TRANSFORMASI LINIER PADA PERLUASAN LAPANGAN

SKRIPSI

Oleh:
KHURIATUL HAWIN
NIM. 10610100

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

TRANSFORMASI LINIER PADA PERLUASAN LAPANGAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
KHURIATUL HAWIN
NIM. 10610100

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

TRANSFORMASI LINIER PADA PERLUASAN LAPANGAN

SKRIPSI

Oleh:
KHURIATUL HAWIN
NIM. 10610100

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 12 Agustus 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	**H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd**
NIP. 19571005 198203 1 006	**NIP. 19710420 200003 1 003**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

TRANSFORMASI LINIER PADA PERLUASAN LAPANGAN

SKRIPSI

Oleh:
KHURIATUL HAWIN
NIM. 10610100

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 1 September 2014

Penguji Utama	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	
		NIP. 19751006 200312 1 001	________________________
Ketua Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	
		NIP. 19720604 199903 2 001	________________________
Sekretaris Penguji	:	Drs. H. Turmudi, M.Si	
		NIP. 19571005 198203 1 006	________________________
Anggota Penguji	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	
		NIP. 19710420 200003 1 003	________________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Dr. Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Khuriatul Hawin
NIM	: 10610100
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Transformasi Linier pada Perluasan Lapangan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil pikiran atau tulisan orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada kajian pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Mei 2014
Yang membuat pernyataan,

Khuriatul Hawin
NIM. 10610100

MOTO

"*Wahai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepadamu*
"Berilah kelapangan di dalam majelis-majelis", maka lapangkanlah,
niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu.
Dan apabila dikatakan "Berdirilah kamu", maka berdirilah,
niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman di antaramu
dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat.
Dan Allah maha teliti apa yang kamu kerjakan."

QS. Al-Mujadalah:11

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamiin...dengan iringan rasa syukur, skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Abi Mudjib dan Ibunda Sri Utami yang selalu mendo'akan,
Kakak Nurul Hijriyah dan adik Mochammad Qisto Mizani tersayang,
Seseorang yang selalu memberikan do'a dan motivasi bagi penulis,
serta guru-guru yang senantiasa membimbing.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'alamiin. Puji syukur ke hadirat Allah SWT penulis haturkan atas limpahan rahmat, taufik, hidayah serta inayah-Nya sehingga dapat menyelesaikan studi sekaligus tugas akhir/skripsi ini dengan baik di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *Jazakumullah Ahsanal jaza'* penulis haturkan kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si dan H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku dosen pembimbing yang telah banyak memberikan arahan selama penulisan skripsi ini.
5. Fachrur Rozi, M.Si selaku dosen wali yang senantiasa memberikan arahan selama penulis menempuh kuliah.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kedua orang tua penulis Bapak H. Moch. Mudjib dan Ibu Sri Utami yang senantiasa memberikan kasih sayang, do'a, dukungan dan dorongan semangat kepada penulis selama ini.
8. Teman-teman terbaik penulis, Laila Fitriyah, Ahmad Kanzu Syauqi Firdaus, Keluarga Cemara, dan seluruh teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2010 yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik materiil maupun moril.

Penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Mei 2014

Penulis

DAFTAR ISI

BAB V PENUTUP

ABSTRAK

Hawin, Khuriatul. 2014. **Transformasi Linier pada Perluasan Lapangan.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si
(II) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Kata Kunci: *Perluasan lapangan, Transformasi Linier.*

Transformasi linier pada perluasan lapangan adalah suatu fungsi homomorfisme yang memetakan suatu ruang vektor ke ruang vektor yang lain dengan memenuhi sifat penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar. Adapun ruang vektor dalam penelitian ini adalah perluasan lapangan K atas F di bawah operasi lapangan biasa sehingga K adalah sebuah ruang vektor atas F. Dari sini penulis menganalisis bahwa himpunan fungsi homomorfisme membentuk transformasi linier pada perluasan lapangan.

Adapun langkah-langkah untuk menunjukkan transformasi linier pada perluasan lapangan adalah sebagai berikut: (1) mendefinisikan lapangan $(F,+,\times)$ dengan $+$ dan $\times$ merupakan lambang operasi biner, (2) mendeskripsikan lapangan $(K,+,\times)$ sebagai perluasan atas lapangan $(F,+,\times)$, (3) mendeskripsikan perluasan lapangan sebagai ruang vektor, (4) membangun fungsi homomorfisme dari V ke dirinya sendiri, (5) mendefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada fungsi homomorfisme dari V ke V, (6) mendeskripsikan $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai himpunan semua homomorfisme dari V ke V, (7) menunjukkan bahwa $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai ruang vektor.

Hasil dari penelitian ini di antaranya: (1) lapangan K perluasan atas F memenuhi sifat-sifat ruang vektor atas lapangan, (2) $\mathrm{Hom}(V,V)$ himpunan homomorfisme dari V ke V memenuhi sifat-sifat ruang vektor atas lapangan.

ABSTRACT

Hawin, Khuriatul. 2014. **Linear Transformations on Extension Field**. Thesis, Mathematics Department Faculty of Science and Technology Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang.
Advisors: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si
(II) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Keywords: *Extension Field*, *Linear Transformations*.

Linear transformation on the field extension is a homomorphism function which maps vector space into another vector space that meet the properties of vector addition and scalar multiplication of vector. The vector space in this study is field extension K over F under ordinary field operation so that K is a vector space over F. From here the author analyzes that set of homomorphism function produces linear transformations on the extension field.

The steps to show that a linear transformation on extension field are as follows: (1) defining the field $(F,+,\times)$ with $+$ and $\times$ are binary operation symbols, (2) describing the field $(K,+,\times)$ as a field extension of $(F,+,\times)$, (3) describing the field extension as a vector space, (4) building the homomorfism functions from V to itself, (5) defining the addition and scalar multiplication operations in homomorfism function from V to V, (6) describing $\mathrm{Hom}(V,V)$ as set of all homomorfism from V to V, (7) showing that $\mathrm{Hom}(V,V)$ is a vector space.

The results of this study are as follows: (1) field extension K over F satisfy the properties of a vector space over the field, (2) $\mathrm{Hom}(V,V)$ the set homomorfisme from V to V satisfies the properties of a vector space over the field.

ملخص

الهوّن، حرية. ٢٠١٤. **التحول الخطي في توسيع الحقل**. بحث الجامعي. شعبة الرياضية. كلية العلوم والتكنو لوجي. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهم مالانج.
مشريف: (١). دوكتور ترمذي الماجستير في العلوم
(٢). وحيو هنكي إراوان الماجستير

الكلمة الرئي سية: توسيع الحقل، تحول الخطي

تحول الخطي في توسيع الحقل هو دالة متشابهاالشكل التي يمكن علاقة الفضاء ناقلات الى الفضاء ناقلات أخرى بلقاء إعداد ناقلات و ضرب ناقلات مع المردية. والفضاء ناقلات في هذ بحث هو توسيع الحقل K على F مع عملية الحقل العادي، حتى كان K هو الفضاء ناقلات في F. من هذا الكاتبة تحلّ أن جمعية دالة متشابهاالشكل يجري تحول الخطي في توسيع الحقل.

الخطوات لإظهار أن تحول الخطية في توسيع الحقل هي كما يلي: (١) تحديد الحقل $(F,+,\times)$ مع $+$ و $\times$ هو علامات عملية ثنائية، (٢) وصف الحقل $(K,+,\times)$ كتوسيع الحقل $(F,+,\times)$، (٣) وصف توسيع الحقل كالفضاء ناقلات، (٤) بناء دالة متشابهاالشكل من V إلى نفسها، (٥) تحرير إعداد ناقلات و مرّات ناقلات مع المردية على دالة متشابهاالشكل من V إلى V، (٦) وصف $\mathrm{Hom}(V,V)$ على أنها مجموعة من كل متشابهاالشكل من V إلى V، (٧) إثبات أن $\mathrm{Hom}(V,V)$ هو الفضاء ناقلات.

نتائج هذه بحث هو (١) الحقل $(K,+,\times)$ توسيع على الحقل $(F,+,\times)$ تلبية خصائص الفضاء ناقلات، (٢) $\mathrm{Hom}(V,V)$ مجموعة من كل متشابهاالشكل من V إلى V تلقي خصائص الفضاء ناقلات.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan, dan kuantitas. Dengan menggunakan aljabar dapat diselidiki pola aturan-aturan bilangan umum. Sekarang ini istilah aljabar mempunyai makna lebih luas daripada sekedar aljabar elementer, yaitu meliputi aljabar abstrak, aljabar linier, dan sebagainya. Aljabar tidak bekerja secara langsung dengan bilangan melainkan bekerja dengan menggunakan simbol, variabel dan elemen-elemen himpunan. Sebagai contoh, penambahan dan perkalian dipandang sebagai operasi secara umum dan definisi ini menuju pada struktur aljabar seperti grup, ring, dan lapangan (*fields*).

Salah satu pembahasan dalam aljabar adalah mengenai transformasi linier yaitu suatu fungsi yang dapat memetakan suatu ruang vektor ke ruang vektor yang lain. Transformasi identik dengan kata perpindahan dan perubahan, yang dalam Al-Qur’an dapat dihubungkan dengan peristiwa hijrah atau pergantian siang malam. Jika direlevansikan dengan kajian agama sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa pergantian siang dan malam yang mana matahari dan bulan masing-masing berjalan pada batas yang telah ditentukan. Sebagaimana dalam QS. Al-Luqman 31:29, yaitu:

أَلَمْ تَرَ أَنَّ ٱللَّهَ يُولِجُ ٱلَّيْلَ فِى ٱلنَّهَارِ وَيُولِجُ ٱلنَّهَارَ فِى ٱلَّيْلِ وَسَخَّرَ ٱلشَّمْسَ وَٱلْقَمَرَ
كُلٌّ يَجْرِىٓ إِلَىٰٓ أَجَلٍ مُّسَمًّى وَأَنَّ ٱللَّهَ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿٢٩﴾

Artinya: *"Tidakkah kamu memperhatikan, bahwa Sesungguhnya Allah memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan Dia tundukkan matahari dan bulan masing-masing berjalan sampai kepada waktu yang ditentukan, dan Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan"*. (QS. Al-Luqman 31:29)

Ayat di atas menjelaskan bahwa keesaan-Nya dalam mengatur dan bertindak. Dia memasukkan malam ke dalam siang dan siang ke dalam malam yakni jika salah satunya masuk maka yang lain pergi. Demikian pula Allah subhanahu wa ta'ala menundukkan matahari dan bulan. Keduanya berjalan secara teratur, tidak kacau sejak keduanya diciptakan untuk menegakkan kemaslahatan hamba, baik agama maupun dunia mereka, di mana mereka dapat mengambil pelajaran dan manfaat darinya. Ketika tiba pada batasnya maka keduanya berhenti beredar, matahari digulung dan bulan pun dihilangkan cahayanya.

Perubahan cahaya siang dan malam merupakan perlakuan matahari dan bulan yang dikenakan terhadap bumi, yang mana cahaya bulan merupakan pancaran radiasi dari matahari sehingga perlakuan (operasi) sinar yang diberikan matahari terhadap bumi berlaku juga pada bulan yang memancarkan sinarnya terhadap bumi. Bumi dapat diibaratkan sebagai ruang vektor yang dikenai perlakuan (operasi) dari fungsi cahaya matahari dan dari fungsi cahaya bulan, yang mana keduanya sama-sama mentransformasikan cahayanya terhadap bumi.

Salah satu istilah yang lebih luas dari aljabar elementer yang telah dikenal adalah istilah aljabar abstrak yang mana operasi penjumlahan dan perkalian dipandang secara umum. Pengertian tersebut menuju pada struktur aljabar yang disebut grup, ring, dan lapangan. Grup merupakan suatu sistem aljabar yang terdefinisi oleh satu operasi biner dan dapat diperluas menjadi struktur aljabar ring yang terdefinisi oleh dua operasi biner, sedangkan ring yang dilengkapi hukum komutatif dengan elemen identitas dan untuk setiap elemen bukan nol mempunyai invers membentuk struktur aljabar lapangan, adapun lapangan yang diperluas dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan.

Fungsi yang memetakan suatu ruang vektor ke ruang vektor dengan mempertahankan operasi penjumlahan dan perkalian dapat disebut sebagai fungsi homomorfisme, adapun himpunan semua homomorfisme dari ruang vektor ke ruang vektor yang dikenai operasi membentuk suatu ruang vektor atas lapangan. Dari sinilah penulis tertarik untuk menganalisis bahwa kumpulan dari fungsi homomorfisme membentuk suatu ruang vektor atas lapangan sehingga berakibat untuk setiap elemennya merupakan transformasi linier.

Hal yang menarik untuk dikaji dalam bab ini adalah elemen dari aljabar atas lapangan yang merupakan himpunan dari fungsi-fungsi homomorfisme memenuhi transformasi linier atas perluasan lapangan. Oleh karena itu, berdasarkan latar belakang di atas penulis merumuskan masalah mengenai **"Transformasi Linier pada Perluasan Lapangan"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas maka masalah yang dapat dirumuskan antara lain:

1. Bagaimana analisis perluasan lapangan dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan?
2. Bagaimana homomorfisme pada perluasan lapangan?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menganalisis perluasan lapangan dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan
2. Untuk mengetahui homomorfisme pada perluasan lapangan

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini di antaranya adalah:

1. Bagi Pengembang Ilmu Pengetahuan

Skripsi ini diharapkan dapat memberikan wacana terhadap pengembangan khasanah keilmuan bidang ilmu matematika tentang transformasi linier, khususnya pada topik transformasi linier pada perluasan lapangan.

2. Bagi Penulis

Skripsi ini diharapkan dapat memberikan pemahaman secara menyeluruh sebagai wawasan baru.

3. Bagi Lembaga UIN Maliki Malang

Sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembang ilmu pengetahuan khususnya untuk jurusan matematika pada mata kuliah aljabar linier elementer dan aljabar abstrak.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan permasalahan yang telah dipaparkan di atas, terdapat batasan masalah di antaranya:

1. Dalam penelitian ini lapangan yang diberikan adalah lapangan $(F,+,\times)$ dengan memenuhi sifat-sifat pada lapangan.
2. Lapangan $(K,+,\times)$ sebagai perluasan atas lapangan F jika $F \subset K$, sehingga K dapat dipandang sebagai ruang vektor atas F.
3. Fungsi yang dibangun pada ruang vektor atas F berupa fungsi homomorfisme yang endomorfisme, sehingga untuk himpunan fungsi homomorfisme dari V ke V didefinisikan sebagai $\mathrm{Hom}(V,V)$.

1.6 Sistematika Penulisan

Pada bab ini dibutuhkan sistematika penulisan agar dalam penulisan skripsi bisa lebih teratur dan terarah, sehingga mudah untuk ditelaah dan dipahami. Dalam sistematika penulisan ini terdiri dari lima bab, yang mana pada masing-masing bab dibagi dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri dari konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang definisi ring, lapangan, perluasan lapangan, ruang vektor, ruang vektor atas lapangan, contoh-contoh ruang vektor, subruang, definisi dan sifat-sifat transformasi linier yang mengawetkan penjumlahan dan perkalian dengan skalar, serta kajian dalam al-qur’an.

Bab III Metode Penelitian

Pada bab ini dibahas mengenai metode atau langkah-langkah yang digunakan penulis dalam penelitian, di antaranya berisi tentang jenis dan pendekatan penelitian, data dan sumber data, pengumpulan data, analisa data, dan prosedur penelitian.

Bab IV Pembahasan

Pembahasan pokok dalam penelitian ini adalah menunjukkan bahwa kumpulan fungsi homomorfisme membentuk transformasi linier dengan langkah diberikan lapangan F yang diperluas menjadi lapangan K sehingga perluasan tersebut dapat dipandang sebagai ruang vektor, karena lapangan K dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan maka untuk selanjutnya ditunjukkan memenuhi sifat-sifat ruang vektor atas lapangan. Kemudian diberikan fungsi homomorfisme dari ruang vektor V ke dirinya sendiri yang mana V merupakan ruang vektor atas lapangan sehingga untuk himpunan semua homomorfisme dari V ke V didefinisikan sebagai $\mathrm{Hom}(V,V)$, lalu ditunjukkan bahwa untuk $\mathrm{Hom}(V,V)$ memenuhi sifat-sifat ruang vektor atas lapangan.

Bab V Penutup

Pada bagian ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi pembaca yang ingin meneliti lebih lanjut.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ring

Suatu sistem aljabar yang terdiri dari himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan (*addition*) dan perkalian (*multiplication*) disebut ring, secara eksplisit suatu ring dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1. Ring

Misal R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu $+$ sebagai operasi pertama dan $*$ sebagai operasi kedua, maka sistem $(R, +, *)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut:

(i) $(R, +)$ merupakan grup abelian

(ii) Operasi $*$ bersifat assosiatif di R:

$(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \in R$

(iii) Operasi $*$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di R baik kanan maupun kiri:

$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ (hukum distributif kanan)

$(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$ (hukum distributif kiri)

$\forall\, a, b, c \in R$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:131).

Contoh:

Apakah $(Z_5, +, \times)$ dengan Z_5 adalah himpunan bilangan modulo 5 merupakan ring?

Jawab:

Dengan anggota Z_5 adalah sebagai berikut

$$Z_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

1. Ditunjukkan bahwa $(Z_5, +)$ adalah grup abelian
   a. Ambil $\bar{1}, \bar{2} \in Z_5$ sehingga

      $\bar{1} + \bar{2} \in Z_5$ tertutup pada operasi penjumlahan
   b. Ambil $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \in Z_5$ sehingga untuk

      $(\bar{1} + \bar{2}) + \bar{3} = \bar{1} + (\bar{2} + \bar{3})$ bersifat assosiatif terhadap operasi penjumlahan
   c. Terdapat $\bar{0} \in Z_5$ sehingga

      $\bar{3} + 0 = 0 + \bar{3} = \bar{3}, \forall\, \bar{3} \in Z_5$ maka elemen $\bar{0}$ merupakan identitas terhadap operasi penjumlahan di Z_5
   d. Untuk setiap $a \in Z_5$ terdapat $-a \in Z_5$ sehingga

      $\bar{3} + (-\bar{3}) = (-\bar{3}) + \bar{3} = \bar{0}$ maka $(-\bar{3})$ merupakan invers dari $\bar{3}$
2. Operasi $\times$ bersifat assosiatif di Z_5

   Ambil $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \in Z_5$ sehingga

   $(\bar{1} \times \bar{2}) \times \bar{3} = \bar{1} \times (\bar{2} \times \bar{3})$ operasi $\times$ bersifat assosiatif di Z_5
3. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di Z_5 baik kanan maupun kiri

   Ambil $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \in Z_5$ sehingga

   $\bar{1} \times (\bar{2} + \bar{3}) = (\bar{1} \times \bar{2}) + (\bar{1} \times \bar{3})$ distributif kanan

   $(\bar{1} + \bar{2}) \times \bar{3} = (\bar{1} \times \bar{3}) + (\bar{2} \times \bar{3})$ distributif kiri

Karena bilangan modulo 5 dengan operasi + dan × memenuhi aksioma-aksioma pada ring maka $(Z_5, +, \times)$ adalah ring.

2.2 Lapangan

Ring dengan elemen kesatuan yang setiap elemennya yang bukan elemen nol merupakan unit yaitu elemen yang mempunyai invers perkalian disebut lapangan miring (*skew field*), sedangkan *skew field* yang memenuhi sifat komutatif terhadap perkalian disebut lapangan (*field*) (Soebagio dan Sukirman, 1993:325).

Definisi 2. Lapangan

Pandang himpunan tak hampa F dengan dua operasi padanya, yaitu:

Operasi tambah $+ : F \times F \to F$,

$+ : (a, b) \to a + b$, dan

Operasi kali $\circ : F \times F \to F$,

$\circ : (a, b) \to ab$.

Sistem matematika $(F, +, \circ)$ disebut *lapangan* jika memenuhi aksioma berikut.

1. Terhadap operasi tambah, sistem matematika $(F, +)$ memenuhi hubungan berikut:
   a. $a + b = b + a$ untuk semua a dan b di F
   b. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk semua a, b dan c di F
   c. Terdapat unsur 0 di F yang bersifat $a + 0 = a$, untuk semua a di F
   d. Untuk setiap unsur a di F terdapat unsur $-a$ di F yang memenuhi $a + (-a) = 0$. Unsur $-a$ disebut balikan dari a terhadap operasi tambah.
2. Terhadap operasi kali, sistem matematika $(F, \circ)$ memenuhi hubungan berikut:
   a. $a \circ b = b \circ a$ untuk semua a dan b di F
   b. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ untuk semua a, b dan c di F
   c. Terdapat unsur 1 di F yang berbeda dengan 0 yang memenuhi $a \circ 1 = a$, untuk semua a di F. Unsur 1 disebut unsur kesatuan.
   d. Untuk setiap unsur a di F terdapat unsur a^{-1} di F yang memenuhi $a \circ a^{-1} = 1$. Unsur a^{-1} disebut balikan dari a terhadap operasi kali.

3. Untuk semua unsur a, b dan c di F berlaku $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$ (Arifin, 2001:1-2).

Sebagai contoh suatu lapangan adalah himpunan semua bilangan rasional Q terhadap operasi tambah dan operasi kali. Lapangan ini dituliskan dengan $(Q, +, \cdot)$, atau hanya dengan Q saja, dan disebut lapangan bilangan rasional.

2.3 Perluasan Lapangan

Misalkan F sebuah lapangan, sebuah lapangan K disebut sebagai perluasan atas F jika K memuat F. Setara dengan, K adalah sebuah perluasan atas F jika F adalah sebuah sublapangan pada K. Sebagaimana yang telah ditunjukkan pada bagian ruang vektor, jika K adalah sebuah perluasan atas F dibawah operasi lapangan biasa di K maka K adalah sebuah ruang vektor atas F (Herstein, 1975:207-208).

Definisi 3. Derajat

Derajat pada K atas F adalah dimensi pada K sebagai ruang vektor atas F

Derajat pada K atas F dinotasikan dengan $[K:F]$, keterangan penting pada bagian ini $[K:F]$ adalah finit, ketika K berdimensi finit sebagai sebuah ruang vektor atas F, dengan kata lain K adalah perluasan finit atas F (Herstein, 1975:208).

2.4 Ruang Vektor

Pada subbab ini membahas mengenai struktur dasar aljabar linier yaitu ruang vektor dengan dimensi terhingga, definisi dari ruang vektor V yang elemennya disebut sebagai vektor melibatkan sebarang lapangan K yang elemennya disebut sebagai skalar. Berikut merupakan definisi, contoh, serta hal lain yang berkaitan dengan ruang vektor:

2.4.1 Ruang Vektor

Definisi 4. Ruang Vektor

Misalkan V adalah suatu himpunan tak kosong dengan elemen-elemen di dalamnya berupa vektor dengan dua operasi:

(i) ***Penjumlahan Vektor***: untuk sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, jumlah $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ di dalam V.

(ii) ***Perkalian Skalar***: untuk sebarang $\boldsymbol{u} \in V$, $k \in K$, hasilkali $k\boldsymbol{u} \in V$.

Maka V disebut ruang vektor (atas lapangan K) jika aksioma-aksioma berikut ini dipenuhi untuk sebarang vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$:

$[A_1]$ $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

$[A_2]$ Terdapat vektor di dalam V, yang dilambangkan dengan 0 dan disebut vektor nol, sedemikian rupa sehingga untuk sebarang $\boldsymbol{u} \in V$,

$$\boldsymbol{u} + 0 = 0 + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

$[A_3]$ Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in V$, terdapat vektor di dalam V yang dilambangkan dengan $-\boldsymbol{u}$ dan disebut negatif dari $\boldsymbol{u}$, sedemikian rupa sehingga

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = 0$$

$[A_4]$ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

$[M_1]$ $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$, untuk sebarang skalar $k \in K$.

$[M_2]$ $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$, untuk sebarang skalar $a, b \in K$.

$[M_3]$ $(ab)\boldsymbol{u} = a(b\boldsymbol{u})$, untuk sebarang skalar $a, b \in K$.

$[M_4]$ $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, untuk skalar satuan $1 \in K$ (Lipschutz dan Lipson, 2006:98-99).

2.4.2 Contoh Ruang Vektor

Subbab ini menjabarkan contoh penting ruang vektor yang akan digunakan sebagai bahan pembahasan pada bab IV.

Definisi 5. Ruang Fungsi $F(X)$

Misalkan X adalah himpunan bukan kosong dan misalkan K adalah sebarang lapangan, misal $F(X)$ melambangkan himpunan semua fungsi X ke dalam K maka $F(X)$ adalah ruang vektor atas K dalam kaitannya dengan operasi-operasi berikut:

(i) Penjumlahan vektor: Jumlah dari dua fungsi f dan g dalam $F(X)$ adalah fungsi $f+g$ dalam $F(X)$ yang didefinisikan sebagai

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$$

(ii) Perkalian skalar: Hasilkali dari skalar $k \in K$ dan fungsi f dalam $F(X)$ adalah fungsi kf dalam $F(X)$ yang didefinisikan sebagai

$$(kf)(x) = kf(x) \quad \forall x \in X$$

Vektor nol dalam $F(X)$ adalah fungsi nol 0, yang memetakan setiap $x \in X$ ke dalam elemen nol $0 \in K$ yaitu

$$0(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

Selain itu untuk sebarang fungsi f dalam $F(X)$, fungsi $-f$ pada $F(X)$ yang didefinisikan sebagai

$$(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in X$$

adalah negatif dari fungsi f (Lipschutz dan Lipson, 2006:100).

Contoh:

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi pada R^2 yang didefinisikan sebagai $f(x,y) = (y,x)$ dan $g(x,y) = (0,x)$. Tentukan rumus yang mendefinisikan fungsi-fungsi berikut ini:

a. $F + G$, b. $2F - 3G$

b. $(F + G)(x,y) = F(x,y) + G(x,y) = (y,x) + (0,x) = (y,2x)$

c. $(2F - 3G)(x,y) = 2F(x,y) - 3G(x,y) = 2(y,x) - 3(0,x) = (2y,-x)$

2.4.3 Subruang

Definisi 6. Subruang

Misalkan V ruang vektor. $U \subseteq V$ dan $U \neq \emptyset$. U disebut subruang dari V jika U ruang vektor pada operasi yang sama dengan di V.

Sebagai contoh, ruang nol adalah himpunan bagian dari ruang vektor yang lain. Kenyataan bahwa setiap anggota U juga anggota V menyebabkan aksioma yang dipenuhi di V juga dipenuhi di U dan juga karena U merupakan ruang vektor maka dapatlah dipenuhi aksioma ketertutupan terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Dari kenyataan ini didapat kesimpulan berikut ini.

Teorema 1

Misalkan V ruang vektor. $U \subseteq V$ dan $U \neq \emptyset$. U subruang dari V jika dan hanya jika dipenuhi kedua aksioma berikut

1. $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
2. $\forall\, \boldsymbol{u} \in U, k \in R$ maka $k\boldsymbol{u} \in U$

Kedua aksioma di atas ekivalen dengan mengatakan

3. $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, dan $k, l \in R$, maka $k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{v} \in U$ (Imrona, 2009:72).

Contoh:

Misalkan U himpunan semua matriks 2×2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat $a = 0$, dan $d = 0$. Tunjukkan bahwa U merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2×2.

Jawab:

1. Karena $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$, maka $U \neq \emptyset$
2. Ambil $A, B \in U$, akan ditunjukkan bahwa $A + B \in U$. Karena $A \in U$ maka dipenuhi $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dengan $a_1 = 0$ dan $d_1 = 0$, dan oleh karena $A \in U$ maka dipenuhi $A = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ dengan $a_2 = 0$ dan $d_2 = 0$.

   Dengan demikian, $A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_1 & b_1 + b_1 \\ c_1 + c_1 & d_1 + d_1 \end{bmatrix}$ karena $a_1 = 0$ dan $a_2 = 0$ maka $a_1 + a_2 = 0$, dan juga karena $d_1 = 0$ dan $d_2 = 0$ maka $d_1 + d_2 = 0$. Jadi $A + B \in U$.
3. Ambil $A \in U$, ambil $k \in R$ dan akan ditunjukkan bahwa $kA \in U$. Karena $A \in U$ maka dipenuhi $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dengan $a_1 = 0$ dan $d_1 = 0$. Maka $kA = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$, berarti $ka_1 = 0$ dan $kd_1 = 0$. Jadi $kA \in U$.

   Dengan demikian, U merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2×2.

2.4.4 Ruang Vektor atas Lapangan

Definisi 7. Ruang Vektor atas Lapangan

Sebuah himpunan tidak kosong V disebut sebagai ruang vektor atas lapangan F jika V adalah grup abelian di bawah operasi yang dinotasikan dengan $+$, dan jika untuk setiap $\alpha \in F$, $\boldsymbol{v} \in V$ didefinisikan sebuah elemen yang ditulis sebagai $\alpha\boldsymbol{v}$ di V yang memenuhi:

1. $\alpha(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \alpha\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w}$
2. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$
3. $\alpha(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$
4. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

untuk setiap $\alpha, \beta \in F, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ (di mana 1 menunjukkan elemen unit atas F di bawah operasi perkalian) (Herstein, 1975:171).

Contoh:

Himpunan matriks $m \times n$ dengan elemen-elemennya merupakan bilangan bulat

$$M_{3,2}(Z) = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

berikut untuk penjumlahan matriks:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 13 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

sedangkan untuk sebarang skalar $k = 2$, maka perkalian matriks dengan skalar adalah:

$$2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 16 & 12 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

maka $M_{3,2}(Z)$ adalah ruang vektor atas lapangan Z.

2.5 Transformasi Linier

Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan F dan misalkan $\mathrm{Hom}(V,V)$ terdiri dari semua homomorfisma ruang vektor dari V ke V. Sehingga berdasarkan teorema 2 bahwa $\mathrm{Hom}(V,V)$ membentuk suatu ruang vektor atas F, dan untuk $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $T_1 + T_2$ didefinisikan sebagai $\boldsymbol{v}(T_1 + T_2) = \boldsymbol{v}\, T_1 + \boldsymbol{v}\, T_2, \forall\, \boldsymbol{v} \in V$ dan untuk $\alpha \in F$, $\alpha\, T_1$ didefinisikan oleh $\boldsymbol{v}(\alpha\, T_1) = \alpha(\boldsymbol{v}\, T_1)$.

Untuk T_1, $T_2 \in \mathrm{Hom}(V,V)$, karena $\boldsymbol{v}\, T_1 \in V$ didefinisikan T_1, T_2 dengan $\boldsymbol{v}(T_1T_2) = (\boldsymbol{v}\, T_1)\, T_2$ untuk sebarang $\boldsymbol{v} \in V$. Akan ditunjukkan bahwa T_1, $T_2 \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Untuk itu, kita harus membuktikan bahwa:

$\forall \alpha, \beta \in F$ dan $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ berlaku $(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})(T_1T_2) = \alpha\big(\boldsymbol{u}(T_1T_2)\big) + \beta\big(\boldsymbol{v}(T_1T_2)\big)$

Bukti:

$$\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})(T_1T_2) &= \big((\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})T_1\big)T_2 \\ &= \big(\alpha(\boldsymbol{u}T_1) + \beta(\boldsymbol{v}T_1)\big)T_2 \\ &= \alpha(\boldsymbol{u}T_1)T_2 + \beta(\boldsymbol{v}T_1)T_2 \\ &= \alpha\big(\boldsymbol{u}(T_1T_2)\big) + \beta\big(\boldsymbol{v}(T_1T_2)\big)\end{aligned}$$

Beberapa sifat perkalian pada $\mathrm{Hom}(V,V)$:

1. $(T_1 + T_2)\, T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$
2. $T_3(T_1 + T_2) = T_3T_1 + T_3T_2$
3. $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$
4. $\alpha(T_1T_2) = (\alpha T_1)T_2 = T_1(\alpha T_2)$

$\forall\, T_1, T_2, T_3 \in \mathrm{Hom}(V,V)$ dan $\forall \alpha \in F$.

Catatan bahwa sifat-sifat 1, 2, 3 di atas menyebabkan $\mathrm{Hom}(V,V)$ adalah ring assosiatif. Sifat 4 merupakan karakter dari $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai suatu ruang vektor atas F, dengan karakternya sebagai suatu ring (Herstein, 1975:261).

Definisi 8. Aljabar

Suatu ring assosiatif A disebut suatu aljabar atas F jika A adalah ruang vektor atas F sedemikian hingga $\forall a, b \in A$ dan $\alpha \in F$, $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Kita jelaskan tentang pernyataan bahwa $\mathrm{Hom}(V,V)$ adalah suatu aljabar atas F, untuk kemudahan notasi selanjutnya kita tulis $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai $A(V)$, jika ditekankan peran dari lapangan F maka dinyatakan sebagai $A_F(V)$ (Herstein, 1975:262).

Definisi 9. Transformasi Linier

Suatu transformasi linier di V atas F, adalah elemen dari $A_F(V)$ (Herstein, 1975:262).

Teorema 2

Misalkan V dan U adalah ruang vektor atas lapangan K. Maka kumpulan dari semua pemetaan dari V ke U dengan operasi-operasi penambahan dan perkalian skalar membentuk ruang vektor atas K.

Ruang vektor dari pemetaan linier pada teorema 2 di atas biasanya dilambangkan dengan

$$\mathrm{Hom}(V,U)$$

disini Hom berasal dari kata “homomorfisme” (Lipschutz dan Lipson, 2006:152).

Contoh:

Didefinisikan $T_1: R^3 \rightarrow R^2$ dan $T_2: R^3 \rightarrow R^2$ dengan $T_1, T_2 \in \text{Hom}(R^3, R^2)$ $T_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ dan $T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$. Tentukan rumus yang mendefinisikan pemetaan:

a. $T_1 + T_2$ b. $3T_1$

Jawab:

a. $(T_1 + T_2)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = T_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

$= (2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

$= (3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}, 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

b. $(3T_1)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 3\big(T_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\big)$

$= 3(2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

$= (6\boldsymbol{x}, 3\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z})$

2.6 Kajian dalam Al-Qur'an

Kajian agama yang telah dibahas pada bab I yaitu mengenai transformasi identik dengan kata hijrah atau perpindahan, jika direlevansikan dengan kajian agama yaitu sejajar dengan ayat 29 dalam al-qur'an surat al-luqman mengenai pergantian siang dan malam. Untuk lebih memahami makna ayat tersebut penulis merujuk pada al-qur'an surat al-imran ayat 27 yaitu:

تُولِجُ ٱلَّيۡلَ فِي ٱلنَّهَارِ وَتُولِجُ ٱلنَّهَارَ فِي ٱلَّيۡلِۖ وَتُخۡرِجُ ٱلۡحَيَّ مِنَ ٱلۡمَيِّتِ وَتُخۡرِجُ
ٱلۡمَيِّتَ مِنَ ٱلۡحَيِّۖ وَتَرۡزُقُ مَن تَشَآءُ بِغَيۡرِ حِسَابٖ ٢٧

Artinya: *"Engkau masukkan malam ke dalam siang dan Engkau masukkan siang ke dalam malam. Engkau keluarkan yang hidup dari yang mati, dan Engkau keluarkan yang mati dari yang hidup. dan Engkau beri rezki siapa yang Engkau kehendaki tanpa hisab (batas)"*. (QS. Al-Imran 3:27)

Menurut Syaikh Abu Bakar Jabir Al-Jazairi dalam tafsir al-qur'an al-aisar makna yang terkandung dalam ayat tersebut yakni Allah memasukkan siang ke dalam malam hingga tak tersisa lagi waktu siang, Dia-pun memasukkan waktu malam ke dalam waktu siang hingga tak tersisa lagi waktu malam. Allah Ta'ala mengeluarkan yang hidup dari yang mati, seperti manusia berasal dari sperma dan tumbuhan dari sebutir biji. Dan mengeluarkan yang mati dari yang hidup, seperti sperma dari manusia yang hidup dan telur dari ayam betina. Orang kafir yang mati (jiwanya) dari orang mukmin yang hidup (jiwanya), begitu juga sebaliknya. Ini semua termasuk fenomena *Rububiyah* (kemahapenciptaan) Allah Ta'ala yang menuntut adanya pengesaan *Uluhiyah-Nya* (Al-Jazairi, 2007:68-69).

Isi dari kajian pustaka dalam bab II ini terfokus pada ruang vektor yang di dalamnya terdapat himpunan vektor-vektor, adapun himpunan vektor-vektor yang ada di dalam ruang vektor jika direlevansikan dengan kajian agama yaitu himpunan orang-orang kafir yang mati (jiwanya) dan himpunan orang-orang mukmin yang hidup (jiwanya), hal ini sesuai dalam qur'an surat al-imran ayat 27 yang telah disebutkan di atas. Adapun yang termasuk dalam himpunan orang-orang mukmin yaitu orang yang memiliki sifat sabar dan syukur, sedangkan yang termasuk dalam himpunan orang-orang kafir dalam kajian ini penulis mengambil dua contoh yaitu sifat ingkar dan takabur.

Menurut Hadits Nabi Muhammad saw yang diriwayatkan oleh Al Baihaqi bahwa iman itu terbagi 2 bagian, yaitu sebagian ada dalam sabar dan sebagian ada dalam syukur. Sabar dan syukur merupakan tolak ukur tingkat keimanan seseorang, adapun seseorang yang tidak memiliki sifat syukur maka dia termasuk orang yang ingkar dan orang yang ingkar adalah orang yang memilikii sifat sombong. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT di dalam Al-Qur'an surat Ibrahim/14 ayat 7 dan Al-Qur'an surat An-Nahl/16 ayat 22:

وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ ﴿٧﴾

Artinya: *Dan (ingatlah juga), tatkala Tuhanmu memaklumkan; "Sesungguhnya jika kamu bersyukur, pasti Kami akan menambah (nikmat) kepadamu, dan jika kamu mengingkari (nikmat-Ku), Maka Sesungguhnya azab-Ku sangat pedih".* (QS. Ibrahim/14:7)

إِلَٰهُكُمْ إِلَٰهٌ وَاحِدٌ ۚ فَالَّذِينَ لَا يُؤْمِنُونَ بِالْآخِرَةِ قُلُوبُهُم مُّنكِرَةٌ وَهُم مُّسْتَكْبِرُونَ

Artinya: *Tuhan kamu adalah Tuhan yang Maha Esa. Maka orang-orang yang tidak beriman kepada akhirat, hati mereka mengingkari (keesaaan Allah), sedangkan mereka sendiri adalah orang-orang yang sombong.* (QS. An-Nahl/16:22)

Dalam kajian matematika himpunan vektor-vektor yang berada di dalam suatu ruang vektor memiliki arah dan besaran, hal ini relevansi dengan kajian agama mengenai sabar dan syukur. Adapun arah kesabaran menurut Yusuf Al-Qardhawi di antaranya yaitu: sabar dalam menerima cobaan hidup, sabar dari keinginan hawa nafsu, sabar dalam taat kepada Allah SWT, sabar dalam berdakwah, sabar dalam perang, sabar dalam pergaulan. Sedangkan untuk besaran dalam sabar merupakan tingkatan dari sifat sabar itu sendiri yang sesuai dengan pahala yang didapat. Menurut Ali bin Abi Thalib siapa yang bersabar dalam menghadapi musibah sehingga bisa menerimanya dengan lapang dada, maka Allah akan menaikkan derajatnya sampai tiga ratus kali lipat. Siapa yang bersabar dalam taat kepada Allah sehingga dia mengerjakan semua perintah Allah sebagaimana mestinya, maka Allah menulis baginya enam ratus derajat. Siapa yang bisa bersabar untuk tidak mengerjakan maksiat karena takut kepada Allah dan mengharapkan rahmat dari Allah, maka Allah akan menulis baginya sembilan ratus derajat (Al-Jauziyah, 2006:151). Sedangkan untuk arah dan besaran yang ada pada rasa syukur di antaranya yaitu: syukur dengan hati, syukur dengan lisan, dan syukur dengan perbuatan (Shihab, 2007:288).

Adapun arah dan besaran yang ada dalam sifat ingkar yang dimiliki oleh orang kafir yaitu: ingkar terhadap nikmat Allah, ingkar terhadap ayat-ayat al-qur'an, ingkar tehadap tanda-tanda kekuasaan Allah, ingkar terhadap hari kemudian, dan ingkar terhadap rahmat Allah. Sedangkan arah dan besaran yang ada dalam sifat takabur di antaranya adalah: takabur kepada Allah SWT, takabur kepada Rasulullah SAW, dan takabur kepada sesama manusia.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian merupakan strategi umum yang dianut dalam pengumpulan dan analisis data yang diperlukan untuk menjawab persoalan yang dihadapi (Arief Furchan dalam Prastowo, 2011:18). Dengan kata lain, metode penelitian merupakan suatu cara yang harus dilakukan oleh peneliti melalui serangkaian prosedur dan tahapan dalam melaksanakan kegiatan penelitian dengan tujuan memecahkan masalah atau mencari jawaban terhadap suatu masalah (Prastowo, 2011:18).

1.1 Jenis dan Pendekatan Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan jenis penelitian kualitatif karena data yang dibutuhkan dan digunakan bukan berupa angka melainkan berwujud keterangan verbal. Sebagaimana yang telah dijelaskan Lexy J. Moleong (2006:6) bahwa penelitian kualitatif adalah penelitian yang bermaksud untuk memahami fenomena tentang apa yang dialami oleh subjek penelitian (contohnya: perilaku, persepsi, motivasi, tindakan, dan lain sebagainya) secara holistik, dan dengan cara deskripsi dalam bentuk kata-kata dan bahasa, pada suatu konteks khusus yang alamiah dan dengan memanfaatkan berbagai metode alamiah.

Sedangkan pendekatan yang dilakukan oleh penulis dalam penetian ini adalah pendekatan deskriptif, dimana pendekatan deskriptif tersebut melakukan analisis hanya sampai pada taraf deskripsi yaitu menganalisis dan menyajikan fakta secara sistematik sehingga dapat lebih mudah untuk difahami dan disimpulkan

(Azwar, 1998:6). Alasan penulis menggunakan pendekatan deskriptif bertujuan untuk menggambarkan secara sistematik dan akurat fakta dan karakteristik terhadap objek yang diteliti.

1.2 Data dan Sumber Data

1.2.1 Data

Pohan (2007:45) dalam Prastowo (2011:204) mengungkapkan bahwa data adalah fakta, informasi, atau keterangan. Keterangan yang merupakan bahan baku dalam penelitian untuk dijadikan bahan pemecahan masalah atau bahan untuk mengungkapkan suatu gejala. Mengingat ia masih berwujud bahan baku, bahan itu perlu diolah terlebih dahulu agar dapat berguna sebagai alat pemecahan masalah atau guna merumuskan kesimpulan-kesimpulan penelitian.

Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa data kualitatif, sebagaimana yang dijelaskan oleh Pohan (2007:93) dalam Prastowo (2011:237), data kualitatif adalah semua bahan, keterangan, dan fakta-fakta yang tidak dapat diukur dan dihitung secara matematis karena berwujud keterangan verbal (kalimat dan kata). Begitu juga menurut Turmudi dan Harini (2008:23) data kualitatif adalah data yang dinyatakan dalam bentuk kategori atau data yang tidak bisa diukur dengan pasti (bukan angka).

Adapun data yang diperoleh dari sumber data dalam penelitian ini berupa definisi, teorema, lemma, sifat-sifat, dan contoh. Berikut merupakan rincian dari data-data tersebut di antaranya adalah:

1. Definisi tentang ring, lapangan, perluasan lapangan, ruang vektor, ruang fungsi $F(X)$, subruang, ruang vektor atas lapangan, dan transformasi linier.

2. Teorema tentang subruang dan $\mathrm{Hom}(V, U)$.
3. Sifat-sifat (aksioma) tentang ring, lapangan, ruang vektor, ruang vektor atas lapangan, dan transformasi linier.
4. Contoh dari setiap definisi yang berasal dari penulis dan bahan pustaka.

1.2.2 Sumber Data

Setelah penulis menentukan jenis data yang digunakan berupa data kualitatif selanjutnya penulis mencari data yang bersumber dari buku, makalah, dan internet. Sumber data yang diperoleh berupa sumber data utama dan sumber data pendukung, berikut merupakan rincian sumber data yang digunakan penulis dalam penelitian ini yaitu:

a. Sumber utama yang digunakan oleh penulis dalam penelitian ini yaitu berupa buku yang berjudul *Topics in Algebra* karangan I.N Herstein.
b. Sumber pendukung dalam penelitian ini yang digunakan oleh penulis yaitu dari buku aljabar linier, makalah, dan internet.

1.3 Pengumpulan Data

Setelah data-data yang dibutuhkan dalam penelitian diketahui selanjutnya penulis mengumpulkan data-data tersebut. Metode yang digunakan penulis dalam mengumpulkan data yaitu berupa metode studi kepustakaan atau biasa dikenal dengan istilah *library research*. Metode kepustakaan (*literer*) adalah salah satu jenis metode penelitian kualitatif yang lokasi atau tempat penelitiannya dilakukan di pustaka, dokumen, arsip, dan lain jenisnya. Atau dengan kata lain, metode penelitian ini tidak menuntut kita mesti terjun ke lapangan melihat fakta langsung sebagaimana adanya (Prastowo, 2011:190).

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam mengumpulkan data di antaranya adalah:

1. Langkah pertama adalah tahap persiapan, disini penulis mulai membaca dan menentukan data-data dan sumber data yang dibutuhkan dan akan digunakan dalam penelitian.
2. Mencari data-data yang berasal dari sumber data yang telah ditentukan yaitu dari buku, makalah, dan internet.
3. Menentukan dan memilih data-data yang valid yang dibutuhkan dalam penelitian.
4. Mencatat data-data yang valid yang dibutuhkan dan digunakan oleh penulis dalam penelitian yang berupa definisi, teorema, lemma, dan contoh. Data-data tersebut meliputi tentang ring, lapangan, perluasan lapangan, ruang vektor, ruang fungsi $F(X)$, subruang, ruang vektor atas lapangan, dan transformasi linier.

1.4 Analisis Data

Analisis data adalah proses mengorganisasikan dan mengurutkan data kedalam pola, kategori, dan satuan uraian dasar sehingga dapat ditemukan tema dan dapat dirumuskan hipotesis kerja seperti yang disarankan oleh data (Moleong, 2006:280) dalam Prastowo (2011:238). Dalam penelitian ini penulis menggunakan metode analisis deskriptif, karena data yang digunakan penulis berupa data kualitatif yang berupa keterangan verbal. Adapun analisis deskriptif bertujuan untuk memberikan deskripsi mengenai subjek penelitian berdasarkan data dari variabel yang diperoleh dari kelompok subjek yang diteliti dan tidak dimaksudkan untuk pengujian hipotesis (Azwar, 1998:126).

Setelah data-data yang diperlukan dalam penelitian terkumpul, selanjutnya penulis menganalisa data-data tersebut sebagai dasar dalam bab pembahasan, adapun proses analisa data adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan lapangan $(F,+,\times)$ dengan $+$ dan $\times$ merupakan lambang operasi biner
2. Mendeskripsikan lapangan $(K,+,\times)$ sebagai perluasan atas lapangan $(F,+,\times)$
3. Mendeskripsikan perluasan sebagai ruang vektor
4. Membangun fungsi homomorfisme dari ruang vektor V ke dirinya sendiri yang merupakan perluasan atas lapangan F
5. Mendefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada fungsi-fungsi homomorfisme dari V ke V
6. Mendeskripsikan $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai himpunan semua homomorfisme dari ruang vektor V ke V
7. Menunjukkan bahwa $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai ruang vektor

1.5 Prosedur Penelitian

Dalam penelitian ini, langkah pertama yang dilakukan adalah identifikasi masalah yang kemudian menghasilkan rumusan masalah, di antaranya yaitu:

1. Bagaimana analisis perluasan lapangan dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan?
2. Bagaimana homomorfisme pada perluasan lapangan?

Setelah rumusan masalah diperoleh selanjutnya penulis memilih jenis dan pendekatan penelitian yaitu jenis penelitian kualitatif, dan pendekatan yang dilakukan oleh penulis adalah pendekatan deskriptif. Kemudian langkah selanjutnya yang dilakukan adalah mengumpulkan data-data yang dibutuhkan dari sumber data yang telah ditentukan yaitu buku, makalah, dan internet. Adapun data-data yang diperoleh berupa definisi, teorema, lemma, sifat-sifat, dan contoh yang terkait tentang ring, lapangan, perluasan lapangan, ruang vektor, ruang fungsi $F(X)$, subruang, ruang vektor atas lapangan, dan transformasi linier.

Dari data-data yang diperoleh tersebut untuk selanjutnya digunakan sebagai bahan analisa dalam penelitian ini, adapun proses analisa data yang dilakukan telah dijelaskan pada subbab 3.4. Setelah proses analisa data dilakukan sehingga menghasilkan kesimpulan maka untuk selanjutnya hasil dari penelitian disusun dan disajikan dalam bentuk tulisan yang sesuai dengan kaidah-kaidah ilmiah.

BAB IV

PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini, penulis menguraikan bagaimana cara untuk menunjukkan transformasi linier pada perluasan lapangan menurut I.N. Herstein. Inti dari pembahasan dalam bab ini adalah menunjukkan bahwa elemen dari himpunan fungsi homomorfisme ditunjukkan sebagai transformasi linier. Hal tersebut dapat ditunjukkan dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan lapangan $(F,+,\times)$ dengan $+$ dan $\times$ merupakan lambang operasi biner
2. Mendeskripsikan lapangan $(K,+,\times)$ sebagai perluasan atas lapangan $(F,+,\times)$
3. Mendeskripsikan perluasan sebagai ruang vektor
4. Membangun fungsi homomorfisme dari ruang vektor V ke dirinya sendiri yang merupakan perluasan atas lapangan F
5. Memberi operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada fungsi-fungsi homomorfisme dari V ke V
6. Mendeskripsikan $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai himpunan semua homomorfisme dari ruang vektor V ke V
7. Menunjukkan bahwa $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai ruang vektor

Dalam penelitian ini lapangan yang diberikan adalah lapangan $(F,+,\times)$, dengan lapangan $(K,+,\times)$ merupakan perluasan dari lapangan $(F,+,\times)$. Lapangan $(K,+,\times)$ dapat dipandang sebagai ruang vektor V atas lapangan F. Selanjutnya fungsi yang dibangun untuk memetakan ruang vektor V ke V yang merupakan ruang vektor dari perluasan lapangan adalah fungsi homomorfisme, sehingga untuk kumpulan homomorfisme dari ruang vektor V ke V didefinisikan sebagai

$\mathrm{Hom}(V, V)$, maka untuk setiap elemen dari $\mathrm{Hom}(V, V)$ merupakan transformasi linier atas perluasan lapangan. Adapun penjelasan untuk langkah-langkah di atas dapat dijabarkan pada subbab-subbab berikut:

4.1 Perluasan Lapangan Dipandang sebagai Ruang Vektor

Sebuah lapangan merupakan ring komutatif dengan elemen satuan (identitas operasi kedua) dan untuk setiap elemen bukan nol (identitas operasi pertama) mempunyai invers pada operasi kedua. Pada penelitian ini diberikan lapangan $(F, +, \times)$ dengan operasi $+$ sebagai operasi pertama dan operasi $\times$ sebagai operasi kedua, kedua operasi tersebut hanya merupakan lambang operasi atau bukan benar-benar merupakan operasi penjumlahan dan perkalian sesungguhnya. Untuk selanjutnya diberikan lapangan $(K, +, \times)$ yang merupakan perluasan atas lapangan F yang berarti F merupakan subset dari K atau F termuat di K. Karena $(K, +, \times)$ merupakan lapangan maka memenuhi sifat berikut:

(i) $(K, +)$ adalah grup abelian

(ii) $(K - \{0\}, \times)$ adalah grup abelian

(iii) Operasi $\times$ distributif terhadap operasi $+$ di K.

Selanjutnya lapangan $(K, +, \times)$ akan ditunjukkan sebagai ruang vektor atas F sehingga memenuhi:

1. $\alpha(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \alpha\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w}$
2. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$
3. $\alpha(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$
4. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

untuk setiap $\alpha, \beta \in F, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ (di mana 1 menunjukkan elemen unit atas F di bawah operasi perkalian).

(i) Akan ditunjukkan: $\alpha(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \alpha\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w}$

$\forall\, v, w \in K$ dan $\alpha \in F$

$\alpha \in F$ maka $\alpha \in K$ .... ($F \subset K$)

$\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in K$ maka $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \in K$ .... (+ tertutup di K)

$\alpha \in K, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \in K$ maka $\alpha(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \in K$ .... ($\times$ tertutup di K)

$\alpha(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \alpha\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w}$ .... (distribusi kanan)

(ii) Akan ditunjukkan: $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$

$\forall\, v \in K$ dan $\alpha, \beta \in F$

$\alpha, \beta \in F$ maka $\alpha, \beta \in K$ .... ($F \subset K$)

$\forall\, \alpha, \beta \in K$ maka $\alpha + \beta \in K$ .... (+ tertutup di K)

$\forall\, \boldsymbol{v} \in K, \alpha+\beta \in K$ maka $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} \in K$ .... ($\times$ tertutup di K)

$(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$ .... (distribusi kiri)

(iii) Akan ditunjukkan: $\alpha(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$

$\forall\, v \in K$ dan $\alpha, \beta \in F$

$\alpha, \beta \in F$ maka $\alpha, \beta \in K$ .... ($F \subset K$)

$\forall\, \boldsymbol{v} \in K,\ \alpha, \beta \in K$ maka $\alpha\beta\boldsymbol{v} \in K$ .... ($\times$ tertutup di K)

$\alpha\beta\boldsymbol{v} \in K$ maka $\alpha(\beta\boldsymbol{v}) \in K$ .... ($\times$ tertutup di K)

$\alpha(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$ .... (assosiatif)

(iv) Akan ditunjukkan: $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

$v \in K$ dan $1 \in F$

$1 \in F$ maka $1 \in K$.. ($F \subset K$)

$\forall\, \boldsymbol{v} \in K, 1 \in K$ maka $1\boldsymbol{v} \in K$ dan $\boldsymbol{v}1 \in K$ .... ($\times$ tertutup di K)

$$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \text{ .... (identitas } \times)$$

Karena lapangan $(K, +, \times)$ memenuhi aksioma-aksioma pada ruang vektor atas lapangan, maka K dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan F. Lapangan K yang merupakan perluasan dari lapangan F sebagai ruang vektor atas F selanjutnya disebut sebagai ruang vektor V atas lapangan F.

4.2 Homomorfisme Perluasan Lapangan

Diberikan V ruang vektor atas lapangan F. Selanjutnya diberikan suatu fungsi homomorfisme T yang memetakan ruang vektor V ke V sehingga dapat didefinisikan sebagai

$$T: V \to V.$$

Karena fungsi T yang memetakan ruang vektor V ke V merupakan homomorfisme maka untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ berlaku $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ dan $T(\boldsymbol{uv}) = T(\boldsymbol{u})T(\boldsymbol{v})$. Himpunan semua fungsi homomorfisme dari ruang vektor V ke V dapat dinyatakan sebagai $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Selanjutnya untuk $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V, V)$ berlaku $(T_1T_2)(\boldsymbol{u}) = T_1(T_2(\boldsymbol{u}))$ yang artinya $(T_1 \circ T_2)(\boldsymbol{u}) = T_1(T_2(\boldsymbol{u}))$ yaitu komposisi fungsi $T_1 \circ T_2$ dari V ke V untuk setiap $\boldsymbol{u} \in V$. Sehingga untuk setiap $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V, V)$ akan ditunjukkan bahwa komposisi T_1T_2 adalah homomorfisme, bukti:

Misal: $T = T_1T_2$ yang artinya $T_1 \circ T_2$

karena $T_2 \in \mathrm{Hom}(V, V)$ maka $T_2(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T_2(\boldsymbol{u}) + T_2(\boldsymbol{v}), \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$

maka $(T_1T_2)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T_1(T_2(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}))$

$$= T_1(T_2(\boldsymbol{u}) + T_2(\boldsymbol{v}))$$

karena $T_1 \in \mathrm{Hom}(V, V)$ maka $T_1(T_2(\boldsymbol{u}) + T_2(\boldsymbol{v})) = T_1(T_2(\boldsymbol{u})) + T_1(T_2(\boldsymbol{v}))$

sehingga diperoleh $(T_1T_2)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (T_1T_2)(\boldsymbol{u}) + (T_1T_2)(\boldsymbol{v})$

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}).$$

Untuk setiap $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$

$$\begin{aligned}(T_1T_2)(\boldsymbol{uv}) &= T_1\big(T_2(\boldsymbol{uv})\big)\\ &= T_1\big(T_2(\boldsymbol{u})T_2(\boldsymbol{v})\big)\\ &= T_1\big(T_2(\boldsymbol{u})\big)T_1\big(T_2(\boldsymbol{v})\big)\\ &= (T_1T_2)(\boldsymbol{u})(T_1T_2)(\boldsymbol{v})\\ &= T(\boldsymbol{u})T(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

maka terbukti bahwa komposisi homomorfisme dengan homomorfisme adalah homomorfisme.

Diperoleh sifat-sifat komposisi yang ada pada $\mathrm{Hom}(V,V)$, di antaranya adalah sebagai berikut:

1. $(T_1+T_2)\,T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$
2. $T_3(T_1+T_2) = T_3T_1 + T_3T_2$
3. $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$
4. $(T_1T_2)\alpha = (\alpha T_1)T_2 = T_1(\alpha T_2)$

untuk setiap $T_1, T_2, T_3 \in \mathrm{Hom}(V,V)$ dan $\alpha \in F$, sehingga:

1. $(T_1+T_2)\,T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$

   $\forall\, \boldsymbol{u} \in V$ maka akan ditunjukkan

   $\big((T_1+T_2)\,T_3\big)(\boldsymbol{u}) = (T_1T_3 + T_2T_3)(\boldsymbol{u})$

   bukti:

   $\big((T_1+T_2)\,T_3\big)(\boldsymbol{u}) = (T_1+T_2)\big(T_3(\boldsymbol{u})\big)$ .... (komposisi)

   $= T_1\big(T_3(\boldsymbol{u})\big) + T_2\big(T_3(\boldsymbol{u})\big)$ .... (distribusi kiri)

$= T_1T_3(\boldsymbol{u}) + T_2T_3(\boldsymbol{u})$ .... (definisi komposisi)

$= (T_1T_3 + T_2T_3)(\boldsymbol{u})$ .... (pemetaan)

dengan perkalian skalar berlaku

$\alpha\big((T_1 + T_2)\, T_3\big)(\boldsymbol{u}) = \alpha\big(T_1T_3(\boldsymbol{u})\big) + \alpha T_2T_3(\boldsymbol{u})$

$\forall\ \alpha \in F$ dan $\forall\ \boldsymbol{u} \in V$.

Selanjutnya $\forall\ \alpha, \beta \in F$ dan $\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ maka akan ditunjukkan

$\big((T_1 + T_2)\, T_3\big)(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \ \alpha\big((T_1T_3 + T_2T_3)(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big((T_1T_3 + T_2T_3)(\boldsymbol{v})\big)$

bukti:

$\big((T_1 + T_2)\, T_3\big)(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = (T_1 + T_2)\big(T_3(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})\big)$ .....(komposisi)

$= (T_1 + T_2)\big(\alpha T_3(\boldsymbol{u}) + \beta T_3(\boldsymbol{v})\big)$ ....(homomorfisme T_3)

$= T_1\big(\alpha T_3(\boldsymbol{u}) + \beta T_3(\boldsymbol{v})\big) + T_2\big(\alpha T_3(\boldsymbol{u}) + \beta T_3(\boldsymbol{v})\big)$ ....(pemetaan)

$= \alpha\big(T_1T_3(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big(T_1T_3(\boldsymbol{v})\big) + \alpha\big(T_2T_3(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big(T_2T_3(\boldsymbol{v})\big)$ (homomorfisme T_1&T_2)

$= \alpha\big(T_1T_3(\boldsymbol{u}) + T_2T_3(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big(T_1T_3(\boldsymbol{v}) + T_2T_3(\boldsymbol{v})\big)$ ....(komposisi)

$= \alpha\big((T_1T_3 + T_2T_3)(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big((T_1T_3 + T_2T_3)(\boldsymbol{v})\big)$ ....(pemetaan)

2. $T_3(T_1 + T_2) = \ T_3T_1 + T_3T_2$

$\forall\ \boldsymbol{u} \in V$ maka akan ditunjukkan

$\big(T_3(T_1 + T_2)\big)(\boldsymbol{u}) = (T_3T_1 + T_3T_2)(\boldsymbol{u})$

bukti:

$\big(T_3(T_1 + T_2)\big)(\boldsymbol{u}) = T_3\big((T_1 + T_2)(\boldsymbol{u})\big)$ ......(komposisi)

$= T_3\big(T_1(\boldsymbol{u}) + T_2(\boldsymbol{u})\big)$ ....(pemetaan)

$= T_3T_1(\boldsymbol{u}) + T_3T_2(\boldsymbol{u})$ ....(homomorfisme T_3)

$= (T_3T_1 + T_3T_2)(\boldsymbol{u})$ ......(pemetaan)

dengan perkalian skalar berlaku

$\alpha\big(T_3(T_1+T_2)\big)(\boldsymbol{u}) = \alpha\big(T_3T_1(\boldsymbol{u})\big) + \alpha\big(T_3T_2(\boldsymbol{u})\big)$

$\forall\ \alpha \in F$ dan $\forall\ \boldsymbol{u} \in V$.

Selanjutnya $\forall\ \alpha, \beta \in F$ dan $\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ maka akan ditunjukkan

$\big(T_3(T_1+T_2)\big)(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}) = \alpha\big((T_3T_1+T_3T_2)(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big((T_3T_1+T_3T_2)(\boldsymbol{v})\big)$

bukti:

$\big(T_3(T_1+T_2)\big)(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}) = T_3\big((T_1+T_2)(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})\big)$ (komposisi)

$= T_3\big(T_1(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}) + T_2(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})\big)$ .... (pemetaan)

$= T_3\Big(\big(\alpha T_1(\boldsymbol{u}) + \beta T_1(\boldsymbol{v})\big) + \big(\alpha T_2(\boldsymbol{u}) + \beta T_2(\boldsymbol{v})\big)\Big)$...... (homomorfisme T_1&T_2)

$= T_3\big(\alpha T_1(\boldsymbol{u}) + \beta T_1(\boldsymbol{v})\big) + T_3\big(\alpha T_2(\boldsymbol{u}) + \beta T_2(\boldsymbol{v})\big)$ ...... (homomorfisme T_3)

$= \alpha T_3T_1(\boldsymbol{u}) + \beta T_3T_1(\boldsymbol{v}) + \alpha T_3T_2(\boldsymbol{u}) + \beta T_3T_2(\boldsymbol{v})$ ...... (komposisi)

$= \alpha\big(T_3T_1(\boldsymbol{u}) + T_3T_2(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big(T_3T_1(\boldsymbol{v}) + T_3T_2(\boldsymbol{v})\big)$ .... (komutatif +)

$= \alpha\big((T_3T_1+T_3T_2)(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big((T_3T_1+T_3T_2)(\boldsymbol{v})\big)$ .... (pemetaan)

3. $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$

$\forall\ \boldsymbol{u} \in V$ maka akan ditunjukkan

$\big(T_1(T_2T_3)\big)(\boldsymbol{u}) = \big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{u})$

bukti:

$\big(T_1(T_2T_3)\big)(\boldsymbol{u}) = T_1\big((T_2T_3)(\boldsymbol{u})\big)$ .... (komposisi)

$= T_1\Big(T_2\big(T_3(\boldsymbol{u})\big)\Big)$ .... (komposisi)

$= (T_1T_2)\big(T_3(\boldsymbol{u})\big)$ .... (assosiatif)

$= \big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{u})$ .... (komposisi)

dengan perkalian skalar berlaku

$\alpha\big(T_1(T_2T_3)\big)(\boldsymbol{u}) = \alpha\Big(\big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{u})\Big)$

$\forall\, \alpha \in F$ dan $\forall\, \boldsymbol{u} \in V$.

Selanjutnya $\forall\, \alpha, \beta \in F$ dan $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ maka akan ditunjukkan

$$\big(T_1(T_2T_3)\big)(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha\left(\big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{u})\right) + \beta\left(\big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{v})\right)$$

bukti:

$\big(T_1(T_2T_3)\big)(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = T_1\big((T_2T_3)(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})\big)$ ....(komposisi)

$= T_1\left(T_2\left(T_3\big(\alpha(\boldsymbol{u}) + \beta(\boldsymbol{v})\big)\right)\right)$................................(komposisi)

$= T_1\left(T_2\big(\alpha T_3(\boldsymbol{u}) + \beta T_3(\boldsymbol{v})\big)\right)$ ....(homomorfisme T_3)

$= T_1\left(\alpha T_2\big(T_3(\boldsymbol{u})\big) + \beta T_2\big(T_3(\boldsymbol{v})\big)\right)$ ....(homomorfisme T_2)

$= \alpha T_1 T_2\big(T_3(\boldsymbol{u})\big) + \beta T_1 T_2\big(T_3(\boldsymbol{v})\big)$ ....(homomorfisme T_1)

$= \alpha\big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{u}) + \beta\big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{v})$ ....(pemetaan)

$= \alpha\left(\big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{u})\right) + \beta\left(\big((T_1T_2)T_3\big)(\boldsymbol{v})\right)$ ....(homomorfisme $\times$ skalar)

4. $(T_1T_2)\alpha = (\alpha T_1)T_2 = T_1(\alpha T_2)$

$\forall\, \boldsymbol{u} \in V$ maka akan ditunjukkan

$$\big((T_1T_2)\alpha\big)(\boldsymbol{u}) = T_1\left(\alpha\big(T_2(\boldsymbol{u})\big)\right)$$

bukti:

$\big((T_1T_2)\alpha\big)(\boldsymbol{u}) = (T_1T_2)(\alpha\boldsymbol{u})$

$= T_1\big(T_2(\alpha\boldsymbol{u})\big)$ ....(komposisi)

$= T_1\left(\alpha\big(T_2(\boldsymbol{u})\big)\right)$ ....(pemetaan)

$\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ maka akan ditunjukkan

$$\big((T_1T_2)\alpha\big)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T_1\left(\alpha\big(T_2(\boldsymbol{u}) + T_2(\boldsymbol{v})\big)\right)$$

bukti:

$$\big((T_1T_2)\alpha\big)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (T_1T_2)\big(\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\big)$$

$$= (T_1T_2)(\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}) \text{ ....(homomorfisme } \times \text{ skalar)}$$

$$= T_1\big(T_2(\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v})\big) \text{ ....(komposisi)}$$

$$= T_1\big(\alpha T_2(\boldsymbol{u})+\alpha T_2(\boldsymbol{v})\big) \text{ ....(homomorfisme } T_2\text{)}$$

$$= T_1\left(\alpha\big(T_2(\boldsymbol{u})+T_2(\boldsymbol{v})\big)\right) \text{ ....(homomorfisme } \times \text{ skalar)}$$

Berdasarkan teorema 2 bahwa kumpulan dari semua pemetaan dari ruang vektor V ke V yang homomorfisme dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar membentuk ruang vektor atas lapangan. Selanjutnya penulis menunjukkan bahwa $\mathrm{Hom}(V,V)$ membentuk suatu ruang vektor atas lapangan F, sehingga untuk setiap $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V,V)$ memenuhi:

1. $\alpha\big((T_1+T_2)(\boldsymbol{u})\big) = \alpha T_1(\boldsymbol{u}) + \alpha T_2(\boldsymbol{u})$
2. $(\alpha+\beta)T_1(\boldsymbol{u}) = \alpha T_1(\boldsymbol{u}) + \beta T_1(\boldsymbol{u})$
3. $\alpha\big(\beta T_1(\boldsymbol{u})\big) = (\alpha\beta)T_1(\boldsymbol{u})$
4. $1T_1(\boldsymbol{u}) = T_1(\boldsymbol{u})$

untuk setiap $\alpha, \beta \in F$ (di mana 1 menunjukkan elemen unit atas F di bawah operasi perkalian), bukti:

1. Akan ditunjukkan $\alpha\big((T_1+T_2)(\boldsymbol{u})\big) = \alpha T_1(\boldsymbol{u}) + \alpha T_2(\boldsymbol{u})$

   bukti:

   $$\alpha\big((T_1+T_2)(\boldsymbol{u})\big) = \alpha\big(T_1(\boldsymbol{u})+T_2(\boldsymbol{u})\big) \text{ ....(pemetaan)}$$

   $$= \alpha\big(T_1(\boldsymbol{u})\big) + \alpha\big(T_2(\boldsymbol{u})\big) \text{ .....(distributif pada lapangan)}$$

2. Akan ditunjukkan $(\alpha+\beta)T_1(\boldsymbol{u}) = \alpha T_1(\boldsymbol{u}) + \beta T_1(\boldsymbol{u})$

   bukti:

$(\alpha+\beta)T_1(\boldsymbol{u}) = (\alpha+\beta)\big(T_1(\boldsymbol{u})\big)$ ....(pemetaan)

$= \alpha\big(T_1(\boldsymbol{u})\big) + \beta\big(T_1(\boldsymbol{u})\big)$ ....(distributif)

3. Akan ditunjukkan $\alpha\big(\beta T_1(\boldsymbol{u})\big) = (\alpha\beta)T_1(\boldsymbol{u})$

   bukti:

   $\alpha\big(\beta T_1(\boldsymbol{u})\big) = \alpha\left(\beta\big(T_1(\boldsymbol{u})\big)\right)$ ....(pemetaan)

   $= \alpha\beta\big(T_1(\boldsymbol{u})\big)$ ....(assosiatif)

4. Akan ditunjukkan $1T_1(\boldsymbol{u}) = T_1(\boldsymbol{u})$

   bukti:

   $1T_1(\boldsymbol{u}) = 1\big(T_1(\boldsymbol{u})\big)$ .... (pemetaan)

   $= T_1(\boldsymbol{u})$ .... (identitas)

Dengan aksioma 1, 2, dan 3 yang telah dipenuhi merupakan hukum distribusi kanan, hukum distribusi kiri, dan hukum assosiatif berturut-turut mengakibatkan bahwa $\mathrm{Hom}(V,V)$ merupakan ring assosiatif. Sifat 4 merupakan karakter dari $\mathrm{Hom}(V,V)$ sebagai suatu ruang vektor atas F, dengan karakternya sebagai suatu ring.

Dari pembuktian di atas telah diketahui bahwa $\mathrm{Hom}(V,V)$ merupakan ring assosiatif yang memenuhi ruang vektor atas lapangan, sehingga $\mathrm{Hom}(V,V)$ dapat disebut sebagai aljabar atas lapangan F. Hal ini berakibat bahwa untuk setiap elemen dari $\mathrm{Hom}(V,V)$ merupakan transformasi linier atas perluasan lapangan.

4.3 Kajian dalam Al-Qur’an

Kajian Al-qur’an dalam bab ini adalah menjawab ayat pada bagian bab II, yaitu mengenai ciri-ciri orang yang sabar dan syukur seperti pada kisah nabi Ayyub yang tetap bersabar dalam menghadapi cobaan dan selalu bersyukur atas nikmat Allah SWT. Sebagaimana dalam Firman Allah di dalam Al-Qur’an surat Al-Anbiya’/21 ayat 83-84:

وَأَيُّوبَ إِذۡ نَادَىٰ رَبَّهُۥٓ أَنِّي مَسَّنِيَ ٱلضُّرُّ وَأَنتَ أَرۡحَمُ ٱلرَّٰحِمِينَ ٨٣ فَٱسۡتَجَبۡنَا لَهُۥ فَكَشَفۡنَا مَا بِهِۦ مِن ضُرّٖۖ وَءَاتَيۡنَٰهُ أَهۡلَهُۥ وَمِثۡلَهُم مَّعَهُمۡ رَحۡمَةٗ مِّنۡ عِندِنَا وَذِكۡرَىٰ لِلۡعَٰبِدِينَ ٨٤

Artinya: “*Dan (ingatlah kisah) Ayub, ketika ia menyeru Tuhannya: "(Ya Tuhanku), Sesungguhnya aku telah ditimpa penyakit dan Engkau adalah Tuhan yang Maha Penyayang di antara semua Penyayang". Maka Kamipun memperkenankan seruannya itu, lalu Kami lenyapkan penyakit yang ada padanya dan Kami kembalikan keluarganya kepadanya, dan Kami lipat gandakan bilangan mereka, sebagai suatu rahmat dari sisi Kami dan untuk menjadi peringatan bagi semua yang menyembah Allah*”. (QS.Al-Anbiya’ 21:83-84)

Pelajaran penting yang bisa diambil dari kisah ini adalah bahwa kesabaran yang dimiliki seorang hamba ketika menghadapi sebuah musibah, akan senantiasa menghasilkan kebaikan. Karena memang sudah menjadi kepastian dari Allah SWT bahwa ketika seorang hamba mampu bersikap sabar atas sebuah musibah yang menimpanya, maka Allah SWT akan memberikan banyak kebaikan kepadanya. Sebagaimana Nabi Ayyub yang ditimpa penyakit kulit yang demikian hebat, namun beliau senantiasa bersabar dan ridha dengan apa yang menimpanya. Akhirnya Allah SWT pun menyembuhkannya dan mengganti musibah itu dengan berbagai kenikmatan.

Adapun ayat yang menjawab tentang sifat ingkar dan takabur terletak pada kisah raja fir’aun, sebagaimana dalam Al-Qur’an surat Al-A’raaf/7 ayat 103:

ثُمَّ بَعَثْنَا مِنۢ بَعْدِهِم مُّوسَىٰ بِـَٔايَـٰتِنَآ إِلَىٰ فِرْعَوْنَ وَمَلَإِي۟هِۦ فَظَلَمُوا۟ بِهَا ۖ فَٱنظُرْ كَيْفَ كَانَ عَـٰقِبَةُ ٱلْمُفْسِدِينَ ﴿١٠٣﴾

Artinya: *Kemudian Kami utus Musa sesudah Rasul-rasul itu dengan membawa ayat-ayat Kami kepada Fir'aun dan pemuka-pemuka kaumnya, lalu mereka mengingkari ayat-ayat itu. Maka perhatikanlah bagaimana akibat orang-orang yang membuat kerusakan*. (QS. Al-A’raaf/7:103)

Raja fir’aun adalah raja mesir yang hidup dimasa Nabi Musa As yang memiliki sifat takabur, karena ketakaburannya sampai berani mengatakan ia adalah Tuhan yang paling besar. Dia juga mempunyai sifat ingkar terhadap nikmat Allah, meskipun Allah SWT telah mendatangkan musibah kepada Fir’aun dan kaumnya namun mereka tetap saja menyombongkan diri. Dari kedua kisah di atas relevansi dengan kajian matematika yaitu suatu vektor yang dikenai operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar akan tetap mengawetkan operasi-operasi tersebut.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab IV maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Lapangan $(K,+,\times)$ merupakan perluasan atas lapangan $(F,+,\times)$, sehingga untuk lapangan F merupakan subset dari lapangan K $(F \subset K)$. Hal ini berakibat bahwa K dapat dipandang sebagai ruang vektor atas F dan K memenuhi sifat-sifat ruang vektor atas F.
2. Dibangun fungsi-fungsi homomorfisme dari V ke dirinya sendiri, yang mana V merupakan ruang vektor atas lapangan F. Sehingga untuk kumpulan atau himpunan dari fungsi-fungsi homomorfisme dari V ke V didefinisikan sebagai $\mathrm{Hom}(V,V)$. $\mathrm{Hom}(V,V)$ memenuhi sifat-sifat ruang vektor atas lapangan, sehingga untuk setiap elemen dari $\mathrm{Hom}(V,V)$ memenuhi transformasi linier.

5.2 Saran

Penulis memberikan saran kepada pembaca agar meneliti lebih dalam atau mengembangkan penelitian dengan menunjukkan akar-akar karakteristik.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Jauziyah, I.Q.. 2006. *Kemuliaan Sabar dan Keagungan Syukur*. Yogyakarta: Mitra Pustaka.

Al-Jazairi, A.J.. 2007. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar*. Jakarta: Darus Sunnah Press.

Anton, H.. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linier, Jilid 2 Edisi 7*. Batam Centre: Interaksara.

Herstein, I.N.. 1975. *Topics in Algebra*. Singapure: Library of congress catalog card.

Imrona, M.. 2009. *Aljabar Linier Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Leon, S.J.. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya, Edisi 5*. Jakarta: Erlagga.

Lipschutz, S. dan Lipson, M.L.. 2006. *Schaum's Outlines Teori dan Soal Aljabar Linier Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.

Qardhawi, Y.. 2002. *Sabar Satu Prinsip Gerakan Islam*. Jakarta: Robbani Press.

Raisinghania, M.D. dan Aggarwal, R.S.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Shihab, M.Q.. 2007. *Wawasan Al-Qur'an: Tafsir Tematik atas Pelbagai Persoalan Umat*. Bandung: PT Mizan Pustaka.

____________.. 2002. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.