

**ANALISIS POLINOM NEWTON GREGORY PADA PENYELESAIAN
NUMERIK MODEL GELOMBANG TALI**

SKRIPSI

Oleh:
DERI ISMAWATI
NIM. 09610011



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**ANALISIS POLINOM NEWTON GREGORY PADA PENYELESAIAN
NUMERIK MODEL GELOMBANG TALI**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
DERI ISMAWATI
NIM. 09610011

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**ANALISIS POLINOM NEWTON GREGORY PADA PENYELESAIAN
NUMERIK MODEL GELOMBANG TALI**

SKRIPSI

Oleh:
DERI ISMAWATI
NIM. 09610011

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 31 Agustus 2013

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Achmad Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**ANALISIS POLINOM NEWTON GREGORY PADA PENYELESAIAN
NUMERIK MODEL GELOMBANG TALI**

SKRIPSI

Oleh:
DERI ISMAWATI
NIM. 09610011

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 10 September 2013

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Anggota Penguji : Achmad Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : DERI ISMAWATI

NIM : 09610011

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Analisis Polinom Newton Gregory pada Penyelesaian Numerik
Model Gelombang Tali

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 31 Agustus 2013

Yang membuat Pernyataan,

Deri Ismawati
NIM. 09610011

MOTTO

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan



PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Penulis persembahkan karya ini untuk:

Ibu Salmi dan Bapak Wasito yang selalu memberi dorongan

dan semangat pada penulis

Kakak tercinta Fitri Yuliana dan Siti Milawati

Adik tersayang Achmad Maitra, Aris Saputra,

serta Nanca Nazriel Pramana

Sahabat-sahabat yang senantiasa memberi dorongan

baik secara moriil maupun materiil

Teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2009

Terimakasih atas do'a, kasih sayang, motivasi untuk terus berkarya, dan

dukungan baik moriil maupun spirituul

KATA PENGANTAR

Syukur *alhamdulillah* ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya sehingga skripsi dengan judul “**Analisis Polinom Newton Gregory pada Penyelesaian Numerik Model Gelombang Tali**” ini dapat terselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan manusia ke jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun doa. Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing matematika yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi serta yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.

6. Drs. Turmudi, M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberi arahan dan bimbingan kepada penulis dalam penulisan skripsi ini.
7. Bapak dan Ibu dosen serta staf Jurusan Matematika maupun Fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.
8. Bapak Wasito, ibu Salmi, saudara-saudara tercinta serta segenap keluarga yang tidak pernah berhenti memberikan doa, kasih sayang, inspirasi dan motivasi secara moriil maupun spirituil serta dukungan kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
9. Semua teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009. Khususnya Kholidah, Alfi S., Rizky A., Ari A., Roudatul K., Amanatul H., Evi M., Tutik R., Siti M., Luluk N., Nur A., Novita I., Eva A., Ifa N., Ani Afidatul, dan Mahatva C. Terima kasih atas semua pengalaman dan motivasinya yang diberikan dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
10. Teman-teman kamar 3 Fatimatuz'zahro tahun 2009 khususnya Lailatul Fitriyah dan Shokifatul Azkiyah.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka semua. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang analisis terapan dan pemodelan. Amin.

Malang, 31 Agustus 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan Penelitian	6
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Teori Getaran (<i>vibration</i>)	9
2.2 Persamaan Diferensial Parsial Gelombang Tali	13
2.3 Analisis Matematis Model Gelombang Tali	17
2.4 Polinom Newton Gregory	24
2.5 Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory	29
2.6 Analisis Kestabilan Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory	37
2.7 Doa dalam Islam	38
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Analisis Polinom Newton Gregory pada Persamaan Gelombang Tali Homogen.....	42
3.2 Analisis Kestabilan Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory pada Persamaan Gelombang Tali Homogen	57
3.3 Analisis Polinom Newton Gregory pada Persamaan Gelombang Tali non Homogen	61
3.4 Analisis Kestabilan Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory pada Persamaan Gelombang Tali non Homogen	74

3.5 Integrasi antara Doa dan Getaran dalam Islam.....	78
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	82
4.2 Saran	84
DAFTAR PUSTAKA	85
LAMPIRAN	



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Gerak Segmen Tali dalam Menghantarkan Gelombang	12
Gambar 2.2 Jaringan Titik Hitungan (<i>grid</i>) pada Bidang $x - t$	30
Gambar 2.3 Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory	36
Gambar 3.1 Stensil Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory untuk Model Gelombang Homogen	45
Gambar 3.2 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $v(x, t)$	53
Gambar 3.3 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $v(x, t)$ pada Jarak $1.5 \leq t \leq 4$	54
Gambar 3.4 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $v(x, t)$ pada Jarak $4 \leq t \leq 8$	55
Gambar 3.5 Grafik Analitik untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $v(x, t)$	56
Gambar 3.6 Stensil Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory untuk Model Gelombang Tali non Homogen	65
Gambar 3.7 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tali non Homogen Persamaan $v(x, t)$	73
Gambar 3.8 Relasi antara Doa dengan Allah dan Sesama Manusia	78

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Galat Error antara Analitik dan Numerik	56
---	----



ABSTRAK

Ismawati, Deri. 2013. **Analisis Polinom Newton Gregory pada Penyelesaian Numerik Model Gelombang Tali**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.

(II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci : diskretisasi, model gelombang, metode beda hingga Newton Gregory skema eksplisit, model kontinu, model diskret

Diskretisasi model merupakan prosedur transformasi model kontinu ke model diskret. Diskretisasi dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga maju (*Forward Finite Difference*), yaitu dengan menganalogikan persamaan diferensial yang menggunakan aturan limit, dengan persamaan beda yang menggunakan beda antar titik waktu diskret. Model yang digunakan dalam skripsi ini adalah model gelombang yang merepresentasikan gelombang tali pada jembatan yang menyebabkan dek bergetar.

Metode beda hingga yang digunakan yaitu metode beda hingga Newton Gregory skema eksplisit, beda maju dan beda pusat untuk waktu dan beda pusat untuk ruang. Dengan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory diperoleh penyelesaian yang dinyatakan dalam bentuk diskret model gelombang homogen dan gelombang non homogen.

Perbandingan antara keduanya adalah pada model gelombang homogen jembatan yang bergetar lebih cepat stabil karena gerakan (atau perpindahan) gaya yang berubah-ubah sepanjang nilai x menyatu atau tetap stabil dengan waktu pada jarak $4 \leq x \leq 8$ dan waktu pada iterasi ke-100. Pada persamaan non homogen getaran yang terjadi pada awal adalah sangat besar kemudian menuju pada kestabilan diantara interval $0,1 \leq x < 0,95$ kemudian disusul dengan getaran kecil dan menuju pada kondisi awal kembali.

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi kestabilan model gelombang tali dengan menggunakan nilai awal, nilai batas dan interval yang berbeda dan bervariasi, agar dapat dilihat kekurangan model diskret yang telah dibangun. Serta mengembangkan model gelombang dengan metode-metode yang bervariasi.

ABSTRACT

Ismawati, Deri. 2013. **Analysis of Newton Gregory Polinomial for Numerical Solution of String Wave Model**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.

(II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Keywords: discretization, model of the wave, finite difference methods Newton Gregory explicit scheme, the model continuous, discrete models

Discretized model is a continuous model transformation procedure to model discrete. Discretization is done using advanced finite difference method (forward finite difference), by analogy differential equations using limit rules, with the difference that using a different equation between discrete time points. The model used in this paper is to present wave models on the bridge causing the bridge to vibrate.

Finite difference method used is the finite difference method of Newton Gregory explicit schemes, different forward and center for the time difference and central difference for the space. With explicit finite difference scheme is obtained settlement Gregory Newton stated in the form of discrete wave model homogeneous and wave non homogeneous.

Comparison between the two models is the homogeneous wave bridge vibrate faster stable because the movement (or displacement) styles have changed over the value of x converge or remain stable with time at a distance of $4 \leq x \leq 8$ and the time in the 100th iteration. In the non-homogeneous equation of vibration that occurs at the beginning is very large then headed to the stability of the interval between $0,1 \leq x < 0,95$ was followed by a small vibration and headed back on the initial conditions.

For the next examine, suggested for the next study is stability string wave model with used initial value, initial conditions, and difference of interval and variation, so that can be see minus of discrete models. And growth model of the wave with the variations method.

ملخص البحث

إسمواتي، ديري. ٢٠١٣. أنلى سيس فلينعمل نيطن غريغري فد فيني ي لسيعن نوميريك مديل غيلمين تلي. الأطروحة. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرف: (١) أري كوسومستوتي السرجان الماجستير
(٢) احمد نصح الدين الماجستير

كلمات البحث: تفريد، نموذج للموجة، محدود الفرق أساليب نيوتن غريغوري مخطط واضح، ونموذج مستمر، ونماذج منفصلة

نموذج Discretized هو نموذج إجراء التحول المستمر لنموذج منفصلة . يتم تفريد باستخدام متقدمة طريقة الفروق المحدودة (الفرق محدود مهاجم)، من خلال المعادلات التفاضلية القياس باستخدام قواعد الحد، مع فارق أن استخدام المعادلة مختلفة بين نقاط زمنية منفصلة . النموذج المستخدم في هذه الأطروحة هو النموذج الذي يمثل موجة من موجة تسبب الحبل على سطح الجسر تهتز. طريقة الفروق المحدودة المتبع هو أسلوب الفرق محدود من نيوتن غريغوري مخططات واضحة، إلى الأمام المختلفة ومركزا لفارق التوقيت والاختلاف المركزي للفضاء . مع يتم الحصول على مخطط واضح الفروق المحددة ذكرت تسوية غريغوري نيوتن في شكل نموذج الموجة منفصلة متجانسة وغير الموجة.

المقارنة بين النموذجين هو الجسر موجة متجانسة يهتز أسرع مستقرة لأن الحركة (أو الإزاحة) تغيرت أنماط أكثر قيمة x تتلاقى أو تظل مستقرة مع الوقت على مسافة $4 \leq x \leq 8$ والوقت في التكرار 100. في المعادلة غير متجانسة من الاهتزاز الذي يحدث في بداية كبيرة جدا ثم اتجهت إلى استقرار الفاصل الزمني بين $0.1 \leq x < 0.95$ وأعقب من قبل اهتزاز صغيرة وتوجهت مرة أخرى على الظروف الأولية.

لمزيد من البحث، فمن المستحسن لمواصلة دراسة استقرار نماذج موجة حبل باستخدام القيم الأولية والقيم والحدود فترات مختلفة ومتنوعة، بحيث يمكن رؤية التي تم بناؤها نماذج منفصلة نقص. ووضع نماذج من موجات مع أساليب مختلفة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan sumber pengetahuan dan inspirasi umat Islam dalam segala hal. Berbagai informasi sains dan teknologi telah terkandung di dalamnya sejak ribuan tahun silam. Salah satunya adalah teknologi getaran yang menginspirasi penulisan skripsi ini, terdapat dalam surat Al-Hajj ayat 35, yang berbunyi:

الَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ اللَّهُ وَجِلَتْ قُلُوبُهُمْ وَالصَّابِرِينَ عَلَىٰ مَا أَصَابَهُمْ وَالْمُقِيمِي الصَّلَاةِ وَمِمَّا رَزَقْنَاهُمْ يُنْفِقُونَ ﴿٣٥﴾

Artinya: “(yaitu) orang-orang yang apabila disebut nama Allah bergetarlah hati mereka, orang-orang yang sabar terhadap apa yang menimpa mereka, orang-orang yang mendirikan sembahyang dan orang-orang yang menafkahkan sebagian dari apa yang telah Kami rizkikan kepada mereka” (QS. Al-Hajj [22]:35).

Ayat ini menjelaskan bahwa keimanan dapat ditafsirkan seperti gelombang. Rasulullah SAW menyebutkan: “kadang *yazid* kadang *yankus* (naik turun)”. Namun orang yang masih ada keimanannya (rasa keberagamaannya) saat waktu kritis pun masih mau mengerjakan shalat (Al-Qurtubi, 2008:149). Agar iman seseorang tidak naik turun maka orang itu harus memperbanyak beramal shaleh, serta menjaga perkataannya (Al-Khalaal, 2013:8). Iman seseorang dikatakan stabil apabila ketika telah melakukan amal shaleh akan tetap bertahan dengan terus-menerus (*istiqomah*) beramal shaleh, begitu pula sebaliknya apabila

ketika telah melakukan amal buruk akan tetap bertahan dengan terus-menerus (istiqomah) beramal buruk. Permasalahan iman merupakan permasalahan terpenting seorang muslim, sebab iman menentukan nasib seseorang di dunia dan akhirat. Bahkan kebaikan dunia dan akhirat bersandar kepada iman yang benar. Dengan iman seseorang akan mendapatkan kehidupan yang baik di dunia dan akhirat serta keselamatan dari segala keburukan dan adzab Allah. Dengan iman seseorang akan mendapatkan pahala besar yang menjadi sebab masuk ke dalam surga dan selamat dari neraka. Lebih dari itu semua, mendapatkan keridhoan Allah yang maha kuasa sehingga Allah tidak akan murka kepadanya dan dapat merasakan kenikmatan melihat wajah Allah di akhirat nanti. Dengan demikian permasalahan ini seharusnya mendapatkan perhatian lebih dari semua orang (Al-Khalaal, 2013:1).

Jika dikaji lebih dalam dan menghubungkan korelasinya dengan teori getaran partikel, maka menurut Rokhman (2011:1) getaran adalah gerakan bolak-balik dalam suatu interval waktu tertentu. Getaran berhubungan dengan gerak osilasi benda dan gaya yang berhubungan dengan gerak tersebut. Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu bergetar, jadi kebanyakan mesin dan struktur rekayasa (*engineering*) mengalami getaran sampai derajat tertentu dan rancangannya biasanya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya. Sedangkan gelombang adalah getaran yang merambat melalui sistem medium, berarti jelas bahwa getaran adalah sebagian kecil dari gelombang. Model dasar gelombang satu dimensi dapat ditulis: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, dimana $c^2 = \frac{T}{\rho}$ dengan parameter percepatan getaran dinyatakan dengan $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, densitas massa tali (massa

persatuan panjang) dinyatakan dengan ρ , tegangan tali dinyatakan dengan T , dan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ adalah kecepatan awal. Dalam hal ini gelombang yang dihasilkan pada tali berasal dari keempat parameter tersebut (Anonim, 2013:20).

Jika seutas tali yang panjangnya L direntang sampai mencapai tegangan maksimum dan kedua ujungnya diikat pada posisi tetap di $x = 0$ dan $x = L$, kemudian digetarkan, maka posisi tali akan menyimpang dari posisi setimbang. Untuk merumuskan persamaan dari getaran tali, digunakan asumsi (1) Massa tali per satuan panjang adalah konstan (“tali homogen”). Tali elastis sempurna dan tidak memberikan perlawanan terhadap pelengkungan (Anonim, 2012:6), (2) Tali elastis sempurna, sehingga tidak ada gaya luar yang mempengaruhi getaran tali (tali bergetar semata-mata karena keelastisannya) (Anonim, 2013:19), (3) Tegangan yang disebabkan oleh peregangan tali itu sebelum pengikatan kedua ujungnya lebih besar dibandingkan dengan gaya gravitasi, sehingga ini dapat diabaikan (Anonim, 2012:6), (4) Tali itu mengalami gerak transversal (melintang) kecil pada suatu bidang vertikal. Artinya setiap partikel tali itu bergerak secara vertikal dengan defleksi (penyimpangan) dan kemiringan di setiap titik tali tetap kecil nilai mutlaknya (Anonim, 2012:6). Pada asumsi kedua gaya luar yang dimaksud adalah angin dan hujan, sedangkan beban yang melewati objek diasumsikan adalah gaya dari dalam.

Menurut Wijayanto dan Susatio (2010:5) model gelombang dikatakan stabil jika gerakan (atau perpindahan) menyatu atau tetap stabil dengan waktu. Di sisi lainnya, jika amplitudo perpindahan meningkat terus menerus (menyimpang) dengan waktu, dikatakan secara dinamis tidak stabil. Gerak yang menyimpang

dan sistem menjadi tidak stabil jika energi dimasukkan ke dalam sistem melalui penambahan tenaga dengan mengalihkan dari keadaan dasarnya ke suatu keadaan dengan tenaga yang lebih tinggi (eksitasi). Untuk melihat keadaan yang menyebabkan ketidakpastian kestabilan tersebut dapat diketahui dengan cara menurunkan persamaan yang menggambarkan model gelombang tali, menyelesaikan solusi dari model gelombang, dan menginterpretasikan hasilnya.

Selanjutnya, ketika masalah gerakan bolak-balik pada tali ini diimplementasikan pada model gelombang pada suatu objek misalnya jembatan, maka penyelesaian model gelombang tali pada jembatan dimaksudkan untuk mengetahui gambaran umum tentang fakta gelombang tali yang terjadi di atas objek. Model ini dapat diselesaikan secara numerik.

Penelitian terdahulu oleh Ohene¹, dkk. (2012:51) menggunakan metode Runge-Kutta untuk menyelesaikan model gelombang pada objek jembatan. Pada penelitian tersebut dibandingkan macam-macam percobaan secara numerik yang dijalankan menggunakan skema SIMULINK. Pada penelitian terdahulu model-model gelombang yang diteliti beberapa nilai konstantanya ditambahkan atau dikurangi agar hasil nonlinieritasnya lebih baik. Untuk membuktikan bahwa model tersebut dapat diaplikasikan dengan baik dan mudah, maka penulis menindaklanjuti penelitian sebelumnya untuk mengembangkan penelitian pada metode lain, yaitu dipilih metode polinom Newton Gregory, namun penulis hanya mengambil satu persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) nonlinier-nya saja yang telah dipotong menjadi persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) linier. Dalam penulisan skripsi ini penulis memilih

menggunakan diskretisasi agar lebih mudah. Kegunaan diskretisasi adalah untuk mereduksi dan menyederhanakan data, sehingga didapatkan data diskret yang lebih mudah dipahami, digunakan dan dijelaskan. Salah satu metode yang dapat memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskret yaitu dengan metode beda hingga skema eksplisit.

Dalam penulisan skripsi ini, akan diteliti solusi numerik dan simulasi yang telah dikerjakan. Dari latar belakang tersebut maka penulis akan mengkaji dan meneliti dengan judul “*Analisis Polinom Newton Gregory pada Penyelesaian Numerik Model Gelombang Tali*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana analisis polinom Newton Gregory pada penyelesaian numerik model gelombang tali pada jembatan beserta kestabilannya?

1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup pembahasan dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Model gelombang diasumsikan di tali pada objek jembatan (Ohene1, dkk., 2012:51).
2. Model yang diasumsikan homogen (mengabaikan faktor luar):

$$m_1 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - b_1 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0$$

dimana pada skripsi ini ditentukan interval gelombang tali $0 < x < 2$ dan $0 < t < 8$ dengan kondisi batas $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = v(0, t) = v(L, t) = 0$

(Zwillinger, 1997:824) dan pada skripsi ini diberikan kondisi awal $v(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$ (Morton & Mayers, 2005:103) dan berbagai kondisi awal.

3. Inti dalam pembahasan ini adalah analisis numerik, simulasi, analisis kestabilan, dan interpretasi hasil numerik.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah dapat menganalisis polinom Newton Gregory pada penyelesaian numerik model gelombang tali pada jembatan serta kestabilannya.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah dapat mengetahui perilaku model gelombang tali pada objek berdasarkan hasil analisis simulasi numerik yang dilakukan.

1.6 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan diterapkan penulis dalam membahas penelitian ini dengan tahapan sebagai berikut:

1. Analisis polinom Newton Gregory untuk persamaan gelombang tali
2. Interpretasi hasil solusi numerik
3. Analisis kestabilan menggunakan bilangan Courant
4. Membandingkan antara analisis polinom Newton Gregory untuk persamaan gelombang tali homogen dan non homogen

1.7 Sistematika Penulisan

Skripsi ini menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan tentang teori getaran (*vibration*), persamaan diferensial parsial gelombang tali, analisis matematis model gelombang tali, polinom Newton Gregory, skema eksplisit beda hingga Newton Gregory, analisis kestabilan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory, dan doa dalam islam.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang pembahasan analisis polinom Newton Gregory pada persamaan gelombang tali homogen, analisis kestabilan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory pada persamaan gelombang tali homogen, analisis polinom Newton Gregory pada persamaan gelombang tali non homogen, analisis kestabilan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory pada persamaan gelombang tali non homogen dan integrasi antara doa dan getaran dalam islam.

Bab VI Penutup

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penulisan yang telah dibahas dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penulisan ini.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Getaran (*vibration*)

Bila suatu sistem dinamik ditambahkan tenaga dengan mengalihkan dari keadaan dasarnya ke suatu keadaan dengan tenaga yang lebih tinggi (eksitasi) oleh tambahan tenaga dengan mengalihkan dari keadaan dasarnya ke suatu keadaan dengan tenaga yang lebih tinggi (eksitasi) non periodik $F(t)$ yang tiba-tiba, maka respon terhadap eksitasi ini disebut respon transien karena biasanya osilasi keadaan tidak diproduksi. Osilasi ini terjadi pada frekuensi natural sistem dengan amplitudo yang berubah (Thomson, 1986:93).

Definisi 1

Menurut Rokhman (2011:1) getaran (*vibration*) adalah gerakan bolak-balik (berulang-ulang) dalam suatu interval waktu tertentu. Getaran berhubungan dengan gerak osilasi benda dan gaya yang berhubungan dengan gerak tersebut. Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu bergetar, jadi kebanyakan mesin dan struktur rekayasa (*engineering*) mengalami getaran sampai derajat tertentu dan rancangannya biasanya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya.

Berdasarkan definisi 1 di atas maka getaran dapat dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Getaran bebas terjadi jika sistem berosilasi karena bekerjanya gaya yang ada dalam sistem itu sendiri (*inherent*), dan jika ada gaya luar yang bekerja. Sistem

yang bergetar bebas akan bergerak pada satu atau lebih frekuensi naturalnya, yang merupakan sifat sistem dinamika yang dibentuk oleh distribusi massa dan kekuatannya. Semua sistem yang memiliki massa dan elastisitas dapat mengalami getaran bebas atau getaran yang terjadi tanpa rangsangan luar (Thomson, 1986:27).

2. Getaran paksa adalah getaran yang terjadi karena rangsangan gaya luar, jika rangsangan tersebut beresilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan (Thomson, 1986:93). Menurut Rokhman (2011:1) jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem, maka akan didapat keadaan resonansi dan osilasi besar yang berbahaya mungkin terjadi. Kerusakan pada struktur besar seperti jembatan, gedung ataupun sayap pesawat terbang, merupakan kejadian menakutkan yang disebabkan oleh resonansi. Jadi perhitungan frekuensi natural merupakan hal yang utama.

Teori getaran pada skripsi ini berpusat pada getaran bebas karena getaran yang terjadi pada objek ada karena sistem yang bergetar bebas akan bergerak pada satu atau lebih frekuensi naturalnya.

Persamaan gelombang di tali satu dimensi dapat ditulis (Anonim, 2012:20):

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

dimana $c^2 = \frac{T}{\rho}$, dengan parameter: u adalah perpindahan getaran pada tali, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

adalah percepatan getaran, ρ adalah densitas massa tali (massa persatuan panjang),

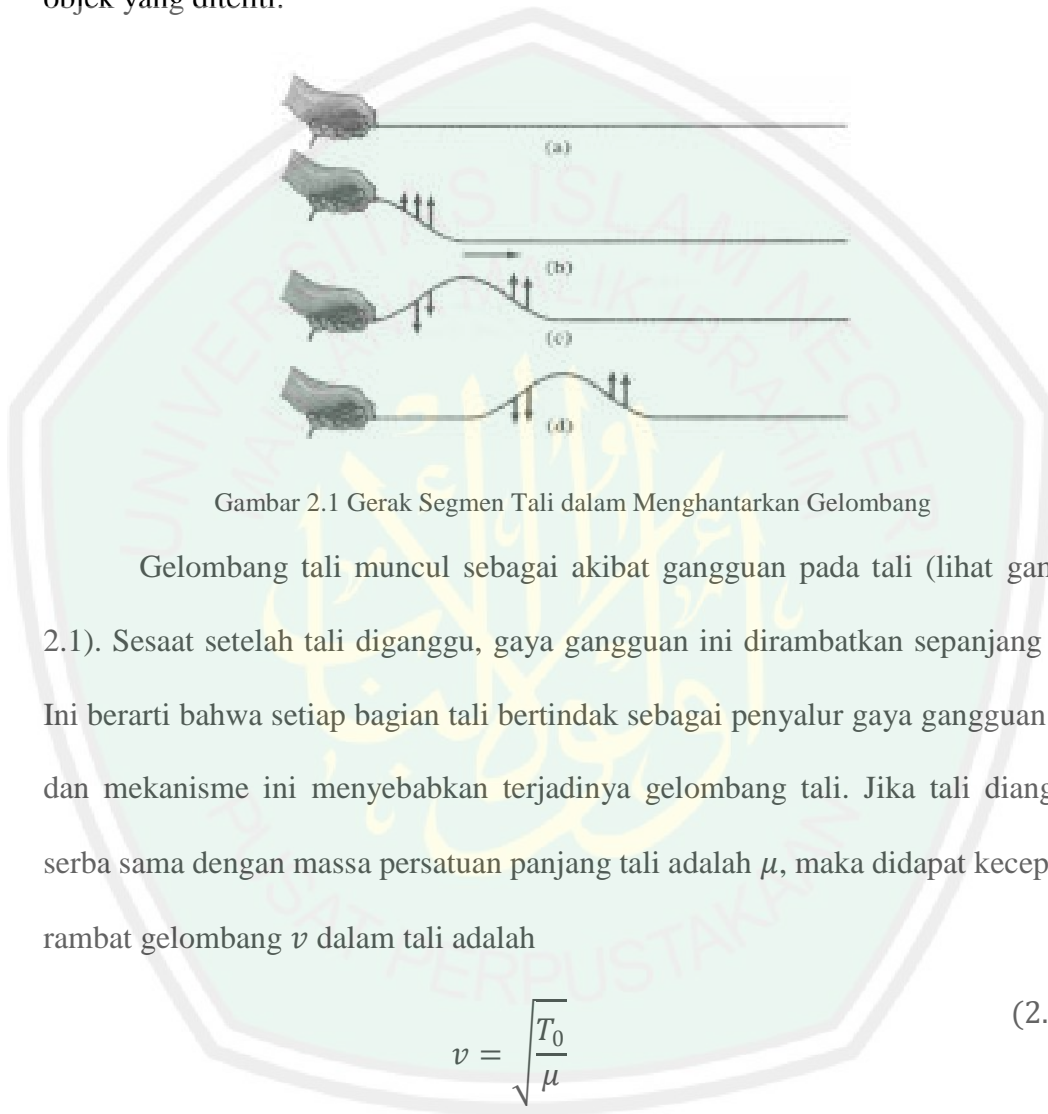
dan T adalah tegangan tali, dan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ adalah kecepatan awal.

Jika seutas tali yang panjangnya L direntang sampai mencapai tegangan maksimum dan kedua ujungnya diikat pada posisi tetap di $x = 0$ dan $x = L$, kemudian digetarkan, maka posisi tali akan menyimpang dari posisi setimbang. Untuk merumuskan persamaan dari gelombang tali, digunakan asumsi:

- (1) Massa tali per satuan panjang adalah konstan (“tali homogen”). Tali elastis sempurna dan tidak memberikan perlawanan terhadap pelengkungan (Anonim, 2012:6),
- (2) Tali elastis sempurna, sehingga tidak ada gaya luar yang mempengaruhi getaran tali (tali bergetar semata-mata karena keelastisannya) (Anonim, 2013:19),
- (3) Tegangan yang disebabkan oleh peregangan tali itu sebelum pengikatan kedua ujungnya lebih besar dibandingkan dengan gaya gravitasi, sehingga ini dapat diabaikan (Anonim, 2012:6),
- (4) Tali itu mengalami gerak transversal (melintang) kecil pada suatu bidang vertikal. Artinya setiap partikel tali itu bergerak secara vertikal dengan defleksi (penyimpangan) dan kemiringan di setiap titik tali tetap kecil nilai mutlaknya (Anonim, 2012:6).

Asumsi-asumsi itu sedemikian rupa sehingga dapat diperoleh bahwa solusi $u(x, t)$ bagi persamaan diferensial yang diperoleh dapat menerangkan dengan cukup baik vibrasi kecil tali ”non ideal” yang bermassa kecil dan homogen yang mengalami tegangan besar. Berdasarkan asumsi pertama sampai asumsi ketiga diketahui bahwa tegangan yang terjadi pada objek sangat mempengaruhi getaran yang terjadi. Sehingga pada asumsi kedua gaya luar yang

dimaksud adalah angin dan hujan, sedangkan beban yang melewati objek diasumsikan adalah gaya dari dalam. Keempat asumsi pada tali berlaku juga pada objek yang diteliti.



Gambar 2.1 Gerak Segmen Tali dalam Menghantarkan Gelombang

Gelombang tali muncul sebagai akibat gangguan pada tali (lihat gambar 2.1). Sesaat setelah tali diganggu, gaya gangguan ini dirambatkan sepanjang tali. Ini berarti bahwa setiap bagian tali bertindak sebagai penyalur gaya gangguan tadi, dan mekanisme ini menyebabkan terjadinya gelombang tali. Jika tali dianggap serba sama dengan massa persatuan panjang tali adalah μ , maka didapat kecepatan rambat gelombang v dalam tali adalah

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (2.1.2)$$

dengan T_0 adalah tegangan nilai (N), dan μ adalah rapat massa/massa per satuan panjang (kg/m) (Crayonpedia, 2009:8).

Berdasarkan persamaan (2.1.2) maka dapat disimpulkan macam-macam gelombang berdasarkan kecepatan rambatnya adalah:

1. Gelombang ekstrim terjadi pada tali yang semakin kecil massa persatuan

panjangnya jika tali diberi tegangan yang semakin besar, maka gelombang akan merambat dengan kecepatan rambat yang semakin besar pula.

2. Gelombang normal terjadi pada tali yang memiliki massa persatuan panjang sama dengan tegangan yang terjadi pada tali, maka gelombang akan merambat dengan kecepatan rambat yang seimbang atau normal.
3. Gelombang lemah terjadi pada tali yang semakin besar massa persatuan panjangnya jika tali diberi tegangan yang semakin kecil, maka gelombang akan merambat dengan kecepatan rambat yang semakin kecil pula.

2.2 Persamaan Diferensial Parsial Gelombang Tali

Suatu persamaan yang di dalamnya terdapat turunan parsial dan terdapat dua atau lebih variabel bebas maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) (Ayres, 1992:1).

Misalkan u adalah fungsi dua peubah x dan y . Turunan parsial u terhadap x di (x_0, y_0) dan ditulis sebagai $u_x(x_0, y_0)$ adalah sebagai berikut

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2.2.1)$$

Demikian pula turunan parsial u terhadap y di (x_0, y_0) dan ditulis sebagai $u_y(x_0, y_0)$ adalah sebagai berikut

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2.2.2)$$

(Purcell & Varberg, 1987:251)

Tingkat (orde) dari persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan yang muncul pada persamaan tersebut (Ayres, 1992:1).

Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier orde 2 dengan 2 variabel bebas adalah:

$$Af_{xx} + Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y + Ff = G \quad (2.2.3)$$

dimana A, B, C, D, E dan F adalah fungsi dari x dan y . Didefinisikan turunan parsialnya sebagai berikut:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.2.4)$$

(Djojodihardjo, 2000:304)

Menurut Sasongko (2010:143) maka dapat dinyatakan kondisi-kondisi sebagai berikut:

1. Apabila koefisien A, B, C, D, E, F, G pada persamaan (2.2.3) adalah konstanta atau fungsi yang terdiri dari variabel bebas saja, maka persamaan tersebut disebut linier. Misalnya $m_1 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - b_1 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0$ dengan m_1, T , dan b_1 adalah konstanta maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial linier.
2. Apabila koefisien A, B, C, D, E, F, G pada persamaan (2.2.3) adalah fungsi dari variabel tak bebas ($f(u)$) dan atau merupakan turunan dengan orde yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$, maka persamaan tersebut disebut kuasilinear. Misalnya $m_1(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + T(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + b_1(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0$ dengan m_1, T , dan b_1 adalah fungsi dari variabel tak bebas ($f(x, t, v)$) dan atau merupakan turunan dengan orde

yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)$, maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear.

3. Apabila koefisien A, B, C, D, F, G merupakan fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)$, maka persamaan tersebut disebut persamaan nonlinier. Misalnya
- $$m_1(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + T(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + b_1(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = k(u - v)^+ + W_1(x) + \varepsilon f_1(x, t)$$
- dengan m_1, T , dan b_1 adalah fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)$, maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier.

Persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas,

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial t} + fu + g = 0 \quad (2.2.5)$$

dengan a, b, c, d, e, f dan g yang merupakan fungsi dari variabel x, t , dan u .

Dapat diklasifikasikan dalam tiga bentuk yaitu eliptik, parabolik, dan hiperbolik.

Tiga bentuk tersebut didapatkan berdasarkan kriteria sebagai berikut (Duffy, 2006:15):

- (i). Bentuk eliptik jika $b^2 - 4ac < 0$.

Contohnya pandang persamaan gelombang yang berbentuk $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} +$

$2\lambda \frac{\partial v}{\partial t} = 0$, mudah untuk memeriksanya dalam contoh kasus ini, dengan

koefisien $a = \gamma, c = 1, b = d = 0, e = 2\lambda, f = 1$, sehingga jika

dimasukkan ke dalam rumus $b^2 - 4ac > 0$ menjadi $4\gamma < 0$. Sehingga

terbukti bahwa persamaan gelombang tersebut adalah persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) bentuk eliptik.

(ii). Bentuk parabolik jika $b^2 - 4ac = 0$.

Contohnya pandang persamaan gelombang yang berbentuk $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ mudah untuk memeriksanya dalam contoh kasus ini, dengan koefisien $a = 0, b = 0, c = 1, d = f = 0, e = \lambda$, sehingga jika dimasukkan ke dalam rumus $b^2 - 4ac = 0$ menjadi $0^2 - 4 \times 0 \times 1 = 0$. Sehingga terbukti bahwa persamaan gelombang tersebut adalah persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) bentuk parabolik.

(iii). Bentuk hiperbolik jika $b^2 - 4ac > 0$.

Contohnya pandang persamaan (2.1.1) mudah untuk memeriksanya dalam contoh kasus ini dengan koefisien $a = 1, c = -c^2, b = d = e = f = 0$, sehingga jika dimasukkan ke dalam rumus $b^2 - 4ac > 0$ menjadi $4c^2 > 0$. Sehingga terbukti bahwa persamaan (2.1.1) adalah persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) bentuk hiperbolik.

Solusi persamaan gelombang tali adalah fungsi $v(x, t)$ yang memenuhi persamaan (2.3.1). Solusi tersebut merupakan solusi umum, sehingga diperlukan substitusi kondisi batas dan kondisi awal agar didapatkan solusi khusus. Untuk interval $0 \leq t \leq 8$ dan $0 \leq x \leq 2$. Nilai batas $v(0, t) = 0$, dan $v(2, t) = 0$ untuk semua t . Kondisi awal yang digunakan untuk model gelombang (*wave*) adalah $L(t)$ yang dirumuskan sebagai berikut:

$$v(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2] \quad (\text{Morton \& Mayers, 2005:103}) \quad (2.2.6)$$

Persamaan (2.2.6) akan digunakan untuk membuat iterasi numerik pada bab 3.

2.3 Analisis Matematis Model Gelombang Tali

Pada model ini diasumsikan efek gesekan dan gaya-gaya dari luar diabaikan. Asal usul model gelombang satu dimensi adalah (Ohene1, dkk., 2012:51)

$$m_1 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - b_1 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.3.1)$$

dimana m_1 adalah massa dari tiap kabel utama, T adalah tegangan dalam kabel utama, b_1 adalah koefisien redaman dari tiap kabel utama.

Penelitian terdahulu oleh Ohene1, dkk. (2012:51) model gelombang menggunakan dua pendekatan yang berbeda, yang pertama didasarkan pada Teorema Banach kontraksi yang membutuhkan beberapa pembatasan pada parameter tali. Pendekatan kedua bekerja secara umum relatif lebih besar namun dengan asumsi tambahan kekuatan eksternal yang cukup kecil.

Persamaan (2.3.1) yang merupakan persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) orde dua. Analisis model persamaan gelombang dapat diturunkan dengan menggunakan Brownian motion backward Kolmogorov atau Fokker Planch, dengan kondisi batasnya yaitu $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = v(0, t) = v(L, t) = 0$ (Zwillinger, 1997:824) dan kondisi awalnya $v(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$ (Morton & Mayers, 2005:103).

Dari batas-batas yang sudah ditentukan menggunakan Brownian motion backward Kolmogorov atau Fokker Planch menurut Zauderer (2006:2-5), untuk menyelesaikan persamaan (2.3.1) digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Ekspektasi menyatakan lokasi perpindahan partikel dan dinotasikan dalam bentuk

$$E(x) = \langle x \rangle = 0$$

2. Varian menyatakan besar perpindahan partikel dan dinotasikan dalam bentuk

$$V(x) = \frac{\gamma^2}{\lambda}$$

3. Peluang partikel bergerak dari kiri

$$\alpha(x, t)$$

4. Peluang partikel bergerak dari kanan

$$\beta(x, t)$$

5. Didefinisikan bahwa keadaan peluang partikel pada x waktu ke $t + \tau$ sama dengan peluang pada titik $x - \delta$ pada waktu t yang ke sekian dengan peluang p perpindahan dari kanan ditunjukkan dengan langkah tambahan peluang partikel pada titik $x + \delta$ pada waktu t yang ke sekian dengan peluang q perpindahan dari kiri ditunjukkan dengan langkah, yaitu dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x, t + \tau) = p\alpha(x - \delta, t) + q\beta(x + \delta, t) \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(x, t + \tau) = p\beta(x - \delta, t) + q\alpha(x + \delta, t) \end{array} \right. \quad (2.3.3)$$

Dengan menggunakan deret Taylor maka persamaan (2.3.2) dan (2.3.3) dapat diekspansikan sebagai berikut

Untuk $\alpha(x, t + \tau)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\alpha(x, t + \tau) = \alpha(x, t) + \tau\alpha_t(x, t) \quad (2.3.4)$$

Untuk $\alpha(x - \delta, t)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\alpha(x - \delta, t) = \alpha(x, t) - \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \quad (2.3.5)$$

Untuk $\alpha(x + \delta, t)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\alpha(x + \delta, t) = \alpha(x, t) + \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \quad (2.3.6)$$

Untuk $\beta(x, t + \tau)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\beta(x, t + \tau) = \beta(x, t) + \tau\beta_t(x, t) \quad (2.3.7)$$

Untuk $\beta(x - \delta, t)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\beta(x - \delta, t) = \beta(x, t) - \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \quad (2.3.8)$$

Untuk $\beta(x + \delta, t)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\beta(x + \delta, t) = \beta(x, t) + \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \quad (2.3.9)$$

Substitusikan hasil ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.3.4) sampai (2.3.5)

ke persamaan (2.3.2), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha(x, t) + \tau\alpha_t(x, t) = & p \left[\alpha(x, t) - \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \right] \\ & + q \left[\beta(x, t) - \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \right] \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Lalu $\alpha(x, t)$ dipindah ruas ke kiri, maka menjadi:

$$\begin{aligned} \tau\alpha_t(x, t) = & -\alpha(x, t) + p\alpha(x, t) + q\beta(x, t) - p\delta\alpha_x(x, t) \\ & -q\delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2[p\alpha_{xx}(x, t) + q\beta_{xx}(x, t)] \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Jika suku $\frac{1}{2}\delta^2[p\alpha_{xx}(x,t) + q\beta_{xx}(x,t)]$ pada ekspansi deret Taylor persamaan (2.3.11) ini diabaikan, maka dapat dinyatakan:

$$\tau\alpha_t(x,t) = -\alpha(x,t) + p\alpha(x,t) + q\beta(x,t) - p\delta\alpha_x(x,t) - q\delta\beta_x(x,t) \quad (2.3.12)$$

lalu persamaan tersebut dapat dibagi τ , sehingga menjadi:

$$\alpha_t(x,t) = -\frac{\alpha}{\tau}(x,t) + \frac{p}{\tau}\alpha(x,t) + \frac{q}{\tau}\beta(x,t) - \frac{p}{\tau}\delta\alpha_x(x,t) - \frac{q}{\tau}\delta\beta_x(x,t) \quad (2.3.13)$$

persamaan (2.2.13) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\alpha_t(x,t) = \frac{1}{\tau}(-1 + p)\alpha(x,t) + \frac{q}{\tau}\beta(x,t) - \frac{\delta}{\tau}p\alpha_x(x,t) - \frac{\delta}{\tau}q\beta_x(x,t) \quad (2.3.14)$$

Suku $\frac{\delta}{\tau}q\beta_x(x,t)$ menggambarkan kecepatan dari kiri (*neglect*), sehingga untuk masalah ini dapat diabaikan, sehingga dapat dituliskan:

$$\alpha_t(x,t) = \frac{1}{\tau}(p - 1)\alpha(x,t) + \frac{q}{\tau}\beta(x,t) - \frac{\delta}{\tau}p\alpha_x(x,t) \quad (2.3.15)$$

persamaan (2.3.15) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\alpha_t(x,t) = \frac{1}{\tau}(p - (p + q))\alpha(x,t) + \frac{q}{\tau}\beta(x,t) - \frac{\delta}{\tau}p\alpha_x(x,t) \quad (2.3.16)$$

Persamaan (2.3.16) dapat disederhanakan menjadi:

$$\alpha_t(x,t) = \frac{-q}{\tau}\alpha(x,t) + \frac{q}{\tau}\beta(x,t) - \frac{\delta}{\tau}p\alpha_x(x,t) \quad (2.3.17)$$

Lalu dari persamaan (2.3.17) dapat diasumsikan:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{q}{\tau} = \lambda, \forall \lambda \text{ konstanta tak nol diasumsikan } \forall p \rightarrow 0 \text{ dan } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\delta}{\tau} = \gamma,$$

sehingga persamaan (2.3.17) dapat dinyatakan menjadi:

$$\alpha_t(x,t) = -\lambda\alpha(x,t) + \lambda\beta(x,t) - \gamma p\alpha_x(x,t) \quad (2.3.18)$$

Dengan menggunakan hukum komutatif maka persamaan (2.3.18) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\alpha_t(x, t) = -\gamma\alpha_x(x, t) - \lambda\alpha(x, t) + \lambda\beta(x, t), \forall \lambda \text{ konstanta tak nol}$$

yaitu:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t) = -\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) - \lambda\alpha(x, t) + \lambda\beta(x, t) \quad (2.3.19)$$

Persamaan (2.3.19) merupakan transformasi dalam bentuk persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) untuk persamaan (2.3.2). Selanjutnya substitusikan hasil ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.3.4) sampai (2.3.9) ke persamaan (2.3.3), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \beta(x, t) + \tau\beta_t(x, t) = p \left[\beta(x, t) + \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \right] \\ + q \left[\alpha(x, t) + \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \right] \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Persamaan (2.3.20) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau\beta_t(x, t) = -\beta(x, t) + p\beta(x, t) + q\alpha(x, t) + p\delta\beta_x(x, t) \\ + q\delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2[p\beta_{xx}(x, t) + q\alpha_{xx}(x, t)] \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Jika suku $\frac{1}{2}\delta^2[p\beta_{xx}(x, t) + q\alpha_{xx}(x, t)]$ pada ekspansi deret Taylor persamaan (2.3.21) ini diabaikan, maka dapat dinyatakan:

$$\tau\beta_t(x, t) = -\beta(x, t) + p\beta(x, t) + q\alpha(x, t) + p\delta\beta_x(x, t) + q\delta\alpha_x(x, t) \quad (2.3.22)$$

Kedua ruas persamaan (2.3.22) dibagi τ , sehingga menjadi:

$$\beta_t(x, t) = -\frac{\beta}{\tau}(x, t) + \frac{p}{\tau}\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{p}{\tau}\delta\beta_x(x, t) + \frac{q}{\tau}\delta\alpha_x(x, t) \quad (2.3.23)$$

persamaan (2.3.23) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\beta_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(-1 + p)\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{\delta}{\tau}p\beta_x(x, t) + \frac{\delta}{\tau}q\alpha_x(x, t) \quad (2.3.24)$$

Suku $\frac{\delta}{\tau}q\alpha_x(x, t)$ menggambarkan kecepatan dari kanan, sehingga untuk masalah ini dapat diabaikan, sehingga dapat dituliskan:

$$\beta_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(p - 1)\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{\delta}{\tau}p\beta_x(x, t) \quad (2.3.25)$$

persamaan (2.3.25) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\beta_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(p - (p + q))\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{\delta}{\tau}p\beta_x(x, t) \quad (2.3.26)$$

Persamaan (2.3.26) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\beta_t(x, t) = \frac{-q}{\tau}\beta(x, t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{\delta}{\tau}p\beta_x(x, t) \quad (2.3.27)$$

Selanjutnya pada persamaan (2.3.27) dapat diasumsikan:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{q}{\tau} = \lambda, \forall \lambda \text{ konstanta tak nol diasumsikan } \forall p \rightarrow 0 \text{ dan } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\delta}{\tau} = \gamma, \quad (2.3.28)$$

sehingga persamaan (2.3.27) dapat dinyatakan menjadi:

$$\beta_t(x, t) = -\lambda\beta(x, t) + \lambda\alpha(x, t) + \gamma\beta_x(x, t) \quad (2.3.28)$$

Dengan menggunakan hukum komutatif untuk ruas kanan persamaan (2.3.28)

maka dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\beta_t(x, t) = \gamma\beta_x(x, t) - \lambda\beta(x, t) + \lambda\alpha(x, t), \forall \lambda \text{ konstanta tak nol}$$

yaitu:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t}(x, t) = \gamma \frac{\partial \beta}{\partial x}(x, t) + \lambda\alpha(x, t) - \lambda\beta(x, t) \quad (2.3.29)$$

Jumlahkan persamaan (2.3.19) dan (2.3.29), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha + \beta)(x, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial x}(\beta - \alpha)(x, t) = 0 \quad (2.3.30)$$

Kurangkan persamaan (2.3.19) dan (2.3.29), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha - \beta)(x, t) = -\gamma \frac{\partial}{\partial x}(\alpha + \beta)(x, t) - 2\lambda\alpha(x, t) + 2\lambda\beta(x, t) \quad (2.3.31)$$

Kemudian turunkan persamaan (2.3.30) terhadap t :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha + \beta)(x, t) - \gamma \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}(\beta - \alpha)(x, t) = 0 \quad (2.3.32)$$

Turunkan persamaan (2.3.31) terhadap x dan kalikan dengan γ :

$$\gamma \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}(\alpha - \beta) + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha + \beta) = -2\lambda\gamma \frac{\partial}{\partial x}(\alpha - \beta) \quad (2.3.33)$$

Kurangkan persamaan (2.3.32) dan (2.3.33), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha + \beta)(x, t) - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha + \beta)(x, t) = 2\lambda\gamma \frac{\partial}{\partial x}(\alpha - \beta) \quad (2.3.34)$$

Diasumsikan:

$$v(x, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t), \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma = 0$$

Sehingga menjadi:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x, t) - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x, t) - 2\lambda\gamma \frac{\partial}{\partial x}v(x, t) = 0$$

Bentuk paling sederhananya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x, t) - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x, t) - 2\lambda\gamma \frac{\partial}{\partial x}v(x, t) = 0, \forall \lambda = \lambda, \gamma$$

Persamaan tersebut adalah persamaan gelombang tali satu dimensi, dengan asumsi pada tali yaitu $1 = m_1$, $\gamma^2 = -T$ dan $2\lambda\gamma = b_1$ maka persamaan (2.3.35)

dapat diubah menjadi:

$$m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) - (-T) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) - b_1 \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan gelombang satu dimensi pada tali adalah

$$m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) + T \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) - b_1 \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0$$

2.4 Polinom Newton Gregory

Interpolasi adalah proses menghitung/mengestimasi nilai $f(x)$ untuk nilai x yang berada di dalam interval data $[a, b]$ serta fungsi $f(x)$ yang merupakan R^n (Sudiarta, 2011:21). Interpolasi dapat digunakan untuk memperkirakan suatu fungsi dimana fungsi tersebut tidak terdefinisi dengan suatu formula, tetapi didefinisikan hanya dengan data atau tabel yang tersedia.

Polinom Newton Gregory merupakan kasus khusus dari polinom Newton untuk titik-titik yang berjarak sama. Pada kebanyakan aplikasi nilai-nilai x berjarak sama misalnya pada tabel nilai fungsi atau pada pengukuran yang dilakukan pada selang waktu yang teratur (Munir, 2010:224).

Adakalanya dalam kehidupan sehari-hari dibutuhkan perkiraan nilai fungsi dengan dua peubah. Fungsi dengan dua peubah x dan y secara umum dapat dinyatakan dengan $z = f(x, y)$. Grafik fungsi z adalah berupa permukaan (*surface*) atau selimut kurva dengan alasnya adalah bidang x dan y . Jadi nilai z terletak pada permukaan tersebut (Munir, 2010:239).

Jika z diinterpolasi dengan polinom dua peubah (interpolasi dwimatra atau dua dimensi), sebelumnya harus ditentukan berapa derajat dalam arah x dan

berapa derajat dalam arah y (Munir, 2010:239). Derajat polinom interpolasi adalah jumlah titik data dikurang 1 data yang ada pada suatu interpolasi. Misalnya, polinom linier adalah interpolasi dua titik, berarti polinom linier adalah polinom derajat 1. Misalnya z dihipir dengan polinom dengan dua peubah, yang dalam hal ini derajat dua dalam arah x dan derajat tiga dalam arah y (Munir, 2010:239):

$$z = f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 xy^3 + a_9 y^3 + a_{10} x^2 y^2 + a_{11} x^2 y^3 \quad (2.4.1)$$

Interpolasi polinom dua peubah dilakukan dalam dua arah yaitu arah x dan dalam arah y . Pada setiap arah harus dipilih peubah yang diubah konstan. Dalam arah y nilai x dipegang konstan, begitu juga dalam arah x nilai y dipegang konstan (pemilihan arah yang mana dulu yang dikerjakan memberikan jawaban yang sama). Semua metode interpolasi dapat digunakan untuk menginterpolasi polinom dua peubah (Munir, 2010:239). Misal diberikan tabel sebagai berikut:

$x \backslash y$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0,5	0.165	0.428	0.687	0.942	1.190	1.431
1	0.271	0.640	1.003	1.359	1.703	2.035
1,5	0.447	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2	0.738	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2,5	1.216	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3	2.005	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841
3,5	3.306	6.679	9.986	13.196	16.277	19.198

(sumber: Munir, 2010)

Keterangan tabel:

x = pergerakan data dari arah x

y = pergerakan data dari arah y

$\Delta x = 0.5$

$\Delta y = 0.1$

$x \in [0.5, 3.5]$ dan $y \in [0.1, 0.6]$

Perkirakan nilai $f(1.6, 0.33)$ dengan polinom derajat dua dalam arah x dan derajat tiga dalam arah y . Derajat dalam x dan y pada interpolasi dua peubah tidak ditentukan harus sama.

Penyelesaian: gunakan polinom Newton Gregory maju untuk interpolasi dalam arah x dan dalam arah y , karena titik-titiknya berjarak sama. Karena dalam arah x menggunakan interpolasi derajat dua, maka dipilih tiga buah titik di tabel yaitu pada $x = 1, 1.5$, dan 2 karena $x = 1.6$ terletak paling dekat dengan pertengahan selang $[1.0, 2.0]$. Dalam arah y , dipilih empat buah titik (interpolasi derajat tiga), yaitu pada $y = 0.2, 0.3, 0.4$, dan 0.5 karena $y = 0.33$ terletak paling dekat dengan pertengahan selang $[0.2, 0.5]$.

Dalam arah y (x tetap):

	y	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$x = 1$	0,2	0,64	0,363	-0,007	-0,005
	0,3	1,003	0,356	-0,012	
	0,4	1,359	0,344		
	0,5	1,703			
$x = 1.5$	0,2	0,99	0,534	-0,013	-0,004
	0,3	1,524	0,521	-0,017	
	0,4	2,045	0,504		
	0,5	2,549			
$x = 2$	0,2	1,568	0,816	-0,023	-0,004
	0,3	2,384	0,793	-0,027	
	0,4	3,177	0,766		
	0,5	3,943			

Jarak antar titik dalam arah y :

$$h = \Delta y = 0.1$$

s adalah hasil pengurangan antara y yang ditanyakan dikurangi y_0 dibagi Δy , yaitu:

$$s = \frac{y - y_0}{\Delta y}$$

Δf adalah beda maju pertama (arah y) dari fungsi f , rumusnya

$$\Delta f_{p+1} = f_{p+1} - f_p$$

$\Delta^2 f$ adalah beda maju kedua (arah y) dari fungsi Δf , rumusnya

$$\Delta^2 f_{p+1} = \Delta f_{p+1} - \Delta f_p$$

$\Delta^3 f$ adalah beda maju ketiga (arah y) dari fungsi $\Delta^2 f$, rumusnya

$$\Delta^3 f_{p+1} = \Delta^2 f_{p+1} - \Delta^2 f_p$$

$p_n(y)$ disebut fungsi hampiran terhadap $f(y)$ pada derajat n dan

$$y = y_0 + sh \text{ dengan } s = \frac{y - y_0}{h} = \frac{0.33 - 0.2}{0.1} = 1.3$$

Secara umum notasi polinom Newton Gregory maju derajat tiga (dalam arah y):

$$p_3(y) = f_0 + \frac{s}{1!} \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 \quad (2.4.2)$$

maka untuk mengerjakan polinom Newton Gregory dalam arah $y = 0.33$ pada beberapa nilai $x \in [1.0, 2.0]$ dilakukan beberapa substitusi fungsi x .

Untuk $x = 1.0$ maka $f(1.0, 0.33) \approx p_3(1.0, 0.33)$

$$\begin{aligned} p_3(x, 0.33) &= 0.64 + \frac{1.3}{1} (0.363) + \frac{1.3(0.3)}{2} (-0.007) \\ &\quad + \frac{1.3(0.3)(0.7)}{6} (-0.005) = 1.1108 \end{aligned}$$

Untuk $x = 1.5$ maka $f(1.5, 0.33) \approx p_3(1.5, 0.33)$

$$p_3(x, 0.33) = 0.99 + \frac{1.3}{1}(0.534) + \frac{1.3(0.3)}{2}(-0.013) \\ + \frac{1.3(0.3)(0.7)}{6}(-0.004) = 1.6818$$

Untuk $x = 2.0$ maka $f(2.0, 0.33) \approx p_3(2.0, 0.33)$

$$p_3(x, 0.33) = 1.568 + \frac{1.3}{1}(0.816) + \frac{1.3(0.3)}{2}(-0.023) \\ + \frac{1.3(0.3)(0.7)}{6}(-0.004) = 2.6245$$

Dalam arah x (y tetap):

	x	f	Δf	$\Delta^2 f$
$y = 0,33$	1	1,1108	0,571	0,3717
	1,5	1,6818	0,9427	
	2,0	2,6245		

Jarak antar titik dalam arah x :

$$h = \Delta x = 0.5$$

s adalah hasil pengurangan antara x yang ditanyakan dikurangi x_0 dibagi Δx , yaitu:

$$s = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

Δf adalah beda maju pertama (arah x) dari fungsi f , rumusnya

$$\Delta f_{p+1} = f_{p+1} - f_p$$

$\Delta^2 f$ adalah beda maju kedua (arah x) dari fungsi Δf , rumusnya

$$\Delta^2 f_{p+1} = \Delta f_{p+1} - \Delta f_p$$

$p_n(x)$ disebut fungsi hampiran terhadap $f(x)$ pada derajat n

dan

$$x = x_0 + sh \text{ dengan } s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.6-1.0}{0.5} = 1.2$$

Secara umum notasi polinom Newton Gregory maju derajat dua (dalam arah x):

$$p_2(x) = f_0 + \frac{s}{1!} \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 \quad (2.4.3)$$

Maka nilai dari

$$f(1.6, 0.33) = p_2(1.6, 0.33) = 1.1108 + \frac{1.3}{1} (0.571) + \frac{1.2(0.2)}{2} (0.3717) = 1.846$$

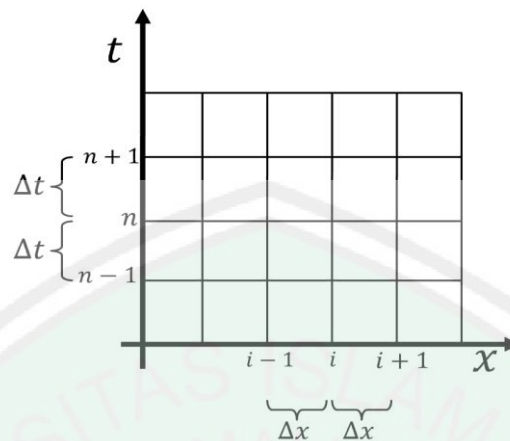
2.5 Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory

Skema eksplisit beda hingga Newton Gregory adalah pendekatan dari turunan pada suatu titik dengan pengumpulan dari nilai-nilai terdekat dengan titik.

Definisi 2

Metode eksplisit adalah salah satu formula eksplisit pada sebuah titik, untuk nilai dari istilah-istilah yang tidak diketahui muncul dalam persamaan diferensial (Zwillinger, 1997:652).

Metode eksplisit untuk suatu PDP skema beda hingganya dapat dibentuk dengan membuat jaringan titik hitungan pada bidang $x - t$ (gambar 2.2) yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang (Δx) dan waktu (Δt).



Gambar 2.2 Jaringan Titik Hitungan (*grid*) pada Bidang $x - t$

Turunan parsial dalam persamaan diferensial parsial pada setiap titik *grid* didekati dari nilai-nilai tetangga dengan menggunakan deret Taylor. Dibentuk skema beda hingga Newton Gregory untuk turunan parsial fungsi v yang terdiri dari dua variabel bebas x dan t . Berikut merupakan deret Taylor fungsi v pada $x = x_{i-1}$ sebagai kondisi nol (Causon & Mingham, 2010:17) yang diintegrasikan dengan persamaan (2.4.3), yaitu:

dengan $s = \frac{x-x_0}{\Delta x}$, deret Taylor untuk $v(x_0 + \Delta x, t)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 v(x_0 + \Delta x, t) &= v(x_0, t) + s\Delta x v_x(x_0, t) + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta x^2 v_{xx}(x_0, t) \\
 &+ \dots + \frac{s(s-1) \dots (s+n-1)}{(n-1)!} \Delta x^{n-1} v_{n-1}(x_0, t) \\
 &+ O(\Delta x^n)
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Dengan $O(\Delta x^n)$ merupakan galat pemotongan. Memotong persamaan (2.5.1) sampai turunan pertama diperoleh

$$v(x_i + \Delta x, t_n) = v(x_i, t_n) + s\Delta x v_x(x_i, t_n) + O(\Delta x^2) \tag{2.5.2}$$

Sehingga skema eksplisit beda hingga Newton Gregory dalam turunan parsial sebagai berikut

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_i + \Delta x, t_n) - v(x_i, t_n)}{s\Delta x} - \frac{O(\Delta x^2)}{s\Delta x} \quad (2.5.3)$$

Skema eksplisit beda hingga Newton Gregory tersebut dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_i + \Delta x, t_n) - v(x_i, t_n)}{s\Delta x} - \frac{O(\Delta x)}{s}$$

Karena Δx konstan sehingga $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, persamaan (2.5.3) menjadi

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_{i+1}, t_n) - v(x_i, t_n)}{s\Delta x} - \frac{O(\Delta x)}{s} \quad (2.5.4)$$

Apabila notasi $v(x_i, t_n)$ dituliskan sebagai v_i^n , maka berikut merupakan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory untuk turunan parsial fungsi v pada x .

$$v_x(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{s\Delta x}, \forall s = \frac{x - x_0}{\Delta x} \quad (2.5.5)$$

Persamaan (2.5.5) disebut beda maju untuk x dengan skema Newton Gregory.

Selanjutnya akan dibentuk skema eksplisit beda hingga Newton Gregory untuk turunan kedua fungsi v terhadap x dengan menggunakan deret Taylor orde 3 berikut

$$v(x_0 + \Delta x, t) = v(x_0, t) + s\Delta x v_x(x_0, t) + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta x^2 v_{xx}(x_0, t) + O(\Delta x^3) \quad (2.5.6)$$

serta

$$v(x_0 - \Delta x, t) = v(x_0, t) - s\Delta x v_x(x_0, t) + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta x^2 v_{xx}(x_0, t) - O(\Delta^3) \quad (2.5.7)$$

Menjumlahkan persamaan (2.5.6) dan (2.5.7) maka diperoleh

$$v(x_0 + \Delta x, t) + v(x_0 - \Delta x, t) = 2v(x_0, t) + 2\Delta x^2 s(s-1)v_{xx}(x_0, t) \quad (2.5.8)$$

maka untuk $x_0 = x_i$ dan $t = t_n$, berlaku:

$$\begin{aligned} v(x_i + \Delta x, t_n) + v(x_i - \Delta x, t_n) \\ = 2v(x_i, t_n) + 2\Delta x^2 s(s-1)v_{xx}(x_i, t_n) \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Karena Δx konstan sehingga $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, persamaan (2.5.9) menjadi

$$v(x_{i+1}, t_n) + v(x_{i-1}, t_n) = 2v(x_i, t_n) + 2\Delta x^2 s(s-1)v_{xx}(x_i, t_n) \quad (2.5.10)$$

persamaan (2.5.10) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$v_{i+1}^n + v_{i-1}^n = 2v_i^n + 2\Delta x^2 s(s-1)v_{xx}(x_i, t_n) \quad (2.5.11)$$

Untuk mendapatkan $v_{xx}(x_i, t_n)$, maka persamaan (2.5.11) harus disederhanakan dahulu, sehingga menjadi

$$v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2\Delta x^2 s(s-1)}, \forall s = \frac{x - x_0}{\Delta x} \quad (2.5.12)$$

Persamaan (2.5.12) merupakan beda pusat untuk x dengan skema Newton Gregory.

Skema eksplisit beda hingga Newton Gregory untuk turunan parsial fungsi v pada t dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan (2.5.1) dengan $v(x, t_0 + \Delta t)$, berikut merupakan deret Taylor fungsi v pada t (Causon & Mingham, 2010:17) yang diintegrasikan dengan persamaan (2.4.2), yaitu:

dengan $q = \frac{t-t_0}{\Delta t}$, deret Taylor untuk $v(x, t_0 + \Delta t)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} v(x, t_0 + \Delta t) &= v(x, t_0) + q\Delta t v_t(x, t_0) + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta t^2 v_{tt}(x, t_0) \\ &+ \dots + \frac{q(q-1) \dots (q+n-1)}{(n-1)!} \Delta t^{n-1} v_{n-1}(x, t_0) \\ &+ O(\Delta t^n) \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

dengan $O(\Delta t^n)$ merupakan galat pemotongan. Memotong persamaan (2.5.13) sampai turunan pertama diperoleh

$$v(x_i, t_n + \Delta t) = v(x_i, t_n) + q\Delta t v_t(x_i, t_n) + O(\Delta t^2) \quad (2.5.14)$$

Sehingga skema eksplisit beda hingga Newton Gregory dalam turunan parsial sebagai berikut

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v(x_i, t_n + \Delta t) - v(x_i, t_n)}{q\Delta t} - \frac{O(\Delta t^2)}{q\Delta t} \quad (2.5.15)$$

Skema eksplisit beda hingga Newton Gregory tersebut dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v(x_i, t_n + \Delta t) - v(x_i, t_n)}{q\Delta t} - \frac{O(\Delta x)}{q}$$

Karena Δt konstan sehingga $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, persamaan (2.5.15) menjadi

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v(x_i, t_{n+1}) - v(x_i, t_n)}{q\Delta t} - \frac{O(\Delta x)}{q} \quad (2.5.16)$$

Apabila notasi $v(x_i, t_n)$ dituliskan sebagai v_i^n , maka berikut merupakan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory untuk turunan parsial fungsi v pada t .

$$v_t(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{q\Delta t}, \forall q = \frac{t - t_0}{\Delta t} \quad (2.5.17)$$

Persamaan (2.5.17) disebut beda maju untuk t dengan skema Newton Gregory.

Selanjutnya akan dibentuk skema eksplisit beda hingga Newton Gregory untuk turunan kedua fungsi v terhadap t dengan menggunakan deret Taylor orde 3 berikut

$$v(x, t_0 + \Delta t) = v(x, t_0) + q\Delta t v_t(x, t_0) + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta t^2 v_{tt}(x, t_0) + O(\Delta t^3) \quad (2.5.18)$$

serta

$$v(x, t_0 - \Delta t) = v(x, t_0) - q\Delta t v_t(x, t_0) + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta t^2 v_{tt}(x, t_0) - O(\Delta t^3) \quad (2.5.19)$$

Menjumlahkan persamaan (2.5.18) dan (2.5.19) maka diperoleh

$$v(x, t_0 + \Delta t) + v(x, t_0 - \Delta t) = 2v(x, t_0) + 2\Delta t^2 q(q-1) v_{tt}(x, t_0) \quad (2.5.20)$$

maka untuk $t_0 = t_n$ dan $x = x_i$, berlaku:

$$v(x_i, t_n + \Delta t) + v(x_i, t_n - \Delta t) = 2v(x_i, t_n) + 2\Delta t^2 q(q-1) v_{xx}(x_i, t_n) \quad (2.5.21)$$

Karena Δt konstan sehingga $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, persamaan (2.5.21) menjadi

$$v(x_i, t_{n+1}) + v(x_i, t_{n-1}) = 2v(x_i, t_n) + 2\Delta t^2 q(q-1) v_{xx}(x_i, t_n) \quad (2.5.22)$$

persamaan (2.5.22) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$v_i^{n+1} + v_i^{n-1} = 2v_i^n + 2\Delta t^2 q(q-1) v_{tt}(x_i, t_n) \quad (2.5.23)$$

Untuk mendapatkan $v_{tt}(x_i, t_n)$, maka persamaan (2.5.23) harus disederhanakan dahulu, sehingga menjadi

$$v_{tt}(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{2\Delta t^2 q(q-1)}, \forall q = \frac{t - t_0}{\Delta t} \quad (2.5.24)$$

Persamaan (2.5.24) merupakan beda pusat untuk t dengan skema Newton Gregory.

Pendekatan interpolasi polinom untuk $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}$ dalam bentuk eksplisit beda hingga Newton-Gregorynya adalah sebagai berikut:

$$v_{tt}(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{2\Delta t^2 q(q-1)}$$

$$v_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2\Delta x^2 s(s-1)}$$

$$v_t(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{q\Delta t}$$

Dengan syarat: $\forall \Delta x \rightarrow \infty, \forall \Delta t$

$$s = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

$$q = \frac{t - t_0}{\Delta t}$$

Penyelesaian persamaan tipe hiperbolik dengan menggunakan metode beda hingga Newton Gregory dapat diselesaikan dengan metode beda hingga Newton Gregory skema eksplisit. Pada skema eksplisit, nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik disekitarnya pada waktu sebelumnya, yang sudah diketahui nilainya. Dengan metode ini, penurunan persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk beda hingga Newton Gregory adalah mudah. Namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya ketidakstabilan hitungan, apabila digunakan langkah waktu yang besar (Triadmodjo, 2002:233). Berikut merupakan langkah iterasi pada skema eksplisit:

2.6 Analisis Kestabilan Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory

Skema eksplisit beda hingga Newton Gregory disebut konvergen jika solusinya beda hingga mendekati solusi analitik dan disebut stabil apabila solusi beda hingga tidak terlalu sensitif dengan adanya perubahan kecil (Flaherty, 1989:11).

Sebagai contoh berikut merupakan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory untuk persamaan gelombang tali pada persamaan (2.1.1) (Morton & Mayers, 2005:90)

$$y_j^{n+1} = \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n) + 2y_j^n - y_j^{n-1} \quad (2.6.1)$$

persamaan (2.6.2) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$y_j^{n+1} = (1 - \lambda)2y_j^n + \lambda(y_{j+1}^n + y_{j-1}^n) - y_j^{n-1} \quad (2.6.2)$$

Deret Fourier diskrit bisa digunakan untuk menganalisa kestabilan dari koefisien konstan masalah beda hingga dengan banyak data awal cara yang sama dalam deret Fourier tak hingga dapat digunakan untuk menunjukkan koefisien konstan persamaan diferensial parsial (Flaherty, 1989:12).

Misalkan solusi beda hingga periodik di j dengan periode J , solusi tersebut dapat dituliskan dalam deret Fourier kompleks diskrit sebagai berikut (Flaherty, 1989:12):

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} c_k^{2n} w_j^k, \quad j = 0, 1, \dots, J-1 \quad (2.6.3)$$

dimana

$$w_j = e^{2\pi i j / J} \quad (2.6.4)$$

Pada bentuk ini U_j^n merupakan aproksimasi dari solusi analitik yang periodik di x dengan periode 2π dengan $\Delta x = 2\pi/J$. Deret Fourier diskrit tersebut memenuhi relasi ortogonal

$$\sum_{j=0}^{J-1} w_j^k w_j^{-l} = \begin{cases} J, & \text{jika } k \equiv l \pmod{J} \\ 0, & \text{untuk } k \text{ dan } l \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2.6.5)$$

Jika diberikan solusi U_j^n dapat ditentukan koefisien Fourier c_k^{2n} dengan menginverskan deret Fourier diskrit menggunakan relasi ortogonal sebagai berikut,

$$\sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} = \sum_{j=0}^{J-1} w_j^{-l} \sum_{k=0}^{J-1} c_k^{2n} w_j^k \quad (2.6.6)$$

$$\sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} = \sum_{k=0}^{J-1} c_k^{2n} \sum_{j=0}^{J-1} w_j^k w_j^{-l} = J(c_k^{2n})$$

dengan

$$c_k^{2n} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} \quad (2.6.7)$$

bentuk invers inilah yang disebut transformasi diskrit Fourier.

2.7 Doa dalam Islam

Secara umum getaran berkaitan erat hubungannya dengan proses ibadah yang dilakukan manusia seperti shalat, mengaji, berdoa, berpuasa, bersedekah, dan lain sebagainya. Setiap ibadah yang dilakukan akan menimbulkan getaran tersendiri, seperti partikel dari titik gelombang mekanik pada manusia juga memiliki getaran yang berbeda. Pada penulisan skripsi ini akan dikhususkan

getaran yang berkaitan erat dengan doa. Doa adalah usaha yang nyata sesuai rumus/kodrat/hukum Allah SWT sebagaimana tanda-tandanya tampak pula pada gejala kosmos. Permohonan kepada Allah SWT dapat ditempuh dengan lisan. Tetapi paling penting adalah doa butuh penggabungan antara dimensi batiniah dan lahiriah (laten dan manifesto) metafisik dan fisik. Allah berfirman dalam surat Al-A'raf ayat 55-56 sebagai berikut (Al-Maraghi, 1974:308):

أَدْعُوا رَبَّكُمْ تَضَرُّعًا وَخُفْيَةً إِنَّهُ لَا يُحِبُّ الْمُعْتَدِينَ ﴿٥٥﴾ وَلَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ بَعْدَ إِصْلَاحِهَا وَادْعُوهُ خَوْفًا وَطَمَعًا إِنَّ رَحْمَتَ اللَّهِ قَرِيبٌ مِّنَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٥٦﴾

Artinya: “Berdoalah kepada Tuhanmu dengan berendah diri dan suara yang lembut. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang melampaui batas. Dan janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi, sesudah (Allah) memperbaikinya dan berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut (tidak akan diterima) dan harapan (akan dikabulkan). Sesungguhnya rahmat Allah amat dekat kepada orang-orang yang berbuat baik” (QS. Al-A'raf [7] :55-56).

Setelah Allah SWT menerangkan dalil-dalil atas keEsaan pemeliharaan Allah (*Tauhidur-Rububiyah*), maka dilanjutkan dengan perintah Allah agar mengesakan ketuhanan-Nya (*Tauhidul Uluhiyyah*). Yaitu menyembah kepada-Nya semata-mata, sedangkan ruh dan otak ibadah ialah berdoa dan merendahkan diri kepada Allah. Pada ayat 55 diisyaratkan bahwa berdoa secara rahasia, kalau dikatakan tidak wajib. Allah Ta'ala memuji kepada Zakaria, karena Zakaria merahasiakan doa-doanya dari hamba-hamba Allah yang lain. Memurnikan doanya itu kepada Allah dan menghususkan doanya itu hanya kepada-Nya (Al-Maraghi, 1974:309). Sesungguhnya Allah itu tidak menyukai orang-orang yang melampaui batas, yaitu orang yang melanggar apa yang diperintahkan kepada

mereka. Hal tersebut semakna dengan firman Allah dalam surat Al-Baqarah ayat 229:

الطَّلُقُ مَرَّتَانٍ ۖ فَإِمْسَاكٌ بِمَعْرُوفٍ أَوْ تَسْرِيحٌ بِإِحْسَانٍ ۗ وَلَا تَحِلُّ لَكُمْ أَنْ تَأْخُذُوا بِمَا
 ءَاتَيْتُمُوهُنَّ شَيْئًا إِلَّا أَنْ يَخَافَا أَلَّا يُقِيمَا حُدُودَ اللَّهِ ۗ فَإِنْ خِفْتُمْ أَلَّا يُقِيمَا حُدُودَ اللَّهِ فَلَا جُنَاحَ
 عَلَيْهِمَا فِيمَا افْتَدَتْ بِهِ ۗ تِلْكَ حُدُودُ اللَّهِ فَلَا تَعْتَدُوهَا ۚ وَمَنْ يَتَعَدَّ حُدُودَ اللَّهِ فَأُولَٰئِكَ هُمُ
 الظَّالِمُونَ ﴿٢٢٩﴾

Artinya: “Talak (yang dapat dirujuk) dua kali. Setelah itu boleh rujuk lagi dengan cara yang ma'ruf atau menceraikan dengan cara yang baik. tidak halal bagi kamu mengambil kembali sesuatu dari yang telah kamu berikan kepada mereka, kecuali kalau keduanya khawatir tidak akan dapat menjalankan hukum-hukum Allah. Jika kamu khawatir bahwa keduanya (suami isteri) tidak dapat menjalankan hukum-hukum Allah, maka tidak ada dosa atas keduanya tentang bayaran yang diberikan oleh isteri untuk menebus dirinya. Itulah hukum-hukum Allah, maka janganlah kamu melanggarnya. Barangsiapa yang melanggar hukum-hukum Allah mereka Itulah orang-orang yang zalim”(QS. Al-Baqarah [2]:229).

Pada ayat 56 dijelaskan bahwa orang yang berdoa kepada Allah harus dalam keadaan takut dan berharap. Takut akan tertimpa sesuatu yang tidak disukai dan berharap akan bisa memperoleh sesuatu yang diidam-idamkan atau diinginkan. Doa adalah otak dari ibadah, apabila syarat dan tata cara atau adabnya sempurna tentulah besar harapan doa itu akan diperkenankan oleh Allah SWT. Rahmat Allah SWT itu dekat kepada orang yang berbuat baik, orang yang mengerjakan amal dengan tulus ikhlas dan dilakukan dengan sebaik-baiknya (As-Shiddieqy, 2000:1414). Karena balasan itu adalah sejenis dengan amal perbuatan sebagaimana firman Allah SWT:

هَلْ جَزَاءُ الْإِحْسَانِ إِلَّا الْإِحْسَانُ ﴿٥٦﴾

Artinya: “Tidak ada balasan kebaikan kecuali kebaikan (pula)”(QS. Ar-rahman [55]:60).

Maka barang siapa melaksanakan ibadah dengan baik, dia akan memperoleh pahala yang baik pula. Orang yang berbuat baik lebih dekat kepada mereka untuk dikabulkan dibandingkan orang-orang yang berbuat jahat (Al-Jazairi, 2007:79). Hal tersebut juga semakna dengan firman Allah dalam surat Al-Baqarah ayat 186:

وَإِذَا سَأَلَكَ عِبَادِي عَنِّي فَإِنِّي قَرِيبٌ ۖ أُجِيبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ إِذَا دَعَانِ ۗ فَلْيَسْتَجِيبُوا لِي وَلْيُؤْمِنُوا بِي لَعَلَّهُمْ يَرْشُدُونَ ﴿١٨٦﴾

Artinya: “Dan apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu tentang aku, maka (jawablah), bahwasanya Aku adalah dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila ia memohon kepada-Ku, maka hendaklah mereka itu memenuhi (segala perintah-Ku) dan hendaklah mereka beriman kepada-Ku, agar mereka selalu berada dalam kebenaran” (QS. Al-Baqarah [2]:229).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Polinom Newton Gregory pada Persamaan Gelombang Tali

Homogen

Berikut merupakan persamaan gelombang tali homogen yang kontinu pada persamaan (2.3.1):

$$m_1 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - b_1 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0$$

Untuk setiap m_1, T, b_1 adalah konstanta.

Didefinisikan bahwa

$$v(x_i, t_n) = v_i^n$$

Transformasi beda pusat Newton Gregory untuk turunan kedua ruang pada t menurut persamaan (2.5.24) sebagai berikut:

$$v_{tt}(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{2\Delta t^2 q(q-1)}, \forall q = \frac{t - t_0}{\Delta t}$$

dan transformasi beda pusat Newton Gregory untuk turunan kedua ruang pada x menurut persamaan (2.5.12) sebagai berikut:

$$v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2\Delta x^2 s(s-1)}, \forall s = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

dan transformasi beda maju Newton Gregory untuk turunan waktu (t) menurut persamaan (2.5.17) sebagai berikut:

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{q\Delta t}, \forall q = \frac{t - t_0}{\Delta t}$$

Bentuk transformasi beda hingga tersebut disubstitusikan pada persamaan (2.3.1)

maka diperoleh bentuk diskret model sebagai berikut:

$$m_1 \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{2\Delta t^2 q(q-1)} + T \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2\Delta x^2 s(s-1)} - b_1 \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{q\Delta t} = 0$$

Substitusikan bentuk beda hingga tersebut pada persamaan (2.3.1), lalu pindahkan beda pusat Newton Gregory untuk turunan kedua ruang pada x dan turunan kedua ruang t ke ruas kanan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{-b_1}{q\Delta t} (v_i^{n+1} - v_i^n) &= \frac{-m_1}{2\Delta t^2 q(q-1)} (v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}) \\ &\quad - \frac{T}{2\Delta x^2 s(s-1)} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Kalikan kedua ruas dengan $q\Delta t$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -b_1 (v_i^{n+1} - v_i^n) &= \frac{-m_1 q\Delta t}{2\Delta t^2 q(q-1)} (v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}) \\ &\quad - \frac{Tq\Delta t}{2\Delta x^2 s(s-1)} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Pindahkan $b_1(-v_i^n)$ ke ruas kanan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -b_1 (v_i^{n+1}) &= \frac{-m_1 q\Delta t}{2\Delta t^2 q(q-1)} (v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}) \\ &\quad - \frac{Tq\Delta t}{2\Delta x^2 s(s-1)} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + b_1(-v_i^n) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Pindahkan $m_1 \frac{q\Delta t(v_i^{n+1})}{2\Delta t^2 q(q-1)}$ ke ruas kiri, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -b_1 (v_i^{n+1}) + m_1 \frac{q\Delta t(v_i^{n+1})}{2\Delta t^2 q(q-1)} &= \frac{-m_1 q\Delta t}{2\Delta t^2 q(q-1)} (-2v_i^n + v_i^{n-1}) \\ &\quad - \frac{Tq\Delta t}{2\Delta x^2 s(s-1)} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + b_1(-v_i^n) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Persamaan (3.1.4) jika disederhanakan menjadi

$$\frac{v_i^{n+1}(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)}{2\Delta t^2 q(q-1)} = \frac{-m_1 q \Delta t}{2\Delta t^2 q(q-1)} (-2v_i^n + v_i^{n-1}) \quad (3.1.5)$$

$$- \frac{Tq\Delta t}{2\Delta x^2 s(s-1)} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + b_1(-v_i^n)$$

Kalikan kedua ruas dengan $2\Delta t^2 q(q-1)$, sehingga persamaan (3.1.5) menjadi

$$v_i^{n+1}(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t) = -m_1 q \Delta t (-2v_i^n + v_i^{n-1}) \quad (3.1.6)$$

$$- \frac{Tq\Delta t(2\Delta t^2 q(q-1))}{2\Delta x^2 s(s-1)} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + b_1(-v_i^n) 2\Delta t^2 q(q-1)$$

Bagikan kedua ruas dengan $(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)$, sehingga persamaan (3.1.6) menjadi

$$v_i^{n+1} = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_i^n + v_i^{n-1}) \quad (3.1.7)$$

$$- \frac{T\Delta t^3 q^2 (q-1)}{\Delta x^2 s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_i^n)$$

Didefinisikan

$$\lambda = \left| \frac{T\Delta t^3}{\Delta x^2} \right|$$

sehingga persamaan (3.1.7) dapat dituliskan sebagai

$$v_i^{n+1} = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_i^n + v_i^{n-1}) \quad (3.1.8)$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)(-v_i^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

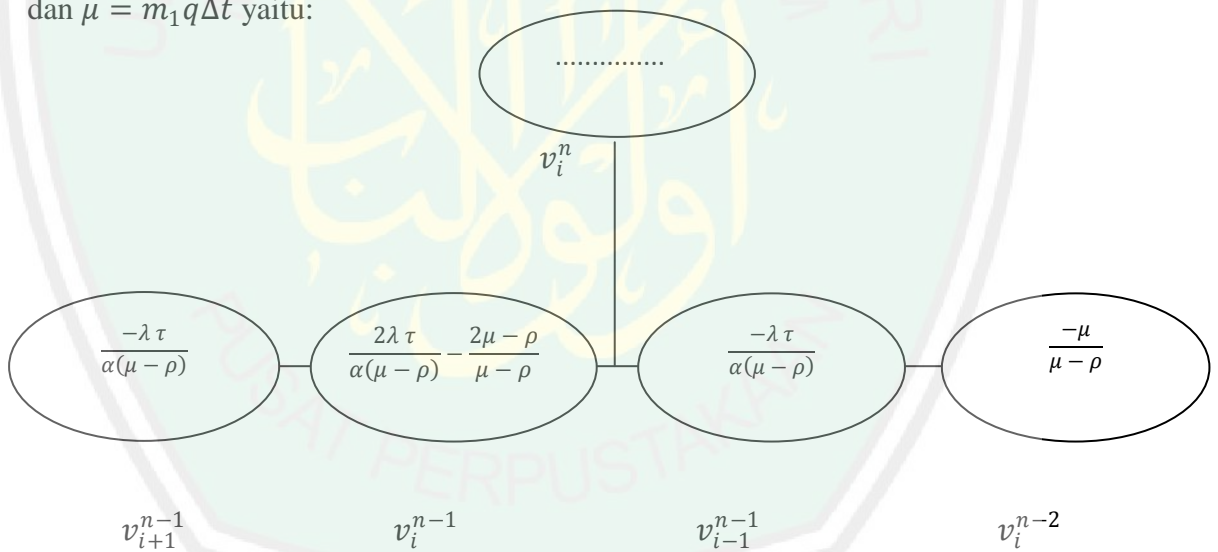
Jika iterasi n dimulai dari $n - 1$ maka digunakan bentuk berikut:

$$v_i^n = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_i^{n-1} + v_i^{n-2}) \tag{3.1.9}$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q - 1)}{s(s - 1)(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (v_{i+1}^{n-1} - 2v_i^{n-1} + v_{i-1}^{n-1})$$

$$+ \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1)(-v_i^{n-1})}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)}$$

Stensil bentuk beda hingga model diskret gelombang tali untuk persamaan (3.1.9) pada daerah $x_0 < x < L$ dan $t_0 < t < \tau$ dengan $n = 1$ dan $i = 1$ dengan memisalkan $\tau = q^2 (q - 1), \alpha = s(s - 1), \rho = b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1)$ dan $\mu = m_1 q \Delta t$ yaitu:



Gambar 3.1 Stensil Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory untuk Model Gelombang Homogen

Didefinisikan $l = L/\Delta x$ sehingga banyak titik *grid* untuk x adalah $l + 1$ dan $k = \tau/\Delta t$ sehingga banyak titik *grid* untuk t adalah $k + 1$. Selanjutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi batas. Kondisi batas adalah $v(x_0, t) = 0$ dan $v(L, t) = 0$ sehingga,

$$v_0^n = v_l^n = 0, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, k$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal. Digunakan kondisi awal sebagai berikut:

$$v(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$$

Kondisi awal pada waktu ke- n dan jarak ke- i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$v_i^n = \exp[-10(4x_i - 1)^2], \quad \forall n = 0 \forall i = 0, 1, 2, \dots, l$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.1.9) sesuai dengan stensil beda hingga pada gambar 3.1. Deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu dapat dinyatakan sebagai berikut:

untuk $i = 1$ dan $n = 1$

$$\begin{aligned} v_1^1 &= \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_1^0 + v_1^{-1}) \\ &\quad - \lambda \frac{q^2 (q - 1)}{s(s - 1) (-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (v_2^0 - 2v_1^0 + v_0^0) \\ &\quad + \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1)}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-v_1^0) \end{aligned}$$

untuk $i = 2$ dan $n = 1$

$$\begin{aligned} v_2^1 &= \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_2^0 + v_2^{-1}) \\ &\quad - \lambda \frac{q^2 (q - 1)}{s(s - 1) (-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (v_3^0 - 2v_2^0 + v_1^0) \\ &\quad + \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1)}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-v_2^0) \end{aligned}$$

untuk $i = 3$ dan $n = 1$

$$v_3^1 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_3^0 + v_3^{-1})$$

$$-\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_4^0 - 2v_3^0 + v_2^0)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_3^0)$$

⋮

untuk $i = l - 1$ dan $n = 1$

$$v_{l-1}^1 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_{l-1}^0 + v_{l-1}^{-1})$$

$$-\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_l^0 - 2v_{l-1}^0 + v_{l-2}^0)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_{l-1}^0)$$

untuk $i = 1$ dan $n + 1 = 2$

$$v_1^2 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_1^1 + v_1^0)$$

$$-\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_2^1 - 2v_1^1 + v_0^1)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_1^1)$$

untuk $i = 2$ dan $n + 1 = 2$

$$v_2^2 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_2^1 + v_2^0)$$

$$-\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_3^1 - 2v_2^1 + v_1^1)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_2^1)$$

untuk $i = 3$ dan $n + 1 = 2$

$$v_3^2 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_3^1 + v_3^0)$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q - 1)}{s(s - 1)(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (v_4^1 - 2v_3^1 + v_2^1)$$

$$+ \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1)}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-v_3^1)$$

⋮

untuk $i = l - 1$ dan $n + 1 = 2$

$$v_{l-1}^2 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_{l-1}^1 + v_{l-1}^0)$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q - 1)}{s(s - 1)(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (v_l^1 - 2v_{l-1}^1 + v_{l-2}^1)$$

$$+ \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1)}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-v_{l-1}^1)$$

untuk $i = 1$ dan $n + 2 = 3$

$$v_1^3 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_1^2 + v_1^1)$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q - 1)}{s(s - 1)(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (v_2^2 - 2v_1^2 + v_0^2)$$

$$+ \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1)}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-v_1^2)$$

untuk $i = 2$ dan $n + 2 = 3$

$$v_2^3 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_2^2 + v_2^1)$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q - 1)}{s(s - 1)(-b_1 2 \Delta t^2 q (q - 1) + m_1 q \Delta t)} (v_3^2 - 2v_2^2 + v_1^2)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_2^2)$$

untuk $i = 3$ dan $n + 2 = 3$

$$v_3^3 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_3^2 + v_3^1)$$

$$- \lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_4^2 - 2v_3^2 + v_2^2)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_3^2)$$

⋮

untuk $i = l - 1$ dan $n + 2 = 3$

$$v_{l-1}^3 = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_{l-1}^2 + v_{l-1}^{n-2})$$

$$- \lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_l^2 - 2v_{l-1}^2 + v_{l-2}^2)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_{l-1}^2)$$

untuk $i = 1$ dan $n = k$

$$v_1^k = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_1^k + v_1^{k-1})$$

$$- \lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_2^k - 2v_1^k + v_0^k)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_1^k)$$

untuk $i = 2$ dan $n = k$

$$v_2^k = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_2^k + v_2^{k-1})$$

$$-\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_3^k - 2v_2^k + v_1^k)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_2^k)$$

⋮

untuk $i = l - 1$ dan $n = k$

$$v_{l-1}^k = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_{l-1}^{k-1} + v_{l-1}^{k-2})$$

$$-\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_{l+1}^{k-1} - 2v_l^{k-1} + v_{l-1}^{k-1})$$

$$- \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_{l-1}^{k-1})$$

Setelah didapatkan iterasi dapat diselesaikan persamaan gelombang pada daerah batas $0 < x < 2$ dan $0 < t < 8$. Nilai batas $v(0, t) = 0$, dan $v(2, t) = 0$ untuk semua t . Sesuai jurnal Ohene1, dkk. (2012:51) dengan nilai konstanta $m_1 = 6000 \text{ kg}$, $T = F = m_1 \times a = 0.0000013$ diambil a karena disini penulis memilih menghitung tekanan dari semua arah sepanjang objek jembatan dan nilai $b_1 = 0.01$, sehingga persamaan (2.3.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$6000v_{tt} + 0.0000013v_{xx} + 0.01v_t = 0 \quad (3.1.10)$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0.08$, dan $\Delta x = 0.02$ sehingga nilai λ adalah

$$\lambda = \frac{T\Delta t^3}{\Delta x^2} = 0.0000013 \frac{0.08^3}{0.02^2} = 0.0000013 \frac{0.000512}{0.0004} = 0.0000017$$

Substitusi nilai λ pada skema beda hingga untuk persamaan (2.3.1) sesuai dengan persamaan (3.1.9) adalah sebagai berikut:

$$v_i^n = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_i^{n-1} + v_i^{n-2})$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_{i+1}^{n-1} - 2v_i^{n-1} + v_{i-1}^{n-1})$$

$$+ \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q-1)(-v_i^{n-1})}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

Gunakan polinom Newton Gregory maju untuk interpolasi dalam arah x dan dalam arah t , karena titik-titiknya berjarak sama. Karena dalam arah x menggunakan interpolasi derajat dua, maka dipilih tiga buah titik di tabel yaitu pada $x = 1.92, 1.94$, dan 1.96 karena $x = 1.95$ terletak paling dekat dengan pertengahan selang $[1.92, 1.96]$. Dalam arah t , dipilih tiga buah titik, yaitu pada $t = 7.76, 7.84$, dan 7.92 karena $t = 7.912$ terletak paling dekat dengan pertengahan selang $[7.76, 7.92]$.

Untuk $p_2(1.95, 7.912)$, maka diambil $x = 1.95$ dan $t = 7.912$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.95 - 1.92}{0.02} = 1.5$$

$$q = \frac{t - t_0}{h} = \frac{7.912 - 7.76}{0.08} = 1.9$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $l + 1$ dengan nilai l sebagai berikut:

$$l = \frac{L - x_0}{\Delta x} = \frac{2 - 0}{0.02} = 100$$

secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k + 1$ dengan nilai k sebagai berikut :

$$k = \frac{\tau - t_0}{\Delta t} = \frac{8 - 0}{0.08} = 100$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.1.9) sebagai berikut,

$$v(x_0, t) = v(0, t) = 0 \text{ dan } v(L, t) = v(2, t) = 0, \forall 0 < t < 8$$

sehingga diperoleh $v_i^n = 0, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100. \forall i = 0, \dots, 100$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} v_0^0 = 0 & v_{100}^0 = 0 \\ v_0^1 = 0 & v_{100}^1 = 0 \\ v_0^2 = 0 & v_{100}^2 = 0 \\ \vdots & \vdots \\ v_0^{100} = 0 & v_{100}^{100} = 0 \end{array}$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut,

$$v_i^n = \exp[-10(4x_i - 1)^2], \quad \forall n = 0 \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Kondisi awal diambil $\exp[-10(4x_i - 1)^2]$ karena dianggap beban yang melewati jembatan tidak hanya satu tapi banyak, jika diambil kondisi awal linier maka yang dihitung hanya beban dari satu-persatu beban yang lewat.

Iterasi untuk nilai awal adalah sebagai berikut:

$$v_1^0 = v(0.02, 0) = \exp[-10(4(0.02) - 1)^2] = 2.10927 \times 10^{-4}$$

$$v_2^0 = v(0.04, 0) = \exp[-10(4(0.04) - 1)^2] = 8.6222 \times 10^{-4}$$

$$v_3^0 = v(0.06, 0) = \exp[-10(4(0.06) - 1)^2] = 3.101095 \times 10^{-3}$$

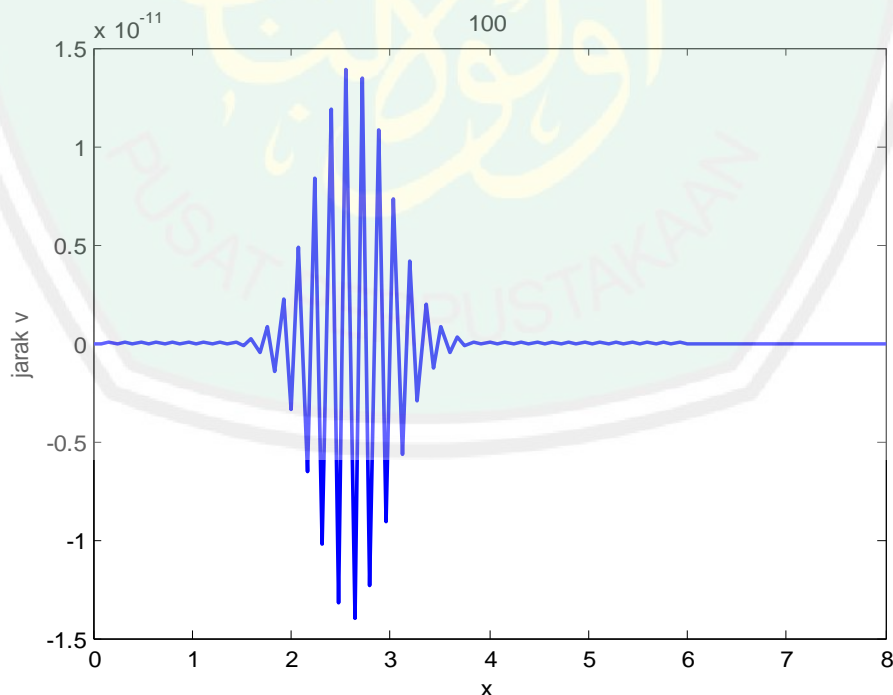
$$v_4^0 = v(0.08, 0) = \exp[-10(4(0.08) - 1)^2] = 9.813464 \times 10^{-3}$$

$$v_5^0 = v(0.1, 0) = \exp[-10(4(0.1) - 1)^2] = 2.7323722 \times 10^{-2}$$

⋮

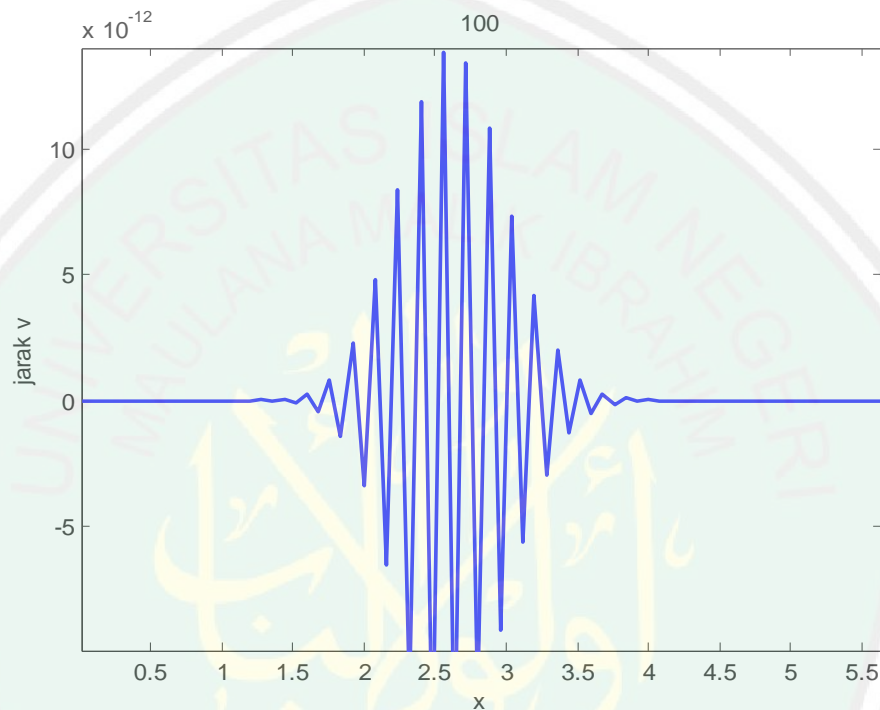
$$v_{99}^0 = v(1.98, 0) = \exp[-10(4(1.98) - 1)^2] \approx 0$$

Misal dikerjakan sesuai dengan konstanta yang digunakan pada jembatan, maka setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.1.9) sesuai dengan jaringan hitung pada gambar 3.2. Pada gambar 3.2 dapat dilihat getaran tali yang terjadi pada jembatan dengan kondisi awal $\exp[-10(4x_i - 1)^2]$ pada model gelombang tali yang homogen. Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 1.



Gambar 3.2 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $v(x, t)$

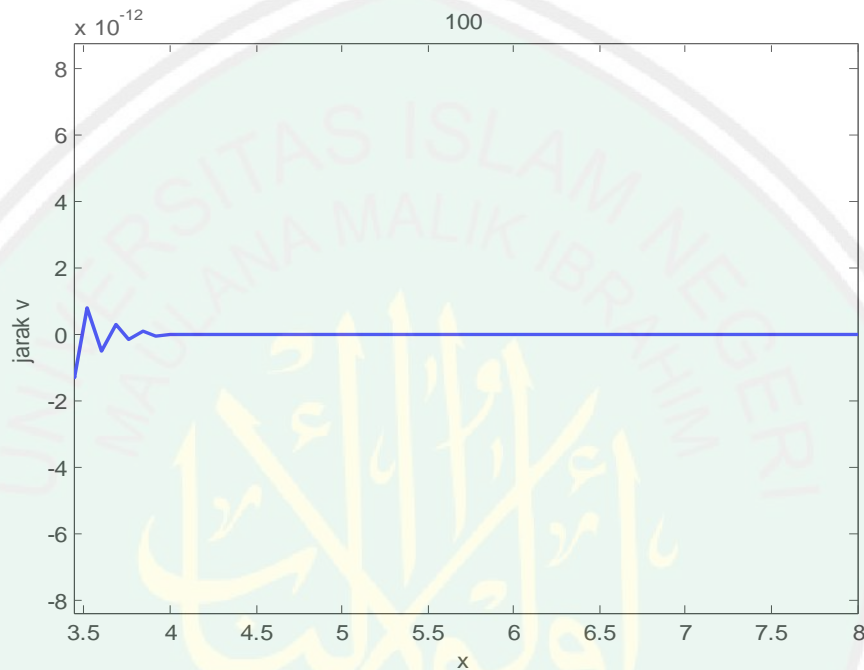
Berdasarkan hasil simulasi gambar 3.2 pada model gelombang tali yang homogen getaran tali yang dialami sebesar $-1.5 \times 10^{-13} \leq v \leq 1.5 \times 10^{-13}$, dapat dilihat pada jarak $1.5 \leq x \leq 4$ berikut:



Gambar 3.3 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $v(x, t)$ pada Jarak $1.5 \leq t \leq 4$

Dalam hal ini kondisi awal $\exp[-10(4x_i - 1)^2]$ sangat mempengaruhi besarnya amplitudo yang terjadi karena dengan kondisi awal ini didapatkan gaya yang berubah-ubah sepanjang nilai x . Ketidakstabilan grafik menunjukkan bahwa amplitudo perpindahan meningkat terus menerus (menyimpang) dengan waktu pada masa ini (awal getaran) dapat dikatakan terdapat gejala awal yang menyebabkan kerusakan pada bagian lain, sehingga getaran tali pada saat awal adanya gaya tidak beraturan yang diikuti dengan adanya penanggulangan terjadinya getaran yang lebih besar terhadap tali. Keadaan jembatan yang sangat baik menyebabkan proses terjadinya getaran tali tidak berlangsung lama, sehingga

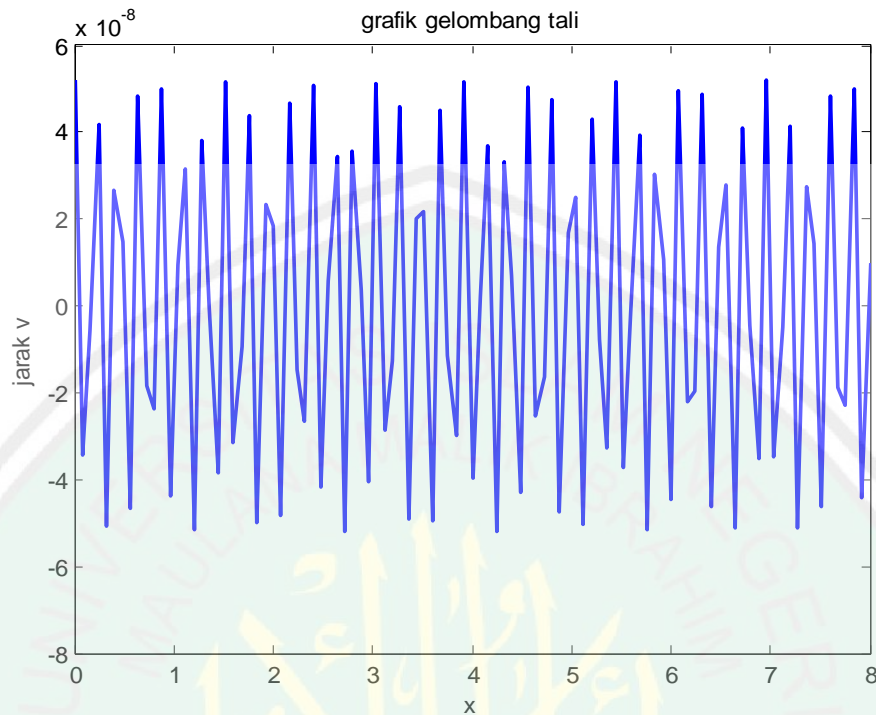
jembatan yang bergetar lebih cepat stabil karena gerakan (atau perpindahan) gaya yang berubah-ubah sepanjang nilai x menyatu atau tetap stabil dengan waktu pada $2.5 \leq x \leq 8$ yang digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $v(x, t)$ pada Jarak $4 \leq x \leq 8$

Grafik tersebut menunjukkan kestabilan getaran tali yang terjadi pada jarak $4 \leq x \leq 8$ dan waktu pada iterasi ke -100 dengan besarnya gaya yang hampir mendekati nol.

Sebagai perbandingan dapat dilihat gambar yang dihasilkan dari program matlab secara analitik adalah sebagai berikut:



Gambar 3.5 Grafik Analitik untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $v(x, t)$

Tabel 3.1 Galat Error antara Analitik dan Numerik

Iterasike-	Analitik	Numerik	Error
1	$5,187 \times 10^{-8}$	0	$5,187 \times 10^{-8}$
2	$-3,417 \times 10^{-8}$	$-2,928 \times 10^{-27}$	$0,489 \times 10^{-16}$
3	$-5,776 \times 10^{-9}$	$1,386 \times 10^{-25}$	$7,162 \times 10^{-16}$
4	$4,196 \times 10^{-8}$	$-3,248 \times 10^{-24}$	$7,444 \times 10^{-16}$
5	$-5,083 \times 10^{-8}$	$5,021 \times 10^{-23}$	$10,104 \times 10^{-15}$
6	$2,663 \times 10^{-8}$	$-5,759 \times 10^{-22}$	$8,422 \times 10^{-14}$
7	$1,491 \times 10^{-8}$	$5,229 \times 10^{-21}$	$3,738 \times 10^{-13}$
8	$-4,674 \times 10^{-8}$	$-3,913 \times 10^{-20}$	$0,761 \times 10^{-12}$
9	$4,816 \times 10^{-8}$	$2,483 \times 10^{-19}$	$2,333 \times 10^{-11}$
10	$-1,823 \times 10^{-8}$	$-1,364 \times 10^{-18}$	$0,459 \times 10^{-10}$
11	$-2,356 \times 10^{-8}$	$6,582 \times 10^{-18}$	$8,938 \times 10^{-10}$
12	$5,002 \times 10^{-8}$	$-2,827 \times 10^{-17}$	$7,829 \times 10^{-9}$
13	$-4,392 \times 10^{-8}$	$1,091 \times 10^{-16}$	$5,483 \times 10^{-8}$
14	$9,246 \times 10^{-9}$	$-3,818 \times 10^{-16}$	$13,084 \times 10^{-7}$
15	$3,145 \times 10^{-8}$	$1,219 \times 10^{-15}$	$1,926 \times 10^{-7}$
16	$-5,168 \times 10^{-8}$	$-3,569 \times 10^{-15}$	$1,599 \times 10^{-7}$
17	$3,827 \times 10^{-8}$	$9,639 \times 10^{-15}$	$5,812 \times 10^{-7}$
18	$3,709 \times 10^{-11}$	$-2,411 \times 10^{-14}$	$6,12 \times 10^{-3}$
19	$-3,823 \times 10^{-8}$	$5,608 \times 10^{-14}$	$9,431 \times 10^{-6}$
20	$5,167 \times 10^{-8}$	$-1,216 \times 10^{-13}$	$6,383 \times 10^{-5}$

21	$-3,139 \times 10^{-8}$	$2,469 \times 10^{-13}$	$5,608 \times 10^{-5}$
22	$-9,319 \times 10^{-9}$	$-4,7 \times 10^{-13}$	$4,619 \times 10^{-4}$
23	$4,396 \times 10^{-8}$	$8,411 \times 10^{-13}$	$4,015 \times 10^{-5}$
24	-5×10^{-8}	$-1,418 \times 10^{-12}$	$3,582 \times 10^{-4}$
25	$2,349 \times 10^{-8}$	$2,257 \times 10^{-12}$	$0,092 \times 10^{-4}$
⋮	⋮	⋮	⋮
101	$9,991 \times 10^{-9}$	0	$9,991 \times 10^{-9}$

Penyelesaian solusi analitik secara lengkap dapat dilihat pada lampiran 3.

3.2 Analisis Kestabilan Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory pada Persamaan Gelombang Tali Homogen

Skema eksplisit beda hingga Newton Gregory untuk persamaan gelombang tali pada (3.1.8) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$v_j^{n+1} = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_j^n + v_j^{n-1})$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

$$+ \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q-1)(-v_j^n)}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

dengan

$$|\lambda| = \left| \frac{T \Delta t^3}{\Delta x^2} \right|$$

merupakan bilangan Courant untuk persamaan gelombang tali. Didefinisikan

$$\frac{-m_1 q \Delta t (-2v_j^n + v_j^{n-1})}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} + \frac{b_1 2 \Delta t^2 q (q-1)(-v_j^n)}{(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} = K$$

Sehingga persamaan (3.1.8) menjadi bentuk berikut,

$$v_j^{n+1} = K - \lambda \frac{q^2 (q-1)(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)}{s(s-1)(-b_1 2 \Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} \quad (3.2.1)$$

diasumsikan bahwa $\Delta t \rightarrow 0$ sehingga berlaku

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-m_1 q \Delta t (-2v_j^n + v_j^{n-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)(-v_j^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} = 0 \text{ atau } K = 0$$

Persamaan (3.2.1) menjadi persamaan berikut:

$$v_j^{n+1} = -\lambda \frac{q^2(q-1)(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} \quad (3.2.2)$$

Substitusi deret Fourier diskrit pada persamaan (2.6.3) pada persamaan (3.2.2)

diperoleh,

$$\sum_{k=0}^{J-1} T_k^{n+1} w_j^k = \sum_{k=0}^{J-1} -\lambda T_k^n w_{j+1}^k + 2\lambda T_k^n w_j^k - \lambda T_k^n w_{j-1}^k \quad (3.2.3)$$

sesuai persamaan (2.6.4) maka w_{j-1} dapat diubah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} w_{j-1} &= e^{2\pi i(j-1)/J} \\ w_{j-1} &= e^{2\pi i j / J} e^{-2\pi i / J} \\ w_{j-1} &= w_j e^{-2\pi i / J} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

sesuai persamaan (2.6.6) maka w_{j+1} dapat diubah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} w_{j+1} &= e^{2\pi i(j+1)/J} \\ w_{j+1} &= e^{2\pi i j / J} e^{2\pi i / J} \\ w_{j+1} &= w_j e^{2\pi i / J} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Substitusi (3.2.4) dan (3.2.5) pada persamaan (3.2.3) maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{J-1} T_k^{n+1} w_j^k &= \sum_{k=0}^{J-1} -\lambda T_k^n w_j^k e^{2\pi i / J} + 2\lambda T_k^n w_j^k - \lambda T_k^n w_j^k e^{-2\pi i / J} \\ T_k^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right) \left[-\lambda e^{\frac{2\pi i}{J}} + 2\lambda - \lambda e^{-\frac{2\pi i}{J}} \right] T_k^n \end{aligned}$$

$$T_k^{n+1} = \left[-\lambda e^{\frac{2\pi i}{J}} + 2\lambda - \lambda e^{-\frac{2\pi i}{j}} \right] T_k^n$$

$$T_k^{n+1} = M_k T_k^n \quad (3.2.6)$$

dengan

$$M_k = -\lambda e^{\frac{2\pi i}{J}} + 2\lambda - \lambda e^{-\frac{2\pi i}{j}} \quad (3.2.7)$$

M_k merupakan faktor amplifikasi yang membuat bentuk Fourier pada (3.2.7) semakin besar atau semakin kecil pada salah satu step ke- k . Salah satu iterasi untuk persamaan (3.2.6) adalah,

$$T_k^{n+1} = (M_k)^n T_k^n \quad (3.2.8)$$

Selanjutnya akan ditentukan konstanta T sehingga,

$$\|M_k^n\| \leq c, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0, \quad n\Delta t \leq T$$

atau

$$P(M_k) = |M_k| \leq 1 + c\Delta t, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0$$

Sehingga diperoleh,

$$|M_k| \leq 1$$

Selanjutnya akan disederhanakan $|M_k|$ sebagai berikut,

$$|M_k| = \left| -\lambda e^{\frac{2\pi i}{J}} + 2\lambda - \lambda e^{-\frac{2\pi i}{j}} \right| \leq 1 \quad (3.2.9)$$

persamaan (3.2.9) jika disederhanakan maka menjadi:

$$|M_k| = \left| 2\lambda - \lambda \left(e^{\frac{2\pi i}{J}} + e^{-\frac{2\pi i}{j}} \right) \right| \leq 1 \quad (3.2.10)$$

Digunakan identitas Euler sebagai berikut,

$$e^{2\pi i/J} = \cos \frac{2\pi}{J} + i \sin \frac{2\pi}{J} \quad (3.2.11)$$

$$e^{-2\pi i/J} = \cos \frac{2\pi}{J} - i \sin \frac{2\pi}{J} \quad (3.2.12)$$

Substitusi persamaan (3.2.11) dan (3.2.12) pada persamaan (3.2.10) sehingga,

$$\left| 2\lambda - 2\lambda \cos \frac{2\pi}{J} \right| \leq 1 \quad (3.2.13)$$

Karena

$$\cos \frac{2\pi}{J} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{J}$$

Maka,

$$\left| 2\lambda - 2\lambda \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{J} \right) \right| \leq 1$$

Di ambil nilai sinus maksimum yaitu,

$$\sin^2 \frac{\pi}{J} = 1$$

diperoleh ketaksamaan

$$|2\lambda + 2\lambda| \leq 1$$

$$|4\lambda| \leq 1$$

sehingga didapatkan interval untuk nilai λ sebagai berikut:

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$$

Maka bilangan Courant untuk persamaan gelombang tali (2.3.1) harus memenuhi ketaksamaan berikut:

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4} \quad (3.2.13)$$

Dari hasil substitusi nilai λ pada sub bab 3.1 didapatkan

$$\lambda = \frac{T\Delta t^3}{\Delta x^2} = 0.0000013 \frac{0.08^3}{0.02^2} = 0.0000013 \frac{0.000512}{0.0004} = 0.0000017$$

Maka dapat disimpulkan dengan menggunakan $\Delta t = 0.08$ dengan interval $0 \leq t \leq 8$ dan $\Delta x = 0.02$ dengan interval $0 \leq x \leq 2$ didapatkan nilai λ yang memenuhi syarat kestabilan bilangan Courant yaitu:

$$1.7 \times 10^{-6} \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$$

3.3 Analisis Polinom Newton Gregory pada Persamaan Gelombang Tali non Homogen

Berikut merupakan persamaan gelombang tali non homogen sembarang yang kontinu:

$$m_1 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - b_1 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 1$$

Untuk setiap m_1, T, b_1 adalah konstanta.

Didefinisikan bahwa

$$v(x_i, t_n) = v_i^n$$

Transformasi beda pusat Newton Gregory untuk turunan kedua ruang pada t menurut persamaan (2.5.24) sebagai berikut:

$$v_{tt}(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{2\Delta t^2 q(q-1)}, \forall q = \frac{t - t_0}{\Delta t}$$

dan transformasi beda pusat Newton Gregory untuk turunan kedua ruang pada x menurut persamaan (2.5.12) sebagai berikut:

$$v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2\Delta x^2 s(s-1)}, \forall s = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

dan transformasi beda maju Newton Gregory untuk turunan waktu (t) menurut persamaan (2.5.17) sebagai berikut:

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{q\Delta t}, \forall q = \frac{t - t_0}{\Delta t}$$

Bentuk transformasi beda hingga tersebut disubstitusikan pada persamaan (2.3.1) yang telah diubah menjadi kasus non homogen sembarang maka diperoleh bentuk diskret model sebagai berikut:

$$m_1 \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{2\Delta t^2 q^2 - q} + T \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2\Delta x^2 s^2 - s} - b_1 \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{q\Delta t} = 1$$

Substitusikan bentuk beda hingga tersebut pada persamaan (2.3.1) yang telah diubah menjadi kasus non homogen, lalu pindahkan beda pusat Newton Gregory untuk turunan kedua ruang pada x dan turunan kedua ruang t ke ruas kanan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{-b_1}{q\Delta t} (v_i^{n+1} - v_i^n) &= 1 - \frac{m_1}{2\Delta t^2 q(q-1)} v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1} \\ &\quad - T \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2\Delta x^2 s(s-1)} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Kalikan kedua ruas dengan $q\Delta t$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -b_1(v_i^{n+1} - v_i^n) &= (1)(q\Delta t) - \frac{m_1 q\Delta t (v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1})}{2\Delta t^2 q(q-1)} \\ &\quad - T \frac{q\Delta t (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)}{2\Delta x^2 s(s-1)} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Pindahkan $b_1 v_i^n$ ke ruas kanan, sehingga diperoleh

$$-b_1(v_i^{n+1}) = (q\Delta t) - m_1 \frac{q\Delta t (v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1})}{2\Delta t^2 q(q-1)} \quad (3.3.3)$$

$$-T \frac{q\Delta t(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)}{2\Delta x^2 s(s-1)} + b_1(-v_i^n)$$

Pindahkan $m_1 \frac{q\Delta t(v_i^{n+1})}{2\Delta t^2 q(q-1)}$ ke ruas kiri, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -b_1(v_i^{n+1}) + m_1 \frac{q\Delta t(v_i^{n+1})}{2\Delta t^2 q(q-1)} &= (q\Delta t) - m_1 \frac{q\Delta t(-2v_i^n + v_i^{n-1})}{2\Delta t^2 q(q-1)} \\ &\quad - T \frac{q\Delta t(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)}{2\Delta x^2 s(s-1)} + b_1(-v_i^n) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Persamaan (3.3.4) jika disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{n+1}(-b_1\Delta t^2 2q(q-1) + m_1q\Delta t)}{2\Delta t^2 q(q-1)} &= (q\Delta t) - m_1 \frac{q\Delta t(-2v_i^n + v_i^{n-1})}{2\Delta t^2 q(q-1)} \\ &\quad - T \frac{q\Delta t(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)}{2\Delta x^2 s(s-1)} + b_1(-v_i^n) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Kalikan kedua ruas dengan $2\Delta t^2 q(q-1)$, sehingga persamaan (3.3.5) menjadi

$$v_i^{n+1}(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t) = (q\Delta t) 2\Delta t^2 q(q-1) \quad (3.3.6)$$

$$-m_1 q\Delta t(-2v_i^n + v_i^{n-1}) - T \frac{q\Delta t(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)}{2\Delta x^2 s(s-1)} (2\Delta t^2 q(q-1))$$

$$+ b_1(-v_i^n) 2\Delta t^2 q(q-1)$$

Bagikan kedua ruas dengan $(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)$, sehingga persamaan

(3.3.6) menjadi

$$v_i^{n+1} = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} \quad (3.3.7)$$

$$(-2v_i^n + v_i^{n-1}) - T \frac{\Delta t^3 q^2(q-1)}{\Delta x^2 s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)}$$

$$(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)(-v_i^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)}$$

Didefinisikan

$$\lambda = \left| \frac{T\Delta t^3}{\Delta x^2} \right|$$

sehingga persamaan (3.3.7) dapat dituliskan sebagai

$$v_i^{n+1} = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} \quad (3.3.8)$$

$$(-2v_i^n + v_i^{n-1}) - \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + \frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1)(-v_i^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

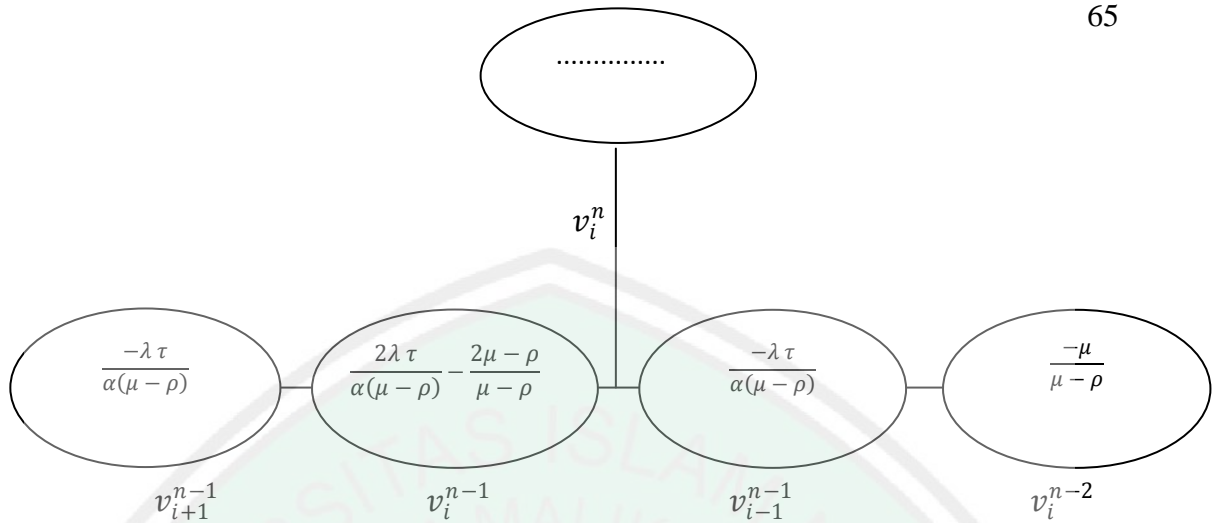
Jika iterasi n dimulai dari $n-1$ maka digunakan bentuk berikut:

$$v_i^n = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} \quad (3.3.9)$$

$$(-2v_i^{n-1} + v_i^{n-2}) - \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$(v_{i+1}^{n-1} - 2v_i^{n-1} + v_{i-1}^{n-1}) + \frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1)(-v_i^{n-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

Stensil bentuk beda hingga model diskret gelombang tali untuk persamaan (3.3.9) pada daerah $x_0 < x < L$ dan $t_0 < t < \tau$ dengan $n = 1$ dan $i = 1$ dengan memisalkan $\tau = q^2 (q-1)$, $\alpha = s(s-1)$, $\rho = b_1 2\Delta t^2 q (q-1)$ dan $\mu = m_1 q \Delta t$ yaitu:



Gambar 3.6 Stensil Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory untuk Model Gelombang Tali non Homogen

Didefinisikan $l = L/\Delta x$ sehingga banyak titik *grid* untuk x adalah $l + 1$ dan $k = \tau/\Delta t$ sehingga banyak titik *grid* untuk t adalah $k + 1$. Selanjutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi batas. Kondisi batas adalah $v(x_0, t) = 0$ dan $v(L, t) = 0$ sehingga,

$$v_0^n = v_l^n = 0, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, k$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal. Digunakan kondisi awal sebagai berikut:

$$v(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$$

Kondisi awal pada waktu ke- n dan jarak ke- i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$v_i^n = \exp[-10(4x_i - 1)^2], \quad \forall n = 0 \forall i = 0, 1, 2, \dots, l$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.3.9) sesuai dengan stensil beda hingga pada gambar 3.6. Deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu dapat dinyatakan sebagai berikut:

untuk $i = 1$ dan $n = 1$

$$v_1^1 = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_1^0 + v_1^{-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_2^0 - 2v_1^0 + v_0^0)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_1^0)$$

untuk $i = 2$ dan $n = 1$

$$v_2^1 = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_2^0 + v_2^{-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_3^0 - 2v_2^0 + v_1^0)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_2^0)$$

untuk $i = 3$ dan $n = 1$

$$v_3^1 = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_3^0 + v_3^{-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_4^0 - 2v_3^0 + v_2^0)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_3^0)$$

⋮

untuk $i = l - 1$ dan $n = 1$

$$v_{l-1}^1 = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_{l-1}^0 + v_{l-1}^{-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_l^0 - 2v_{l-1}^0 + v_{l-2}^0)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (-v_{l-1}^0)$$

untuk $i = 1$ dan $n + 1 = 2$

$$v_1^2 = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t(-2v_1^1 + v_1^0)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (v_2^1 - 2v_1^1 + v_0^1)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (-v_1^1)$$

untuk $i = 2$ dan $n + 1 = 2$

$$v_2^2 = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t(-2v_2^1 + v_2^0)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (v_3^1 - 2v_2^1 + v_1^1)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (-v_2^1)$$

untuk $i = 3$ dan $n + 1 = 2$

$$v_3^2 = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t(-2v_3^1 + v_3^0)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (v_4^1 - 2v_3^1 + v_2^1)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (-v_3^1)$$

⋮

untuk $i = l - 1$ dan $n + 1 = 2$

$$v_{l-1}^2 = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t(-2v_{l-1}^1 + v_{l-1}^0)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)}$$

$$-\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (v_l^1 - 2v_{l-1}^1 + v_{l-2}^1) \\ + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (-v_{l-1}^1)$$

untuk $i = 1$ dan $n + 2 = 3$

$$v_1^3 = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t(-2v_1^2 + v_1^1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} \\ -\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (v_2^2 - 2v_1^2 + v_0^2) \\ + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (-v_1^2)$$

untuk $i = 2$ dan $n + 2 = 3$

$$v_2^3 = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t(-2v_1^2 + v_1^1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} \\ -\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (v_3^2 - 2v_2^2 + v_1^2) \\ + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (-v_2^2)$$

untuk $i = 3$ dan $n + 2 = 3$

$$v_3^3 = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t(-2v_3^2 + v_3^1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} \\ -\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} (v_4^2 - 2v_3^2 + v_2^2) \\ + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} v_3^2$$

untuk $i = l - 1$ dan $n + 2 = 3$

$$v_{l-1}^3 = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)} - \frac{m_1 q\Delta t(-2v_{l-1}^2 + v_{l-1}^{n-2})}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q\Delta t)}$$

$$-\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_l^2 - 2v_{l-1}^2 + v_{l-2}^2) \\ + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_{l-1}^2)$$

untuk $i = 1$ dan $n = k$

$$v_1^k = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_1^k + v_1^{k-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} \\ -\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_2^k - 2v_1^k + v_0^k) \\ + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_1^k)$$

untuk $i = 2$ dan $n = k$

$$v_2^k = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_2^k + v_2^{k-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} \\ -\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_3^k - 2v_2^k + v_1^k) \\ + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_2^k)$$

⋮

untuk $i = l - 1$ dan $n = k$

$$v_{l-1}^k = \frac{2\Delta t^3 q^2(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_{l-1}^{k-1} + v_{l-1}^{k-2})}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} \\ -\lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_{l+1}^{-1} - 2v_l^{k-1} + v_{l-1}^{k-1}) \\ - \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-v_{l-1}^{k-1})$$

Setelah didapatkan iterasi kasus non homogen dapat diselesaikan, contoh persamaan gelombang pada daerah batas $0 < x < 4$ dan $0 < t < 1$. Nilai batas $v(0, t) = 0$, dan $v(4, t) = 0$ untuk semua t . Sesuai jurnal Ohene1, dkk. (2012:51) dengan nilai konstanta $m_1 = 6000 \text{ kg}$, $T = F = m_1 \times a = 0.0000013$ diambil a karena disini penulis memilih menghitung tekanan dari semua arah sepanjang objek jembatan dan nilai $b_1 = 0.01$, sehingga persamaan (2.3.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$6000v_{tt} + 0.0000013v_{xx} + 0.01v_t = 1 \quad (3.3.10)$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0.01$, dan $\Delta x = 0.04$ sehingga nilai λ adalah

$$\lambda = \frac{T\Delta t^3}{\Delta x^2} = 0.0000013 \frac{0.01^3}{0.04^2} = 0.0000013 \frac{0.000001}{0.0016} = 0.0000000008125$$

Substitusi nilai λ pada skema beda hingga untuk persamaan (2.3.1) yang telah diubah menjadi non homogen sesuai dengan persamaan (3.3.9) adalah sebagai berikut:

$$v_i^n = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_i^{n-1} + v_i^{n-2})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_{i+1}^{n-1} - 2v_i^{n-1} + v_{i-1}^{n-1})$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1)(-v_i^{n-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

Gunakan polinom Newton Gregory maju untuk interpolasi dalam arah x dan dalam arah t , karena titik-titiknya berjarak sama. Karena dalam arah x menggunakan interpolasi derajat dua, maka dipilih tiga buah titik di tabel yaitu pada $x = 3.84, 3.88$, dan 3.92 karena $x = 3.9$ terletak paling dekat dengan pertengahan selang $[3.84, 3.92]$. Dalam arah t , dipilih tiga buah titik, yaitu pada

$t = 0.11, 0.12$ dan 0.13 karena $t = 0.129$ terletak paling dekat dengan pertengahan selang $[0.11, 0.13]$.

Untuk $p_2(3.9, 0.129)$, maka diambil $x = 3.9$ dan $t = 0.129$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3.9 - 3.84}{0.04} = 1.5$$

$$q = \frac{t - t_0}{h} = \frac{0.129 - 0.11}{0.01} = 1.9$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $l + 1$ dengan nilai l sebagai berikut:

$$l = \frac{L - x_0}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{0.04} = 100$$

Secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k + 1$ dengan nilai k sebagai berikut:

$$k = \frac{\tau - t_0}{\Delta t} = \frac{1 - 0}{0.01} = 100$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.3.9) sebagai berikut,

$$v(x_0, t) = v(0, t) = 0 \text{ dan } v(L, t) = v(4, t) = 0, \forall 0 < t < 1$$

sehingga diperoleh $v_i^n = 0, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100. \forall i = 0, \dots, 100$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$v_0^0 = 0$$

$$v_{10}^0 = 0$$

$$v_0^1 = 0$$

$$v_{10}^1 = 0$$

$$v_0^2 = 0$$

$$v_{100}^2 = 0$$

⋮

⋮

$$v_0^{100} = 0$$

$$v_{100}^{100} = 0$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut,

$$v_i^n = \exp[-10(4x_i - 1)^2], \quad \forall n = 0 \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Kondisi awal diambil $\exp[-10(4x_i - 1)^2]$ karena dianggap beban yang melewati jembatan tidak hanya satu tapi banyak, jika diambil kondisi awal linier maka yang dihitung hanya beban dari satu-persatu beban yang lewat.

Iterasi untuk nilai awal adalah sebagai berikut:

$$v_1^0 = v(0.04, 0) = \exp[-10(4(0.04) - 1)^2] = 8.6222 \times 10^{-4}$$

$$v_2^0 = v(0.08, 0) = \exp[-10(4(0.08) - 1)^2] = 9.813464 \times 10^{-3}$$

$$v_3^0 = v(0.12, 0) = \exp[-10(4(0.12) - 1)^2] = 6.6937228 \times 10^{-2}$$

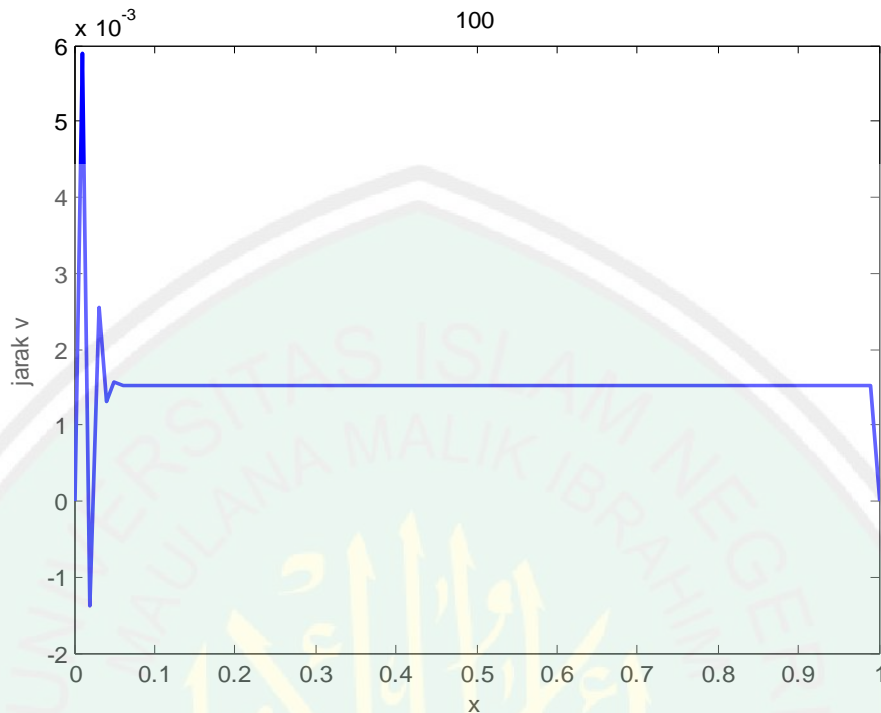
$$v_4^0 = v(0.16, 0) = \exp[-10(4(0.16) - 1)^2] = 2.73624103 \times 10^{-1}$$

$$v_5^0 = v(0.2, 0) = \exp[-10(4(0.2) - 1)^2] = 6.703320046 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^0 = v(7.2, 0) = \exp[-10(4(7.2) - 1)^2] \approx 0$$

Misal dikerjakan sesuai dengan konstanta yang digunakan pada jembatan, maka setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.3.9) sesuai dengan stensil beda hinggapada gambar 3.6. Pada gambar 3.6 dapat dilihat getaran yang terjadi pada jembatan dengan kondisi awal $\exp[-10(4x_i - 1)^2]$ pada model gelombang non homogen. Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 2.



Gambar 3.7 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tali non Homogen Persamaan $v(x, t)$

Berdasarkan hasil simulasi gambar 3.7 pada model gelombang tali non homogen getaran yang dialami sebesar $-1.5 \times 10^{-3} > v < 1.5 \times 10^{-3}$, dapat dilihat pada jarak $0 \leq x < 0.07$. Dalam hal ini kondisi awal $\exp[-10(4x_i - 1)^2]$ sangat mempengaruhi besarnya amplitudo yang terjadi karena dengan kondisi awal ini didapatkan gaya yang berubah-ubah sepanjang nilai x . Ketidakstabilan grafik menunjukkan bahwa pada masa ini (awal getaran) dapat dikatakan terdapat gejala awal yang menyebabkan kerusakan pada bagian lain, sehingga getaran pada saat awal adanya gangguan tidak beraturan yang diikuti dengan adanya penanggulangan terjadinya getaran yang lebih besar terhadap jembatan, amplitudo perpindahan meningkat terus menerus (menyimpang) dengan waktu. Pada jarak $0.07 \leq x < 0.99$ tampak bahwa tali mengalami getaran sebesar $v \leq 1.5 \times 10^{-3}$ secara stabil.

3.4 Analisis Kestabilan Skema Eksplisit Beda Hingga Newton Gregory pada Persamaan Gelombang Tali non Homogen

Skema eksplisit beda hingga Newton Gregory untuk persamaan gelombang tali pada (3.3.8) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$v_j^{n+1} = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_j^n + v_j^{n-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$- \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1) (-v_j^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

dengan

$$|\lambda| = \left| \frac{T \Delta t^3}{\Delta x^2} \right|$$

merupakan bilangan Courant untuk persamaan gelombang tali. Didefinisikan

$$\frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_j^n + v_j^{n-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} +$$

$$\frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1) (-v_j^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} = K$$

Sehingga persamaan (3.3.8) menjadi bentuk berikut,

$$v_j^{n+1} = K - \lambda \frac{q^2 (q-1) (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} \quad (3.4.1)$$

diasumsikan bahwa $\Delta t \rightarrow 0$ sehingga berlaku

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t (-2v_j^n + v_j^{n-1})}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} + \frac{b_1 2\Delta t^2 q (q-1) (-v_j^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q (q-1) + m_1 q \Delta t)} = 0$$

Atau $K = 0$

Persamaan (3.4.1) menjadi persamaan berikut:

$$v_j^{n+1} = -\lambda \frac{q^2(q-1)(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} \quad (3.4.2)$$

Substitusi deret Fourier diskrit pada persamaan (2.6.3) pada persamaan (3.4.2) diperoleh,

$$\sum_{k=0}^{J-1} T_k^{n+1} w_j^k = \sum_{k=0}^{J-1} -\lambda T_k^n w_{j+1}^k + 2\lambda T_k^n w_j^k - \lambda T_k^n w_{j-1}^k \quad (3.4.3)$$

sesuai persamaan (2.6.4) maka w_{j-1} dapat diubah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} w_{j-1} &= e^{2\pi i(j-1)/J} \\ w_{j-1} &= e^{2\pi i j / J} e^{-2\pi i / J} \\ w_{j-1} &= w_j e^{-2\pi i / J} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

sesuai persamaan (2.6.6) maka w_{j+1} dapat diubah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} w_{j+1} &= e^{2\pi i(j+1)/J} \\ w_{j+1} &= e^{2\pi i j / J} e^{2\pi i / J} \\ w_{j+1} &= w_j e^{2\pi i / J} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Substitusi (3.4.4) dan (3.4.5) pada persamaan (3.4.3) maka diperoleh,

$$\sum_{k=0}^{J-1} T_k^{n+1} w_j^k = \sum_{k=0}^{J-1} -\lambda T_k^n w_j^k e^{2\pi i / J} + 2\lambda T_k^n w_j^k - \lambda T_k^n w_j^k e^{-2\pi i / J}$$

$$T_k^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right) \left[-\lambda e^{\frac{2\pi i}{J}} + 2\lambda - \lambda e^{-\frac{2\pi i}{J}} \right] T_k^n$$

$$T_k^{n+1} = \left[-\lambda e^{\frac{2\pi i}{J}} + 2\lambda - \lambda e^{-\frac{2\pi i}{J}} \right] T_k^n$$

$$T_k^{n+1} = M_k T_k^n \quad (3.4.6)$$

dengan

$$M_k = -\lambda e^{\frac{2\pi i}{J}} + 2\lambda - \lambda e^{-\frac{2\pi i}{j}} \quad (3.4.7)$$

M_k merupakan faktor amplifikasi yang membuat bentuk Fourier pada (3.4.7) semakin besar atau semakin kecil pada salah satu step ke- k . Salah satu iterasi untuk persamaan (3.4.6) adalah,

$$T_k^{n+1} = (M_k)^n T_k^n \quad (3.4.8)$$

Selanjutnya akan ditentukan konstanta T sehingga,

$$\|M_k^n\| \leq c, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0, \quad n\Delta t \leq T$$

atau

$$P(M_k) = |M_k| \leq 1 + c\Delta t, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0$$

Sehingga diperoleh,

$$|M_k| \leq 1$$

Selanjutnya akan disederhanakan $|M_k|$ sebagai berikut,

$$|M_k| = \left| -\lambda e^{\frac{2\pi i}{J}} + 2\lambda - \lambda e^{-\frac{2\pi i}{j}} \right| \leq 1 \quad (3.4.9)$$

persamaan (3.2.9) jika disederhanakan maka menjadi:

$$|M_k| = \left| 2\lambda - \lambda \left(e^{\frac{2\pi i}{J}} + e^{-\frac{2\pi i}{j}} \right) \right| \leq 1 \quad (3.4.10)$$

Digunakan identitas Euler sebagai berikut,

$$e^{2\pi i/J} = \cos \frac{2\pi}{J} + i \sin \frac{2\pi}{J} \quad (3.4.11)$$

$$e^{-2\pi i/J} = \cos \frac{2\pi}{J} - i \sin \frac{2\pi}{J} \quad (3.4.12)$$

Substitusi persamaan (3.4.11) dan (3.4.12) pada persamaan (3.4.10) sehingga,

$$\left| 2\lambda - 2\lambda \cos \frac{2\pi}{J} \right| \leq 1 \quad (3.4.13)$$

Karena

$$\cos \frac{2\pi}{J} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{J}$$

Maka,

$$\left| 2\lambda - 2\lambda \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{J} \right) \right| \leq 1$$

Di ambil nilai sinus maksimum yaitu,

$$\sin^2 \frac{\pi}{J} = 1$$

diperoleh ketaksamaan

$$|2\lambda + 2\lambda| \leq 1$$

$$|4\lambda| \leq 1$$

sehingga didapatkan interval untuk nilai λ sebagai berikut:

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$$

Maka bilangan Courant untuk persamaan gelombang tali (2.3.1) berbentuk non homogen harus memenuhi ketaksamaan berikut:

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4} \quad (3.4.13)$$

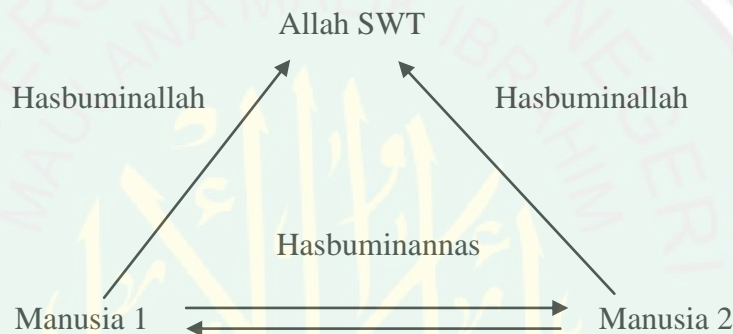
Dari hasil substitusi nilai λ pada sub bab 3.3 didapatkan

$$\lambda = \frac{T\Delta t^3}{\Delta x^2} = 0.0000013 \frac{0.01^3}{0.04^2} = 0.0000013 \frac{0.000001}{0.0016} = 0.000000008125$$

Maka dapat disimpulkan dengan menggunakan $\Delta t = 0.01$ dengan interval $0 \leq t \leq 1$ dan $\Delta x = 0.04$ dengan interval $0 \leq x \leq 4$ didapatkan nilai λ yang memenuhi syarat kestabilan bilangan Courant yaitu:

$$8.125 \times 10^{-10} \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$$

3.5 Integrasi antara Doa dan Getaran dalam Islam



3.8 Relasi antara Doa dengan Allah dan Sesama Manusia

Aktifitas Dzikir (Mengingat Allah) termasuk kegiatan positif yang melibatkan fikiran dan perasaan manusia, dan itu mempunyai dampak positif terhadap diri manusia. Dzikrullah itu menghasilkan getaran-getaran gelombang elektromagnetik dengan frekuensi cahaya yang terus menerus menggesek hati. Maka hatipun akan memancarkan cahaya. Jika getaran Dzikrullah yang lembut ini vibrasinya semakin menguat, maka ia akan merembet menggetarkan seluruh bio elektron dalam tubuhnya untuk mengikuti getaran energi dzikir tersebut, hasilnya seluruh sel dan bioelektron yang berada di dalam diri manusia akan menjadi stabil (tenang) dan berproses dengan sehat. Allah berfirman dalam surat Ar Ra'd 28 (Jalupangna, 2012:2):

الَّذِينَ آمَنُوا وَتَطْمَئِنُّ قُلُوبُهُمْ بِذِكْرِ اللَّهِ أَلَا بِذِكْرِ اللَّهِ تَطْمَئِنُّ الْقُلُوبُ ﴿٢٨﴾

Artinya: “(yaitu) orang-orang yang beriman dan hati mereka manjadi tenteram dengan mengingat Allah. Ingatlah, Hanya dengan mengingati Allah-lah hati menjadi tenteram”(QS. Ar Ra’d [13]:28).

Hal tersebut juga semakna dengan firman Allah dalam surat Az Zumar ayat 23:

اللَّهُ نَزَلَ أَحْسَنَ الْحَدِيثِ كِتَابًا مُتَشَابِهًا مَثَانِيَ تَقْشَعِرُّ مِنْهُ جُلُودُ الَّذِينَ يَخْشَوْنَ رَبَّهُمْ ثُمَّ تَلِينُ جُلُودُهُمْ وَقُلُوبُهُمْ إِلَىٰ ذِكْرِ اللَّهِ ۚ ذَٰلِكَ هُدَىٰ اللَّهِ يَهْدِي بِهِ ۚ مَنْ يَشَاءُ ۚ وَمَنْ يُضَلِلِ اللَّهُ فَمَا لَهُ مِنْ هَادٍ ۖ

Artinya: “Allah Telah menurunkan perkataan yang paling baik (yaitu) Al Quran yang serupa (mutu ayat-ayatnya) lagi berulang-ulang, gemetar karenanya kulit orang-orang yang takut kepada Tuhannya, kemudian menjadi tenang kulit dan hati mereka di waktu mengingat Allah. Itulah petunjuk Allah, dengan Kitab itu dia menunjuki siapa yang dikehendaki-Nya. Dan barangsiapa yang disesatkan Allah, niscaya tak ada baginya seorang pemimpinpun”(QS. Az Zumar [39]:23).

Betapa jelasnya Allah mengatakan dalam ayat-ayat di atas, bahwa getaran Dzikirullah berimbas ke seluruh sel yang berada di dalam tubuh manusia. Doa yang dipanjatkan dengan sungguh-sungguh dan penuh keyakinan serta harapan merupakan gelombang fikiran dan perasaan positif yang dapat mengaktifkan gen yang baik untuk memperbaiki berbagai kerusakan tubuh yang muncul akibat penyakit yang diderita (Jalupangna, 2012:2). Masing-masing sel di tubuh manusia akan bergetar dengan sistem yang seksama, dan perubahan sekecil apapun pada getaran itu akan mengakibatkan sakit pada sebagian organ tubuh. Itulah kenapa sel-sel yang rusak itu harus digetarkan untuk mengembalikan keseimbangan padanya. Diketahui bahwa suara itu terbentuk dari gelombang atau getaran yang bergerak di udara dengan kecepatan 340 m/detik. Setiap suara memiliki frekuensi sendiri, dan manusia bisa mendengar suara dengan frekuensi antara 20/detik hingga 20.000/detik. Gelombang-gelombang tersebut menyebar di

udara lalu ditangkap telinga, lalu ia berubah menjadi sinyal-sinyal elektrik, dan bergerak melalui syaraf suara menuju acoustic bark di dalam otak. Sel-sel tersebut menyesuaikan diri dengan gelombang, lalu gelombang tersebut bergerak ke berbagai bagian otak, khususnya bagian depan. Semua organ itu bekerja secara bersama sesuai seirama dengan sinyal-sinyal tersebut, dan menerjemahkannya ke dalam bahasa yang dipahami manusia. Lalu, otak menganalisa sinyal-sinyal itu dan memberikan perintahnya kepada berbagai organ tubuh untuk menyesuaikan dengan sinyal-sinyal tersebut.

Doa akan menjadi mustajab dan kuat bilamana doa seseorang berada pada arah hukum atau kodrat Allah SWT:

1. Dalam berdoa seharusnya menggabungkan empat unsur dalam diri meliputi: hati, pikiran, ucapan, serta tindakan. Dikatakan bahwa Allah SWT berjanji akan mengabulkan setiap doa makhlukNya, tetapi orang sering merasa ada saja doa yang tidak terkabul. Orang seharusnya tidak perlu berprasangka buruk (*su'udzon*) kepada Allah SWT. Bila terjadi kegagalan dalam mewujudkan harapan, berarti ada yang salah dengan diri sendiri. Misalnya seseorang berdoa mohon kesehatan, hatinya berniat agar jasmani-rohani selalu sehat. Doa juga diikrarkan terucap melalui lisan, pikiran juga sudah memikirkan bagaimana caranya hidup yang sehat. Tetapi tindakannya tidak sinkron, justru makan jerohan, makanan berkolesterol, dan makan secara berlebihan. Hal ini merupakan contoh doa yang tidak kompak dan tidak konsisten. Doa yang kuat dan mustajab harus konsisten dan kompak melibatkan empat unsur di atas. Yakni antara hati (niat), ucapan (*statement*), pikiran (*planning*), dan tindakan

(*action*) jangan sampai terjadi kontradiktori. Sebab kekuatan doa yang paling ideal adalah doa yang diikuti dengan perbuatan (usaha) secara nyata (*konkrit*).

2. Untuk hasil akhir pasrahkan semuanya kepada kehendak Allah SWT, tetapi usaha mewujudkan doa merupakan tugas manusia. Berdoa harus dilakukan dengan kesadaran yang penuh, bahwa manusia bertugas mengoptimalkan prosedur dan usaha, soal hasil atau targetnya sesuai harapan atau tidak, biarkan itu menjadi kebijaksanaan dan kewenangan Allah SWT. Saat ini orang sering salah mengkonsep doa. Asal sudah berdoa lalu semuanya dipasrahkan kepada Allah SWT. Bahkan cenderung berdoa hanya sebatas lisan saja. Selanjutnya doa dan harapan secara mutlak dipasrahkan pada Allah SWT. Hal ini merupakan kesalahan besar dalam memahami doa karena terjebak oleh sikap fatalistis. Sikap fatalis menyebabkan kemalasan, perilaku tidak masuk akal dan mudah putus asa (Maniar, 2010:1).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada penulisan skripsi ini penulis membahas model gelombang satu dimensi pada jembatan, diasumsikan bahwa gelombang tali yang bergetar itu sama dengan gelombang pada jembatan. Dari penelitian dapat disimpulkan:

1. Analisis Newton Gregory pada persamaan gelombang secara umum menggunakan skema eksplisit beda maju untuk waktu dan beda pusat untuk waktu dan ruang, sehingga didapatkan:

$$v_{tt}(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{2\Delta t^2 q(q-1)}, \forall q = \frac{t-t_0}{\Delta t}$$

$$v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2\Delta x^2 s(s-1)}, \forall s = \frac{x-x_0}{\Delta x}$$

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{q\Delta t}, \forall q = \frac{t-t_0}{\Delta t}$$

2. Substitusikan bentuk tersebut pada persamaan (2.3.1). Sehingga diperoleh bentuk diskret model gelombang homogen sebagai berikut:

$$v_i^{n+1} = \frac{-m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (-2v_i^n + v_i^{n-1})$$

$$- \lambda \frac{q^2(q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)$$

$$+ \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)(-v_i^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

3. Substitusikan bentuk tersebut pada persamaan (2.3.1) yang telah diubah menjadi model gelombang non homogen sembarang. Sehingga diperoleh bentuk diskret model gelombang non homogen sebagai berikut:

$$v_i^{n+1} = \frac{2\Delta t^3 q^2 (q-1)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)} - \frac{m_1 q \Delta t}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$(-2v_i^n + v_i^{n-1}) - \lambda \frac{q^2 (q-1)}{s(s-1)(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

$$(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + \frac{b_1 2\Delta t^2 q(q-1)(-v_i^n)}{(-b_1 2\Delta t^2 q(q-1) + m_1 q \Delta t)}$$

4. Hasil simulasi bentuk diskret model gelombang homogen menggunakan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory dengan nilai konstanta $m_1 = 6000 \text{ kg}$, $T = 0.0000013 = 1.3 \times 10^{-6}$, dan $b_1 = 0.01$ dapat dilihat pada gambar 3.2.

Kondisi awal $\exp[-10(4x-1)^2]$ sangat mempengaruhi besarnya amplitudo yang terjadi karena dengan kondisi awal ini didapatkan beban yang berubah-ubah sepanjang nilai x . Ketidakstabilan grafik menunjukkan bahwa amplitudo perpindahan meningkat terus menerus (menyimpang) dengan waktu pada masa ini (awal getaran) dapat dikatakan terdapat gejala awal yang menyebabkan kerusakan pada bagian lain. Keadaan jembatan yang sangat baik menyebabkan proses terjadinya getaran tidak berlangsung lama, sehingga jembatan yang bergetar lebih cepat stabil karena gerakan (atau perpindahan) gaya yang berubah-ubah sepanjang nilai x menyatu atau tetap stabil dengan waktu pada jarak $4 \leq x \leq 8$ dan waktu pada iterasi ke-100.

Dengan nilai-nilai konstanta yang sama hasil simulasi bentuk diskret model gelombang non homogen menggunakan skema eksplisit beda hingga Newton Gregory dapat dilihat pada gambar 3.7.

Ketidakstabilan grafik menunjukkan bahwa pada masa ini (awal getaran) dapat dikatakan terdapat gejala awal yang menyebabkan kerusakan pada bagian lain, sehingga getaran pada saat awal adanya gangguan tidak beraturan. Keadaan jembatan yang sangat baik menyebabkan proses terjadinya getaran tidak berlangsung lama, namun getaran yang terjadi pada awal adalah sangat besar kemudian menuju pada kestabilan diantara interval $0.1 \leq x < 0.95$ kemudian disusul dengan getaran kecil dan menuju pada kondisi awal.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi kestabilan model gelombang tali dengan menggunakan nilai awal, nilai batas dan interval yang berbeda dan bervariasi, agar dapat dilihat kekurangan model diskret yang telah dibangun. Serta mengembangkan model gelombang dengan metode-metode yang bervariasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Anonim. 2012. *Persamaan Diferensial Parsial*. (Online):(<http://www.pd.parsial>). Diakses tanggal 19 ieM 2013 pukul 20:13).
- Anonim. 2013. *Persamaan Diferensial Parsial*. (Online):(<http://www.05-pd-parsial-gt.pdf>). Diakses tanggal 9 Februari 2013 pukul 00:42).
- Al-Jazairi, S.A.B.J.. 2007. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 3*. Jakarta: Darus Sunnah.
- Al-Khalaal. 2013. *Iman Bisa Bertambah dan Berkurang*. (Online):(<http://www. 'Iman Bisa Bertambah dan Berkurang -Muslim.Or.Id'>). Diakses 2 Agustus 2013 pukul 13:51).
- Al-Maraghi, A.M.. 1974. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV Toha Putra.
- Al-Qurthuby, S.I.. 2008. *Tafsir Al-Qurthuby*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- As-Shiddieqy, M.H.. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur*. Semarang: Pustaka Rizki Utama.
- Ayres, F.. 1992. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Causon, D.M. dan Mingham, C.G.. 2010. *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. Manchester: Ventus Publishing.
- Crayonpedia. 2009. *Getaran, Gelombang, dan Bunyi*. (Online):([http://www. eferensi/BAB_8_GETARAN, GELOMBANG DAN BUNYI.htm](http://www. eferensi/BAB_8_GETARAN,_GELOMBANG_DAN_BUNYI.htm)). Diakses tanggal 18 Februari 2013 pukul 18:26).
- Duffy, D.J.. 2006. *Finite Difference Methods in Financial Engineering A Partial Differential Equation Approach*. Inggris: John Wiley & Sons Ltd.
- Djojodiharjo, H.. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Flaherty, J.E.. 1989. *Adaptive Methods for Partial Differential Equations*. New York: Defense Technical Information Center.
- Jalupangna. 2012. *Getaran Doa dan efeknya terhadap sel*. (Online):(<http://jalupangna.blogspot.com/2012/12/getaran-doa-dan-efeknya-terhadap-sel.html>). Diakses tanggal 29 Juni 2013 pukul 18:00).
- Maniar, N.. 2010. *Rahasia Kekuatan Doa*. (Online):(<http://www. Rahasia Kekuatan Doa sabdalangit's web Membangun Bumi Nusantara yang Berbudi Pekerti Luhur.htm>). Diakses tanggal 29 Maret 2013 pukul 17:13).

- Morton, K.W dan Mayers, D.. 2005. *Numerical Solution of Partial Differential Equation*. New York: Cambridge University.
- Munir, R.. 2010. *Metode Numerik Revisi Ketiga*. Bandung: Informatika.
- Ohene1, K.R., Frimpong, O.E., Brew, E.M., dan King, A.T.. 2012. A *Mathematical Model of a Suspension Bridge—Case Study: Adomi Bridge, Atimpoku, Ghana*. Global Advanced Research Journal of Engineering, Technology and Innovation Vol. 1(3) pp. 047-062.
- Purcell, E.J. dan Varberg, D.. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima*. Jakarta: PT Gelora Aksara Pratama.
- Rokhman, T.. 2011. *Bahan Kuliah Getaran Mekanik*. (Online):([http://www.BahanKuliahGetaranMekanik Khazanah Keilmuan Mesin, Umum dan Islam.htm](http://www.BahanKuliahGetaranMekanikKhazanahKeilmuanMesinUmumdanIslam.htm)). Diakses tanggal 17 Desember 2012 pukul 09:57).
- Sasongko, S.B.. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V ANDI OFFSET.
- Sudiarta, I.W.. 2011. *Metode Numerik Menggunakan C, C++ dan Matlab atau Octave*. Mataram: FMIPA Universitas Mataram.
- Thomson, W.T.. 1986. *Teori Getaran dengan Penerapan*. Jakarta: Erlangga.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Wijayanto, P. dan Susatio, H.. 2010. *Analisa Kestabilan Crane Jenis Gantry Berbasis Amplitudo Respon Getaran*.
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons.Inc.
- Zwillinger, D.. 1997. *Handbook of Differential Equations Thirrd Edition*. Boston: Academic Press.

Lampiran

Lampiran 1

Program Matlab untuk grafik diskret model linier homogen dengan nilai parameter $m_1 = 6000$, $T = F = m_1 \cdot a = 0.0000013$, $b_1 = 0.01$. Dengan a = percepatan, dengan rumus $\frac{v}{t}$

```

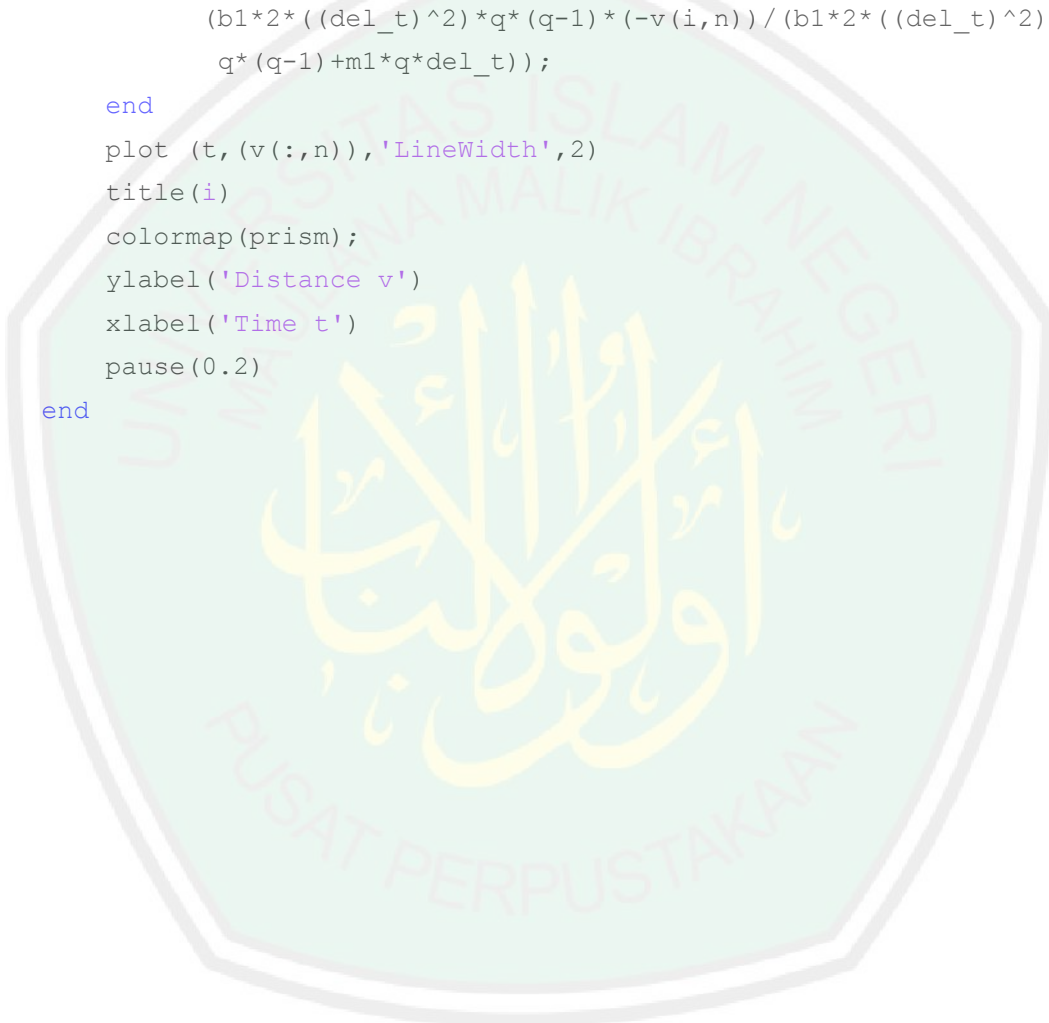
format short
clc,clf
clear all
% parameter
m1=6000;
z=6000;%z=waktu
l=48.2;%m=panjang kabel
u=1/z;%v=kecepatan
a=u/z;%a=percepatan
T=m1*a;
b1=0.01;
% Interval
del_x=0.02;
del_t=0.08;
x=0:del_x:2;
m=length(x)-1;%banyaknya iterasi x
t=0:del_t:8;
r=length(t)-1;%banyaknya iterasi t
v=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    v(i,1)=exp(-10*(4*i-1)^2);
end
%kondisi batas
format long e
for k=1:r+1
    v(1,k)=0;
end
lambda=(T*((del_t)^3))/((del_x)^2);
q=1.9;%st
s=1.5;%sx

```

```

for i=2:m
    for n=2:r
        v(i,n+1)=(-m1*q*del_t)*(-2*v(i,n)+v(i,n-1))/...
        (-b1*2*((del_t)^2)*q*(q-1)+m1*q*del_t)-lambda*...
        ((q^2)*(q-1))*(v(i+1,n)-(2*v(i,n))+v(i-1,n))/...
        (s*(s-1))*(-b1*2*((del_t)^2)*q*(q-1)+m1*q*del_t)+...
        (b1*2*((del_t)^2)*q*(q-1)*(-v(i,n)))/(b1*2*((del_t)^2)*...
        q*(q-1)+m1*q*del_t));
    end
    plot(t,(v(:,n)),'LineWidth',2)
    title(i)
    colormap(prism);
    ylabel('Distance v')
    xlabel('Time t')
    pause(0.2)
end

```



Lampiran 2

Program Matlab untuk grafik diskret model linier non homogen dengan nilai parameter $m_1 = 6000$, $T = F = m_1 \cdot a = 0.0000013$, $b_1 = 0.01$. Dengan a = percepatan, dengan rumus $\frac{v}{t}$

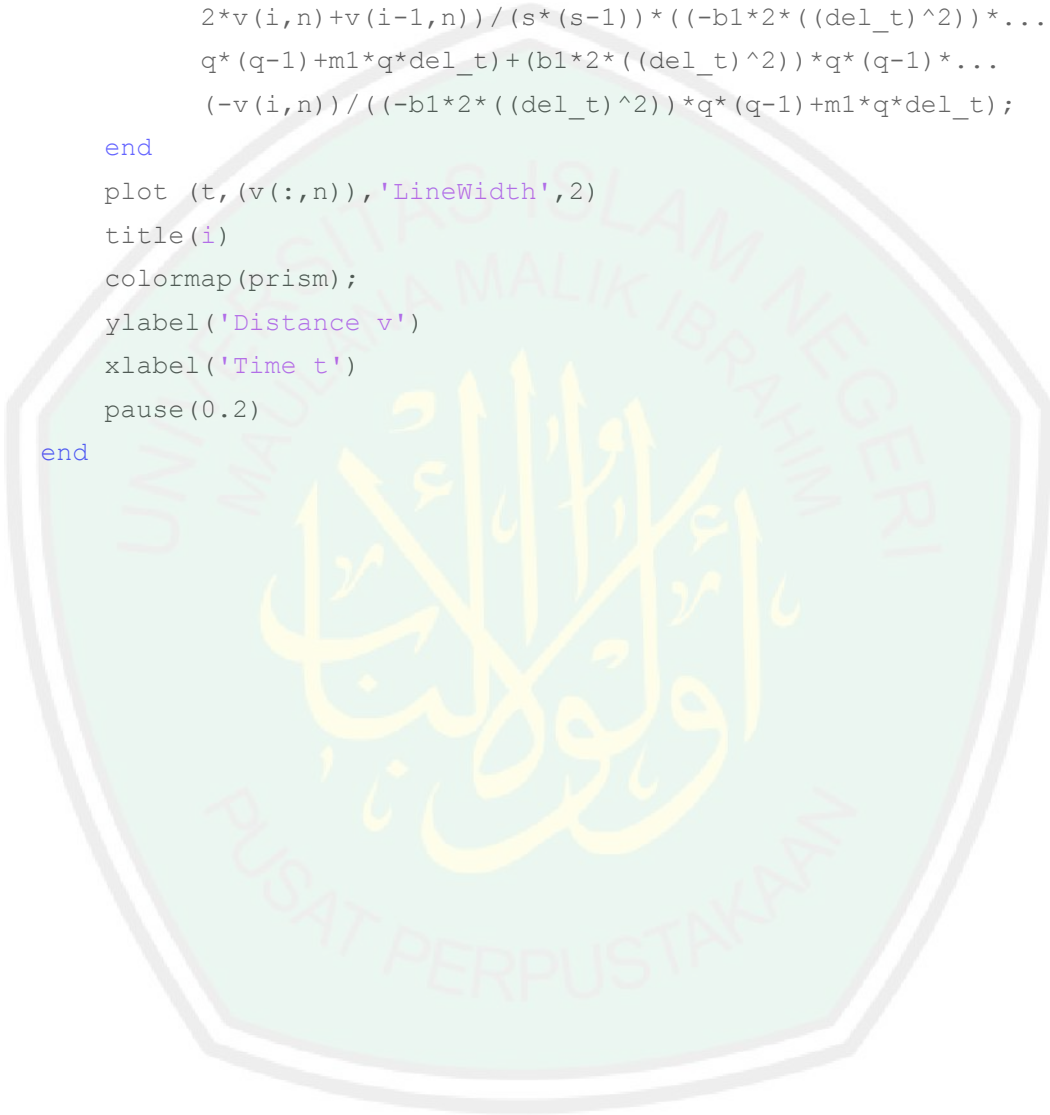
```
format short
clc,clf
clear all
% parameter
m1=6000;
z=6000;%z=waktu
l=48.2;%m=panjang kabel
u=1/z;%v=kecepatan
a=u/z;%a=percepatan
T=m1*a;
b1=0.01;
% Interval
del_x=0.04;
del_t=0.01;
x=0:del_x:4;
m=length(x)-1;%banyaknya iterasi x
t=0:del_t:1;
r=length(t)-1;%banyaknya iterasi t
v=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    v(i,1)=exp(-10*(4*i-1)^2);
end
%kondisi batas
format long e
for k=1:r+1
    v(1,k)=0;
end
lambda=(T*((del_t)^3))/((del_x)^2);
q=1.9;%st
s=1.5;%sx
for i=2:m
    for n=2:r
```

```

v(i,n+1)=(2*((del_t)^3))*(q^2)*(q-1)/(((-b1*2*...
((del_t)^2))*q*(q-1)+m1*q*del_t))- (m1*q*del_t)*...
(-2*v(i,n)+v(i,n-1))/(((-b1*2*(del_t)^2)*q*(q-1)+...
m1*q*del_t))- (lambda*(q^2)*(q-1))*(v(i+1,n)-...
2*v(i,n)+v(i-1,n))/(s*(s-1))*((-b1*2*((del_t)^2))*...
q*(q-1)+m1*q*del_t)+(b1*2*((del_t)^2))*q*(q-1)*...
(-v(i,n))/((-b1*2*((del_t)^2))*q*(q-1)+m1*q*del_t);

end
plot (t, (v(:,n)), 'LineWidth',2)
title(i)
colormap(prism);
ylabel('Distance v')
xlabel('Time t')
pause(0.2)
end

```



Lampiran 3

Solusi analitik dari persamaan gelombang

$$m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b_1 \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Dengan metode pemisahan variabel dimisalkan

$$v(x, t) = X(x)\tau(t)$$

Sehingga persamaan gelombang tersebut menjadi

$$m_1 X(x)\tau''(t) + TX''(x)\tau(t) - b_1 X(x)\tau'(t) = 0$$

$$TX''(x)\tau(t) = X(x)(b_1\tau'(t) - m_1\tau''(t))$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{b_1\tau'(t) - m_1\tau''(t)}{T\tau(t)}$$

Kedua ruas pasti bernilai sama yaitu konstanta K sehingga dapat ditulis

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K \leftrightarrow X''(x) = KX(x) \quad (1)$$

dan

$$\frac{b_1\tau'(t) - m_1\tau''(t)}{T\tau(t)} = K$$

$$b_1\tau'(t) - m_1\tau''(t) = KT\tau(t)$$

Sehingga

$$m_1\tau''(t) - b_1\tau'(t) + KT\tau(t) = 0 \quad (2)$$

Untuk mendapatkan solusi untuk $X(x)$ persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$X''(x) - KX(x) = 0 \quad (3)$$

Kenakan operator D pada persamaan (3), diperoleh

$$(D^2 - K)X(x) = 0$$

$$D^2 = K$$

$$D = \pm \sqrt{K}$$

Jika $K < 0$

$D = \pm \sqrt{-K} = \pm \sqrt{K}i$ artinya akar-akarnya kompleks konjugat

Misal $D = \alpha \pm \beta i$ maka $\alpha = 0$ dan $\beta = \sqrt{K}$

Jadi solusi umumnya adalah

$$X(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$X(x) = e^0 (C_1 \cos \sqrt{K}x + C_2 \sin \sqrt{K}x)$$

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{K}x + C_2 \sin \sqrt{K}x$$

Substitusi nilai batas $v(0, t) = v(L, t) = 0$

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{K}x + C_2 \sin \sqrt{K}x = 0 \quad X(L) = C_1 \cos \sqrt{K}x + C_2 \sin \sqrt{K}x = 0$$

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{K}0 + C_2 \sin \sqrt{K}0 = 0 \quad X(L) = C_1 \cos \sqrt{K}L + C_2 \sin \sqrt{K}L = 0$$

$$X(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \quad X(L) = 0 + C_2 \sin \sqrt{K}L = 0, \forall C_1 = 0$$

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(L) = C_2 \sin \sqrt{K}L = 0$$

$$C_2 = 0 \text{ atau } \sin \sqrt{K}L = 0$$

$$\sin \sqrt{K}L = 0 \leftrightarrow \sqrt{K}L = n\pi$$

$$KL^2 = (n\pi)^2$$

$$K = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Untuk $C_2 = 0$ tidak mungkin, karena $C_2 = 0$ maka tidak ada solusi trivial. Oleh

karena itu solusi yang mungkin adalah $\sin \sqrt{K}L = 0$

Sehingga dapat disimpulkan

$$X_n(x) = C_2 \sin \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Untuk mendapatkan solusi $\tau(t)$ persamaan tersebut dapat ditulis

$$m_1 \tau''(t) - b_1 \tau'(t) + KT\tau(t) = 0 \quad (4)$$

Substitusikan $K = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, maka diperoleh

$$m_1 \tau''(t) - b_1 \tau'(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T \tau(t) = 0$$

Kenakan operator D pada persamaan (4) yang telah disubstitusi, diperoleh

$$\left(m_1 D^2 - b_1 D + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T\right) \tau(t) = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya

$$m_1 D^2 - b_1 D + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0$$

$$D = \frac{-(-b_1) \pm \sqrt{(-b_1)^2 - 4(m_1) \left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T\right)}}{2(m_1)}$$

$$D = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}$$

$$D = \frac{b_1}{2m_1} \pm \frac{\sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}$$

Jadi solusi untuk $\tau(t)$ adalah

$$\tau_n(t) = C_3 \cos(Dt) + C_4 \sin(Dt)$$

$$\tau_n(t) = C_3 \cos\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) + C_4 \sin\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right)$$

Sehingga solusi umum untuk masalah nilai awal adalah

$$v_n(x, t) = X_n(x)\tau_n(t)$$

$$v_n(x, t) = a_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \left(C_3 \cos\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) + C_4 \sin\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \right)$$

Misalkan $f_n = a_n C_3$ dan $g_n = a_n C_4$ maka

$$v_n(x, t) = f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \cos\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) + g_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \sin\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right)$$

adalah solusi nilai batas bidang gelombang di x . Berdasarkan fakta kombinasi linier dari solusi tersebut dan kondisi batas terhadap solusi ini, anggap jumlah infinite dari fungsi di atas maka:

$$\begin{aligned}
 v_n(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \cos\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \sin\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \\
 \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-f_n \left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) \sin\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \right. \\
 &\quad \left. + g_n \left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) \cos\left(\left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \right] \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right)
 \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan kondisi awal dan kondisi batas maka didapatkan

$$\begin{aligned}
 v(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \cos(0) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \sin(0) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) + 0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \\
 &= \exp[-10(4x - 1)^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-f_n \left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right) \sin(0) \right. \\ &\quad \left. + g_n \left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right) \cos(0) \right] \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n \left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right) \right] \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) = g(x) \end{aligned}$$

Misal

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right)$$

dalam deret fourier, dengan periode $T = 2l$ didapatkan:

$$z_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$$

$$z_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$$

Jika $h(x) = \exp[-10(4x - 1)^2]$, maka $z_n = f_n$. Jadi

$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$. Sedangkan jika $h(x) = g(x)$, maka $z_n =$

$$g_n \left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right)$$

Sehingga

$$g_n \left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right) = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$$

Dengan menjabarkan persamaan di atas, maka didapatkan:

$$g_n = \frac{4m_1}{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}} \int_0^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$$

Dengan program matlab berikut:

```
format short
clc,clf
clear all
% parameter
m1=6000;
z=6000;%z=waktu
l=48.2;%m=panjang kabel
u=1/z;%v=kecepatan
a=u/z;%a=percepatan
T=m1*a;
b1=0.01;
% Interval
del_x=0.02;
del_t=0.08;
x=0:del_x:2;
m=length(x)-1;%banyaknya iterasi x
t=0:del_t:8;
r=length(t)-1;%banyaknya iterasi t
v=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    v(i,1)=exp(-10*(4*i-1)^2);
end
%kondisi batas
format long e
for k=1:r+1
    v(1,k)=0;
end
lambda=(T*((del_t)^3))/((del_x)^2);
q=1.9;%st
s=1.5;%sx
for i=2:m
```



```

for n=2:r
    v(i,n+1)=(-m1*q*del_t)*(-2*v(i,n)+v(i,n-1))/...
    (-b1*2*((del_t)^2)*q*(q-1)+m1*q*del_t)-lambda*...
    ((q^2)*(q-1))*(v(i+1,n)-(2*v(i,n))+v(i-1,n))/...
    (s*(s-1))*(-b1*2*((del_t)^2)*q*(q-1)+m1*q*del_t)+...
    (b1*2*((del_t)^2)*q*(q-1)*(-v(i,n))/(b1*2*((del_t)^2)*...
    q*(q-1)+m1*q*del_t));
end
% plot (t,(v(:,n)),'LineWidth',2)
% title(i)
% colormap(prism);
% ylabel('jarak v')
% xlabel('x')
% pause(0.2)
% title('Grafik Diskret untuk PDP Homogen')
end
plot (t,(v(:,n)),'LineWidth',2)
title('Grafik Diskret untuk PDP Homogen')
hold on
Fn=5.78*10^-5;
Gn=1.25*10^-6;
L=100;
n=1;
v=Fn*sin(x)*(((n*pi/L)^2)).*cos((b1+(((b1^2)-
4*m1*T*((n*pi/L)^2))^1/2)/2*m1)*t)+...
Gn*sin(x)*(((n*pi/L)^2)).*sin((b1+(((b1^2)-
4*m1*T*((n*pi/L)^2))^1/2)/2*m1)*t);
plot(t,v,'-r','LineWidth',1)

```

perbandingan grafik analitik dan numerik jika dimasukkan dalam satu koordinat adalah sebagai berikut:

