ANALISIS LATIS MODULAR PADA HIMPUNAN MATRIKS BOOLEAN $n \times n$

SKRIPSI

Oleh:
NURUL HOTMAH
NIM. 09610010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ANALISIS LATIS MODULAR PADA
HIMPUNAN MATRIKS BOOLEAN $n \times n$

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
NURUL HOTMAH
NIM. 09610010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ANALISIS LATIS MODULAR PADA
HIMPUNAN MATRIKS BOOLEAN $n \times n$

SKRIPSI

Oleh :
NURUL HOTMAH
NIM. 09610010

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 20 Maret 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP.19571005 198203 1 006	NIP.19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS LATIS MODULAR PADA
HIMPUNAN MATRIKS BOOLEAN $n \times n$

SKRIPSI

Oleh:
NURUL HOTMAH
NIM. 09610010

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 3 April 2013

Penguji Utama:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	....
Ketua Penguji:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	....
Sekretaris Penguji:	Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	....
Anggota Penguji:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nurul Hotmah

NIM : 09610010

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, Maret 2013
Yang membuat pernyataan,

Nurul Hotmah
NIM. 09610010

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرٗا

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. 94: 6)

"Sebaik-baik manusia adalah yang bermanfaat bagi yang lain "
(HR. Bukhori)

"WE WILL NEVER WALK ALONE"

PERSEMBAHAN

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ ٱلْعَٰلَمِينَ

Dengan penuh rasa syukur, karya yang sederhana ini

penulis persembahkan kepada:

Ayahanda Asmin & Ibunda Kustinah

Bapak Suwarji, Ibu Siti Nafikah & IbuSunarsih

Hariyanto, Arifin Muhammad Hassan, Catur Andriawan, dan Latif

Khusna Putra

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, puji syukur yang sedalam-dalamnya penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. Karena berkat rahmat, kehendak, kekuatan, pertolongan, petunjuk dan bimbingan-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Latis Modular pada Himpunan Matriks Boolean $n \times n$". Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga dan sahabat-sahabatnya, yang telah memberikan jalan terang bagi umat Islam.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si dan H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku Dosen Pembimbing, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan sehingga skripsi ini bisa diselesaikan dengan baik.

5. Segenap dosen Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya dosen jurusan matematika, yang telah memberikan ilmunya tanpa pamrih.
6. Ayahanda (Asmin) dan Ibunda (Kustinah) tercinta, yang berjuang tanpa kenal lelah demi pendidikan anak-anaknya, termasuk pendidikan penulis. Do'a dan ridhonya senantiasa menuntun penulis menemukan kemudahan jalan dari Allah SWT.
7. Saudara-saudara penulis, Hariyanto, Arifin Muhammad Hasan, Catur Andriawan dan Latif Khusna Putra, yang memberi semangat penulis untuk segera menyelesaikan studi.
8. Teman-teman matematika angkatan 2009, terutama Huda Khoirussoleh yang senantiasa membantu segala keperluan penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis berharap Semoga skripsi ini dapat menjadi informasi yang bermanfaat bagi semua pihak khususnya bagi penulis sendiri. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, Maret 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Hotmah, Nurul. 2013. **Analisis Latis Modular pada Himpunan Matriks Boolean $\boldsymbol{n \times n}$.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing I: Drs. H. Turmudi, M.Si.
Pembimbing II: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Kata Kunci: Latis Modular, Matriks Boolean.

Sistem aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat tertutup, komutatif, asosiatif dan absorpsi disebut latis. Selanjutnya dalam latis terdapat beberapa kelas istimewa, di antaranya adalah latis distributif, latis modular dan latis semi modular. Akan tetapi dalam perkembangannya, latis masih jarang sekali dijadikan materi penelitian, terlebih mengenai latis istimewa, seperti halnya latis modular. Oleh karena itu, untuk memberi warna baru pada materi latis, maka dalam penelitian ini penulis menggunakan himpunan matriks Boolean dalam menganalisis sifat-sifat dan beberapa teorema yang berlaku pada latis modular dengan definisi tertentu.

Dengan mendefinisikan operasi matriks dan keterurutan parsial pada himpunan matriks Boolean $n \times n$, maka himpunan matriks Boolean dengan entri semua anggota dari aljabar Boolean, yang disertai dua operasi biner $\cup$ dan $\cap$ adalah latis. Selanjutnya himpunan matriks Boolean dengan dua operasi biner $\cup$ dan $\cap$ juga memenuhi sifat-sifat latis modular.

ABSTRACT

Hotmah, Nurul. 2013. **Analysis of Modular Lattices on the Set of $n \times n$ Boolean Matrices**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology of the State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisor I: Drs. H. Turmudi, M.Si.
Advisor II: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Algebraic system with two binary operations that satisfy the closed, commutative, associative and absorption properties is called lattices. Next in lattices there are some special classes, such as distributive lattices, modular lattices and semi-modular lattices. But in its development, lattices still rarely used as research material, especially on special lattices, as well as modular lattices. Furthermore, to give a new knowledge to the material lattices, so in this research the authors used the set of Boolean matrices in analyzing the properties and some of the theorems that apply to modular lattices with specific definitions.

By defining the matrices operation and partially ordered set on the set of $n \times n$ Boolean matrices, then the set of Boolean matrices with entries all elemen of Boolean algebra, with two binary operations $\cup$ and $\cap$ is lattices. Furthermore, the set of Boolean matrices with two binary operations $\cup$ and $\cap$ also satisfy the modular lattice properties.

Keywords: Modular Lattices, Boolean Matrices.

ملخص

الختمة، نور . ٢٠١٣. **تحليل وحدات المشبك في المجموعة المصفوفة القطرية $n \times n$** ، بحث الجامعي. قسم رياضيات العلمي، كلية الحاية و التكنولوجية، جامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف الأول : الحاج الدكتورندس ترمذي الماجستير.

المشرف الثاني : الحاج وحيو هينكي إيراوان الماجستير.

الكلمات الرئيسية : وحدات المشبك ، المصفقفة القطرية

نظام جبر مع علميات ثنائينتان اثنتان التي تتدّى فيه تغطي، تبادلي ، ترابطي و امتصاص هي تعريف من مشبك. في مشبك هناك فصول الخاص يعني مشبك توزيعي و مشبك نصف الوحدات و وحدة المشبك. ولكن في تنميتها، المشبك يندر الشيء أن يجعله لمدة بحث العلمي. الخاص مشبك الخاص كما في مشبك الوحدات. إذان تعطى حال الجديدي في موضوع مشبك، فلذالك في هذا البحث تستخدم الباحثة في مجموعة مصفوفة قطرية في تحليل صفات و نظاريات في وحدات المشبك مع تعريف الخاص.

من خلال تحديد العمليات و ترتيبي مصفوفة مجموعة جزئية من ن × ن مصفوفة منطقية، ثم مجموعة من مصفوفة منطقية مع إدخالات جميع أعضاء الجبر البولي، الذي يكون مصحوبا عمليات ثنائي $\cup$ و $\cap$ وهي شعرية .وعلاوة على ذلك، فإن مجموعة من مصفوفة منطقية عمليات ثنائي $\cup$ و $\cap$ مع وتلبية أيضا خصائص وحدات شعرية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah SWT berfirman dalam surat Al-Mujaadilah ayat 11 sebagai berikut:

وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ﴿١١﴾

Artinya: …niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan. (QS. Al-Mujaadilah:11)

Dalam ayat di atas dijelaskan bahwa Allah akan mengangkat derajat orang-orang yang berilmu dan beriman, ilmu yang dimaksudkan antara lain semua ilmu yang memberi manfaat bagi kehidupan manusia. Ayat tersebut menunjukkan betapa pentingnya ilmu pengetahuan dalam kehidupan manusia, dan matematika adalah salah satunya.

Matematika adalah ilmu pengetahuan yang diperoleh dengan cara berpikir dan bernalar. Menurut Sumardyono (2004), matematika merupakan buah pikir manusia yang kebenarannya bersifat umum (deduktif). Kebenarannya tidak bergantung pada metode ilmiah yang mengandung proses induktif. Kebenaran matematika pada dasarnya bersifat koheren. Selain dalam bidang sosial, matematika juga dapat diterapkan dalam bidang lain sehingga matematika dikatakan sebagai induk dari berbagai dimensi ilmu. Ilmu matematika menjadi induk dari berbagai dimensi ilmu ini disebabkan karena banyaknya cabang matematika. Salah satunya adalah aljabar, yang mana di dalamnya juga terdapat kajian tentang aljabar abstrak.

Aljabar adalah salah satu cabang yang paling tua dari semua cabang matematika. Sejarahnya adalah sepanjang sejarah dari peradaban dan barangkali lebih panjang. Sejarawan yang terkenal tentang matematika, B. L. Van der Waerden percaya bahwa ada suatu peradaban yang mendahului peradaban dari Mesopotamia, Mesir, Negeri China dan India, dan bahwa peradaban itu adalah sumber akar dari konsep matematika yang paling awal (Tabak, 2004). Sebagai cabang matematika seperti halnya teori bilangan, geometri, maupun matematika terapan lainnya, aljabar merupakan salah satu bidang matematika yang mempunyai banyak sekali materi yang dapat dibahas, di antaranya adalah bilangan, himpunan, operasi himpunan, latis, matriks dan sebagainya.

Salah satu cabang ilmu aljabar itu sendiri antara lain adalah aljabar abstrak. Struktur aljabar merupakan salah satu materi dalam aljabar abstrak. Sistem aljabar (*algebraic system*) terdiri dari suatu himpunan objek, satu atau lebih operasi pada himpunan bersama dengan hukum tertentu yang dipenuhi oleh operasi. Sehingga selain pemetaan, materi yang dibahas pada struktur aljabar pada dasarnya tentang himpunan dan operasinya. Oleh karena itu, dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan suatu himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya dan juga oleh operasi biner yang lainnya. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol. Salah satu alasan yang penting untuk mempelajari sistem aljabar tersebut adalah untuk menyatukan sifat-sifat pada topik–topik yang berbeda dalam matematika. Sistem aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat tertutup, komutatif, asosiatif dan absorpsi disebut latis (Sukardjono, 2002:39).

Suatu latis L merupakan himpunan terurut parsial yang setiap pasangan elemen (a, b) dalam L mempunyai batas bawah terbesar $a \cap b$ dan batas atas terkecil $a \cup b$. Pada latis terdapat beberapa kelas latis istimewa, di antaranya: latis distributif, latis modular dan latis semi-modular.

Allah SWT berfirman dalam QS. Al-Dzariyaat ayat 49:

وَمِن كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya: *Dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah.* (QS. Al-Dzariyaat: 49)

Ayat tersebut menjelaskan bahwasanya Allah SWT menciptakan segala sesuatu memiliki pasangan-pasangannya, dan setiap pasangan memiliki keterkaitan atau keterhubungan. Dijelaskan pula pada tafsir Ibnu Katsir (2000), semua makhluk diciptakan oleh Allah SWT dengan berpasangan seperti halnya langit dan bumi, malam dan siang, daratan dan lautan, terang dan gelap, iman dan kufur, hidup dan mati. Semuanya memiliki hubungan, tidak ada yang dapat berdiri sendiri. Seperti halnya keilmuan matematika pada penelitian ini, yaitu latis dan matriks yang dapat dihubungkan satu sama lain melalui himpunan dan operasinya.

Pada penelitian sebelumnya, latis sering dihubungkan dengan graf, seperti pada penelitian Zainal Abidin (2009) yang berjudul “Kajian Graf Latis Faktor

Bilangan Prima Berpangkat n dan Bilangan $2^n \times 10$". Sedangkan mengenai pembentukan latis dengan menggunakan matriks masih belum banyak dikaji.

Berdasarkan permasalahan di atas, penulis ingin menganalisis matriks pada hukum-hukum latis, dengan suatu pendefinisian awal yang akan digunakan untuk membentuk suatu latis modular. Oleh karena itu, skripsi ini oleh penulis diberi judul "Analisis Latis Modular pada Himpunan Matriks Boolean $n \times n$".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang diberikan dalam pembahasan ini adalah:

1. Bagaimana pembentukan latis modular dari himpunan matriks Boolean?
2. Bagaimana sifat-sifat latis modular pada himpunan matriks Boolean?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah memperkenalkan latis modular melalui himpunan matriks Boolean sehingga dapat memperluas pengetahuan dan lebih memahami wawasan mengenai latis, yang secara khusus:

1. Mendeskripsikan pembentukan latis modular menggunakan himpunan matriks Boolean.
2. Mengetahui sifat-sifat latis modular dari suatu himpunan matriks Boolean.

1.4 Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, serta agar pembahasan lebih fokus maka pembahasan masalah yang diberikan adalah:

1. Aljabar Boolean yang digunakan dalam pembahasan dikhususkan pada aljabar himpunan.
2. Contoh yang akan diberikan cukup dengan matriks Boolean dengan orde 2×2.

1.5 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini penulis berharap agar penelitian ini bermanfaat bagi berbagai kalangan, antara lain:

1. Bagi penulis
   a. Untuk menambah pemahaman tentang konsep yang ada dalam matematika, khususnya teori latis.
   b. Sebagai sarana dan latihan untuk menambah penguasaan penulis dalam memadukan matriks dengan latis.
2. Bagi Mahasiswa Matematika

   Sebagai tambahan literatur atau wawasan untuk kajian lebih lanjut bagi mahasiswa khususnya yang sedang menempuh mata kuliah teori latis.
3. Bagi Lembaga
   a. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran mata kuliah teori latis yang masih terbatas referensinya.
   b. Sebagai tambahan bahan kepustakaan.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka (*library research*). Untuk menganalisis latis modular menggunakan himpunan matriks Boolean, terlebih dahulu akan dikaji mengenai definisi dan sifat-sifat dasar latis, latis modular dan matriks. Selanjutnya dilakukan analisis deskriptif mengenai bagaimana himpunan matriks Boolean dapat dinyatakan sebagai latis modular.

Adapun langkah-langkah yang akan diterapkan penulis dalam membahas penelitian ini adalah:

1. Memberikan deskripsi awal matriks Boolean yang digunakan dalam pembahasan.
2. Memberikan definisi relasi urutan parsial dan operasi-operasi yang dikenakan pada himpunan matriks Boolean, selanjutnya membuktikan bahwa himpunan ini dengan dua operasi biner adalah latis.
3. Membuktikan bahwa himpunan matriks Boolean adalah latis modular.
4. Membuktikan bahwa himpunan matriks Boolean memenuhi sifat-sifat latis modular.
5. Memberikan contoh sesuai definisi.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penulisan ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisannya sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menyajikan konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian matriks, himpunan, relasi, urutan parsial, teori latis dan latis distributif, aljabar Boolean serta kajian agama.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini membahas tentang deskripsi dalam pembentukan latis modular serta sifat-sifat dan teorema yang berlaku dengan menggunakan himpunan matriks Boolean. Selain itu akan diberikan contoh sesuai definisi.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan serta saran-saran yang berkaitan dengan hasil pembahasan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Susunan bilangan real berbentuk segi empat muncul dalam banyak konteks selain sebagai matriks yang diperbesar untuk sistem persamaan linier. Pada subbab ini akan ditinjau susunan bilangan itu sendiri sebagai objeknya dan beberapa sifat susunan bilangan tersebut.

Definisi 1

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segi empat. Bilangan bilangan dalam susunan itu disebut *entri* dalam matriks tersebut (Anton, 1997:51).

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ (2 \quad 1 \quad -3),\ \text{dan}\ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalnya, matriks pertama dalam contoh 3 mempunyai dua baris dan dua kolom sehingga ukurannya adalah 2 kali 2 (ditulis 2×2). Dalam suatu uraian ukuran, angka pertama selalu menyatakan jumlah baris dan angka kedua menyatakan jumlah kolom. Matriks-matriks lainnya pada contoh 3 masing-masing mempunyai ukuran $3 \times 2, 1 \times 3,$ dan 2×1. Suatu matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom (atau vektor kolom), dan suatu matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris).

Jadi, dalam contoh matriks ketiga matriks 2×1 adalah suatu matriks kolom, matriks 1×3 adalah suatu matriks baris.

Untuk menyatakan matriks digunakan huruf besar, sedangkan untuk mewakili entri digunakan huruf kecil. Misal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ atau } C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Ketika menuliskan matriks, biasanya huruf kecil yang mewakili bilangan disebut *skalar*. Kecuali jika disebutkan secara khusus, skalar dapat berupa bilangan real atau himpunan.

Entri pada baris i dan kolom j dari suatu matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij}. Jadi suatu matriks umum $m \times n$ sebagai:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jika keringkasan notasi diinginkan, matriks yang sebelumnya dapat ditulis sebagai:

$$\left(a_{ij}\right)_{m \times n} \text{ atau } \left(a_{ij}\right)$$

notasi pertama digunakan jika dalam diskusi tersebut perlu mengetahui ukurannya dan notasi yang kedua digunakan jika ukuran tidak perlu ditekankan.

Suatu matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks bujur sangkar berorde n. Dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ disebut sebagai diagonal utama dari matriks A.

2.1.1 Macam-Macam Matriks

1. Matriks Bujur Sangkar

Definisi 2

Matriks bujur sangkar adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama (Anton, 1997:53).

Matriks bujur sangkar $n \times n$ dikatakan berordo *n* dan disebut matriks–*n*.

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh di atas adalah matriks bujur sangkar ordo 3×3.

2. Matriks Identitas

Definisi 3

Matriks identitas atau matriks satuan, dinotasikan dengan I_n atau singkatnya I, adalah matriks bujur sangkar dengan entri 1 pada diagonal utamanya dan entri 0 pada bagian lainnya. Matriks identitas mirip dengan skalar 1 sehingga di dalam sebarang matriks bujur sangkar $A, AI = IA = A$.

Contoh:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh di atas adalah matriks identitas karena diagonal utamanya 1.

3. Matriks Diagonal

Definisi 4

Matriks bujur sangkar $D = (d_{ij})$ disebut *matriks diagonal* jika semua entri non-diagonal utamanya nol. Dengan kata lain, (a_{ij}) adalah matriks diagonal jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ (Anton, 1997:107).

Contoh:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Contoh di atas adalah matriks diagonal karena entri non-diagonal utamanya nol.

4. Matriks Boolean

Definisi 5

Matriks Boolean $B = (b_{ij})$ adalah matriks sederhana atas aljabar Boolean, yaitu susunan segi empat dari elemen-elemen aljabar Boolean (Chen, 1952).

Contoh:

Misal matriks $B = \left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$

Maka bentuk matriks Booleannya adalah

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh di atas adalah matriks Boolean karena matriks B hanya mempunyai entri 0 dan 1, yang merupakan anggota dari aljabar Boolean.

2.1.2 Operasi pada Matriks

1. Penjumlahan Matriks

Definisi 6

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A+B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dengan matriks tersebut. Matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat dijumlahkan (Anton, 1997:23).

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

maka

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+5 & 1+4 \\ 3+2 & 2+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Perkalian Matriks

Definisi 7

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) c•A adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A dengan c (Anton, 1997:24).

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Definisi 8

Apabila $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $B_{n \times p} = (b_{ij})$ perkalian matriks $A \times B = AB = C$ dimaksudkan suatu matriks $(m \times p)$; $(AB = C)$, yaitu matriks dengan m baris dan p kolom, dimana elemen C dari baris ke-i kolom ke-j diperoleh dengan rumus

$$C_{ij} = a_{1j} \cdot b_{i2} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{im} \cdot b_{nj}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

(Supranto, 1993:7).

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

maka

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 + 2 & 4 + 3 \\ 15 + 4 & 12 + 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 19 & 21 \end{pmatrix}$$

2.2 Himpunan

2.2.1 Pengertian Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*) (Abdussakir, 2006:1). Cara pengumpulan objek-objek berdasarkan sifat atau keadaan yang sama, ataupun berdasarkan suatu aturan tertentu (Suryadi:

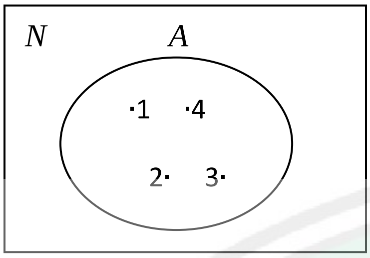
1989:2). Objek-objek yang termuat dalam suatu himpunan disebut unsur atau anggota. Himpunan disimbolkan dengan huruf kapital sedangkan anggota himpunan disimbolkan dengan huruf kecil.

Objek di dalam himpunan disebut elemen, unsur atau anggota. Untuk menyatakan bahwa suatu objek a adalah anggota suatu himpunan A digunakan notasi $\in$, yaitu $a \in A$. Sedangkan notasi $a \notin A$ berarti menyatakan bahwa a bukan anggota himpunan A.

Pada umumnya himpunan dapat dinyatakan dalam beberapa cara, di antaranya yaitu bentuk tabular (*tabular form*), notasi pembentuk himpunan (*set-builder form*), dan diagram venn. Bentuk tabular adalah penulisan himpunan dengan mendaftar semua anggotanya. Sebagai contoh, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ menyatakan bahwa himpunan A memuat bilangan 1, 2, 3, dan 4. Sedangkan notasi pembentuk himpunannya adalah dengan menyebutkan sifat atau syarat keanggotaan himpunan tersebut, misal:

$$A = \{x|\ 1 \leq x \leq 4, x \in N\}$$

sedangkan diagram venn adalah diagram untuk menggambarkan suatu himpunan atau relasi antar himpunan. Himpunan yang digambarkan biasanya dalam bentuk lingkaran dan anggotanya berupa titik dalam lingkaran dan himpunan semestanya dalam bentuk persegi panjang. Sebagai contoh, diagram venn dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dengan himpunan semestanya adalah himpunan bilangan asli N adalah



(Setiawan, 2007:2).

2.2.2 Himpunan Bagian (*Subset*)

Definisi 9

Misalkan A dan B himpunan, maka A dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari B, ditulis A ⊆ B jika setiap unsur di A merupakan unsur di B.

Secara simbolik,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

tulisan $A \subseteq B$ juga dapat dimaknai bahwa A termuat di B, atau B memuat A. Jika A subset B dan ada unsur di B yang tidak termuat di A, maka A disebut subset sejati dari B, dan ditulis $A \subset B$ (Abdussakir, 2006:3).

Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, maka kita namakan A himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari B dan ditulis $A \subset B$. Sedangkan apabila $A \subseteq B$ dan $A = B$ maka A dinamakan himpunan bagian tidak sejati (*improper subset*) dari B dan ditulis $A \subseteq B$. Namun biasanya $\subset$ digunakan untuk menyatakan $\subseteq$. Tanda $\subset$ dan $\subseteq$ dapat dinegasikan dengan tanda /, misal $A \nsubseteq B$ untuk menyatakan bahwa A bukan subset dari B.

2.2.3 Jenis-jenis Himpunan

1. **Himpunan Berhingga dan Himpunan tak Berhingga**

Definisi 10

Suatu himpunan adalah berhingga jika terdiri dari sejumlah tertentu anggota-anggota yang berbeda, artinya jika kita menghitung anggota-anggota yang berbeda dari himpunan ini, maka proses perhitungan dapat berakhir. Tapi jika perhitungan tidak dapat berakhir maka himpunan tersebut dikatakan tak hingga (Saondi, 2009:9).

2. **Himpunan Kosong**

Definisi 11

Himpunan kosong merupakan himpunan yang tidak mempunyai anggota.

Himpunan kosong biasanya disebut himpunan nol. Kita mengatakan bahwa himpunan demikian adalah hampa atau kosong, dan kita menyatakan dengan lambang ∅ atau tanda { } (Saondi, 2009:9).

3. **Himpunan Semesta**

Definisi 12

Himpunan semesta atau himpunan pembicaraan adalah himpunan yang berisikan semua elemen yang sedang dibicarakan (Saondi, 2009:10).

Dalam setiap pemakaian teori himpunan, semua himpunan yang ditinjau adalah himpunan bagian dari suatu himpunan tertentu. Himpunan ini diebut himpunan semesta atau semesta pembicaraan atau semesta dari uraian. Himpunan ini dinyatakan dengan notasi U. Himpunan semesta dalam bahasa Indonesia biasanya disimbolkan dengan S, ini sesuatu yang tidak lazim.

4. Himpunan Kuasa (*Power Set*)

Definisi 13

Himpunan kuasa dari S merupakan himpunan yang anggotanya adalah semua himpunan bagian dari S (Saondi, 2009:10).

Himpunan kuasa dari S dinyatakan dengan 2^S atau dengan $\wp(S)$. Jika suatu himpunan kuasa dari S adalah terbatas, katakan S memiliki n anggota, maka himpunan kuasa dari S dapat diperlihatkan memiliki anggota-anggota sebanyak 2^n. Ini adalah salah satu alasan mengapa kelas dari himpunan bagian-himpunan bagian S disebut himpunan kuasa dari S dan dinyatakan dengan 2^S.

2.2.4 Operasi Himpunan

Seperti bilangan, suatu himpunan juga dapat dioperasikan dengan himpunan lain. Operasi adalah aturan untuk mendapatkan unsur tunggal dari satu atau beberapa unsur tertentu. Jika hasil dari suatu operasi termasuk dalam semesta S, maka operasi yang demikian disebut tertutup. Dalam aljabar, operasi himpunan terdiri dari operasi uner, biner, terner sampai *n*-ner. Jika aturan dalam operasi berkenaan dengan satu unsur maka operasinya dinamakan operasi uner, dan jika berkenaan dengan dua unsur dinamakan operasi biner, tiga unsur terner, dan sebagainya. Beberapa contoh operasi uner misalnya operasi komplemen. Sedangkan operasi biner misalnya operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian (dalam bilangan), "dan", "atau" (dalam logika), gabungan, irisan (dalam himpunan), dan begitu seterusnya hingga operasi *n*-ner, yaitu operasi yang dikenakan pada *n* himpunan atau *n* unsur. Namun di sini pembahasan hanya akan difokuskan pada operasi biner. Misal didefinisikan operasi biner *, maka operasi biner * mempunyai dua bagian definisi yaitu:

1. Terdefinisi dengan baik (*well-defined*) yaitu untuk setiap pasangan berurutan (x, y) dalam A dikawankan dengan tepat satu nilai $x * y$
2. A tertutup di bawah operasi * yaitu untuk setiap $x, y \in A$ maka $x * y \in A$

(Setiawan, 2007:5).

Apabila dalam bilangan dikenal operasi kali, bagi, tambah, dan kurang, maka dalam himpunan dikenal operasi-operasi berikut:

1. Gabungan

Definisi 14

Misalkan A dan B himpunan. Gabungan A dan B ditulis A ∪ B adalah himpunan yang memuat semua unsur di A atau B (Abdussakir, 2006:3).

Secara simbolik,

$$A \cup B = \{x |\ x \in A \vee x \in B\}.$$

2. Irisan

Definisi 15

Misalkan A dan B himpunan. Irisan A dan B ditulis A ∩ B adalah himpunan yang memuat semua unsur di A dan B.

Secara simbolik,

$$A \cap B = \{x |\ x \in A \wedge x \in B\}.$$

Kata "dan" bermakna bahwa x termuat di A sekaligus di B. Jika $A \cap B = \emptyset$, maka A dan B disebut himpunan saling lepas (Abdussakir, 2006:3).

3. Selisih (Komplemen Relatif)

Definisi 16

Misalkan A dan B himpunan. Selisih atau komplemen relatif dari A di B, ditulis B\A adalah himpunan yang memuat semua unsur di B tetapi tidak termuat di A (Hartono & Puspita, 2006:9).

Secara simbolik,

$$B\backslash A = \{x|\ x \in B \wedge x \notin A\}.$$

4. Komplemen

Definisi 17

Misalkan A adalah himpunan, maka komplemen dari A, ditulis A^c adalah semua anggota himpunan semesta yang berada di luar A (Abdussakir, 2006:3).

Secara simbolik,

$$A^c = \{x|\ x \notin A\}.$$

5. Penjumlahan

Definisi 18

Penjumlahan antara himpunan A dan B adalah semua himpunan yang anggotanya merupakan anggota A atau B tetapi bukan irisannya (Saondi, 2009:17).

Secara simbolik,

$$A + B = \{x|x \in A, x \in B, x \notin A \cap B\}$$

2.2.5 Sifat-sifat Operasi Himpunan

Operasi himpunan memiliki sifat-sifat berikut, misalkan *A*, *B*, *C* himpunan, maka berlaku:

1. Idempoten

   (a) $A \cap A = A$

   (b) $A \cup A = A$

2. Komutatif

   (a) $A \cap B = B \cap A$

   (b) $A \cup B = B \cup A$

3. Asosiatif

   (a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

   (b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4. Distributif

   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. Sifat Komplemen

   (a) $A \cup A^c = U$

   (b) $A \cap A^c = \emptyset$

   (c) $(A^c)^c = A$

   (d) $U^c = \emptyset$ dan $\emptyset^c = U$

6. Sifat Identitas

   (a) $A \cup \emptyset = A$

   (b) $A \cap U = A$

(c) $A \cup U = U$

(d) $A \cap \emptyset = \emptyset$

7. Hukum de Morgan

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(Hartono & Puspita, 2006:10).

2.3 Relasi

2.3.1 Pasangan Berurutan (*Ordered Pair*)

Definisi 19

Pasangan berurutan merupakan sepasang anggota dimana satu anggota yang pertama berasal dari himpunan yang pertama dan satu anggota yang kedua berasal dari himpunan lainnya (Saondi, 2009:31).

Bila $a \in A$ dan $b \in B$, maka pasangan berurutan dari himpunan A dan B ditulis (a, b). Secara umum pasangan berurutan dinotasikan:

$$\{(a, b) : a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

2.3.2 Perkalian Himpunan

Definisi 20

Untuk sebarang himpuanan A dan B, perkalian himpunan A dengan B ditulis $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ didefinisikan sebagai himpunan pasangan berurutan sebagai berikut:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Karena pasangan berurutan $(a, b) \neq (b, a)$, maka pada umumnya perkalian himpunan tidak bersifat komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$, kecuali $A = B$. Perkalian himpunan dengan dirinya sendiri yaitu $A \times A$ biasanya ditulis A^2.

2.3.3 Relasi pada Himpunan

Definisi 21

Jika diketahui dua himpunan A dan B, maka secara intuitif relasi dari A ke B didefinisikan sebagai hubungan antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota himpunan B atau pernyataan yang menghubungkan antara anggota A dengan anggota B (Turmudi, 2012:20).

Suatu relasi R dari A ke B terdiri dari :

1. suatu himpunan A
2. suatu himpunan B
3. suatu kalimat terbuka $P(x, y)$ dimana $P(a, b)$ adalah benar atau salah untuk sebarang pasangan berturut $(a, b) \in A \times B$.

Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu himpunan bagian (*subset*) dari $A \times B$. Jadi $R \subseteq A \times B$. Jika $(a, b) \in A \times B$ dan a berelasi dengan b, dituliskan aRb. Jika a tidak berelasi dengan B dituliskan $a \not R b$.

Contoh:

Misalkan $A = \{1,2\}$ dan $B = \{1,4,5\}$, didefinisikan relasi R dari A ke B sebagai $y = x^2$ untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$, maka:

1. $A \times B = \{(1,1), (1,4), (1,5), (2,1), (2,4), (2,5)\}$

2. Menurut definisi R, $(x, y) \in R$ jika $y = x^2$, maka:

$(1,1) \in R$ karena $1 = 1^2$

$(1,4) \notin R$ karena $4 \neq 1^2$

$(1,5) \notin R$ karena $5 \neq 1^2$

$(2,1) \notin R$ karena $1 \neq 2^2$

$(2,4) \in R$ karena $4 = 2^2$

$(2,5) \notin R$ karena $5 \neq 2^2$

Jadi $R = \{(1,1), (2,4)\}$

Tampak bahwa $R \subseteq A \times B$.

2.3.4 Macam-macam Relasi

1. **Relasi Refleksif**

Definisi 22

Relasi R pada A disebut refleksif jika dan hanya jika untuk setiap anggota A berelasi dengan dirinya sendiri.

Secara simbolik,

$$R_{refleksif} \Leftrightarrow (\forall a \in A).\, aRa$$

2. **Relasi Irrefleksif**

Definisi 23

Relasi R pada A disebut irrefleksif jika dan hanya jika untuk setiap anggota A tidak berelasi dengan diri sendiri.

Atau lebih singkat ditulis:

$$R_{irrefleksif} \Leftrightarrow (\forall a \in A).\, a\not R a$$

3. Relasi Simetris

Definisi 24

Relasi R pada A disebut simetris jika dan hanya jika untuk setiap dua anggota A saling berelasi.

Atau lebih singkat ditulis:

$$R_{simetris} \Leftrightarrow (\forall a, b \in A).\, aRb \Rightarrow bRa$$

4. Relasi Asimetris

Definisi 25

Relasi R pada A disebut asimetris jika dan hanya jika setiap dua anggota A tidak saling berelasi.

Atau lebih singkat ditulis:

$$R_{asimetris} \Leftrightarrow (\forall a, b \in A).aRb \Rightarrow b \not R a$$

5. Relasi Anti Simetris

Definisi 26

Relasi R pada A disebut anti-simetris jika dan hanya jika dua anggota A saling berelasi jika keduanya sama.

Atau lebih singkat ditulis:

$$R_{antisimetris} \Leftrightarrow (\forall a, b \in A).aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$$

6. Relasi Transitif

Definisi 27

Relasi R pada A disebut transitif jika dan hanya jika:

$$R_{transitif} \Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A).aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

2.4 Urutan

2.4.1 Himpunan Terurut Parsial (*Poset*)

Definisi 28

Misalkan S adalah himpunan dengan unsur-unsur $a, b, c,$ dengan relasi kesamaan $x = y$ telah didefinisikan. Maka relasi terurut parsial $\preceq$ atas S adalah sebarang relasi diadik atas S yang memenuhi sifat-sifat:

(i) Refleksif: untuk setiap a di dalam S, $a \preceq a$;

(ii) Anti-simentris: jika $a \preceq b$ dan $b \preceq a$, maka $a = b$;

(iii) Transitif: jika $a \preceq b$ dan $b \preceq c$, maka $a \preceq c$ (Sukardjono, 2002:27).

Definisi 29

Suatu himpunan S yang dilengkapi dengan relasi terurut parsial O yang telah didefinisikan padanya disebut suatu **himpunan terurut parsial** atau **poset** (poset singkatan dari kata *partially ordered set*) (Sukardjono, 2002:28).

Contoh:

Misalkan relasi " $\leq$ " adalah relasi "kurang dari atau sama dengan" pada himpunan bilangan bulat non-negatif A. $(\forall a, b \in A)\ aRb \Leftrightarrow a \leq b$.

Buktikan bahwa " $\leq$ " adalah relasi urutan parsial!

Penyelesaian:

Adit: Relasi " $\leq$ " adalah relasi yang refleksif, antisimetris, dan transitif.

a) Refleksif

Ambil sebarang $a \in A$. Jelas bahwa $a = a$, atau dapat dikatakan $a \leq a$. Jadi " $\leq$ " refleksif.

b) Antisimetris

Ambil sebarang $a, b \in A$ yang memenuhi $a \leq b$ atau $b \leq a$.

$a \leq b$ berarti $b = k_1 + a$ untuk suatu bilangan bulat non-negatif k_1

$b \leq a$ berarti $a = k_2 + b$ untuk suatu bilangan bulat non-negatif k_2

maka $b = k_1 + (k_2 + b)$

$= (k_1 + k_2) + b$

jika kedua ruas dikurangi dengan b maka diperoleh $k_1 + k_2 = 0$.

k_1 dan k_2 adalah bilangan-bilangan bulat non-negatif, maka agar $k_1 + k_2 = 0$ dipenuhi, satu-satunya kemungkinan adalah $k_1 = k_2 = 0$.

Diperoleh $a = k_2 + b = 0 + b = b$.

Dari $a \leq b$ dan $b \leq a$ diperoleh $a = b$, maka " $\leq$ " adalah antisimetris.

c) Transitif

Ambil sebarang $a, b, c \in A$ yang memenuhi $a \leq b$ atau $b \leq c$.

$a \leq b$ berarti $b = k_1 + a$ untuk suatu bilangan bulat non-negatif k_1

$b \leq c$ berarti $c = k_2 + b$ untuk suatu bilangan bulat non-negatif k_2

maka $c = k_2 + (k_1 + a)$

$= (k_2 + k_1) + a$

ambil $k = k_2 + k_1$. Karena k_1 dan k_2 adalah bilangan bulat non-negatif maka k juga bilangan bulat non-negatif. Jadi $c = k + a$ untuk suatu bilangan bulat non-negatif k.

Ini berarti $a \leq c$. Jadi relasi " $\leq$ " bersifat transitif.

Karena relasi " $\leq$ " bersifat refleksif, antisimetris dan transitif maka " $\leq$ " adalah relasi terurut parsial. Sehingga himpunan A dengan relasi $\leq$ adalah *poset*.

Definisi 30

Misalkan T adalah himpunan bagian dari *poset* S.

i. a) Jika $a \in T$ dengan sifat $a \leq t$, untuk setiap $t \in T$, a disebut **unsur terkecil** dari T.

b) Jika $a \in T$ dengan sifat $a \geq t$, untuk setiap $t \in T$, a disebut **unsur terbesar** dari T.

ii. a) Unsur terkecil, jika ada, adalah **tunggal**. Karena jika a_1, a_2 adalah unsur-unsur terkecil, $a_1 \leq a_2$ dan $a_2 \leq a_1$, sehingga menurut definisi 28 (i) $a_1 = a_2$.

b) Unsur terbesar, jika ada, adalah **tunggal**. Karena jika a_1, a_2 adalah unsur-unsur terbesar, $a_1 \geq a_2$ dan $a_2 \geq a_1$, sehingga menurut definisi 28 (i) $a_1 = a_2$.

iii. a) Jika $T = S$, unsur terkecil ini biasanya disebut **unsur nol**, dengan notasi o atau 0.

b) Jika $T = S$, unsur terbesar ini biasanya disebut **unsur satuan,** dengan notasi *u* atau *U* atau *I*.

iv. a) Jika $a \in T$ dan tidak ada unsur $t \in T$ dengan sifat $t \leq a$, a disebut **unsur minimal** dari *T*. Unsur minimal tidak harus tunggal.

b) Jika $a \in T$ dan tidak ada unsur $t \in T$ dengan sifat $t \geq a$, a disebut **unsur maksimal** dari *T*. Unsur maksimal tidak harus tunggal.

v. a) Jika $b \in S$ dengan sifat $b \leq t$, untuk setiap $t \in T$, b disebut **batas bawah** dari himpunan bagian T. Perhatikan bahwa b tidak harus anggota dari T.

b) Jika $b \in S$ dengan sifat $b \geq t$, untuk setiap $t \in T$, b disebut **batas atas** dari himpunan bagian T. Perhatikan bahwa b tidak harus anggota dari T.

vi. a) Jika g unsur batas bawah dari T dengan sifat $b \leq g$ untuk setiap batas bawah b dari T, g disebut **batas bawah terbesar** atau **infimum** dari T.

b) Jika g unsur batas bawah dari T dengan sifat $b \geq g$ untuk setiap batas bawah b dari T, g disebut **batas atas terkecil** atau **supremum** dari T.

vii. a) Jika unsur batas bawah terbesar g ada, unsur itu **tunggal**. Sebab g adalah batas bawah, maka himpunan batas bawah tidak hampa, dan g adalah unsur terbesar dari himpunan ini.

b) Jika unsur batas atas terkecil g ada, unsur itu **tunggal**. Sebab g adalah batas atas, maka himpunan batas atas tidak hampa, dan g adalah unsur terkecil dari himpunan ini (Sukardjono, 2002:33).

2.4.2 Himpunan Terurut Total (*Toset*)

Definisi 31

Misal A adalah himpunan. Jika untuk setiap $a, b \in A$ berlaku salah satu di antara $a \leq b$ atau $b \leq a$, maka $(A, \leq)$ disebut himpunan terurut total atau *Totally Ordered Set* (*Toset*) (Turmudi, 2010:40).

Dari definisi di atas diperoleh bahwa dalam *toset* setiap anggota himpunannya dapat dibandingkan.

Contoh:

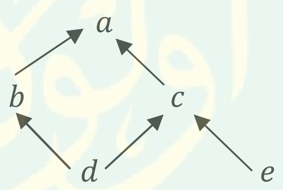
Himpunan bilangan riil dengan relasi $x \leq y$ yang dibaca x kurang dari atau sama dengan y merupakan *toset*, karena untuk setiap $x, y \in R$ akan memenuhi $x \leq y$ atau $y \leq x$.

2.4.3 Penggambaran Relasi Urutan

Secara umum diagram untuk menggambarkan *poset* digunakan diagram *Hesse*. Diagram ini berfungsi menunjukkan hubungan atau relasi antar anggota suatu himpunan teurut.

Contoh:

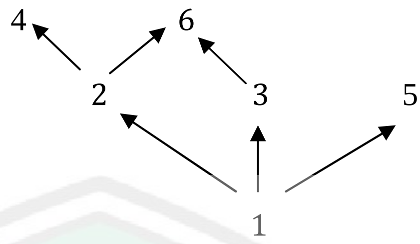
1. Misalkan $X = \{a, b, c, d, e\}$ dengan relasi yang ditunjukkan oleh diagram di bawah ini juga merupakan poset.



Gambar 2.5.2-1 Diagram *Poset* $(X, \leq)$

Relasi tersebut juga dapat didefinisikan sebagai $x \leq y$ jika dan hanya jika $x = y$ atau x naik menuju y. Dari diagram tersebut dapat dilihat bahwa b dan c tidak dapat dibandingkan, begitu pula d dan e.

2. Misalkan R adalah relasi dalam himpunan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ yang didefinisikan oleh "x membagi y", maka R adalah urutan parsial dalam A seperti digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 2.5.2-2 Diagram *Poset* (A, R)

(Turmudi, 2010:40).

2.5 Latis

2.5.1 Latis sebagai Aljabar

Definisi 32

Suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian (.) dan penjumlahan (+)) yang memenuhi postulat-postulat berikut:

Untuk semua a, b, c di L,

i.	$ab \in L$	L tertutup terhadap operasi (.)
ii.	$a + b \in L$	L tertutup terhadap operasi +
iii.	$ab = ba$	Operasi (.) komutatif
iv.	$a + b = b + a$	Operasi + komutatif
v.	$a(bc) = (ab)c$	Operasi (.) asosiatif
vi.	$a + (b + c) = (a + b) + c$	Operasi + asosiatif
vii.	$a(a + b) = a$	Absorpsi terhadap operasi +
viii.	$a + ab = a$	Absorpsi terhadap operasi (.)

(Sukardjono, 2002:39).

Teorema-teorema yang berlaku pada suatu latis L antara lain sebagai berikut:

Untuk setiap $a, b, c \in L$ maka:

1. $aa = a$ (Sukardjono, 2002:39).

Bukti:

$aa = a(a + ab)$ menurut Definisi 32(viii)

$= a$ menurut Definisi 32(vii)

2. $a + a = a$ (Sukardjono, 2002:39).

Bukti:

$a + a = a + aa$ menurut Teorema 1

$= a$ menurut Definisi 30(viii)

Teorema-teorema di atas menunjukkan bahwa operasi perkalian dan penjumlahan adalah idempoten.

3. Jika $ab = a$, maka $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a + b = ab + b$ menurut ketentuan

$= b + ab$ menurut Definisi 32(iv)

$= b + ba$ menurut Definisi 32(iii)

$= b$ menurut Definisi 32(viii)

4. Jika $a + b = b$, maka $ab = a$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$ab = a(a + b)$ menurut ketentuan

$= a$ menurut Definisi 32(vii)

Definisi 33

Didefinisikan suatu relasi R di antara dua unsur dalam suatu latis dengan

i. aRb jika dan hanya jika $ab = a$

Dipandang dari Teorema 3 dan 4 hal ini ekuivalen dengan

ii. aRb jika dan hanya jika $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

5. aRa (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$aa = a$ menurut Teorema 1

Dengan demikian aRa (menurut definisi 32(i)).

6. Jika aRa dan aRb, maka $a = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a = ab$ menurut ketentuan dan Definisi 33(i)

$= ba$ menurut Teorema 3

$= b$ menurut ketentuan kedua dan Definisi 33(i)

7. Jika aRb dan bRc, maka aRc (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$ac = (ab)c$ menurut ketentuan pertama dan Definisi 33(i)

$= a(bc)$ menurut Teorema 3

$= ab$ menurut ketentuan kedua dan Defiinisi 33(i)

$= a$ menurut ketentuan pertama dan Definisi 33(i)

Relasi R dengan demikian relasi diadik (menurut definisi), yang refleksif (Teorema 5), anti-simetrik (Teorema 6), dan transitif (Teorema 7), sehingga merupakan relasi terurut parsial; dapat dituliskan $a \leq b$ untuk aRb.

8. Suatu latis adalah poset, dengan sifat

$a \leq b$ dimaksud $ab = a$ dan $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:41).

9. $ab \leq a$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$ab + a = a + ab$ menurut Definisi 32(iv)

$= a$ menurut Definisi 32(viii)

maka $ab \leq a$ menurut Teorema 8

10. $a \leq a + b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$a(a + b) = a$ menurut Definisi 32(vii)

jadi, $a \leq a + b$ menurut Teorema 8

11. $ab \leq b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$ba \leq b$ menurut Teorema 9

tetapi $ba = ab$ menurut Definisi 32(iii)

jadi, $ab \leq b$

akibatnya ialah bahwa ab adalah batas bawah dari pasangan a, b.

12. $b \leq a + b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$b \leq b + a$ menurut Teorema 10

tetapi $b + a = a + b$ menurut Definisi 32(iv)

jadi, $b \leq a + b$

akibatnya ialah bahwa $a + b$ adalah batas atas dari pasangan a, b.

13. Jika $c \leq a$ dan $c \leq b$, maka $c \leq ab$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$c = ca$ menurut ketentuan pertama dan Definisi 33(i)

$= (cb)a$ menurut ketentuan kedua dan Definisi 33(ii)

$= c(ba)$ menurut Definisi 32(vi)

$= c(ab)$ menurut Definisi 32(iii)

dengan demikian $c \leq ab$ menurut Definisi 33(i);

Jadi ab adalah batas bawah terbesar dari pasangan a, b.

14. Jika $a \leq d$ dan $b \leq d$, maka $a + b \leq d$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$(a + b) + d = a + (b + d)$ menurut Definisi 32(vi)

$= a + d$ menurut ketentuan kedua dan Definisi 33(ii)

$= d$ menurut ketentuan pertama

dengan demikian $a + b \leq d$ menurut Definisi 33(ii)

Jadi $a + b$ adalah batas atas terkecil dari pasangan a, b.

15. Suatu latis adalah *poset*, dengan $a \leq b$ berarti $ab = a$ dan $a + b = b$, dimana setiap pasangan unsur mempunyai suatu batas bawah terbesar dan memiliki batas atas terkecil yang berada dalam himpunan itu (Sukardjono, 2002:43).

Bukti:

Teorema 8 mencakup bagian pertama. Jika dipandang bagian kedua, menurut definisi 32-i, ii setiap pasangan unsur a, b memiliki hasil kali ab

yang tunggal dan memiliki hasil jumlah $a + b$ yang tunggal dan berada di dalam himpunannya, dan menurut Teorema 9-15 inilah batas-batas yang diperlakukan.

2.5.2 Latis dalam Term Teori Himpunan

Dengan mendefinisikan suatu latis sebagai term aljabar (Definisi 32), telah dibuktikan (Teorema 15) bahwa setiap latis adalah suatu *poset* dengan sifat-sifat istimewa. Sekarang akan dimulai langkah baru dengan mendefinisikan suatu latis dalam term teori himpunan, dimana untuk setiap $a, b \in L$ adalah himpunan, tepat sebagai *poset* (Definisi 34); kemudian dibuktikan (Teorema 25) bahwa definisi yang terbaru dari suatu latis memiliki sifat aljabar seperti dikehendaki dalam postulat dalam definisi 28.

Definisi 34

Suatu latis adalah *poset* dimana setiap pasang unsur a, b mempunyai suatu **batas bawah terbesar** (disajikan $a \cap b$) dan **batas atas terkecil** (disajikan oleh $a \cup b$) yang berada didalam himpunan itu (Sukardjono, 2002:43).

Teorema-teorema yang berlaku pada suatu latis L dalam term teori himpunan antara lain sebagai berikut:

1. Suatu latis adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (Sukardjono, 2002:43).

   Bukti:

   Misalkan operasi-operasi itu adalah bentukan $a \cup b$ dan bentukan $a \cap b$. Menurut Definisi 34 untuk setiap pasang a, b terdapatlah $a \cap b$ di dalam latis; juga himpunan batas bawah dari pasangan a, b tidak kosong karena

$a \cap b$ berada di dalam batas bawah ini; dengan demikian $a \cap b$ adalah batas bawah terbesar dan tunggal (Definisi 30-vii). Hal yang serupa dapat ditunjukkan bahwa $a \cup b$ ada di dalam latis dan tunggal.

2. $a \cap b = b \cap a$ (Sukardjono, 2002:43).
3. $a \cup b = b \cup a$ (Sukardjono, 2002:43).

Bukti: (untuk Teorema 17 dan 18)

Dengan memandang batas-batas dari suatu himpunan dengan dua unsur a, b, jelaslah tidak masalah mana yang diperhatikan sebagai unsur pertama a atau b atau sebaliknya.

4. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ (Sukardjono, 2002:44).

Bukti:

$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq b$	dari definisi batas bawah
dan $(a \cap b) \cap c \leq c$	dari definisi batas bawah
$(a \cap b) \cap c \leq b \cap c$	Teorema 13
juga $(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq a$	dari definisi batas bawah
akibatnya	
$(a \cap b) \cap c \leq a \cap (b \cap c)$	Teorema 13
lagi, $a \cap (b \cap c) \leq a$	dari definisi batas bawah
dan $a \cap (b \cap c) \leq b$	dari definisi batas bawah
sehingga $a \cap (b \cap c) \leq a \cap b$	Teorema 13
juga $a \cap (b \cap c) \leq b \cap c \leq c$	dari definisi batas bawah
maka akibatnya	
$a \cap (b \cap c) \leq (a \cap b) \cap c$	Teorema 13

tetapi relasi $\leq$ adalah anti simetrik (Definisi 28(ii)); sehingga:

$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

5. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ (Sukardjono, 2002:44).

Bukti:

$b \leq (a \cup b) \leq (a \cup b) \cup c$	dari definisi batas atas
dan $c \leq (a \cup b) \cup c$	dari definisi batas atas
$b \cup c \leq (a \cup b) \cup c$	Teorema 14
juga $a \leq a \cup b \leq (a \cup b) \cup c$	dari definisi batas atas
akibatnya	
$a \cup (b \cup c) \leq (a \cup b) \cup c$	Teorema 14
lagi, $a \leq a \cup (b \cup c)$	dari definisi batas atas
dan $b \leq (b \cup c) \leq a \cup (b \cup c)$	dari definisi batas atas
sehingga	
$a \cup b \leq a \cup (b \cup c)$	Teorema 14
juga $c \leq b \cup c \leq a \cup (b \cup c)$	dari definisi batas atas
maka akibatnya	
$(a \cup b) \cup c \leq a \cup (b \cup c)$	Teorema 14

tetapi relasi $\leq$ adalah anti simetrik (Definisi 28(ii)); sehingga:

$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

6. Jika $a \leq b$, maka $a \cap b = a$ (Sukardjono, 2002:44).

Bukti:

$a \leq a$	(refleksif)
$a \leq b$	(ketentuan)

dengan demikian a adalah batas bawah dari pasangan a, b, dan jelas batas terkecil. Sehingga $a \cap b = a$.

7. Jika $a \leq b$, maka $a \cup b = b$ (Sukardjono, 2002:44).

Bukti:

$b \leq b$ (refleksif)

$a \leq b$ (ketentuan)

dengan demikian b adalah batas atas dari pasangan a, b, dan jelas batas terbesar. Sehingga $a \cup b = b$.

8. $a \cap (a \cup b) = a$ (Sukardjono, 2002:45).

Bukti:

$a \leq a \cup b$ menurut definisi batas atas

sehingga

$a \cap (a \cup b) = a$ menurut Teorema 21

9. $a \cup (a \cap b) = a$ (Sukardjono, 2002:45).

Bukti:

$a \cap b \leq a$ menurut definisi batas bawah

sehingga

$(a \cap b) \cup a = a$ menurut Teorema 22

tetapi $(a \cap b) \cup a = a \cup (a \cap b)$ menurut Teorema 18

karena itu

$a \cup (a \cap b) = a$

10. Setiap latis adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner, yang bersifat komutatif, asosiatif, dan saling absorpsi (Sukardjono, 2002:45).

Bukti:

Bagian pertama telah diberikan dalam Teorema 16; komutatifnya kedua operasi telah dibuktikan dalam Teorema 17 dan Teorema 18, dan asosiatif dalam Teorema 19 dan 20, rumus absorpsi dibuktikan dalam Teorema 23 dan Teorema 24.

2.5.3 Sublatis atau Latis Bagian

Definisi 35

Himpunan bagian tak kosong S dari unsur-unsur suatu latis L yang memuat irisan dan gabungan sebarang dua unsur dari L disebut sublatis dari L. Jelaslah bahwa L adalah sublatis dari dirinya sendiri; jika S adalah himpunan bagian sejati dari L, S disebut sublatis sejati dari L (Sukardjono, 2002:92).

Definisi 36

Misalkan a adalah suatu unsur tetap dalam latis L. Jika X adalah himpunan semua x di L yang memenuhi $x \leq a$ dan Y adalah himpunan semua y di L yang memenuhi $a \leq y$, maka X dan Y adalah sublatis dari L (Sukardjono, 2002:93).

2.5.4 Diagram Latis

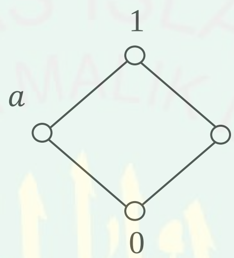
Suatu latis finit (hingga) adalah *poset* finit, sehingga dapat digambarkan dengan diagram. Karena latis finit L memiliki unsur nol dan unsur satuan, diagram latis selalu memiliki elemen terkecil yang tunggal dan elemen terbesar yang tunggal. Jadi, latis dengan n unsur dapat dibentuk dari poset yang memuat $n - 2$ unsur dengan cara menambahkan suatu unsur nol dan unsur satuan.

Contoh:

Misal X adalah himpunan dengan dua unsur yang berbeda,

$X = \{a, b\}$; untuk setiap $a \neq b$.

Maka dapat dibuat latis dengan empat unsur, yaitu $\{a\}, \{b\}, 0,$ dan 1, dan dapat digambarkan dalam diagram latis sebagai berikut:



Gambar 2.6.4-1 Diagram Latis Finit X

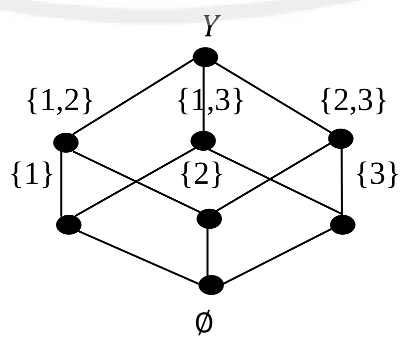
Pada umumnya, cara penggambaran diagram latis sama dengan penggambaran *poset*, yaitu menggunakan diagram Hesse. Jika ingin menggambarkan dua unsur atau lebih yang tidak saling lepas, maka unsur yang memuat unsur yang lain diletakkan di atas unsur yang lain.

Contoh:

Misal $Y = \{1,2,3\}$

Subset-subset Y adalah $\wp(Y) = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

Maka diagram latis dari subset Y adalah:



Gambar 2.6.4-2 Diagram Subset Y

(Gratzer, 1978:21).

2.5.5 Latis Distributif

Mesikpun dalam bentuk istimewa latis muncul dengan mengambil bentuk dalam aljabar Boolean (1847), akan tetapi latis untuk pertama kali mendapat kehormatan sebagai sistem aljabar setelah terbitnya hasil karya monumental Ernst Schroder berupa risalat aljabar-logika (Volume 1); Schroder terutama bergelut dengan latis yang sekarang kita sebut latis distributif.

Definisi 37

Suatu latis disebut distributif jika dan hanya jika postulat berikut dipenuhi,

Postulat I

Untuk sebarang unsur a, b, c dalam latis itu:

$a(b + c) = ab + ac$ (Sukardjono, 2002:179).

Contoh:

Latis yang terdiri dari himpunan bagian dari suatu himpunan yang diurutkan menurut inklusi adalah latis distributif.

Teorema 26

Dalam latis distributif, untuk sebarang a, b, c berlaku:

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

(Sukardjono, 2002:180).

Bukti:

$(a + b)(a + c) = (a + b)a + (a + b)c$

$= a + (ac + bc)$ menurut Teorema 11

$= (a + ac) + bc$ menurut Definisi 33(vi)

$= a + bc$ menurut Definisi 33(viii)

Teorema 27

Jika dalam suatu latis untuk sebarang a, b, c

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

maka latis itu distributif (Sukardjono, 2002:180).

Bukti:

$$\begin{aligned} ab + ac &= (ab + a)(ab + c\ ) \\ &= a(ab + c) \\ &= a(a + c)(b + c) \\ &= a(b + c) \end{aligned}$$

Teorema-teorema ini menunjukkan bahwa postulat I memberikan hasil dualnya dan diakibatkan oleh dualnya. Akibatnya:

Teorema 28

Dual dari latis distributif adalah distributif (Sukardjono, 2002:180).

Bukti:

Dual rumus distributif dapat diperluas untuk unsur-unsur latis distributif.

$$\begin{aligned} a + b_1 \ldots b_n &= (a + b_1)(a + b_2 + \cdots b_n) \\ &= (a + b_1)(a + b_2)(a + b_3 + \cdots b_n) \\ &= \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ &= (a + b_1)(a + b_2)\ \cdots\ (a + b_n) \end{aligned}$$

sampai $n - 1$ langkah.

Teorema 29

Dalam sebarang latis distributif, untuk sebarang a, b, c berlaku:

$$(a + b)(b + c)(c + a) = ab + bc + ca$$

(Sukardjono, 2002:181).

Bukti:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = a(b+c)(c+a) + b(b+c)(c+a)$$

$$= a(b+c) + b(c+a)$$

$$= ab + ac + bc + ba$$

$$= ab + bc + ca$$

Teorema 30

Suatu latis adalah distributif jika dan hanya jika untuk unsur-unsur a, b, c kedua persamaan

$$ac = bc, \quad a + c = b + c$$

gabungannya berimplikasi

$$a = b$$

(Sukardjono, 2002:184).

Bukti:

($\Longrightarrow$) Anggap latis itu distributif dan kedua persamaan dipenuhi, maka:

$$a = a(a+c)$$

$$= a(a+b)$$

$$= ab + ac$$

$$= ab + bc$$

$$= b(a+c)$$

$$= b(b+c)$$

$$= b$$

($\Longleftarrow$) Anggap bahwa dalam latis L gabungan implikasinya benar, maka:

Secara mudah terbukti bahwa:

$$ac = bc$$

$$a + c = b + c$$

selanjutnya,

akan ditunjukkan: $a(b + c) = ab + ac$

$$b(b + c) = bb + bc$$

$$b = b + bc$$

$$b = b$$

Karena ruas kanan dan ruas kiri terbukti sama, maka $a(b + c) = ab + ac$. Sehingga terbukti latis itu distributif.

2.6 Aljabar Boolean

2.6.1 Definisi Aljabar Boolean

Himpunan dan proposisi keduanya memenuhi hukum-hukum similaritas, hukum-hukum tersebut digunakan untuk mendefinisikan suatu struktur matematika abstrak yang disebut *aljabar Boolean*, yang namanya diambil dari nama ahli matematika George Boole (1813-1864).

Untuk mempunyai suatu aljabar Boole, harus diperhatikan:

1. Elemen-elemen himpunan *B*,
2. Kaidah operasi untuk operator biner dan operator uner,
3. Memenuhi postulat Huntington.

Berikut adalah definisi-definisi dasar dari aljabar Boolean dua-nilai,

Misalkan terdapat:

a. Dua operator biner: $\cup$ dan $\cap$

dimana $x \cup y$ menyatakan gabungan dari x dan y, sedangkan $x \cap y$ menyatakan irisan dari x dan y.

b. Suatu operator uner: $'$

c. B: Himpunan tak kosong yang didefinisikan pada operator $\cup$, $\cap$, dan $'$

d. 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B.

Tupel $(B, \cup, \cap, ')$ disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma-aksioma atau postulat Huntington berikut:

1. Tertutup (*closure*):	(i) $a \cup b \in B$
	(ii) $a \cap b \in B$
2. Identitas:	(i) $a \cup 0 = a$
	(ii) $a \cap 1 = a$
3. Komutatif:	(i) $a \cup b = b \cup a$
	(ii) $a \cap b = b \cap a$
4. Distributif:	(i) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
	(ii) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$
5. Komplemen:	(i) $a \cup a' = 1$
	(ii) $a \cap a' = 0$

Biasanya penulisan suatu aljabar Boolean dengan $(B, \cup, \cap, ', 0, 1)$, jika ingin menekankan keenam bagiannya. 0 disebut sebagai elemen *nol*, 1 sebagai elemen *unit*, dan a' sebagai *komplemen* dari a.

Kaidah untuk operator biner dan operator uner ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 2.6.1 Kaidah Operator Aljabar Boolean

a	b	$a \cap b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a \cup b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	a'
0	1
1	0

Cek apakah memenuhi postulat Huntington:

1. Tertutup: jelas berlaku.
2. Identitas: jelas berlaku karena dari tabel dapat kita lihat bahwa:

   (i) $0 \cup 1 = 1 \cup 0 = 1$

   (ii) $1 \cap 0 = 0 \cap 1 = 0$
3. Komutatif: jelas berlaku dengan melihat simetri tabel operator biner.
4. Distributif:

   (i) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ dapat ditunjukkan benar dari tabel operator biner di atas dengan membentuk tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel 2.6.2 Distributif ∩ terhadap ∪ pada Aljabar Boolean

a	b	c	$b \cup c$	$a \cap (b \cup c)$	$a \cap b$	$a \cap c$	$(a \cap b) \cup (a \cap c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 2.6.2 Distributif ∩ terhadap ∪ pada Aljabar Boolean (Lanjutan)

1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(ii) Hukum distributif $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ dapat ditunjukkan benar dengan membuat tabel kebenaran dengan cara yang sama seperti (i).

Tabel 2.6.3 Tabel Distributif ∪ terhadap ∩ pada Aljabar Boolean

a	b	c	$b \cap c$	$a \cup (b \cap c)$	$a \cup b$	$a \cup c$	$(a \cup b) \cap (a \cup c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

5. Komplemen: jelas berlaku karena Tabel 2.6.1 memperlihatkan bahwa:

   (i) $a \cup a' = 1$, karena $0 \cup 0' = 0 \cup 1 = 1$ dan $1 \cup 1' = 1 \cup 0 = 1$

   (ii) $a \cap a' = 0$, karena $0 \cap 0' = 0 \cap 1 = 0$ dan $1 \cap 1' = 1 \cap 0 = 0$

Karena kelima postulat Huntington dipenuhi, maka terbukti bahwa $B = \{0, 1\}$ bersama-sama dengan operator biner $\cup$ dan $\cap$ operator komplemen ' merupakan aljabar Boole.

2.6.2 Hukum-hukum Aljabar Boolean

Secara umum, hukum-hukum yang terdapat pada aljabar Boolean antara lain sebagai berikut:

Tabel 2.6.4 Hukum-hukum Aljabar Boolean

1. Hukum identitas: (i) $a \cup 0 = a$ (ii) $a \cap 1 = a$	2. Hukum idempoten: (i) $a \cup a = a$ (ii) $a \cap a = a$
3. Hukum komplemen: (i) $a \cup a' = 1$ (ii) $a \cap a' = 0$	4. Hukum dominansi: (i) $a \cap 0 = 0$ (ii) $a \cup 1 = 1$
5. Hukum involusi: (i) $(a')' = a$	6. Hukum absorpsi: (i) $a \cup (a \cap b) = a$ (ii) $a \cap (a \cup b) = a$
7. Hukum komutatif: (i) $a \cup b = b \cup a$ (ii) $a \cap b = b \cap a$	8. Hukum asosiatif: (i) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ (ii) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$
9. Hukum distributif: (i) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ (ii) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$	10. Hukum De Morgan: (i) $(a \cup b)' = a' \cap b'$ (ii) $(a \cap b)' = a' \cup b'$

Tabel 2.6.4 Tabel Hukum-hukum Aljabar Boolean (Lanjutan)

11. Hukum 0/1 (i) 0’ = 1 (ii) 1’ = 0	

2.7 Kajian Agama

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur’an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al-Qur’an di antaranya adalah konsep himpunan, meskipun tidak eksplisit sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam Al-Qur’an surat Al-Fathir ayat 1:

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١﴾

Artinya: Segala puji bagi Allah pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.

Ayat 1 surat Al-Fathir di atas menjelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki (Abdusysyakir, 2007:108-109).

Berdasarkan ayat tersebut, dapat dikaji bahwa dalam QS. Al-Fathir ayat 1 terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu kumpulan objek-objek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika dinamakan himpunan.

Allah SWT juga berfirman dalam QS. Al-Dzariyaat ayat 49:

وَمِن كُلِّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَا زَوۡجَيۡنِ لَعَلَّكُمۡ تَذَكَّرُونَ ٤٩

Artinya: Dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah (QS. Al-Dzariyaat:49).

Ayat tersebut menjelaskan bahwasanya Allah SWT menciptakan segala sesuatu memiliki pasangan-pasangannya dan setiap pasangan memiliki keterkaitan atau keterhubungan. Dijelaskan pula pada tafsir Ibnu Katsir, semua makhluk diciptakan Allah SWT dengan berpasangan seperti halnya langit dan bumi, malam dan siang, matahari dan bulan, daratan dan lautan, terang dan gelap, iman dan kufur, mati dan hidup, celaka dan bahagia, terang dan gelap hingga hewan-hewan dan tumbuhan. Semuanya memiliki hubungan, tidak ada yang dapat berdiri sendiri.

Allah SWT juga berfirman tentang hal yang serupa yaitu QS. Yasin ayat 36,

سُبۡحَٰنَ ٱلَّذِي خَلَقَ ٱلۡأَزۡوَٰجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنۢبِتُ ٱلۡأَرۡضُ وَمِنۡ أَنفُسِهِمۡ وَمِمَّا لَا يَعۡلَمُونَ ٣٦

Artinya: Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui (QS. Yasin:36).

Dari ayat tersebut juga dijelaskan dalam tafsir Ibnu Katsir (2000:992) bahwasanya Allah SWT menciptakan apa yang ditumbuhkan di bumi baik itu buah-buahan maupun tumbuhan yang lain semuanya berpasang-pasangan, seperti yang tertuang pada kata "*wa min anfusihim*" tidak hanya manusia yang berhubungan yaitu laki-laki dan perempuan, tapi setiap segala sesuatu mempunyai pasangan dan memiliki keterkaitan tidak hanya pada manusia tetapi semua makhluk hidup maupun segala sesuatu yang Allah SWT ciptakan, baik itu makhluk lain yang tidak diketahui.

Begitu juga dalam kehidupan sehari-hari sering dipertemukan dengan fenomena hubungan antara beberapa karakteristik yang diduga mempunyai keterkaitan antara karakteristik yang satu dengan karakteristik yang lain. Salah satunya yaitu pada keilmuwan matematika seperti latis dan matriks yang dapat dikaitkan melalui himpunan.

Mengenai bagaimana bentuk kesamaan karakteristik tersebut adalah salah satu tugas kita sebagai orang matematika untuk dapat mengamati dan meneliti sehingga menemukan hasil yang pasti, sebagaimana firman Allah SWT berikut:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَأَيَٰتٍ لِّأُوْلِي ٱلْأَلْبَٰبِ
﴿١٩٠﴾ ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَٰطِلًا سُبْحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ﴿١٩١﴾

Artinya: Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, tiadalah

> *Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka"* (QS. Ali-Imran:190-191).

Dalam surat Ali-Imran tersebut dijelaskan tentang konsep ulul albab. Seseorang yang sudah dalam tingkatan ulul albab akan selalu memikirkan semua yang diciptakan oleh Allah SWT dalam keadaan bagaimanapun dan dimanapun. Ketika seseorang mempelajari tentang matematika, kemampuan intelektual semata tidak cukup, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual.

Seseorang yang memahami matematika dengan konsep Ulul Albab akan selalu memikirkan setiap perbuatan yang mereka lakukan dengan teliti. Layaknya ilmu matematika yang disebut ilmu pasti, maka dia akan melakukan sesuatu dengan penuh kejujuran dan ketaatan.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Latis dari Himpunan Matriks Boolean

Berikut ini adalah himpunan matriks Boolean $n \times n$, diberikan L, yang dikenai dua operasi biner $\cup$ dan $\cap$. Dengan mendefinisikan kedua operasi biner yang dikenakan pada himpunan matriks tersebut, akan dibuktikan bahwa sistem aljabar $(L, \cup, \cap)$ adalah suatu latis.

Misal:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \middle| \forall\, d_{11}, d_{12}, \dots, d_{nn} \in B \right\}$$

dimana $B = \{0,1\}$.

Berikut ini adalah definisi-definisi yang diberikan untuk membentuk suatu latis dari himpunan matriks Boolean.

Definisi 3.1.1

Diberikan sistem aljabar $(L, \cup, \cap)$, operasi $\cup$ dan $\cap$ didefinisikan Rutherford (1965) bahwa untuk setiap $X, Y \in L$ berlaku:

$$X \cup Y = (x_{ij} \cup y_{ij})$$

$$X \cap Y = (x_{ij} \cap y_{ij})$$

dengan $i = 1,2, \dots, n;\ j = 1,2, \dots, n$, dimana $X = (x_{ij})$ dan $Y = (y_{ij})$.

Atau, jika dituliskan sebagai matriks Boolean maka definisi di atas adalah sebagai berikut:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \cup y_{11} & \cdots & x_{1n} \cup y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cup y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cup y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix}$$

Definisi 3.1.2

Diberikan latis $(L, \cup, \cap)$, relasi terurut parsial $\preceq$ didefinisikan sebagai:

$X \preceq Y$ jika dan hanya jika untuk setiap $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij})$ berlaku $x_{ij} \subseteq y_{ij}$, dimana $i, j = 1,2, \ldots, n$ dan $X, Y \in L$.

atau,

$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$ jika dan hanya jika $x_{11} \subseteq y_{11}$, $x_{12} \subseteq y_{12}, \ldots, x_{nn} \subseteq y_{nn}$.

Contoh 3.1

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena $0 \subset 1, 0 = 0$ dan $1 = 1$, maka $X \preceq Y$

Berdasarkan definisi keterurutan parsial di atas dan definisi terurut parsial (Definisi 2.4.1-28), maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 1

Misalkan L himpunan matriks Boolean, untuk setiap $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \in L$ didefinisikan relasi biner $\preceq$ pada L dengan:

$X \preceq Y$ jika dan hanya jika $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$.

Relasi $\preceq$ yang didefinisikan pada L bersifat:

i. Refleksif

ii. Transitif

iii. Antisimetri

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan bahwa relasi $\preceq$ bersifat refleksif, yaitu untuk setiap $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \in L$ akan memenuhi $X \preceq X$.

Dengan menggunakan ketentuan pada teorema di atas, diperoleh:

$X \preceq X$ maka berlaku

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \cap x_{11} & \cdots & x_{1n} \cap x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap x_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap x_{nn} \end{pmatrix}$$

(Definisi 3.1.1)

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(idempoten)}$$

Karena untuk $X \preceq X$ memenuhi

$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$, maka terrbukti bahwa operasi $\preceq$ bersifat refleksif di L.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa relasi $\preceq$ bersifat transitif, yaitu untuk setiap $X, Y, Z \in L$ akan memenuhi:

Jika $X \preceq Y$ dan $Y \preceq Z$ maka $X \preceq Z$

untuk $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$.

Dari ketentuan Teorema di atas diperoleh:

$X \preceq Y$ maka $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ (1)

$Y \preceq Z$ maka $\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$ (2)

Sehingga,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \right) \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \text{(Ketentuan 1)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_{11} \cap y_{11}) \cap z_{11} & \cdots & (x_{1n} \cap y_{1n}) \cap z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n1} \cap y_{n1}) \cap z_{n1} & \cdots & (x_{nn} \cap y_{nn}) \cap z_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap (y_{11} \cap z_{11}) & \cdots & x_{1n} \cap (y_{1n} \cap z_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap (y_{n1} \cap z_{n1}) & \cdots & x_{nn} \cap (y_{nn} \cap z_{nn}) \end{pmatrix} \quad \text{(Asosiatif)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} \cap z_{11} & \cdots & y_{1n} \cap z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} \cap z_{n1} & \cdots & y_{nn} \cap z_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \left(\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(Ketentuan 2)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(Ketentuan 1)}$$

Karena $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$, maka $X \preceq Z$.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa relasi $\preceq$ bersifat antisimetri, yaitu untuk setiap $X, Y \in L$ akan memenuhi:

Jika $X \preceq Y$ dan $Y \preceq X$ maka $X = Y$

Dengan menggunakan ketentuan operasi $\preceq$ diperoleh:

$$X \preceq Y \text{ maka } \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$Y \preceq X \text{ maka } \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Sehingga diperoleh:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Ketentuan 1)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} \cap x_{11} & \cdots & y_{1n} \cap x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} \cap x_{n1} & \cdots & y_{nn} \cap x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Komutatif)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Ketentuan 2)}$$

$$= Y$$

Karena untuk $X \preceq Y$ dan $Y \preceq X$ memenuhi $X = Y$, maka operasi $\preceq$ bersifat antisimetri.

Karena memenuhi sifat refleksif, transitif dan antisimetris maka relasi $\preceq$ merupakan urutan parsial pada latis $(L, \cup, \cap)$. Sehingga himpunan L yang dilengkapi dengan relasi $\preceq$ merupakan *poset*.

Berdasarkan definisi operasi dan urutan parsial di atas, akan ditunjukkan bahwa $(L, \cup, \cap)$ adalah latis.

Untuk semua $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$ di L, berlaku sifat:

1. L tertutup terhadap operasi $\cap$

$$X \cap Y = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix}$$

Karena $x_{ij} \cap y_{ij} \in B$, maka $X \cap Y \in L$.

2. L tertutup terhadap operasi $\cup$

$$X \cup Y = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cup y_{11} & \cdots & x_{1n} \cup y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cup y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cup y_{nn} \end{pmatrix}$$

Karena $x_{ij} \cup y_{ij} \in B$, maka $X \cup Y \in L$.

3. Operasi $\cap$ komutatif

$$X \cap Y = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} \cap x_{11} & \cdots & y_{1n} \cap x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} \cap x_{n1} & \cdots & y_{nn} \cap x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Komutatif)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= Y \cap X$$

4. Operasi $\cup$ komutatif

$$X \cup Y = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cup y_{11} & \cdots & x_{1n} \cup y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cup y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cup y_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} \cup x_{11} & \cdots & y_{1n} \cup x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} \cup x_{n1} & \cdots & y_{nn} \cup x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Komutatif)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(Definisi 3.1.1)}$$

$$= Y \cup X$$

5. Operasi $\cap$ asosiatif

$$X \cap (Y \cap Z) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \left(\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} \cap z_{11} & \cdots & y_{1n} \cap z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} \cap z_{n1} & \cdots & y_{nn} \cap z_{nn} \end{pmatrix}$$

(Definisi 3.1.1)

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap (y_{11} \cap z_{11}) & \cdots & x_{1n} \cap (y_{1n} \cap z_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap (y_{n1} \cap z_{n1}) & \cdots & x_{nn} \cap (y_{nn} \cap z_{nn}) \end{pmatrix}$$

(Definisi 3.1.1)

$$= \begin{pmatrix} (x_{11} \cap y_{11}) \cap z_{11} & \cdots & (x_{1n} \cap y_{1n}) \cap z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n1} \cap y_{n1}) \cap z_{n1} & \cdots & (x_{nn} \cap y_{nn}) \cap z_{nn} \end{pmatrix}$$

(Asosiatif)

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

(Definisi 3.1.1)

$$= \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \right) \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (X \cap Y) \cap Z$$

6. Operasi $\cup$ asosiatif

$$X \cup (Y \cup Z) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \left(\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y_{11} \cup z_{11} & \cdots & y_{1n} \cup z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} \cup z_{n1} & \cdots & y_{nn} \cup z_{nn} \end{pmatrix}$$

(Definisi 3.1.1)

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cup (y_{11} \cup z_{11}) & \cdots & x_{1n} \cup (y_{1n} \cup z_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cup (y_{n1} \cup z_{n1}) & \cdots & x_{nn} \cup (y_{nn} \cup z_{nn}) \end{pmatrix}$$

(Definisi 3.1.1)

$$= \begin{pmatrix} (x_{11} \cup y_{11}) \cup z_{11} & \cdots & (x_{1n} \cup y_{1n}) \cup z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n1} \cup y_{n1}) \cup z_{n1} & \cdots & (x_{nn} \cup y_{nn}) \cup z_{nn} \end{pmatrix}$$

(Asosiatif)

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cup y_{11} & \cdots & x_{1n} \cup y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cup y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cup y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

(Definisi 3.1.1)

$$=\left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}\right) \cup \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (X \cup Y) \cup Z$$

7. Absorpsi terhadap operasi $\cup$

$$X \cap (X \cup Y) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} x_{11} \cup y_{11} & \cdots & x_{1n} \cup sy_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cup y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cup y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap (x_{11} \cup y_{11}) & \cdots & x_{1n} \cap (x_{1n} \cup y_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap (x_{n1} \cup y_{n1}) & \cdots & x_{nn} \cap (x_{nn} \cup y_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= X$$

8. Absorpsi terhadap operasi $\cap$

$$X \cup (X \cap Y) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cup (x_{11} \cap y_{11}) & \cdots & x_{1n} \cup (x_{1n} \cap y_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cup (x_{n1} \cap y_{n1}) & \cdots & x_{nn} \cup (x_{nn} \cap y_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= X$$

Karena memenuhi 8 sifat di atas, maka $(L, \cup, \cap)$ adalah latis.

3.2 Latis Modular dari Himpunan Matriks Boolean

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa sistem aljabar $(L, \cup, \cap)$ adalah latis modular. Berikut akan diberikan beberapa teorema dan definisi yang berkenaan dengan latis modular pada himpunan matriks Boolean L.

Teorema 2 (Sifat Distributif Ketaksamaan)

Untuk sebarang matriks Boolean $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij})$ dalam sebarang latis, berlaku:

$$X \cap (Y \cup Z) \succeq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

untuk $i = 1,2, \dots, n;\ j = 1,2, \dots, n.$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 3.1.1 dan 3.2.1 diperoleh:

$$X \cap (Y \cup Z) \succeq (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \Leftrightarrow x_{ij} \cap (y_{ij} \cup z_{ij}) \supseteq (x_{ij} \cap y_{ij}) \cup (x_{ij} \cap z_{ij})$$

Selanjutnya,

$x_{ij} \supseteq x_{ij} \cap y_{ij}$ (Teorema 2.5.1-10)

$y_{ij} \cup z_{ij} \supseteq y_{ij} \supseteq x_{ij} \cap y_{ij}$ (Teorema 2.5.1-11,12)

maka:

$x_{ij} \cap (y_{ij} \cup z_{ij}) \supseteq (x_{ij} \cap y_{ij}) \cap (x_{ij} \cap y_{ij})$ (Teorema 2.5.1-14)

$= x_{ij} \cap y_{ij}$ (Teorema 2.5.1-1)

juga karena,

$x_{ij} \supseteq x_{ij} \cap z_{ij}$ (Teorema 2.5.1-10)

$y_{ij} \cup z_{ij} \supseteq z_{ij} \supseteq x_{ij} \cap z_{ij}$ (Teorema 2.5.1-11,12)

maka:

$x_{ij} \cap (y_{ij} \cup z_{ij}) \supseteq (x_{ij} \cap z_{ij}) \cup (x_{ij} \cap z_{ij})$ (Teorema 2.5.1-14)

$= x_{ij} \cap z_{ij}$ (Teorema 2.5.1-1)

dengan demikian,

$x_{ij} \cap (y_{ij} \cup z_{ij}) \cup x_{ij} \cap (y_{ij} \cup z_{ij}) \supseteq (x_{ij} \cap y_{ij}) \cup (x_{ij} \cap z_{ij})$

(Teorema 2.5.1-14)

sehingga diperoleh:

$x_{ij} \cap (y_{ij} \cup z_{ij}) \supseteq (x_{ij} \cap y_{ij}) \cup (x_{ij} \cap z_{ij})$ (Teorema 2.5.1-3)

jadi, jika dikembalikan ke Definisi 3.1.1 dan 3.2.1 terbukti bahwa:

$X \cap (Y \cup Z) \succeq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Teorema 3 (Ketaksamaan Modular)

Untuk sebarang matriks Boolean $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij})$ dalam sebarang latis dimana $X \succeq Y$ dan Z sebarang, berlaku:

$$X \cap (Y \cup Z) \succeq Y \cup (X \cap Z)$$

untuk $i = 1,2,..,n;\ j = 1,2,...,n$.

Bukti:

Berdasarkan Definisi 3.1.1 dan Definisi 3.1.2,

$X \cap (Y \cup Z) \succeq Y \cup (X \cap Z) \Leftrightarrow x_{ij} \cap (y_{ij} \cup z_{ij}) \geq y_{ij} \cup (x_{ij} \cap z_{ij})$

selanjutnya,

$X \succeq Y$ (Ketentuan)

artinya,

$x_{ij} \supseteq y_{ij}$ (Definisi 3.1.2)

Sehingga,

$x_{ij} \cap y_{ij} = y_{ij}$ (Teorema 2.5.1-8)

dan,

$x_{ij} \cap (y_{ij} \cup z_{ij}) \supseteq (x_{ij} \cap y_{ij}) \cup (x_{ij} \cap z_{ij})$ (Teorema 3.2-2)

$= y_{ij} \cup (x_{ij} \cap z_{ij})$

jadi, diperoleh:

$X \cap (Y \cup Z) \succeq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (Definisi 3.1.2)

$= Y \cup (X \cap Z)$

Berikutnya, sesuai dengan latis yang telah diselidiki oleh Dedekind, penulis akan memberikan definisi latis modular dari himpunan matriks Boolean.

Definisi 3.2.1

Berikut adalah definisi latis modular oleh Dedekind,

Untuk sebarang unsur a, b, c dalam suatu latis L, maka L disebut latis modular jika memenuhi:

$$a \geq b \Rightarrow a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$= b + (a \times c)$$

(Sukardjono, 2002:118)

Dengan demikian maka dapat dilihat bahwa latis modular harus bersifat distributif. Berikut definisi penulis mengenai latis modular pada matriks Boolean.

Definisi 3.2.2

Untuk sebarang matriks Boolean $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij}) \in L$, maka L disebut latis modular jika memenuhi:

$$X \succeq Y \Rightarrow X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$= Y \cup (X \cap Z)$$

untuk $i, j = 1,2, \dots, n$.

Atau, berdasarkan definisi terurut parsial pada matriks Boolean, $X \succeq Y$ berarti $x_{ij} \supseteq y_{ij}$, maka menurut Teorema 2.5.2-6 berlaku $x_{ij} \cap y_i = x_{ij}$. Sehingga, definisi latis modular dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x_{ij} \supseteq y_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \left(\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \right) \cup$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} x_{11} \cap z_{11} & \cdots & x_{1n} \cap z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap z_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap z_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} x_{11} \cap z_{11} & \cdots & x_{1n} \cap z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap z_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap z_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cup \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

Jika diambil $X \succeq Z$ sebagai ganti $X \succeq Y$ diperoleh:

$$X \succeq Z \Rightarrow X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$= (X \cap Y) \cup Z$$

atau,

$$x_{ij} \supseteq z_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \left(\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \right) \cup$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} x_{11} \cap z_{11} & \cdots & x_{1n} \cap z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap z_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap z_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cap y_{11} & \cdots & x_{1n} \cap y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cap y_{n1} & \cdots & x_{nn} \cap y_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \right) \cup \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

Contoh 3.2:

Misal diambil $n = 2$, maka L adalah himpunan matriks Boolean 2×2 dengan entri elemen dari aljabar Boolean.

$B = \{0, 1\}$

maka anggota himpunan L antara lain:

$$L = \left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Untuk mempermudah penulisan, maka anggota-anggota L dapat disimbolkan sebagai berikut:

$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=A$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=B$

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=C$

$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=D$

$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=F$

$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=G$

$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=H$

$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=I$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=J$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=K$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=L$

$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=M$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=N$

$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=O$

$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=P$

Sehingga, berdasarkan tabel kaidah operator aljabar Boolean (Tabel 2.6.1) dapat dibuat tabel-tabel gabungan dan irisan sebagai berikut:

Tabel 3.2.1 Gabungan pada Himpunan *L*

∪	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
B	B	B	F	G	G	F	G	N	M	J	O	P	M	N	O	P
C	C	F	C	K	H	F	O	H	L	N	K	L	P	N	O	P
D	D	J	K	D	I	O	G	L	I	M	K	L	M	P	O	P

Tabel 3.2.1 Gabungan pada Himpunan *L* (Lanjutan)

E	E	G	H	I	E	N	M	H	I	J	L	L	M	N	P	P
F	F	F	F	O	N	F	O	N	P	N	O	P	P	N	O	P
G	G	G	O	G	M	O	G	P	M	M	O	P	M	P	O	P
H	H	N	H	L	H	N	P	H	L	N	L	L	P	N	P	P
I	I	M	L	I	I	P	M	L	I	M	L	L	M	P	P	P
J	J	J	N	M	J	N	M	N	M	J	P	P	M	N	P	P
K	K	O	K	K	L	O	O	L	L	P	K	L	P	P	O	P
L	L	P	L	L	L	P	P	L	L	P	L	L	P	P	P	P
M	M	M	P	M	M	P	M	P	M	M	P	P	M	P	P	P
N	N	N	N	P	N	N	P	N	P	N	P	P	P	N	P	P
O	O	O	O	O	P	O	O	P	P	P	O	P	P	P	O	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

Tabel 3.2.2 Irisan pada Himpunan *L*

∩	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	B	A	A	A	B	B	A	A	B	A	A	B	B	B	B
C	A	A	C	A	A	C	A	C	A	A	C	C	A	C	C	C
D	A	A	A	D	A	A	D	A	D	A	D	D	D	A	D	D
E	A	A	A	A	E	A	A	E	E	E	A	E	E	E	A	E
F	A	B	C	A	A	F	B	C	A	B	C	C	B	F	F	F
G	A	B	A	D	A	B	G	A	D	B	D	D	G	B	G	G

Tabel 3.2.2 Irisan pada Himpunan L (Lanjutan)

H	A	A	C	A	E	C	A	H	E	E	D	H	E	H	C	H
I	A	A	A	D	E	A	D	E	I	E	D	I	I	E	D	I
J	A	I	H	J	A	A	A	H	I	J	H	J	I	I	H	J
K	A	A	C	D	A	C	D	D	D	A	K	K	D	C	K	K
L	A	A	C	D	E	C	D	H	I	E	K	L	I	H	K	L
M	A	B	A	D	E	B	G	E	I	J	D	I	M	J	G	M
N	A	B	C	A	E	F	B	H	E	J	C	H	J	N	F	N
O	A	B	C	D	A	F	G	C	D	B	K	K	G	F	O	O
P	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

Dapat ditunjukkan $(L, \cup, \cap)$ merupakan latis modular, yaitu yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Tertutup

   Dari tabel penjumlahan dan perkalian dapat dilihat bahwa untuk sebarang $X, Y \in L$ memenuhi:

   $X \cup Y \in L$

   $X \cap Y \in L$

2. Komutatif

   Dapat dilihat bahwa tabel penjumlahan dan perkalian simetri terhadap diagonal utama, yang berarti untuk sebarang $X, Y \in L$ memenuhi:

   $X \cup Y = Y \cup X$ (Tabel 3.1.1)

   $X \cap Y = Y \cap X$ (Tabel 3.1.2)

3. Asosiatif

Ambil sebarang $X, Y, Z \in L$, maka berdasarkan tabel penjumlahan dan perkalian didapatkan tabel berikut:

Tabel 3.2.3 Asosiatif pada Himpunan L

X	Y	Z	$Y \cup Z$	$X \cup (Y \cup Z)$	$X \cup Y$	$(X \cup Y) \cup Z$
A	A	A	A	A	A	A
A	A	B	B	B	A	B
A	B	A	B	B	B	B
A	B	B	B	B	B	B
B	A	A	A	B	B	B
B	A	B	B	B	B	B
B	B	A	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	B

Begitu pula dengan operasi $\cap$.

Sehingga dapat dilihat bahwa untuk sebarang $X, Y, Z \in L$ berlaku:

$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

4. Absorpsi

Ambil sebarang $X, Y \in L$, misal diambil $A, B \in L$, maka berdasarkan tabel penjumlahan dan perkalian didapatkan tabel berikut:

Tabel 3.2.4 Absorpsi pada Himpunan L

X	Y	$X \cup Y$	$X \cap (X \cup Y)$	$X \cap Y$	$X \cup (X \cap Y)$
A	A	A	A	A	A
A	B	B	A	A	A
B	A	B	B	A	B
B	B	B	B	B	B

Sehingga dapat dilihat bahwa untuk sebarang $X, Y \in L$ berlaku:

$X \cap (X \cup Y) = X$

$X \cup (X \cap Y) = X$

5. Modularitas

Ambil sebarang $X, Y, Z \in L$, dengan $X \succeq Y$. Misal diambil $K, L, M \in L$ dimana $L \succeq K$, maka berdasarkan tabel penjumlahan dan perkalian didapatkan:

$L \cap (K \cup M) = L \cap P = L$ ... tabel 3.1.1 dan tabel 3.1.2

$(L \cap K) \cup (L \cap M) = K \cup I = L$ ... tabel 3.1.1 dan tabel 3.1.2

$K \cup (L \cap M) = K \cup I = L$ ... tabel 3.1.1 dan tabel 3.1.2

Karena untuk $L \succeq K$ berlaku $L \cap (K \cup M) = (L \cap K) \cup (L \cap M) = K \cup (L \cap M)$, maka $(L, \cup, \cap)$ adalah latis modular.

Teorema 4

Untuk sebarang latis dari himpunan matriks Boolean L, kondisi berikut adalah ekuivalen:

(i) L adalah modular, yaitu:

$$X \succeq Z \text{ maka } X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$$

untuk setiap matriks Boolean $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij}) \in L$.

(ii) L memenuhi pemotongan identitas:

$$X \cap (Y \cup Z) = X \cap ((Y \cap (X \cup Z)) \cup Z)$$

untuk setiap matriks Boolean $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij}) \in L$.

(iii) L tidak memuat pentagon

(iv) Misalkan himpunan matriks Boolean $X \preceq Y \in L$ dan $Z \in L$. Maka unsur-unsur X, Y, Z menghasilkan suatu sublatis distributif.

Bukti:

(i) → (ii). Kita punya $x_{ij} \cup z_{ij} \supseteq z_{ij}$, sehingga menurut definisi $X \cup Z \succeq Z$.

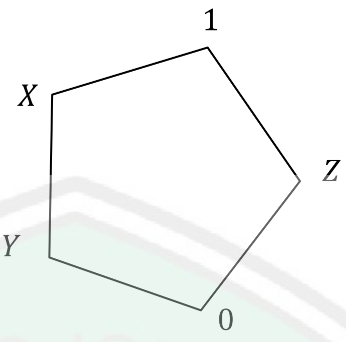
Dengan definisi modularitas didapatkan,

$$\begin{aligned}(Y \cap (X \cup Z)) \cup Z &= (Y \cup Z) \cap ((X \cup Z) \cup Z)\\ &= (Y \cup Z) \cap (X \cup Z)\end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}X \cap ((Y \cap (X \cup Z)) \cup Z) &= X \cap ((Y \cup Z) \cap (X \cup Z))\\ &= X \cap (Y \cup Z) \cap (X \cup Z) && \text{Asosiatif}\\ &= X \cap (X \cup Z) \cap (Y \cup Z) && \text{Komutatif}\\ &= X \cap (Y \cup Z) && \text{Absorpsi}\end{aligned}$$

(ii) → (iii).



Misalkan terdapat lima unsur dalam pentagonal seperti gambar di atas, yaitu $X, Y, Z, 1,0$ dimana 1 adalah matriks satuan dan 0 adalah matriks nol. Maka berlaku:

$X \cap (Y \cup Z) = X \cap 1 = X$ (a)

$(X \cap Y) \cup (X \cap Z) = Y \cup 0 = Y$ (b)

$X \cap (Y \cup Z) \neq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (c)

sehingga,

$X \cap ((Y \cap (X \cup Z)) \cup Z) = X \cap (((Y \cap X) \cup Z) \cup Z)$ Modularitas

$= X \cap ((Y \cap X) \cup Z)$ Idempoten

$= X \cap (Y \cap X) \cup (X \cap Z)$ Distributif

$= (Y \cap X) \cup (X \cap Z)$ Idempoten

$= (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ Komutatif

$= Y$ Ketentuan (b)

Terbukti bahwa jika terdapat suatu pentagon maka penyataan (ii) tidak terpenuhi.

(iii) → (iv). Jika L memuat pentagon, maka berlaku:

$X \cap (Y \cup Z) = X \cap 1 = X$

$(X \cap Y) \cup (X \cap Z) = Y \cup 0 = Y$

$X \cap (Y \cup Z) \neq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Sehingga, dari sifat ketiga dapat dilihat bahwa jika L tidak memuat pentagon, maka berlaku:

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Terbukti berlaku sifat distributif.

Definisi 3.2.3

Sublatis dari himpunan matriks Boolean dengan entri anggota aljabar Boolean adalah himpunan tak kosong S dari unsur-unsur suatu latis L yang memuat irisan dan gabungan sebarang dua unsur dari L.

Berikut ini adalah tabel segitiga Pascal yang menunjukkan banyaknya unsur yang terletak pada tinggi yang sama di atas unsur yang terendah dengan rumus $C(n,r)$, dimana n menunjukkan banyaknya unsur himpunan, dan r menunjukkan banyaknya unsur subset. Dengan demikian tabel berbentuk segitiga dari $C(n,r)$ untuk setiap diagram berdistribusi unsur-unsur pada berbagai tingkatan (Sukardjono, 2002: 48).

Tabel 3.2.5 Segitiga Pascal

2^n / r	1	2	4	8	16	32	…	2^n
0	1	1	1	1	1	1	…	$C(n,0)$
1		1	2	3	4	5		$C(n,1)$

Tabel 3.2.5 Segitiga Pascal (Lanjutan)

2			1	3	6	10		$C(n,2)$
3				1	4	10		$C(n,3)$
4					1	5		$C(n,4)$
5						1		$C(n,5)$
$\vdots$							$\ddots$	$\vdots$
n								$C(n,n)$

Teorema 5

Suatu sublatis dari latis modular pada himpunan matriks Boolean $n \times n$ adalah modular.

Bukti:

Misalkan S adalah sublatis dari latis modular L, dan $A, B, C \in S$ dengan $A \succeq B$. Karena $S \subseteq L$ dan $A, B, C \in S$, maka $A, B, C \in L$. Karena L adalah latis modular, maka berlaku $A \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$. Karena $A, B, C \in S$ dan S tertutup terhadap irisan dan gabungan, maka akibatnya S adalah modular.

Contoh 3.3

Dari contoh 3.2 himpunan matriks Boolean:

$$L = \{ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$$

Maka himpunan bagian S dari L adalah:

$$S = \{ \emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \dots, \{A, B\}, \dots, \{A, B, C\}, \dots., L \}$$

Jadi, sublatis dari L adalah $(S, \cup, \cap)$ yang memenuhi sifat-sifat latis, karena setiap unsur di S adalah unsur di L.

Sublatis S dapat digambarkan dalam diagram latis dengan bantuan tabel segitiga Pascal 3.2.1, yaitu sebagai berikut:

Diketahui: $n = 16$

Maka banyaknya anggota sublatis $S = 2^{16} = 65536$

Banyaknya elemen yang menempati urutan paling atas hingga paling bawah adalah sebagai berikut:

Urutan pertama: $C(16,16) = 1$

Urutan kedua $C(16,15) = 16$

Urutan ketiga $C(16, 14) = 120$

Urutan keempat $C(16, 13) = 560$

Urutan kelima $C(16, 12) = 1820$

Urutan keenam $C(16,11) = 4368$

Urutan ketujuh $C(16,10) = 8008$

Urutan kedelapan $C(16,9) = 11440$

Urutan kesembilan $C(16, 8) = 12870$

Urutan kesepuluh $C(16,7) = 1140$

Urutan kesebelas $C(16,6) = 8008$

Urutan keduabelas $C(16,5) = 4368$

Urutan ketigabelas $C(16,4) = 1820$

Urutan keempatbelas $C(16,3) = 560$

Urutan kelimabelas $C(16,2) = 120$

Urutan keenambelas $C(16,1) = 16$

Urutan ketujuhbelas $C(16,0) = 1$

Untuk mempermudah membaca diagram, maka perlu diberi pelabelan untuk setiap anggota sublatis S, yaitu sebagai berikut:

Sublatis yang terdiri dari 0 elemen disimbolkan 0, dan sublatis yang terdiri dari 1 elemen disimbolkan A, jadi, $A = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \dots, \{P\}\}$ yang selanjutnya hanya akan ditulis $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{16}\}$.

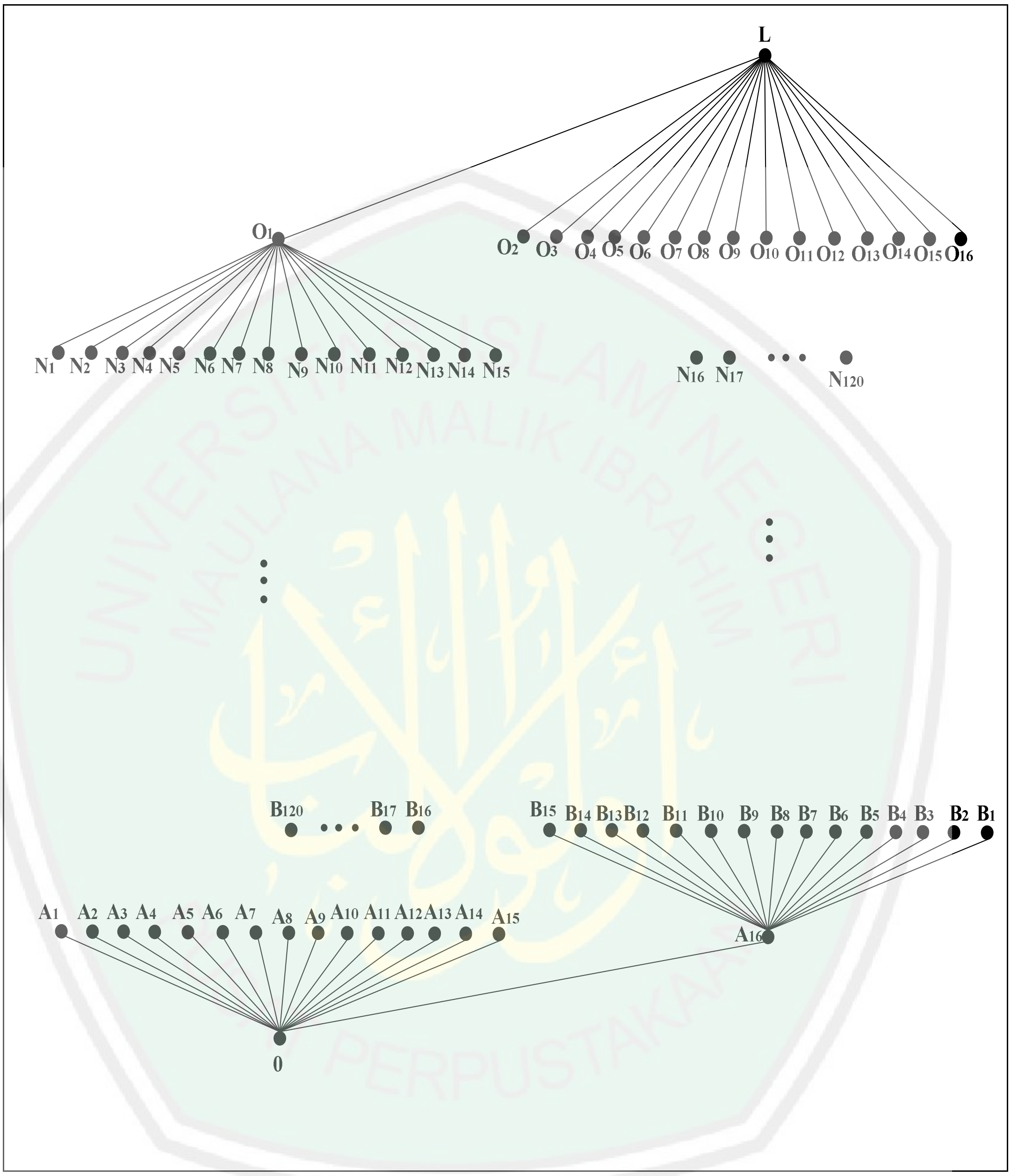
Sublatis yang terdiri dari 2 elemen disimbolkan B, jadi, $B = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{120}\}$.

Sublatis yang terdiri dari 3 elemen disimbolkan C, jadi, $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_{560}\}$ dan seterusnya, hingga sublatis yang terdiri dari 15 elemen disimbolkan O, jadi, $O = \{O_1, O_2, O_3, \dots, O_{16}\}$.

Sedangkan yang terakhir, sublatis yang terdiri dari 16 elemen tetap dilambangkan L. Sehingga dapat dituliskan:

$$S = \{0, A_1, A_2, \dots, A_{16}, B_1, B_2, \dots, B_{120}, C_1, C_2, \dots, C_{560}, D_1, D_2, \dots, D_{1820}, E_1, E_2, \dots, E_{4368}, F_1, F_2, \dots, F_{8008}, G_1, G_2, \dots, G_{11440}, H_1, H_2, \dots, H_{12870}, I_1, I_2, \dots, I_{11440}, J_1, J_2, \dots, J_{8008}, K_1, K_2, \dots, K_{4368}, L_1, L_2, \dots, L_{1820}, M_1, M_2, M_3, \dots, M_{560}, N_1, N_2, \dots, N_{120}, O_1, O_2, \dots, O_{16}, L\}$$

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar diagram berikut.



Gambar 3.2.1 Diagram Sublatis *S*

3.3 Kajian Agama

3.3.1 Kajian Matriks dalam Islam

Dalam Islam dijelaskan bahwa Allah SWT telah menyusun alam ini dengan susunan yang paling sempurna, sebagaimana ayat berikut:

وَسَخَّرَ لَكُمُ ٱلشَّمْسَ وَٱلْقَمَرَ دَآئِبَيْنِ ۖ وَسَخَّرَ لَكُمُ ٱلَّيْلَ وَٱلنَّهَارَ ﴿٣٣﴾

Artinya: *Dan Dia telah menundukkan (pula) bagimu matahari dan bulan yang terus menerus beredar (dalam orbitnya), dan telah menundukkan bagimu malam dan siang* (QS. 14:33).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa matahari dan bulan terus-menerus beredar dalam orbitnya. Hal ini menandakan sempurnanya susunan alam yang telah diciptakan-Nya. Karena jika matahari dan bulan tidak pada orbitnya, maka akan terjadi tabrakan dan bencana besar bagi kehidupan manusia di bumi. Dalam matematika ada yang dinamakan matriks, yaitu suatu susunan bilangan berbentuk segi empat. Bilangan-bilangan disusun sedemikian hingga sehingga dapat mempermudah pengerjaan suatu sistem persamaan linier.

3.3.2 Kajian Latis dalam Islam

Menurut Sukardjono (2010), latis adalah suatu strukur aljabar dengan satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $\cup$ dan $\cap$ yang memenuhi sifat tertutup, asosiatif, komutatif dan absorpsi.

Menurut Setiawan (2007), sifat tertutup dalam matematika adalah suatu himpunan bila dioperasikan maka hasilnya tetap dalam himpunan tersebut. Dalam Islam sifat tertutup diperintah untuk menutup aurat wanita, seperti yang tertera pada Al-Qur’an surat An-Nuur ayat 31 berikut,

وَقُل لِّلْمُؤْمِنَـٰتِ يَغْضُضْنَ مِنْ أَبْصَـٰرِهِنَّ وَيَحْفَظْنَ فُرُوجَهُنَّ وَلَا يُبْدِينَ زِينَتَهُنَّ

إِلَّا مَا ظَهَرَ مِنْهَا ۖ وَلْيَضْرِبْنَ بِخُمُرِهِنَّ عَلَىٰ جُيُوبِهِنَّ ۖ وَلَا يُبْدِينَ زِينَتَهُنَّ

Artinya: *Katakanlah kepada wanita yang beriman: "Hendaklah mereka menahan pandangannya, dan kemaluannya, dan janganlah mereka menampakkan* *perhiasannya, kecuali yang (biasa) nampak dari padanya. Dan hendaklah mereka menutupkan kain kerudung ke dadanya, dan janganlah menampakkan perhiasannya"* (QS. An-Nuur:31).

Sifat latis tidak hanya tertutup, akan tetapi juga komutatif. Komutatif adalah suatu timbal balik. Dalam Islam komutatif dapat dicontohkan dalam perintah untuk saling tolong-menolong. Perhatikan firman Allah dalam surat Al-Ma'idah ayat 2:

وَتَعَاوَنُوا۟ عَلَى ٱلْبِرِّ وَٱلتَّقْوَىٰ ۖ وَلَا تَعَاوَنُوا۟ عَلَى ٱلْإِثْمِ وَٱلْعُدْوَٰنِ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ ۖ إِنَّ ٱللَّهَ شَدِيدُ ٱلْعِقَابِ ﴿٢﴾

Atinya: *Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. dan bertakwalah kamu kepada Allah, sesungguhnya Allah amat berat siksa-Nya.*

Dari ayat di atas terdapat kalimat yang artinya *"tolong-menolong"*. Ayat di atas menjelaskan perintah untuk saling tolong-menolong dalam hal kebajikan dan ketakwaan, yakni segala upaya yang dapat menghindarkan bencana duniawi maupun ukhrawi. Selain itu ayat di atas juga menegaskan larangan tolong-menolong dalam hal dosa dan pelanggaran, karena sesungguhnya siksaan Allah amatlah pedih. Sebagai makhluk sosial manusia berkewajiban bermasyarakat dan saling tolong-menolong antara satu dengan yang lainnya.

Selanjutnya sifat latis adalah asosiatif. Dalam Islam ada yang disebut *muamalah*. Pada surat Al-Baqarah ayat 281 terdapat kata "*tadaayantum*" yang memiliki arti "*Bermuamalah ialah seperti berjual beli, hutang piutang, atau sewa menyewa dan sebagainya"* mengisyaratkan suatu sifat asosiatif. Dengan ber*muamalah* akan tercipta kerukunan antar sesama dalam mengerjakan sesuatu yang baik. Sebagai makhluk sosial, manusia menerima dan memberikan andilnya kepada orang lain, saling ber*muamalah* untuk memenuhi hajat hidup dan mencapai kemajuan dalam hidupnya. *Muamalah* di sini dapat dicontohkan dalam jual beli. Sebagai penjual harus jujur ketika orang menjual barang dagangannya. Sehingga antara penjual dan pembeli akan terjadi keharmonisan interaksi satu sama lain.

Sifat terakhir dari latis adalah absorpsi. Absorpsi dalam matematika adalah suatu penyerapan. Dalam Islam absorpsi dapat dicontohkan dalam perintah untuk saling memaafkan. Perhatikan firman Allah dalam surat Asy-Syu'ara ayat 40:

وَجَزَٰٓؤُاْ سَيِّئَةٍ سَيِّئَةٌ مِّثۡلُهَاۖ فَمَنۡ عَفَا وَأَصۡلَحَ فَأَجۡرُهُۥ عَلَى ٱللَّهِۚ إِنَّهُۥ لَا يُحِبُّ ٱلظَّٰلِمِينَ ﴿٤٠﴾

Artinya: *"Dan Balasan suatu kejahatan adalah kejahatan yang serupa, Maka barang siapa memaafkan dan berbuat baik, maka pahalanya atas (tanggungan) Allah. Sesungguhnya Dia tidak menyukai orang-orang yang zalim".*

Dari ayat di atas dapat dicerna bahwa istilah absorpsi sudah ada dalam Al-Qur'an. Dari definisinya, absorpsi merupakan suatu penyerapan. Dalam Islam, absorpsi adalah memaafkan atau menghapus atau mangampuni kesalahan orang lain. Seperti dalam ayat di atas terdapat kalimat yang artinya *"memaafkan"*. Islam mengajak manusia untuk saling memaafkan dan memberi derajat tinggi bagi pemaaf. Contoh memaafkan orang yang berbuat salah kepada kita ketika orang tersebut menyadari kesalahanya dan berjanji tidak akan mengulangi lagi kesalahan tersebut, sehingga kerukunan hubungan sesama akan terbina dalam kehidupan bermasyarakat.

Dari keterangan di atas, dapat disimpulkan bahwa himpunan-himpunan dalam latis mempunyai elemen atau anggota. Anggota di dalam himpunan matriks Boolean itu dalam kehidupan diibaratkan merupakan makhluk yang menjadi salah satu anggota dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan operasi antar anggota himpunan dengan dua interaksi. Hal ini diibaratkan seperti interaksi antara makhluk-makhluk Allah, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah SWT, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai analisis latis modular pada himpunan matriks Boolean $n \times n$, dapat disimpulkan bahwa:

1. Melalui definisi operasi pada matriks Boolean dan sifat-sifat latis, maka latis modular dapat dibentuk dari suatu himpunan matriks Boolean $n \times n$ dengan definisi sebagai berikut:

   Untuk sebarang matriks Boolean $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij}) \in L$, maka L disebut latis modular jika memenuhi:

   $$X \succeq Y \Rightarrow X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$
   $$= Y \cup (X \cap Z)$$

2. Sifat-sifat latis modular pada himpunan matriks Boolean $n \times n$ $(L, \cup, \cap)$ antara lain:

   (i) L adalah modular, yaitu:

   $$X \succeq Z \text{ maka } X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$$

   untuk setiap matriks Boolean $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij}) \in L$.

   (ii) L memenuhi pemotongan identitas:

   $$X \cap (Y \cup Z) = X \cap \big((Y \cap (X \cup Z)) \cup Z \big)$$

   untuk setiap matriks Boolean $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij}) \in L$.

   (iii) L tidak memuat pentagon

(iv) Misalkan himpunan matriks Boolean $X \preceq Y \in L$ dan $Z \in L$. Maka unsur-unsur X, Y, Z menghasilkan suatu sublatis distributif.

(v) Suatu sublatis dari latis modular pada himpunan matriks Boolean $n \times n$ adalah modular.

4.2 Saran

Penelitian ini masih perlu pengembangan keilmuan sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan kelas latis lainnya atau memadukan suatu kelas dalam latis dengan sistem aljabar lain untuk mengidentifikasi adanya keterkaitan antara beberapa sistem aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Analisis Real 1*. Buku tidak diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press.

Anton, H.. 1997. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Ar Rifa'i, M. N.. 2000. *Kemudahan dari Allah Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid 3*. Jakarta: Gema Insani Press.

Chen, W.. 1952. *Boolean Matrices and Switching Nets.* Jepang: Ohio University.

Gratzer, G.. 2011. *Lattice Theory: Foundation*. Canada: University of Wanitoba.

Hartono, Y. & Puspita, F. M.. 2006. *Matematika Diskrit*. Indralaya: Universitas Sriwijaya.

Rutherford. 1965. *Introduction to Lattice Theory*. London: Great Britain.

Saondi, O.. 2009. *Teori Himpunan (Edisi kedua)*. Cirebon: Al-Tarbiyah Press.

Shihab, M. Q.. 2002. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al-Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Sukardjono. 2002. *Teori Latis*. Yogyakarta: Andi Offset.

Sumardyono. 2004. *Karakteristik Matematika dan Implikasinya terhadap Pembelajaran Matematika*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Suryadi. 1989. *Aljabar Logika & Himpunan (Seri Diktat Kuliah)*. Jakarta: Penerbit Gunadarma.

Tabak, J.. 2004. *The History of Mathematics: Algebra (Set, Symbols, and The Language of Thought)*. New York: Facts On File, Inc.

Turmudi. 2010. *Pengantar Topologi*. Malang: UIN Press.