G_j \cap A)\\ &= \nu(G_j \setminus A) = \nu(G_j \cap A^C)\end{aligned}$$

Sedemikian sehingga $A^C \in \mathcal{D}_j$, jadi aksioma ke-2 sistem *Dynkin* terbukti. Untuk definisi sistem *Dynkin* aksioma 3: jika $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}_j$ adalah himpunan yang saling beririsan. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\mu\left(G_j \cap \textstyle\biguplus_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) &= \mu\left(\textstyle\biguplus_{k \in \mathbb{N}} (G_j \cap A_k)\right) = \textstyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(G_j \cap A_k)\\ &= \textstyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(G_j \cap A_k) = \nu\left(\textstyle\biguplus_{k \in \mathbb{N}} (G_j \cap A_k)\right) = \nu\left(G_j \cap \textstyle\biguplus_{k \in \mathbb{N}} A_k\right),\end{aligned}$$

dan didapatkan $\biguplus_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}_j$. Aksioma ke-3 sistem *Dynkin* terbukti.

Karena $\mathcal{G}$ adalah $\cap$-stabil, diketahui dari teorema 3.1 bahwa $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$; karena itu,

$$\mathcal{D}_j \supset \mathcal{G} \to \mathcal{D}_j \supset \delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}) \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Disisi lain ,$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}_j \subset \mathcal{A}$, yang berarti bahwa $\mathcal{A} = \mathcal{D}_j$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$,

$$\mu(G_j \cap A) = \nu(G_j \cap A) \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \qquad A \in \mathcal{A}.$$

dapat menggunakan $j \to \infty$ dipersamaan di atas untuk mendapatkan

$$\mu(A) = \lim_{j \to \infty} \mu(G_j \cap A) = \lim_{j \to \infty} \nu(G_j \cap A) = \nu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

3.6 Analogi Sistem *Dynkin* Berdasarkan Kedudukan Hadits sebagai Dasar Hukum Islam

Seluruh umat Islam telah sepakat bahwa Hadits Rasul merupakan sumber hukum Islam setelah Al-Qur'an dan umat Islam diwajibkan mengikuti Hadits sebagaimana diwajibkan mengikuti Al-Qur'an.

Al-Qur'an dan Hadits merupakan dua sumber hukum syariat Islam yang tetap, yang orang Islam tidak mungkin memahami syariah secara mendalam dan lengkap dengan tanpa kembali kepada kedua sumber Islam tersebut. Seorang mujtahid dan seorang alimpun tidak diperbolehkan hanya mencukupkan diri dengan salah satu dari keduanya bahwa Hadits

Banyak ayat Al-Qur'an dan Hadits yang memberikan pengertian tentang kewajiban mempercayai dan menerima segala yang disampaikan Rasul kepada umatnya untuk dijadikan pedoman hidup. Di antara ayat-ayat dimaksud adalah:

Firman Allah SWT:

مَّا كَانَ ٱللَّهُ لِيَذَرَ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ عَلَىٰ مَآ أَنتُمۡ عَلَيۡهِ حَتَّىٰ يَمِيزَ ٱلۡخَبِيثَ مِنَ ٱلطَّيِّبِۗ وَمَا كَانَ ٱللَّهُ
لِيُطۡلِعَكُمۡ عَلَى ٱلۡغَيۡبِ وَلَٰكِنَّ ٱللَّهَ يَجۡتَبِي مِن رُّسُلِهِۦ مَن يَشَآءُۖ فَـَٔامِنُواْ بِٱللَّهِ وَرُسُلِهِۦۚ وَإِن تُؤۡمِنُواْ
وَتَتَّقُواْ فَلَكُمۡ أَجۡرٌ عَظِيمٞ ١٧٩

Artinya : *"Allah sekali-kali tidak akan membiarkan orang-orang yang beriman dalam keadaan kamu sekarang ini, sehingga dia menyisihkan yang buruk (munafik) dari yang baik (mukmin). dan Allah sekali-kali tidak akan memperlihatkan kepada kamu hal-hal yang ghaib, akan tetapi Allah memilih siapa yang dikehendaki-Nya di antara rasul-rasul-Nya[255]. Karena itu berimanlah kepada Allah dan rasul-rasulNya; dan jika kamu beriman dan bertakwa, Maka bagimu pahala yang besar"* (QS. Ali Imran:179).

Dalam ayat lain Allah SWT berfirman:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ ءَامِنُوا۟ بِٱللَّهِ وَرَسُولِهِۦ وَٱلْكِتَـٰبِ ٱلَّذِى نَزَّلَ عَلَىٰ رَسُولِهِۦ وَٱلْكِتَـٰبِ ٱلَّذِىٓ
أَنزَلَ مِن قَبْلُ ۚ وَمَن يَكْفُرْ بِٱللَّهِ وَمَلَـٰٓئِكَتِهِۦ وَكُتُبِهِۦ وَرُسُلِهِۦ وَٱلْيَوْمِ ٱلْـَٔاخِرِ فَقَدْ ضَلَّ ضَلَـٰلًۢا
بَعِيدًا ﴿١٣٦﴾

Artinya : *" Wahai orang-orang yang beriman, tetaplah beriman kepada Allah dan rasul-Nya dan kepada Kitab yang Allah turunkan kepada rasul-Nya serta Kitab yang Allah turunkan sebelumnya. barangsiapa yang kafir kepada Allah, malaikat-malaikat-Nya, kitab-kitab-Nya, rasul-rasul-Nya, dan hari Kemudian, Maka Sesungguhnya orang itu Telah sesat sejauh-jauhnya"* (QS. An-Nisa': 136).

Dalam QS. Ali Imran di atas, Allah memisahkan antara orang-orang mukmin dengan orang-orang munafik dan akan memperbaiki keadaan orang-orang mukmin dan memperkuat iman mereka. Oleh karena itulah orang mukmin dituntut agar tetap beriman kepada Allah, Rosul-Nya (Muhammad SAW), Al-Qur'an dan kitab yang diturunkan sebelumnya. Kemudian pada akhir ayat, Allah mengancam orang-orang yang mengingkari seruan-Nya.

Selain Allah memerintahkan umat Islam agar percaya kepada Rasul SAW, juga menyerukan agar menaati segala bentuk perundang-undangan dan peraturan yang dibawanya, baik berupa perintah maupun larangan. Tuntutan taat dan patuh kepada Rasul SAW itu sama halnya tuntutan taat dan patuh kepada Allah SWT. Banyak ayat Al-Qur'an yang berkenaan dengan masalah ini.

Firman Allah SWT:

قُلْ أَطِيعُوا۟ ٱللَّهَ وَٱلرَّسُولَ ۖ فَإِن تَوَلَّوْا۟ فَإِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ ٱلْكَـٰفِرِينَ ﴿٣٢﴾

Artinya : *'Katakanlah: "Ta'atilah Allah dan Rasul-Nya; jika kamu berpaling, Maka Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang kafir"* (QS. Ali Imran: 32).

Dalam firman-Nya yang lain:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ أَطِيعُواْ ٱللَّهَ وَأَطِيعُواْ ٱلرَّسُولَ وَأُوْلِي ٱلۡأَمۡرِ مِنكُمۡۖ فَإِن تَنَـٰزَعۡتُمۡ فِي شَيۡءٖ فَرُدُّوهُ
إِلَى ٱللَّهِ وَٱلرَّسُولِ إِن كُنتُمۡ تُؤۡمِنُونَ بِٱللَّهِ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِۚ ذَٰلِكَ خَيۡرٞ وَأَحۡسَنُ تَأۡوِيلًا ٥٩

Artinya : *"Hai orang-orang yang beriman, taatilah Allah dan taatilah Rasul (nya), dan ulil amri di antara kamu. Kemudian jika kamu berlainan pendapat tentang sesuatu, Maka kembalikanlah ia kepada Allah (Al Quran) dan Rasul (sunnahnya), jika kamu benar-benar beriman kepada Allah dan hari kemudian. yang demikian itu lebih utama (bagimu) dan lebih baik akibatnya"* (An-Nisa': 59).

Kemudian dalam ayat lain, Allah juga berfirman:

وَمَآ ءَاتَىٰكُمُ ٱلرَّسُولُ فَخُذُوهُ وَمَا نَهَىٰكُمۡ عَنۡهُ فَٱنتَهُواْۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَۖ إِنَّ ٱللَّهَ شَدِيدُ ٱلۡعِقَابِ ٧

Artinya : *"apa yang diberikan Rasul kepadamu, Maka terimalah. dan apa yang dilarangnya bagimu, Maka tinggalkanlah. dan bertakwalah kepada Allah. Sesungguhnya Allah amat keras hukumannya"* (QS. Al-Hasyr: 7).

Masih banyak lagi ayat-ayat Al-Qur'an sejenis yang menjelaskan permasalahan ini. peneliti mencantumkan beberapa ayat di atas di maksudkan hanya sebagai contoh dan gambaran dari beberapa ayat yang banyak dimuat Al-Qur'an.

Dari beberapa ayat Al-Qur'an di atas penulis berpendapat bahwa tergambar bahwa setiap ada perintah taat kepada Allah dalam Al-Qur'an selalu diiringi dengan perintah taat kepada Rasul-Nya (Hadits). Demikian pula mengenai perintah (ancaman) karena durhaka kepada Allah, sering disejajarkan dengan ancaman karena durhaka kepada Rasul (Hadits).

Dalam salah satu pesan rasulullah SAW berkenaan dengan keharusan menjadikan Hadits sebagai pedoman hidup, disamping Al-Qur'an sebagai pedoman utamanya, beliau bersabda yang artinya:

Artinya : *"Aku tinggalkan dua pusaka untukmu sekalian, yang kalian tidak akan tersesat selagi kamu berpegang teguh pada keduanya, yaitu berupa kitab Allah dan Sunnah Rasul-Nya". (HR. Malik).*

Hadits tersebut menunjukkan bahwa berpegang teguh kepada Hadits atau menjadikan Hadits sebagai pegangan dan pedoman hidup itu adalah wajib, sebagaimana wajibnya berpegang teguh kepada Al-Qur'an, karena Hadits berfungsi sebagai penjelas dari Al-Qur'an.

Oleh karena itu, fungsi Hadits Rasul SAW sebagai penjelas (*bayan*) dari Al-Qur'an itu bermacam-macam. Imam Malik bin Anas menyebutkan lima macam begitu pula dengan Imam Syafi'i. Namun karena penulis berpendapat bahwa dari kelima fungsi hanya ada 2 fungsi yang ada hubungan dengan penitian ini yaitu *bayan at-taqrir* dan *bayan at-tasyri*. Suatu contoh Hadits sebagai yang menjadi *bayan at-taqrir* yaitu Hadits yang diriwayatkan oleh Muslim dari Ibnu Umar, yang artinya sebagai berikut:

Artinya : *"Apabila melihat (ru'yah) bulan, maka berpuasalah, juga apabila melihat (ru'yah) itu maka berbukalah". (HR. Muslim).*

Hadits ini men-*taqrir* ayat Al-Qur'an di bawah ini:

فَمَن شَهِدَ مِنكُمُ ٱلشَّهۡرَ فَلۡيَصُمۡهُۖ

Artinya : *barangsiapa di antara kamu hadir (di negeri tempat tinggalnya) di bulan itu, Maka hendaklah ia berpuasa pada bulan itu* ...(QS. Al-Baqarah: 185).

Dalam teori ukuran, sistem *Dynkin* memperkuat teorema yang ada pada σ-aljabar yaitu "Diberikan sistem himpunan $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$, terdapat σ-aljabar terkecil yang memuat $\mathcal{G}$. ini adalah σ-Aljabar yang diperumum oleh $\mathcal{G}$, dinotasikan dengan $\sigma(\mathcal{G})$", jika teorema ini terjadi pada himpunan-himpunan yang saling asing maka ditemukan teorema sistem *Dynkin* terkecil yaitu "Diberikan sistem himpunan $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$, terdapat sistem Dynkin terkecil $\delta(\mathcal{G})$ yang memuat $\mathcal{G}$. Sehingga $\delta(\mathcal{G})$ dikatakan sistem *Dynkin* yang diperumum oleh $\mathcal{G}$ dan juga $\mathcal{G} \subset \delta(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$."

Adapun contoh Hadits Rasul SAW yang termasuk dalam *bayan at-tasyri* diantaranya Hadits tentang penetapan haramnya mengumpulkan dua wanita bersaudara (antara istri dan bibinya), hukum syuf'ah, hukum merajam pezina wanita yang masih perawan dan hukum tentang hak waris bagi seorang anak, hadist-Hadits tersebut menjadi *bayan at-tasyri* karena dalam Al-Qur'an hanya membahas pokok-pokok dari hal-hal tersebut.

Sistem *Dynkin* juga bisa dikatakan sebagai *bayan at-tasyri* yaitu membuat hukum-hukum baru (teorema-teorema baru) yang tidak didapati dalam σ-aljabar, seperti halnya teorema keunikan ukuran yang hanya ada pokok-pokoknya pada σ-aljabar. Teorema tersebut yaitu "*Misalkan* $(X,\mathcal{A})$ *ruang terukur dan* $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{G})$ *yang diperumum oleh keluarga* $\mathcal{G}$ *sehingga:*

1. $\mathcal{G}$ *irisan stabil yang terbatas (*$\cap$*-stabil):* $G,H\in\mathcal{G}\rightarrow G\cap H\in\mathcal{G}$;
2. *terdapat urutan jenuh* $\left(G_j\right)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{G}$ *dengan* $G_j\uparrow X$.

Setiap dua ukuran μ,v *yang bersama* $\mathcal{G}$ *dan berhingga untuk semua anggota dari urutan jenuh* $\mu\left(G_j\right)=v\left(G_j\right)<\infty$, *adalah sama pada* $\mathcal{A}$, $\mu(A)=v(A)$ *untuk setiap* $A\in\mathcal{A}$". Dalam σ-aljabar hanya dijelaskan tentang definisi ukuran kemudian dengan adanya sistem *Dynkin* ditemukan teorema keunikan pada ukuran.

Adapun dalam kasus Hadits suatu contoh tentang zakat fitrah yang menjadi *bayan at-tasyri*, yang artinya sebagai berikut:

Artinya : *"bahwasanya Rasul SAW telah mewajibkan zakat fitrah kepada umat Islam pada bulan Ramadhan satu sukat (sha') kurma atau gandum untuk setiap orang, baik merdeka atau hamba, laki-laki atau perempuan Muslim". (HR. Muslim).*

Hadits seperti ini wajib diamalkan, sebagaimana kewajiban mengamalkan Hadits-Hadits yang lainnya. Ibnu Al-Qayyim berkata bahwa Hadits-Hadits Rasul SAW yang berupa tambahan terhadap Al-Qur'an, merupakan kewajiban atau aturan yang harus ditaati, tidak boleh menolak atau mengingkarinya.

Penulis dapat menyimpulkan bahwa Hadits adalah sumber hukum Islam kedua setelah Al-Qur'an sehingga Allah SWT banyak menyebutkan dalam ayat-ayat Al-Qur'an yaitu pentingnya untuk mentaati Hadits sebagaimana mentaati Al-Qur'an. Fungsi Hadits terhadap Al-Qur'an mulai dari penjelas ayat Al-Qur'an sampai membuat amalan baru yang wajib dilaksanakan bagi umat muslim. Barang siapa yang taat pada Al-Qur'an dan Hadits niscaya Allah akan selalu memberi petunjuk dan pahala kepadanya sesuai dengan janji Allah pada surat *Ali Imran* ayat 179 dan An-Nisa' ayat 59.

Orang Islam yang tidak akan bisa memahami dan mendalami syariat tanpa mengerti Al-Qur'an dan Hadits seperti halnya dalam belajar teori ukuran tidak mungkin memahami secara mendalam dan lengkap tanpa mengerti tentang σ-aljabar himpunan dan sistem *Dynkin*.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab III, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Terdapat sistem Dynkin terkecil $\delta(\mathcal{G})$ yang memuat $\mathcal{G}$, dengan himpunan $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$. Sehingga $\delta(\mathcal{G})$ dikatakan sistem *Dynkin* yang diperumum oleh $\mathcal{G}$.
2. Sistem *Dynkin* $\mathcal{D}$ juga temasuk σ-Aljabar jika dan hanya jika $\mathcal{D}$ irisan stabil yang berhingga (⋂-stabil).
3. Jika $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$, irisan stabil yang berhingga (⋂-stabil), maka $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$, dengan $\delta(\mathcal{G})$ dan $\sigma(\mathcal{G})$ adalah Sistem *Dynkin* terkecil yang memuat $\mathcal{G}$.

4.2 Saran

Bagi pembaca yang ingin melanjutkan penelitian ini maka peneliti menyarankan untuk menganalisis ukuran *Lebesgue* pada dimensi-n karena pada penelitian ini belum dianalisa sampai disana.

DAFTAR PUSTAKA

Barra, G.D.. 2003. *Measure Theory and Integration*. Landen: Woodhead Publishing.

Billingsley, P.. 1995. *Probability and Measure*. New York: John Wiley & Sons.

Bogachev. 2007. *Measure Theory*. Berlin: Springer.

Gut, A.. 2005. *Probability: A Graduate Course*. New York: Springer.

Hasbi. 1972. *Sejarah dan Pengantar Ilmu Hadits*. Jakarta: Bulan Bintang.

Munroe, M.E.. 1953. *Introduction To Measure and Integration*. Amerika: Addison Wesley Publishing Company.

Muthmainnah. 2008. *Ukuran Lebesgue pada Bilangan Real. Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Rene, L.S.. 2005. *Measures, Integrals and Martingales*. New York: Cambridge University Press.

Shihab, Q.. 2002. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Silaban, P.. 1995. *Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.

Soetari, E.. 2008. *Ilmu Hadits Kajian dan Dirayah*. Bandung: Mimbar Pustaka.

Williams, D.. 2007. *Probability with Martingales*. Cambridge: University Press.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Farid Ghozi
Nim : 09610017
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Sistem *Dynkin* dan Sifat-Sifatnya
Pembimbing I : Hairur Rahman, S.Pd, M,Si
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	8 Januari 2013	Konsultasi Judul dan Bab I	1.
2.	9 Januari 2013	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	9 Februari 2013	Konsultasi Bab I, Bab II	3.
4.	9 Februari 2013	Konsultasi Kajian Agama	4.
5.	15 Maret 2013	Konsultasi Bab III	5.
6.	4 Juni 2013	Konsultasi Bab III	6.
7.	5 Juni 2013	Konsultasi Bab III	7.
8.	7 Juni 2013	Konsultasi Kajian Agama	8.
9.	7 Juni 2013	Konsultasi Bab III	9.
10.	8 Juni 2013	Konsultasi Bab III dan Bab IV	10.
11.	13 Juni 2013	ACC Kajian Agama	11.
12.	13 Juni 2013	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 13 Juni 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001