ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL STATISTIK NONLINIER SECARA *MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:
EVA KURNIASIH
10610088

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULATAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2014

ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL STATISTIK NONLINIER SECARA *MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
EVA KURNIASIH
NIM. 10610088

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2014

ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL STATISTIK NONLINIER SECARA *MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:
EVA KURNIASIH
NIM. 10610088

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 2 September 2014

Pembimbing I

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Pembimbing II

Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200031 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL STATISTIK NONLINIER SECARA *MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:
EVA KURNIASIH
NIM. 10610088

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 11September 2014

Penguji Utama	:	Ir. NanangWidodo, M.Si NIP. 19630210 198912 1 002	______________
Ketua Penguji	:	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd NIP. 19630502 198703 1 005	______________
Sekretaris Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	______________
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.A NIP. 19730705 200031 1 002	______________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Eva Kurniasih

NIM : 10610088

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi :Estimasi Parameter PadaModel Statistik NonlinierSecara *Maximum Likelihood*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 02 September 2014
Yang membuat pernyataan,

Eva Kurniasih
NIM. 10610088

MOTO

“ Banggalah terhadap dirimu sendiri karena pasti ada hal hebat yang bisa kamu lakukan, tetapi jangan sampai sombong “

“ Jangan pernah menyerah selagi masih ada kesempatan karena kesempatan tidak akan datang untuk kedua kalinya “

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahi Robbil 'Alamin, untaian kata yang tak pernah lupa penulis ucapkan disetiap langkah kaki hanya kepada Allah Swt karena telah memberikan rahmat, karunia, hidayah dan bimbingan-Nya hingga skripsi ini dapat terselesaikan...

Sholawat dan Salam tetap tercurahkan kepada tauladan seluruh umat sampai akhir zaman, Rasulullah Saw yang telah memberikan teladan dengan sebaik-baiknya teladan...

Bapak Daryadi dan Mama Hariyani tercinta terima kasih atas do'a, motivasi, nasehat, pengorbanan, bimbingan dan selalu mencurahkan kasih sayang yang kalian berikan kepada putrimu ini...

Adik tersayang Candra Yunita terima kasih telah menjadi saudara penulis dan selalu mencurahkan kasih sayangnya...

Om penulis Rachmat Subagyo, M.T. terima kasih atas do'a, motivasi, nasehat, dan dukungannya...

Sahabat-sahabat penulis Mahmuda, Maslacha, Kamilin, Zihan, Saalisa Silfia F., Lailatul Mubarokah, Mayasaroh, dan Silvia Anggraini yang telah memberikan pengalaman berharga dan kenangan terindah...

Teman-teman penulis di UKM UNIOR yang telah menjadi semangat, motivasi, dan inspirasi...

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum wr.wb

Puji syukur penulis haturkan atas ke hadirat Allah Swt yang telah melimpahkan segala rahmat, taufiq, hidayah, serta inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara *Maximum Likelihood*" ini dengan baik, walaupun masih terdapat banyak kekurangan.

Sholawat serta salam tetap senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw sebagai suri tauladan bagi umat Islam yang telah membawa umatnya dari zaman kegelapan menuju jalan yang terang-benderang.

Penulisan skripsi ini tidak terlepas dari do'a, dukungan, bantuan, serta motivasi dan dorongan dari dosen pembimbing, bapak dan ibu dosen serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karenanya, penulis sampaikan ucapan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua jurusan matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang dengan sabar telah meluangkan waktunya untuk menerima konsultasi dan senantiasa memberikan bimbingan dan mengarahkan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing agama yang dengan sabar telah meluangkan waktunya untuk menerima konsultasi serta telah memberikan banyak arahan dan bimbingan hingga terselesaikannya skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Saintek UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu yang telah diberikan dan bimbingannya.
7. Bapak Daryadi, ibu Hariyani, adik Candra Yunita penulis yang senantiasa memberikan dukungan moral, material dan doa yang tidak pernah putus.
8. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang angkatan 2010, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Teman-teman Ririn Zulaikha, Wahyudi, dan Muhammad Sukron yang telah meluangkan waktu untuk bertukar pikiran dan pendapatnya.
10. Teman-teman UKM UNIOR yang telah menjadi motivasi, semangat dan inspirasi.
11. Pihak BPS kota Malang yang telah memberikan data dalam skripsi ini.
12. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut mendukung kelancaran penyelesaian skripsi ini.

Penulis berharap dengan segala kerendahan hati semoga skripsi ini dapat diterima dan bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum wr.wb

Malang, Agustus 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Kurniasih, Eva. 2014. **Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara *Maximum Likelihood***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si
(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Kata Kunci: Model Statistik Nonlinier, Estimasi Parameter, Fungsi produksi Cobb-Douglas (CD), Metode *Nonlinear Maximum Likelihood* (NML), Iterasi *Newton-Rhapson*, Iterasi BHHH.

Ekonometri merupakan salah satu ilmu yang memanfaatkan ilmu matematika, ilmu statistik, dan ilmu ekonomi dalam menemukan nilai suatu parameter. Pada ekonometri terdapat dua model, yaitu model statistik linier dan model statistik nonlinier. Pada penelitian ini model statistik nonlinier yang digunakan untuk mengestimasi parameter (β) adalah model statistik *Nonlinear Maximum Likelihood* (NML).

Untuk mendapatkan nilai estimasi parameter pada metode NML ini dapat diselesaikan dengan iterasi *Newton-Rhapson* dan iterasi BHHH. Iterasi *Newton-Rhapson* merupakan iterasi yang memanfaatkan deret Taylor orde dua sedangkan iterasi BHHH merupakan pengembangan dari iterasi *Newton-Rhapson*.

Berdasarkan hasil dari penelitian, diperoleh bahwa bentuk estimasi parameter dari model statistik nonlinier secara *Maximum Likelihood* dengan iterasi *Newton-Rhapson* adalah

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

Sedangkan model statistik nonlinier secara *Maximum Likelihood* dengan iterasi BHHH adalah

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(n)}} \right) \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(n)}} \right)^T \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

Hasil dari estimasi *Nonlinear Maximum Likelihood* (NML) tersebut diaplikasikan pada implementasi data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan fungsi produksi Cobb-Douglas (CD), yaitu:

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

Selanjutnya dari kedua iterasi tersebut diperoleh hasil terbaik, yaitu iterasi *Newton-Rhapson* dimana untuk

$$\beta_1 = 18.854793988051924,\ \beta_2 = -1.345791046510193,\ \text{dan } \beta_3 = 0.459155159079776$$

sehingga dapat ditulis menjadi

$$Q = 18.854793988051924 L^{-1.345791046510193} K^{0.459155159079776}$$

ABSTRACT

Kurniasih, Eva. 2014. **Parameter Estimation of Nonlinear Statistic Model using *Maximum Likelihood***. Thesis. Department of Mathematic, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
Supervisor: (I) Abdul Aziz, M.Si
(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Key Words: Nonlinear Statistic Model, Parameter Estimation, Cobb-Douglas (CD) Production Function, *Nonlinear Maximum Likelihood* (NML) Method, *Newton-Rhapson*Iteration, BHHH Iteration.

Econometrics is one of science that use mathematic science, statistics, and economics in finding parameter value. There are two models of econometrics, linear statistic and nonlinear statistic models. In this research, nonlinear statistic model used for parameter estimation (β) is *Nonlinear Maximum Likelihood* (NML) statistic model.

To obtain parameter estimation value in this NML method we can use*Newton Rhapson* iteration and BHHH iteration. *Newton-Rhapson* iteration is an iteration that used second order Taylor series, while BHHH iteration is the development of *Newton-Rhapson* iteration.

Based on the research, parameter estimation form of *Maximum Likelihood* nonlinear statistic model with *Newton-Rhapson* iteration is

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}}.$$

While *Maximum Likelihood* nonlinear statistic model with BHHH iteration is

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} |_{\beta^{(n)}} \right) \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} |_{\beta^{(n)}} \right)^T \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}}.$$

The result of *Nonllinear Maximum Likelihood* (NML) estimation can be interpreted in Metal, Machine, Textile, and Various of (ILMTA) Industry year 1993-2012 at East Java Province with Cobb-Douglas (CD) production function, is

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

From that two iterations, we obtain the best result, that is *Newton-Rhapson* iteration in which

$$\beta_1 = 18.854793988051924, \beta_2 = -1.345791046510193,$$
$$\text{and } \beta_3 = 0.459155159079776$$

so can be written

$$Q = 18.854793988051924 L^{-1.345791046510193} K^{0.459155159079776}$$

ملخص البحث

كورنياسيه، إيفا2014 .**تقديرالنماذج الإحصائية غير الخطيةفي احتم الاقصو *Nonlinear Maximum Likehood***.بحث جامعي .قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا،جامعة الإسلاميةالحكومية مولانامالك إبراهيم بمالانج.المشرف(I) :عبدالعزيز الماجستير(II) أحمد نسيح الدين الماجستير

كلمات الاسا سيات :النماذج الإحصائيةغير الخطية، تقدير المعلمة ، الوظيفة الدالة Cobb-Douglas (CD)، طرق *Nonlinear Maximum Likelihood*(NML)التكرار نيتن رافسون، التكرار .BHHH

الاقتصاديةهي واحدةمن العلم التي تستخدم الرياضيات والعلوم الإحصائية، والاقتصادفي إيجادقيمةمعلمة .في الاقتصاد القياسي وهناك نموذجين،النموذج الإحصائي الخطية والإحصائي غيرالخطية .في هذه الدراسة، والنماذج الإحصائيةغير الخطيةالمستخدمة لتقديرالمعلمات (β)هي نموذج (NML)

للحصول قيمة التقديرالمعلمةفي الطريق(NML) يمكن حلها عن طريق التكرار **نيتن رافسون** ، والتكرار BHHH.التكرار نيتن رافسون هي التكرارالتي تستخدم نظام سلسلةتايلور على الرتبة الثانية,وإنما بالتكرارBHHHهي تطويرمن التكرار .**نيتن** رافسون

بناء على نتائج البحث، وجد أن تقديرالمعلمات من نموذج إحصائي غير الخطيةفي القصوى احتمال *Maximum Likelihood*بالتكرار **نيتن رافسون** هي

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}}$$

بينمامن نموذج إحصائي غير الخطية احتمال *Maximum Likelihood* بالتكرارBHHHهي:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} |_{\beta^{(n)}} \right) \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} |_{\beta^{(n)}} \right)^T \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}}$$

نتائج تقديرغير الخطيةالقصوى احتمال (NML)يتم تطبيقها على تنفيذالبيانات من المعادن والآلات والنسيج ومتنوعة (ILMTA)في السنة1993-2012في محافظةجاوي الشرقيةمع الوظيفة الإنتاج Cobb-Douglas (CD) هي:

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

وعلاوة على ذلك، التكرارالثاني ان يحصل على أفضل النتائج هي التكرار **نيتن رافسون**

$\beta_1 = 18.854793988051924$ $\beta_2 = -1.345791046510193$ $\beta_3 = 0.459155159079776$

لذلك يمكن أن نكتب

$$Q = 18.854793988051924 L^{-1.345791046510193} K^{0.459155159079776}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika tidak lain adalah ciptaan Allah Swt yang ditemukan oleh manusia. Tidak ada yang sia-sia (*bathil*) pada ciptaan Allah Swt, termasuk matematika. Matematika diciptakan untuk memenuhi kebutuhan manusia dalam menjalani kehidupan dunia, mengenal kekuatan Allah SWT, dan mencapai ridho Allah Swt (*mardhatillah*). Oleh sebab itu, sudah saatnya matematika dikembalikan kepada fitrah penciptaannya, yaitu mencapai ridha Allah Swt (Abdussyakir, 2007).

Ekonometrika adalah ilmu sosial yang merupakan integrasi dari teori ekonomi, matematika, dan statistika yang bertujuan untuk menguji kebenaran teorema-teorema ekonomi yang berupa hubungan antar variabel ekonomi secara kuantitatif dengan menggunakan data empiris. Ekonometrika sudah menjadi ilmu yang berdiri sendiri dan menjadi cabang dari ilmu ekonomi (Setiawan dan Kusrini, 2010).

Pada ekonometri terdapat dua model, yaitu model statistik linier dan model statistik nonlinier. Pada model statistik nonlinier ada beberapa cara untuk mengestimasi β di antaranya, yaitu dengan menggunakan metode *nonlinear least square* dan *nonlinear maximum likelihood.* Namun, pada penelitian ini difokuskan pada model statistik nonlinier dengan metode *nonlinear maximum likelihood.* Untuk mendapatkan nilai estimasi pada metode *nonlinear maximum likelihood* terdapat beberapa iterasi, antara lain: iterasi *Newton-Raphson*, *Method of Scoring*, *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (BHHH), dan *Modified* BHHH. Namun, pada penelitian ini difokuskan hanya pada dua iterasi, yaitu iterasi *Newton-Raphson* dan BHHH. Setelah mendapat nilai estimasi dari model statistik nonlinier dengan metode *nonlinear maximum likelihood*, maka pada penelitian ini dilakukan aplikasi pada data, yaitu dengan menggunakan data nonlinier (data Cobb-Douglas).

Estimasi atau perkiraan di dalam al-Qur'an disinggung pada surat az-Zumar ayat 47 yang berbunyi:

وَلَوْ أَنَّ لِلَّذِينَ ظَلَمُوا مَا فِي ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا وَمِثْلَهُۥ مَعَهُۥ لَٱفْتَدَوْا بِهِۦ مِن سُوٓءِ ٱلْعَذَابِ يَوْمَ ٱلْقِيَـٰمَةِ ۚ وَبَدَا لَهُم مِّنَ ٱللَّهِ مَا لَمْ يَكُونُوا يَحْتَسِبُونَ ﴿٤٧﴾

Artinya:

"Dan sekiranya orang-orang yang dzalim mempunyai apa yang ada di bumi semuanya dan (ada pula) sebanyak itu besertanya, niscaya mereka akan menebus dirinya dengan itu dari siksa yang buruk pada hari kiamat. Dan jelaslah bagi mereka adzab dari Allah yang belum pernah mereka perkirakan."

Pada ayat tersebut Allah Swt menjelaskan bahwa seandainya orang-orang musyrikin yang zalim itu mempunyai seluruh kekayaan yang ada di muka bumi dan ditambah sebanyak itu pula, niscaya mereka akan menebus dirinya dengan kekayaan itu dari siksa yang buruk dan dahsyat yang akan ditimpakan kepada mereka di hari kiamat. Jadi, nampak jelaslah bagi mereka bahwa azab dari Allah belum pernah mereka perkirakan dalam pikirkan mereka.

Dari ayat di atas dapat diketahui bahwa, kaitan ayat tersebut dengan metode estimasi (perkiraan) adalah terletak pada lafadh "يحتسبون" yang artinya perkiraan. Kata perkiraan dalam ayat ini adalah perkiraan orang-orang dzalim tentang adzab Allah Swt yang belum pernah terlintas dalam pikiran mereka.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka judul dalam penelitian ini adalah "Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara *Maximum Likelihood*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalahnya adalah

1. Bagaimana perbandingan proses estimasi *Nonlinear Maximum Likelihood* pada model statistik nonlinier dengan metode *Newton-Rhapson* dan BHHH ?
2. Bagaimana perbandingan hasil estimasi *Newton-Rhapson* dan BHHH pada implementasi data nonlinier dengan model Cobb-Douglas (CD)?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah

1. Mengetahui perbandingan proses perolehan estimasi *Nonlinear Maximum Likelihood* pada model statistik nonlinier dengan metode *Newton- Rhapson* dan BHHH.
2. Mengetahui perbandingan hasil estimasi *Newton-Rhapson* dan BHHH pada implementasi data nonlinier dengan model Cobb-Douglas (CD).

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah untuk mengestimasi parameter *Nonlinier Maximum Likelihood* (NML) dengan menggunakan Iterasi *Newton-Raphson* dan Iterasi BHHH. Kemudian metode iterasi tersebut digunakan dalam menganalisis pada implementasi data nonlinier, yaitu data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) Tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur dengan model Cobb-Douglas (CD).

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis
   a. Menambah pengetahuan dan wawasan, khususnya dalam bidang ekonometrika
   b. Mampu mengaplikasikan mata kuliah yang telah dipelajari di bangku kuliah dalam kehidupan sehari-hari
2. Bagi Pembaca
   a. Memperkaya pengetahuan dan wawasan pembaca yang ingin mempelajari dan mendalami ilmu khususnya dalam bidang ekonometrika
   b. Sebagai tambahan literatur penunjang khususnya bagi mahasiswa matematika
3. Bagi Instansi
   a. Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan terhadap Fakultas Sains dan Teknologi Malang
   b. Untuk menambah kepustakaan dalam bidang matematika, khususnya pada bidang ilmu ekonometrika

1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini akan diuraikan tentang kajian teori yang mendasari pembahasan, antara lain model statistik, distribusi normal, uji kenormalan data, pengambilan keputusan dengan *p-value*, kestasioneran data, distribusi peluang gabungan, matriks dan operasi matriks, peubah acak dan distribusinya, ekspektasi, deret taylor, metode estimasi parameter, metode maximum likelihood, hukum bilangan besar dan tafsir al-Qur'an pada surat al-Jaatsiyah ayat 24.

Bab III Metode Penelitian

Pada bab ini akan diuraikan tentang metode penelitian, antara lain jenis dan sumber data, variabel penelitian, metode analisis data yang berupa persiapan penelitian dan analisis data serta *flowchart* analisis data.

BAB IV Pembahasan

Pada bab ini akan diuraikan pembahasan mengenai metode *nonlinier maximum likelihood* dengan metode iterasi *Newton-Rhapson* dan BHHH, aplikasi dari metode *nonlinier maximum likelihood* dengan data Cobb-Douglas, dan estimasi dalam pandangan Islam.

BAB V Penutup

Pada bab ini akan diuraikan tentang kesimpulan dari pembahasan yang telah dipaparkan serta mencantumkan saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Statistik

2.1.1 Model Statistik Linier

Istilah linier dapat ditafsirkan dengan dua cara yang berbeda, yaitu sebagai berikut:

a. Linieritas dalam variabel. Arti pertama dari linieritas adalah bahwa ekspektasi atau harapan bersyarat (*conditional expectation*) dari y adalah fungsi linier dari $X_{i,}$ seperti:

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i, \quad \text{dimana } i = 1, 2, 3, \ldots, n \text{ data} \tag{2.1}$$

Suatu fungsi $y = f(X)$ dikatakan linier dalam X jika X tampak hanya dengan pangkat satu. Dalam penafsiran ini, fungsi yang berbentuk

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \tag{2.2}$$

bukan merupakan fungsi linier karena variabel X nampak dengan pangkat dua. Akan tetapi fungsi tersebut dapat juga dikatakan sebagai fungsi linier jika X_i^2 diganti dengan Z_i, seperti:

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 Z_i \tag{2.3}$$

b. Linieritas dalam parameter. Arti linieritas yang kedua adalah bahwa ekspektasi atau harapan bersyarat (*conditional expectation*) dari y, $E(y \mid X_i)$ adalah sebuah fungsi linier dari parameter-parameternya, parameter β bisa saja linier atau bisa juga tidak linier untuk variabel X-nya. Dalam hal ini, contoh linier dalam parameter adalah

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \tag{0.1}$$

Sedangkan untuk persamaan berikut

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2^{\beta_3} X_i \tag{0.2}$$

bukan merupakan fungsi linier dalam parameter karena β_2 tidak berpangkat satu. Dalam hal ini, $\beta_2^{\beta_3}$ tidak dapat diganti dengan β_4 (Firdaus, 2004).

Dari kedua penafsiran tersebut, linieritas dalam parameter relevan terhadap pembentukan teori regresi. Oleh karena itu, terminologi regresi "linier" akan selalu berarti sebuah regresi yang linier dalam parameter-parametrnya, β-nya (yaitu parameternya) berpangkat satu saja. Parameter untuk variabel penjelasnya atau *X*-nya bisa saja linier atau tidak linier. Jadi, $E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$ linier untuk keduanya, yaitu linier dalam variabel dan linier dalam parameter. Sedangkan untuk $E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2$ linier dalam parameter akan tetapi tidak linier dalam variabel X (Gujarati, 2010).

Menurut Gujarati (2010) model statistik linier dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu atau *k* variabel. Persamaan model statistik linier dengan *k* variabel adalah sebagai berikut:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + e \tag{0.3}$$

Jika $y, x_1, x_2, \ldots, x_k$ dinyatakan masing-masing dengan $y_i = x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ dan e dinyatakan dengan e_i, maka persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + e_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{0.4}$$

Persamaan di atas, dapat dinotasikan dalam bentuk matriks yaitu:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

Dari matriks tersebut dapat dituliskan bentuk umum model statistik linier sebagai berikut:

$$y = X\beta + e \tag{0.6}$$

Karena tujuan dari model statistik linier ini tidak hanya sekedar sebagai statistik deskriptif, tetapi juga untuk tujuan pengambilan kesimpulan maupun penaksiran, maka di sini harus diasumsikan bahwa e mengikuti distribusi probabilitas, dengan distribusi yang digunakan adalah distribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi σ^2, dapat ditulis $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ sebagai matriks atau $e \sim N(0, \sigma^2)$ sebagai skalar (Aziz, 2010).

2.1.2 Model Statistik Transformasi Linier

Model statistik nonlinier ternyata ada yang dapat ditransformasikan menjadi linier dan ada pula yang tidak dapat ditransformasikan menjadi bentuk linier, berikut ini merupakan macam-macam bentuk nonlinier yang dapat ditransformasikan ke dalam bentuk linier, antara lain:

1. Model Power

$$y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} e_i, \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{0.7}$$

dari persamaan tersebut dapat dilakukan transformasi logaritma, sehingga diperoleh:

$$\ln(y_i) = \ln(\beta_0 X_i^{\beta_1} e_i)$$
$$\ln(y_i) = \ln \beta_0 X_i^{\beta_1} + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma perkalian}$$
$$\ln(y_i) = \beta_1 \ln(\beta_0 X_i) + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma pangkat}$$
$$\ln(y_i) = \beta_1 \ln \beta_0 + \ln X_i + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma perkalian}$$

model di atas adalah termasuk model linier.

2. Model Eksponensial Natural

$$y_i = \exp(X\beta)e_i \tag{0.8}$$

dari persamaan tersebut dapat dilakukan transformasi logaritma, sehingga diperoleh:

$$\ln(y_i) = \ln(\exp(X\beta)e_i)$$
$$\ln(y_i) = \ln(\exp(X\beta)) + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma perkalian}$$
$$\ln(y_i) = (X\beta)\ln(\exp) + \ln e_i, \quad \text{sifat logaritma pangkat}$$
$$\ln(y_i) = (X\beta)(1) + \ln e_i, \quad \text{definisi eksponensial}$$
$$\ln(y_i) = (X\beta) + \ln e_i$$

model seperti ini adalah model linier. Sehingga bentuk transformasi dari persamaan (2.11) dapat juga dikatakan sebagai model statistik linier jika $y^* = X\beta + e^*$ di mana $y^* = \ln(y_i)$ dan $e^* = \ln(e_i)$.

3. Model Resiprokal

$$y_i = \beta_1 + \beta_2\left(\frac{1}{X_i}\right) + e_i \tag{0.9}$$

persamaan (2.12) merupakan model nonlinier pada variabel X karena variabel ini memasuki model secara terbalik atau resiprokal. Model ini linier dalam parameter, yaitu β_1 dan β_2. Model ini dapat juga dikatakan sebagai linier dalam variabel jika dimisalkan $X^* = \frac{1}{X_i}$, sehingga diperoleh

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X^* + e_i \tag{0.10}$$

Jadi, model tersebut dapat dikatakan sebagai model linier dalam parameter dan linier dalam variabel.

2.1.3 Model Statistik Nonlinier

Pada umumnya realitas perekonomian dapat dilakukan dengan pendekatan secara linier atau ditransformasikan ke dalam linier. Namun demikian, banyak juga model nonlinier yang tidak bisa ditangani oleh model linier, oleh karena itu diperlukan model nonlinier dalam pemecahannya. Tidak berbeda dengan model linier, estimasi model nonlinier didasarkan pada minimasi atau maksimasi fungsi objektif. Berdasarkan teori, terdapat dua jenis fungsi objektif, yaitu *the sum squared error* dan *the likelihood function*. Penaksiran terhadap parameter model nonlinier akan menghasilkan nilai yang berbeda untuk penaksir yang sama karena *error random*-nya mempunyai *power function*. Oleh kerana itu, berbeda dengan *least square rule* yang diterapkan pada model nonlinier dengan melakukan suatu prosedur atau algoritma yang dapat menjamin bahwa penaksir tersebut secara nyata memenuhi kriteria dari fungsi tujuan, yaitu memberikan *the sum of squares error* pada titik yang paling minimum atau memberikan titik maksimum pada *likelihood function* (Syamsuddin, 2006).

Dengan perkataan lain, dalam penentuan penaksir pada model nonlinier diperlukan pengetahuan mengenai *static optimization theory*. Berdasarkan teori, untuk menentukan titik optimum yang diyakini sebagai solusi dalam penentuan penaksir model nonlinier akan digunakan operasi *first* dan *second derivative test*. *First derivative test* digunakan dalam beberapa prosedur iterasi, salah satunya sebagaimana yang diterapkan dalam metode iterasi *Gauss-Newton*. Sementara itu, *second derivative test* digunakan pula pada beberapa prosedur iterasi, namun penulis hanya menggunakan salah satu dari beberapa bentuk dari prosedur iterasi yaitu diterapkan dalam menentukan metode iterasi *Newton-Raphson* (Syamsuddin, 2006).

Menurut Hasan (2002) ada beberapa bentuk dari model nonlinier antara lain:

1. Model Power

$$y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} + e_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{0.11}$$

dari persamaan tersebut, tidak dapat dilinierkan karena jika ditransformasikan tidak dapat diselesaikan.

$\ln(y_i) = \ln(\beta_0 X_i^{\beta_1} + e_i) \longrightarrow$ tidak dapat dipecah, sehingga tidak dapat diselesaikan

dimana:

y_i : variabel tak bebas (*dependent variable*)

X_i : variabel bebas (*independent variable*)

β_0 : parameter konstanta/intersept regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

β_1 : parameter koefisien regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

e : variabel galat/kesalahan regresi, dengan $e \sim N(0; \sigma^2)$

n : banyaknya data observasi

2. Model Eksponensial Natural

$$y_i = \exp(X\beta) + e_i \tag{0.12}$$

persamaan tersebut tidak dapat dilinierkan karena jika ditransformasikan tidak dapat diselesaikan secara linier, yaitu:

$$\ln\left(y_i\right)=\ln\left(\exp(X\beta)+e_i\right)$$

Adapun bentuk umum dari persamaan model statistik nonlinier adalah

$$y=f\left(X,\beta\right)+e \tag{0.13}$$

dengan fungsi nonlinier dalam parameter β dan $e\sim N(0,\sigma^2 I_n)$, dapat ditulis sebagai berikut

$$y_i=f\left(X_i,\beta\right)+e_i \tag{0.14}$$

dengan

$$y_i=\left(y_1,y_2,\ldots,y_i\right)$$

$$f\left(X_i,\beta\right)=\left[f\left(X_1,\beta\right),f\left(X_2,\beta\right),\ldots,f\left(X_i,\beta\right)\right]$$

adalah vektor dari variabel bebas dan $e_i=\left(e_1,e_2,\ldots,e_i\right)$ adalah *random error* (*independent identical distributed*). Karena dengan $e_i\sim iid\, N\left(0,\sigma^2\right)$ maka berakibat $y_i\sim iid\, N\left(f(X_i,\beta),\sigma^2\right)$ dengan $f\left(X_i,\beta\right)$ adalah fungsi nonlinier dalam parameter β. Terdapat dua cara untuk menaksir parameter β pada model statistik nonlinier, yaitu dengan metode *nonlinear least square* dan *nonlinear maximum likelihood* (Aziz, 2010).

Selain bentuk model statistik nonlinier yang telah disebutkan di atas, terdapat bentuk model statistik nonlinier yang tidak dapat dilinierkan yang lain, seperti fungsi produksi Cobb-Douglas (CD). Bentuk umum dari fungsi tersebut adalah

$$Q_t=\beta_1 L_t^{\beta_2}K_t^{\beta_3}$$

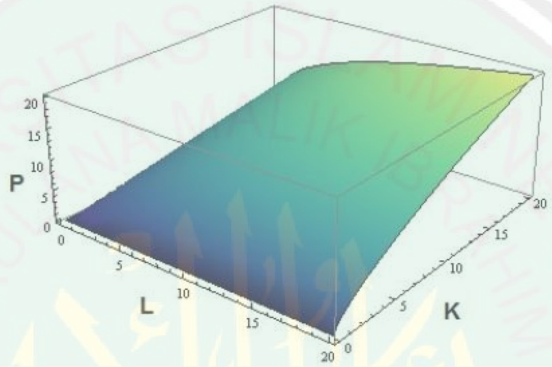
dimana:

Q_t = output jumlah, *quantity of product*

L_t = input tenaga kerja, *labour of product*

K_t = input modal, *capital of product*

Gambar dari fungsi CD tersebut adalah



Gambar 2.1 Fungsi Produksi Cobb-Douglas (CD)

(Sumber: Hong dan Tan, 2008)

Dari persamaan (2.16) di mana y adalah fungsi respon, f adalah fungsi nonlinier terhadap X dan β sedangkan e dalah galat kesalahan acak. Untuk fungsi produksi CD dapat didefinisikan

$$y = Q_t, X_t = [L_t, K_t]$$

dan

$$\beta' = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]$$

Model statitik nonlinier yang tidak dapat ditransformasikan ke dalam bentuk linier seperti bentuk di atas dapat disebut sebagai *intrinsically nonlinier models* (Aziz, 2010).

2.2 Distribusi Normal

Menurut Sembiring (1995) distribusi yang penting dalam statistik adalah distribusi normal atau sering pula disebut distribusi Gauss. Distribusi normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham De Moivre seorang ahli matematika berkebangsaan Perancis yang melarikan diri ke Inggris sekitar tahun 1685. Fungsi dari distribusi normal adalah

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2 \tag{2.18}$$

Distribusi ini mempunyai rataan μ dan variansi σ^2. Grafiknya mirip lonceng dan tertentu sepenuhnya bila μ dan σ^2 diketahui. Suatu peubah acak Y yang berdistribusi normal dengan rataan μ dan simpangan baku σ^2 sering disingkat dengan lambang $Y{\sim}N(\mu,\sigma^2)$ (Sembiring, 1995).

Distribusi normal dengan rataan 0 dan simpangan baku 1 disebut normal baku, lambang N(0,1). Untuk suatu distribusi N(μ,σ^2) berlaku:

1. $P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0{,}6828 = 0{,}68$
2. $P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}9544 = 0{,}95$
3. $P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}9774 = 0{,}98$ (Sembiring, 1995).

2.3 Uji Kenormalan Data

Tujuan uji normalitas adalah untuk menguji apakah dalam sebuah model regresi, variabel terikat dan variabel bebas atau keduanya mempunyai distribusi normal ataukah tidak. Model regresi yang baik adalah distribusi data normal atau mendekati normal. Deteksi normalitas dilakukan dengan melihat grafik *Normal Probability Plot* (Ghozali, 2005).

Dasar pengambilan keputusannya adalah sebagai berikut:

a. Jika data menyebar di sekitar garis diagonal dan mengikuti arah garis diagonal maka model regresi memenuhi asumsi normalitas.

b. Jika data menyebar jauh dari garis diagonal dan atau mengikuti arah garis diagonal maka model regresi tidak memenuhi asumsi normalitas (Ghozali, 2005).

Kenormalan suatu data juga dapat dilihat dari nilai *normal-scores* atau nilai *(p-value)* yang dilakukan dengan uji Anderson-Darling, Ryan-Joiner, dan Kolmogorof-Smirnov dengan menggunakan program Minitab Release 14. Jika nilai *p-value* lebih kecil dari tingkat signifikansi α maka H_0 ditolak yang berarti asumsi kenormalan tidak dipenuhi (Nugroho, 2010).

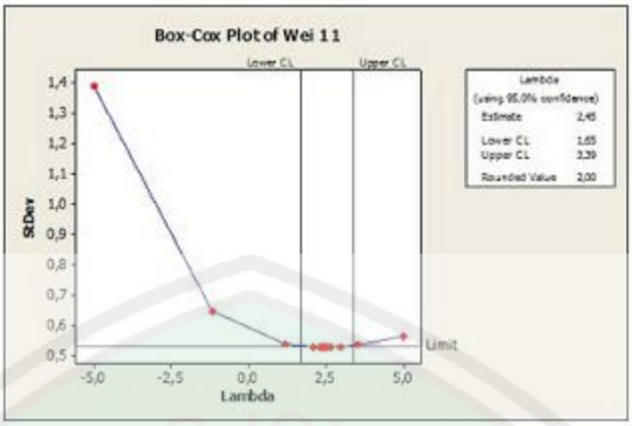
2.4 Pengambilan Keputusan dengan *P-Value*

Untuk memutuskan apakah H_0 ditolak atau diterima, kita membutuhkan suatu kriteria uji. Kriteria uji yang paling sering digunakan akhir-akhir ini adalah *p-value*. *P-value* lebih disukai dibandingkan kriteria uji lain seperti tabel distribusi dan selang kepercayaan. Hal ini disebabkan karena *p-value* memberikan dua informasi sekaligus, yaitu disamping petunjuk apakah H_0 pantas ditolak, *p-value* juga memberikan informasi mengenai peluang terjadinya kejadian yang disebutkan di dalam H_0 (dengan asumsi H_0 dianggap benar). Definisi *p-value* adalah tingkat keberartian terkecil sehingga nilai suatu uji statistik yang sedang diamati masih berarti. *P-value* dapat pula diartikan sebagai besarnya peluang melakukan kesalahan apabila kita memutuskan untuk menolak H_0. Pada umumnya, *p-value* dibandingkan dengan suatu taraf nyata α tertentu, biasanya 0,05 atau 5%. Ketika nilai-nilai pada *P-value* $< \alpha$ maka H_0 ditolak. Jika H_0 ditolak hasilnya dikatakan signifikan secara statistik. Dan berlaku untuk sebaliknya, yaitu ketika nilai-nilai pada *P-value* $> \alpha$ maka H_0 diterima (Kurniawan, 2008).

2.5 Kestasioneran Data

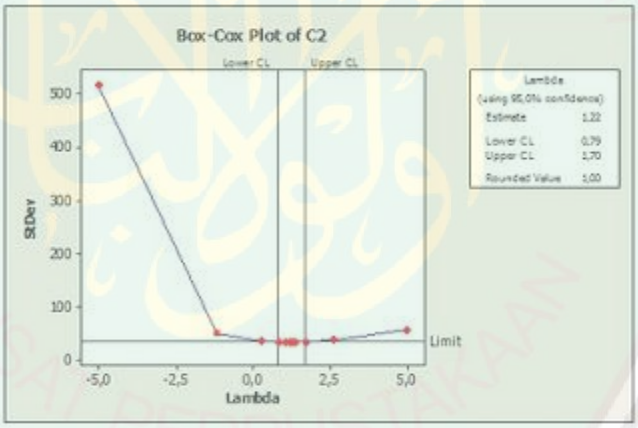
Suatu series dikatakan stasioner apabila rata-rata, varians dan autokovariansi nilainya konstan dari waktu ke waktu. Dengan kata lain, ketiga ukuran tersebut tidak tergantung waktu. Namun, seringkali data deret waktu yang dikumpulkan merupakan data yang tidak stasioner, terutama jika data tersebut merupakan variabel-variabel ekonomi yang terus meningkat sepanjang waktu. Sehingga apabila dilakukan analisis terhadap data yang tidak stasioner ini, maka akan dihasilkan suatu regresi yang palsu dan kesimpulan yang diambil akan kurang bermakna serta berakibat tidak bisanya parameter model tersebut diestimasi. Oleh karena itu, penting untuk menguji kestasioneran data dan apabila ditemukan ketidakstasioneran, maka lakukan diferensiasi atau transformasi hingga data menjadi stasioner (Endri, 2008).

Untuk mengidentifikasi data tersebut telah stationer terhadap varians dengan melakukan transformasi *box-cox* pada program Minitab. Transformasi Box-Cox adalah salah satu metode untuk proses stasioneritas data dalam varians yang dikenalkan oleh Box dan Tiao Cox. Transformasi Box-Cox juga sering disebut dengan transformasi kuasa. Berikut ini adalah hasil transformasi *box-cox* terhadap data Wei 11.



Gambar 2.2 Transformasi *Box-Cox* terhadap data Wei 11

Dapat diketahui bahwa data belum stationer terhadap varians karena nilai *Rounded Value* (lambda) ≠ 1 sehingga perlu ditransformasi sesuai nilai *Rounded Value*nya. Karena λ=2 maka Y^2 sehingga hasil dari transformasi *box-cox* sebagai berikut.



Gambar 2.3 Transformasi *Box-Cox*

Dari hasil transformasi *box-cox* diatas dapat diketahui nilai *Rounded Value* (lambda) sebesar 1 atau nilai *Lower CL* dan *Upper CL* melewati angka 1 sehingga dapat disimpulkan data Wei 11 telah stationer terhadap varians (Wei, 2006).

2.6 Distribusi Peluang Gabungan

Jika X dan Y peubah acak, maka peluang terjadinya secara serentak dari X dan Y dinyatakan sebagai f(x,y) disebut Distribusi Peluang Gabungan untuk setiap pasangan (x,y).

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, maka distribusi peluang terjadinya secara serentak atau bersamaan dinyatakan dengan fungsi f(x,y) dan disebut sebagai distribusi peluang gabungan X dan Y. Fungsi f(x,y) dikatakan distribusi peluang gabungan peubah acak diskrit X dan Y bila memenuhi:

1. $f(x,y) \geq = 0$ untuk semua (x,y)
2. $\Sigma_x \Sigma_y f(x,y) = 1$
3. $P[(X,Y) \in A] = \Sigma_A \sum f(x,y)$ untuk setiap daerah A di bidang xy

(Walpole & Myres, 1995).

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, maka distribusi peluang terjadinya secara serentak atau bersamaan dinyatakan dengan fungsi $f(x,y)$ dan disebut sebagai distribusi peluang gabungan X dan Y. Fungsi $f(x,y)$ dikatakan fungsi peluang atau distribusi peluang gabungan peubah acak kontinu X dan Y bila memenuhi:

1. $f(x,y) \geq= 0$ untuk semua (x,y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx\, dy = 1$
3. $P[(x,y) \in A] = \int \int f(x,y) dx\, dy$

(Walpole & Myres, 1995).

2.7 Matriks dan Operasi Matriks

2.7.1 Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan/ scalar-skalar atau fungsi yang dibatasi dengan tanda kurung. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan ***entri*** atau ***elemen*** dalam matriks. Bentuk umum dari matriks A_{mxn} adalah:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris-baris dari matriks A seperti di atas adalah m deret horizontal yang terdiri dari scalar-skalar:

$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$

Dan kolom-kolom dari matriks A adalah n deretan vertical yang terdiri dari scalar-skalar:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa elemen disebut elemen ij atau entri ij dari matriks A yang terletak pada baris i dan kolom j atau sering kali matriks tersebut hanya ditulis sebagai $A = [a_{ij}]$ (Kusumawati, 2009).

2.7.2 Operasi Matriks

Dua matriks adalah ***setara*** (*equal*) jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama. Dalam notasi matriks, jika A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka A = B jika dan hanya jika $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ atau $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j (Anton dan Rorres, 2004).

Menurut Anton dan Rorres (2004) macam-macam operasi pada matriks, antara lain:

a. Penjumlahan dan Pengurangan

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka ***jumlah*** (*sum*) A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan ***selisih*** (*difference*) A – B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$$(A+B)ij = (A)ij + (B)ij = a_{ij} + b_{ij} \text{ dan}$$

$$(A-B)ij = (A)ij - (B)ij = a_{ij} - b_{ij}$$

b. Perkalian

Jika A adalah matriks $m\ x\ r$ dan B adalah matriks $r\ x\ n$ maka ***hasil kali*** (*product*) AB adalah matriks $m\ x\ n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Definisi perkalian matriks mensyaratkan jumlah kolom dari faktor pertama A harus sama dengan jumlah baris dari faktor kedua B agar dapat dibentuk hasilkali AB. Jika syarat ini tidak dipenuhi, maka hasil kali tidak dapat didefinisikan. Cara yang mudah untuk menentukan apakah hasil kali dari dua matriks dapat didefinisikan adalah dengan menuliskan ukuran dari matriks pertama dan kemudian di sisi kanannya menuliskan ukuran dari matriks kedua.

A B AB

$$m\,x\,r \qquad r\,x\,n \quad = \quad m\,x\,n$$

dalam

luar

2.7.3 Tranpose Suatu Matriks

Jika A adalah matriks $m\,x\,n$, maka ***transpose dari A*** (*transpose of A*), dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n\,x\,m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A, sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004).

Menurut Anton dan Rorres (2004) sifat-sifat transpos suatu matriks, antara lain:

a) $((A^T))^T = A$

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$

c) $(kA)^T = kA^T$, dengan k adalah skalar sebarang

d) $(AB)^T = B^T A^T$

2.7.4 Invers Suatu Matriks

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut invers (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular (Anton dan Rorres, 2004).

Anton dan Rorres (2004) menyatakan bahwa jika B dan C kedua-duanya adalah invers dari matriks A, maka $B = C.$

Bukti:

Karena B adalah invers dari A, maka $BA = I$. Dengan mengalikan kedua ruas di sisi kanannya dengan C diperoleh $(BA)C = IC = C.$ Tetapi $(BA)C = B(AC) = BI = B,$ sehingga $C = B.$

Sebagai konsekuensinya, jika A dapat dibalik maka inversnya akan dinyatakan dengan simbol A^{-1}. Jadi $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$.

Menurut Anton dan Rorres (2004), jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka:

(a) A^{-1} dapat dibalik dan $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(b) A^{n} dapat dibalik dan $\left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$ untuk $n = 0,1,2,...$

(c) Untuk skalar tak nol k sebarang, matriks kA dapat dibalik dan

$$\left(kA\right)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

2.7.5 Pendiferensialan Matriks

Menurut Gujarati (2004), jika $\mathrm{a}^{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{bmatrix}$ adalah suatu vektor baris dengan angka-angka, dan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

adalah vektor kolom dari variabel-variabel $x_1, x_2, \ldots, x_N$, maka

$$\frac{\partial\left(\mathbf{a}^T \mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

Bukti:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & \cdots & a_N x_N \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(\mathbf{a}^T \mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_N x_N\right)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_N x_N\right)}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

Perhatikan matriks $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

maka,

$$\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T A \mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x}$$

yang merupakan vektor kolom dari N elemen, atau

$$\frac{\partial\left(\mathrm{x}^{T}A\mathrm{x}\right)}{\partial\mathrm{x}}=2\mathrm{x}^{T}A$$

yang merupakan vektor baris dari N elemen. Bukti:

$$\mathrm{x}^{T}A\mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_N\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=a_{ii}x_i^2+2x_i\sum_{\substack{i=1\\ j\neq 1}}^{n}a_{ij}x_j+\sum_{h\neq i}\sum_{j\neq i}a_{hj}x_hx_j$$

Turunkan terhadap x elemen ke-k didapat:

$$\frac{\partial\left(\mathrm{x}^{T}\mathrm{Ax}\right)}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j+\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i$$

Untuk $k=1,2,\ldots,N$ menghasilkan

$$\frac{\partial\left(\mathrm{x}^{T}\mathrm{Ax}\right)}{\partial x_k}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\left(\mathrm{x}^{T}A\mathrm{x}\right)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial\left(\mathrm{x}^{T}A\mathrm{x}\right)}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\left(\mathrm{x}^{T}A\mathrm{x}\right)}{\partial x_N}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(\mathrm{x}^{T}\mathrm{Ax}\right)}{\partial x_k}=\begin{bmatrix}\left(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1N}\right)x_1+\left(a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{N1}x_N\right)\\ \left(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2N}\right)x_2+\left(a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{N2}x_N\right)\\ \vdots\\ \left(a_{N1}+a_{N2}+\cdots+a_{NN}\right)x_N+\left(a_{1N}x_1+a_{2N}x_2+\cdots+a_{NN}x_N\right)\end{bmatrix}$$

$$=A\mathrm{x}+A^{T}\mathrm{x}=\left(A+A^{T}\right)\mathrm{x}$$

Karena A matriks simetris, dimana $A^{T}=A$, maka didapat:

$$\frac{\partial\left(\mathrm{x}^{T}A\mathrm{x}\right)}{\partial\mathrm{x}}=A\mathrm{x}+A\mathrm{x}=2A\mathrm{x}$$

2.8 Peubah Acak dan Distribusinya

2.8.1 Peubah Acak

Peubah acak atau variabel acak merupakan hasil-hasil prosedur penyampelan acak (*random sampling*) atau eksperimen acak dari suatu data yang telah dianalisis secara statistik. Peubah acak dapat dinyatakan dengan huruf besar, misal *X*, sedangkan nilai dari peubah acak dinyatakan dengan huruf kecil padanannya, misal *x*. Peubah acak juga dapat dikatakan sebagai suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel (Walpole & Myers, 1995).

2.8.2 Distribusi Peubah Acak

a. Distribusi Peubah Acak Diskrit

Seringkali untuk memudahkan suatu perhitungan semua probabilitas peubah acak dinyatakan dalam suatu fungsi nilai-nilai *X* seperti $f(x)$ yaitu $f(x)=P(X=x)$. Pada peubah acak diskrit, setiap nilainya dikaitkan dengan probabilitas. Himpunan pasangan berurutan $[x,f(x)]$ disebut distribusi probabilitas peubah acak *X*. Sebuah distribusi yang mencantumkan semua kemungkinan nilai peubah acak diskrit berikut probabilitasnya disebut probabilitas diskrit (Wibisono, 2005).

Suatu peubah acak diskrit dapat dinyatakan sebagai:

$$F(x) = \sum px_x(x)$$

Himpunan pasangan terurut $(x,f(x))$ merupakan suatu fungsi peluang, fungsi massa peluang, atau distribusi peluang peubah acak diskrit *X* bila, untuk setiap kemungkinan hasil *x:*

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$ (Walpole & Myers, 1995).

b. Distribusi Peubah Acak Kontinu

Distribusi probabilitas bagi peubah acak kontinu tidak dapat disajikan dalam bentuk tabel, akan tetapi distribusinya dapat dinyatakan dalam persamaan yang merupakan fungsi nilai-nilai peubah acak kontinu dan digambarkan dalam bentuk kurva (Wibisono,2005).

Suatu peubah acak kontinu dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx$$

dengan sifat-sifat:

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ (Walpole & Myers, 1995).

2.9 Ekspektasi

Ekspektasi peubah acak X, dinyatakan dengan $E(X)$ sehingga definisi ekspektasi adalah:

a. Misalkanlah X suatu peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$, maka nilai harapannya atau rataan X ialah:

$$E(X) = \mu = \sum_{x} x\, f(x) \qquad \text{(Walpole \& Myers, 1995)}$$

b. Jika X adalah suatu peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah fungsi padat peluang dari x, maka nilai ekspektasi dari peubah acak X adalah:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad \text{(Dudewich \& Mishra,1995)}$$

2.10 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaian persamaan differensial. Jika perhitungan dengan fungsi yang sesungguhnya menghasilkan solusi sejati, maka perhitungan dengan fungsi hampiran menghasilkan solusi hampiran. Bentuk umum Deret Taylor adalah

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \cdots \tag{2.19}$$

atau

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}$$

karena nilai-nilai semua fungsi pada Deret Taylor berupa skalar, maka dapat diubah ke dalam bentuk lain menjadi

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)}{2!} \tag{2.20}$$

Andaikan S dan semua turunannya, $\partial S, \partial^2 S, \partial^3 S, \ldots.,$ menerus didalam selang $[a, b]$. Misalkan $\beta^{(1)} \epsilon [a, b]$, maka untuk nilai-nilai β disekitar $\beta^{(1)}$ dan $\beta \epsilon [a, b]$, $S(\beta)$ dapat diperluas ke dalam deret Taylor.

$$S(\beta^{(n+1)}) \cong S(\beta^{(n)}) + \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} (\beta - \beta^{(n)}) + \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \frac{(\beta-\beta^{(n)})^T (\beta-\beta^{(n)})}{2!} \tag{2.21}$$

Dari persamaan (2.21) dapat diubah ke dalam bentuk lain seperti pada persamaan (2.20) menjadi

$$S\left(\beta^{(n+1)}\right) \cong S\left(\beta^{(n)}\right) + \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} \left(\beta - \beta^{(n)}\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \frac{\left(\beta - \beta^{(n)}\right)^T \left(\beta - \beta^{(n)}\right)}{2!}$$

1. Orde nol

   Apabila hanya diperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan maka persamaan (2.21) dapat ditulis dalam bentuk:

$$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) \tag{2.22}$$

   Pada persamaan (2.22) yang disebut sebagai perkiraan orde nol, nilai S pada titik (β) sama dengan nilai $\left(\beta^{(1)}\right)$.

2. Orde satu

   Bentuk deret Taylor orde satu, yang memperhitungkan dua suku pertama dapat ditulis dalam bentuk:

$$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) + \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{2.23}$$

3. Orde dua

$$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) + \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \frac{\left(\beta - \left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \left(\beta - \beta^{(1)}\right)\right)}{2!} \tag{2.24}$$

(Munir, 2008)

2.11 Metode Estimasi Parameter

2.11.1 Pengertian Estimasi Parameter dan Estimator

Dalam statistika, salah satu konsep paling dasar adalah penarikan sampel (*sampling*). Sampel diambil dari suatu kelompok yang lebih besar yang disebut dengan populasi. Populasi sering dikatakan sebagai himpunan keseluruhan obyek yang diselidiki, sedangkan sampel merupakan himpunan bagian populasi. Karakteristik atau konstanta dari suatu populasi disebut parameter. Sedangkan suatu harga yang dihitung dari sampel dinamakan statistik. Sedangkan pengertian parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi (Harini dan Turmudi, 2008).

Dalam statistik, estimasi adalah metode untuk mengetahui taksiran nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel statistik. Nilai-nilai populasi sering disebut dengan parameter populasi. Sedangkan nilai-nilai sampelnya disebut dengan statistik sampel. Estimasi (*estimation*) adalah prosess yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau memperkirakan hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi juga merupakan suatu pernyataan mengenai perameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel. Dalam hal ini, peubah acak yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi, dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002).

Penduga (*estimator*) adalah suatu statistik (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter. Dengan pendugaan dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak diketahui berada di sekitar sampel (statistik sampel). Secara umum, parameter diberi lambang θ (baca: *theta*) dan penduga diberi lambang $\hat{\theta}$ (baca: *theta* topi atau *theta* cap). Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut ini:

Tabel 2.1 Penduga dan Parameternya

Parameter (θ)	**Penduga** $(\hat{\theta})$
μ (rata-rata populasi)	$\bar{x}$ atau $\hat{\mu}$
π (proporsi/persentase)	$\hat{p}$ atau $\hat{\pi}$
σ^2 (variansi)	S^2 atau $\hat{\sigma}^2$
σ (simpangan baku)	S atau $\hat{\sigma}$
ρ (koefisien korelasi)	r atau $\hat{\rho}$
β (koefisien regresi)	B atau $\hat{\beta}$

Karena penduga merupakan fungsi dari nilai-nilai sampel, maka penduga termasuk peubah acak dan memiliki distribusi *sampling* (distribusi pemilihan sampel) (Hasan, 2002).

Estimator adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari sesuatu contoh disebut nilai duga (*estimate*), (Yitnosumarto, 1990).

2.11.2 Sifat-sifat Penduga Parameter

Adapun sifat-sifat estimator antara lain:

1. Tak Bias (*Unbiased*)

   Suatu hal yang menjadi tujuan dalam estimasi adalah estimasi harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter θ. Jika $\hat{\theta}$ merupakan estimasi tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ, maka

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$$

(Yitnosumarto, 1990).

2. Efisien

Menurut Hasan (2002) suatu estimasi dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila penduganya $(\hat{\theta})$ mempunyai varian yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, estimasi yang efisien adalah jika penduganya mempunyai varian yang terkecil. Dua buah estimasi (contoh: OLS dan ML) dapat dibandingkan efisiensinya dengan menggunakan efisiensi relatif (*relative efficiency*). Efisiensi relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan sebagai berikut:

$$R\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_1\right)=\frac{E\left(\left(\hat{\theta}_1,\theta\right)^2\right)}{E\left(\left(\hat{\theta}_2,\theta\right)^2\right)}$$

$$=\frac{E\left(\left(\hat{\theta}_1-E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2\right)}{E\left(\left(\hat{\theta}_2-E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2\right)}$$

$$=\frac{Var\left(\hat{\theta}_1\right)}{Var\left(\hat{\theta}_2\right)}$$

dengan keterangan bahwa jika $R>1$ maka $Var\,\hat{\theta}_1>Var\,\hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika $R<1$ maka $Var\,\hat{\theta}_1<Var\,\hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

3. Konsisten

Hasan (2002) mengatakan bahwa estimasi dikatakan konsisten, jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

a. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. jadi $\left(\hat{\theta}\right)$ merupakan penduga konsisten jika dan hanya jika

$$E\left(\hat{\theta}-E\left(\theta\right)\right)^2 \rightarrow 0 \text{ jika } n \rightarrow \infty$$

artinya bahwa variansi dari $\left(\hat{\theta}\right)$ mendekati nol jika n (data sampel) menuju tak hingga.

b. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampel penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus diatas parameter yang sama dengan 1.

Gujarati (2007) menyatakan bahwa estimator parameter $\hat{\theta}$ dapat dikatakan konsisten, jika nilai-nilainya mendekati nilai parameter yang sebenarnya walaupun ukuran sampelnya semakin besar. Suatu statistik $\hat{\theta}$ disebut penduga yang konsisten untuk parameter $\hat{\theta}$ jika dan hanya jika $\hat{\theta}$ konvergen dalam probabilitas ke parameter $\hat{\theta}$ atau dapat dituliskan menjadi

$$p \lim \hat{\theta} = \theta$$

dimana p merupakan probabilitas.

Jika $\hat{\theta}_n$ adalah penaksir untuk θ yang didasarkan pada sampel acak berukuran n, maka $\hat{\theta}_n$ dikatakan konsisten bagi parameter θ, jika

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < e\right) = 1,\ e < 0$$

Penentuan penduga konsisten ini dapat dilakukan dengan menggunakan ketidaksamaan *Chebyshev*, $\lim_{n\rightarrow\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < k\sigma \geq 1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

2.12 Metode *Maximum Likelihood*

2.12.1 Fungsi *Likelihood*

Fungsi *likelihood* dari n variabel random $X_1, X_2, \dots, X_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama $f_{X_i,\dots,X_n}(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(x; \theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $L = f(X_1; \theta) f(X_2; \theta) \dots f(X_n; \theta)$ (Mood dkk, 1986).

2.12.2 *Maximum Likelihood Estimation*

Suatu penduga bersifat unbias, efisien dan konsisten dapat diketahui dengan menggunakan suatu metode yaitu metode *Maximum Likelihood*. Metode tersebut sering memberikan hasil (penaksir) yang baik.

Andaikan $X_1, X_2, \dots, X_n$ peubah acak dengan fungsi distribusi $F(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ dengan $\theta \epsilon \Theta$ yang tidak diketahui, maka fungsi *likelihood* adalah

$$L(\theta) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta), \text{ jika F mempunyai f fungsi padat f} \\ p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta), \text{ jika F mempunyai f fungsi padat p} \end{cases}$$

Untuk setiap $\hat{\theta} = \hat{\theta}\,(X_1, X_2, \dots, X_n) \,\epsilon\, \Theta$ sehingga

L($\hat{\theta} = \sup\{L(\theta): \theta \,\epsilon\, \Theta\}$) disebut *maximum likelihood estimation* (Dudewicz dan Mishra, 1995).

2.13 Hukum Bilangan Besar

Menurut Kislam (1994) jika $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ merupakan barisan peubah acak yang bebas dan berdistribusi identik dan semuanya berdistribusi kontinu atau diskrit secara absolute dan sama, mempunyai kesamaan nilai rataan μ kesamaan variansi σ^2, jika

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \text{maka P}\left\{|\overline{X} - \mu| \geq \in\right\} \to 0$$

bila $n \to \infty$ untuk sebarang $\in > 0$

Bukti:

Jika $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ kita tahu bahwa

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x \text{ dan } \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_{\bar{x}}}{n}$$

Berdasarkan teorema Chebyshev

$$\text{P}\left\{|\overline{X} - \mu| \geq \in\right\} \leq \in^2$$

$$\text{P}\left\{|\overline{X} - \mu| \geq \in\right\} \leq \frac{\sigma^2_{\bar{x}}}{\in^2}$$

$$\text{P}\left\{|\overline{X} - \mu| \geq \in\right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\in^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\in^2} = 0$$

Jadi $P\left\{|\overline{X} - \mu| \geq \in\right\} \to 0$, jika $n \to \infty$

2.14 Kajian al-Qur’an dan Hadits Tentang Estimasi

Al-Qur’an adalah kitab suci agama Islam. Umat Islam percaya bahwa al-Qur'an merupakan puncak dan penutup wahyu Allah Swt yang diperuntukkan bagi manusia. al-Qur’an juga merupakan bagian dari rukun iman yang ketiga, yaitu iman kepada kitab-kitab Allah. al-Qur’an tersebut disampaikan kepada nabi Muhammad Saw melalui perantaraan malaikat Jibril. Wahyu pertama yang diterima Nabi Muhammad Saw adalah surat al-‘Alaq ayat 1-5.

Di dalam al-Qur’an terdapat ayat yang membahas tentang estimasi, seperti pada surat al-Jaatsiyah yang artinya adalah yang berlutut. Surat ini merupakan surat makkiyah karena terdiri dari 37 ayat. Surat al-Jaatsiyah yang berhubungan dengan estimasi terdapat pada ayat 24 yang berbunyi:

وَقَالُواْ مَا هِىَ إِلَّا حَيَاتُنَا ٱلدُّنْيَا نَمُوتُ وَنَحْيَا وَمَا يُهْلِكُنَآ إِلَّا ٱلدَّهْرُ ۚ وَمَا لَهُم بِذَٰلِكَ مِنْ عِلْمٍ ۖ

إِنْ هُمْ إِلَّا يَظُنُّونَ ﴿٢٤﴾

Artinya:

Dan mereka berkata: "Kehidupan ini tidak lain hanyalah kehidupan di dunia saja, kita mati dan kita hidup dan tidak ada yang membinasakan kita selain masa", dan mereka sekali-kali tidak mempunyai pengetahuan tentang itu, mereka tidak lain hanyalah menduga-duga saja.

Menurut tafsir Ibnu Katsir pada surat al-Jaatsiyah ini adalah Allah Swt berfirman tentang orang-orang kafir dan musyrik yang mengingkari adanya hari kiamat dan adanya hari kebangkitan, mereka itu selalu berkata bahwasanya kehidupan ini tidak lain hanyalah kehidupan sekali di dunia ini saja dan bahwa yang mematikan dan membinasakan manusia adalah masa dan tidak ada kekuatan lain. Mereka itu berkata dan beranggapan demikian padahal mereka tidak mempunyai pengetahuan tentang itu dan hanyalah menduga-duga saja. Pada tafsir

Ibnu Katsir ayat 24 ini dihubungkan dengan ayat 25 dan 26 pada surat yang sama karena pembahasannya masih terkait. Untuk tafsir pada ayat 25 dan 26 adalah apabila mereka dibacakan ayat-ayat Allah yang nyata yang menerangkan adanya hari kebangkitan dan adanya hari kiamat, mereka tidak mempunyai alasan dan hujjah untuk menolak kebenaran itu selain kata-kata mereka, " Cobalah datangkan kembali nenek moyang kita yang sudah lama mati itu kalau benar-benar kamu tidak berdusta tentang adanya hari kebangkitan dan hari kiamat. Allah berfirman menyuruh Muhammad menjawab mereka dengan mengatakan, "Allah-lah yang menghidupkan dan mematikan kamu dan sekali-kali bukanlah masa atau kekuatan lain, kemudian Allah akan menghidupkan kamu kembali sesudah mati, lalu menghimpun kamu semua pada hari kiamat, hal yang demikian itu pasti akan terjadi dan tidak sedikit pun ada keraguan-raguan tentang kebenarannya, namun banyak manusia tidak mengetahui dan karenanya mereka mengingkari dan meragukannya (Bahreisy, 1992).

Menurut tafsir yang diterbitkan oleh Universitas Islam Indonesia menyebutkan bahwa dalam ayat 24 tersebut Allah Swt menjelaskan keingkaran orang-orang musyrik dari segi yang lain yaitu keingkaran mereka terhadap hari kebangkitan. Menurut anggapan mereka kehidupan itu hanya di dunia saja. Di dunia mereka dilahirkan dan di dunia pula mereka dimatikan dan disitulah akhir dari segala sesuatu dan demikian pula terjadi pada nenek moyang mereka. Menurut mereka, yang menyebabkan kematian dan kebinasaan segala sesuatu ialah pertukaran masa. Dari pendapat mereka itu, dapat diambil kesimpulan bahwa mereka mengingkari terjadinya hari kebangkitan (Dahlan, 1991).

Keterangan itu diperkuat oleh adat kebiasaan orang Arab Jahiliyah yaitu apabila mereka ditimpa bencana atau musibah, terlompatlah kata-kata dari mulut mereka, “Aduhai celakalah masa”. Mereka mengumpat-ngumpat masa karena menurut mereka masa itulah sumber dari segala musibah. Kemudian Allah Swt menyayangkan sikap kaum musyrikin Quraisy yang tidak didasarkan pada pengetahuan yang benar. Allah Swt menyatakan bahwa mereka sama sekali tidak mempunyai pengetahuan sedikit pun tentang hal yang menyangkut masa itu. Pendapat mereka itu hanyalah didasarkan pada sangkaan dan dugaan saja (Dahlan, 1991).

Menurut tafsir Al-Qur’anul Majid An-Nuur menjelaskan bahwa orang-orang musyrik berkata:”Tidak ada hidup lagi sesudah hidup ini. Kita mati dan anak-anak kita hidup sesudah kita ini”. Hanyalah perputaran malam dan siang yang dapat mengakhiri hidup kita. Masa yang member batas pada kehidupan kita, selain bencana-bencana alam. Pengetahuan mereka yang menetapkan bahwa yang membinasakan mereka adalah kematian di dunia hanyalah berdasarkan persangkaan (ash-Shiddieqy, 2003).

Menurut tafsir jalalain, ayat ini menjelaskan (وقالوا)) (*Dan mereka berkata:*) yaitu orang-orang yang ingkar akan adanya hari berbangkit—(ما هي) (“*Kehidupan ini*) kehidupan yang sebenarnya (ilaahayatataa) (*tiada lain hanyalah kehidupan kita*) yang kita alami – (إلا حياتنا الدنيا نموت وا) (*di dunia saja, kita mati dan kita hidup*) sebagian dari kita mati, kemudian sebagian yang lain hidup karena mereka dilahirkan — (وما يهلكنا إلا الدهر) (*dan tiada yang membinasakan kita selain masa”*) atau berlalunya masa. Lalu Allah berfirman menyangkal perkataan mereka melalui firman-Nya: (وما لهم بذلك) (*dan mereka tidak mempunyai mengenai* *hal itu*) yaitu tentang perkataan mereka yang demikian tadi — (من علم إن) (*pengetahuan sedikitpun, tiada lain*) tidak lain — (هم إلا يظنون) (*mereka hanyalah menduga-duga saja*) (Al-Mahalli & As-Suyuti, 2008).

Sedangkan menurut tafsir Muyassar menjelaskan bahwa orang-orang kafir mengatakan,“Tidak ada kehidupan selain kehidupan dunia ini.” Mereka mengingkari kehidupan akhirat dan kebangkitan setelah kematian. Mereka juga mengatakan, “Yang membinasakan kami hanyalah pergantian siang dan malam.” Mereka mengingkari kenyataan bahwa Allah yang menghidupkan dan mematikan mereka. Orang-orang kafir itu sama sekali tidak memiliki dalil ataupun pengetahuan yang membenarkan perkataan mereka, melainkan mereka hanya berbicara atas dasar perkiraan, khayalan, dan sangkaan belaka (Ash-Shiddieqy, 1972).

Dari beberapa tafsir yang telah disebutkan di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa orang-orang kafir dan musyrik mengingkari adanya hari kiamat dan hari kebangkitan. Menurut mereka kehidupan yang sebenarnya adalah kehidupan di dunia ini, tidak ada kehidupan lain setelahnya dan yang mematikan mereka adalah masa. Semua perkataan orang-orang kafir dan musyrik tersebut tidak mempunyai dasar yang kuat, melainkan mereka hanya menduga-duga saja.

Selain ayat al-Qur’an, estimasi juga terdapat di dalam kisah nabi Muhammad Saw, yaitu pada perang Badar. Kisah yang dibahas adalah kisah tentang nabi Muhammad Saw yang mendapatkan informasi penting mengenai jumlah tentara Mekkah (tentara Quraisy) melalui perkiraan (estimasi). Berikut ini adalah cuplikan kisahnya:

Nabi Muhammad Saw menghadapi dua orang dan berkata, “Di manakah posisi kaum Quraisy?”

Mereka berkata, “Di balik bukit pasir itu, di arah Udwatul Qushwa!”

Tepat sama seperti perkataan orang tua Arab itu, beliau berkata lagi, “Berapa jumlah mereka tepatnya?”

Mereka berkata, “Banyak sekali, tetapi kami tidak tahu persis tepatnya!”

“Berapa ekor unta yang mereka sembelih setiap harinya?” Tanya nabi Muhammad Saw.

“Dalam sehari kadang sembilan, kadang sepuluh ekor!” jawabnya.

nabi Muhammad Saw berkata, “Berarti jumlah mereka sembilan ratus hingga seribu orang!”

Berdasarkan cuplikan percakapan di atas dapat disimpulkan bahwa perkiraan nabi Muhammad Saw mengenai jumlah tentara Mekkah tersebut merupakan perkiraan yang mempunyai dasar karena nabi Muhammad Saw memperkiraan hal tersebut berdasarkan keadaan yang sebenarnya, yaitu dengan mengamati jumlah unta yang disembelih setiap harinya untuk santapan mereka. Sehingga perkiraan tersebut bukanlah perkiraan yang hanya sekedar perkiraan saja, tetapi perkiraan yang mempunyai dasar yang dapat dipertimbangkan.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis dan Sumber Data

Data yang diperoleh merupakan data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) kota Malang yang beralamat di Jalan Raya Janti Barat no. 47 Malang Telp. (0341) 801164 Fax. (0341) 805871. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah "Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993 – 2012 Propinsi Jawa Timur". Sumber utama data ini dari Dinas Perindustrian dan Perdagangan mulai tahun 1993 - 2012. Data yang digunakan peneliti diambil pada hari Rabu tanggal 11 Juni 2014 pada pukul 12.00 WIB (Lampiran 1).

3.2 Variabel Penelitian

Pada penelitian ini data yang digunakan adalah data fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) yang diklasifikasikan menjadi tiga kategori, yaitu:

1. Variabel output (Q) adalah jumlah produksi pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993 – 2012 Propinsi Jawa Timur
2. Variabel input (L) adalah jumlah tenaga kerja pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993 – 2012 Propinsi Jawa Timur
3. Variabel input (K) adalah jumlah modal pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993 – 2012 Propinsi Jawa Timur

3.3 Metode Analisis Data

3.3.1 Persiapan Penelitian

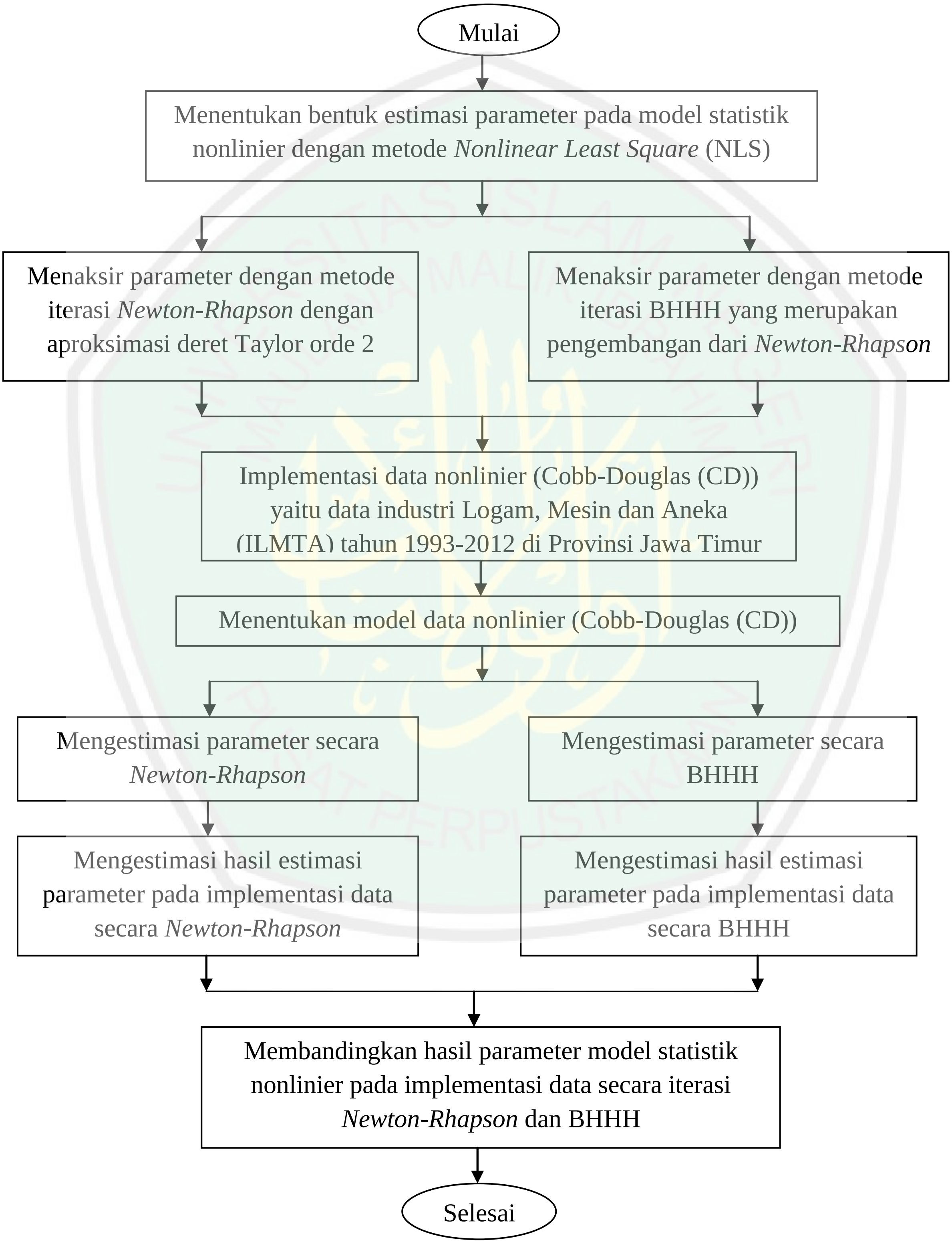
Dalam penelitian ini, peneliti melakukan pendekatan kajian kepustakaan dengan merujuk pada buku-buku yang berkaitan dan yang dibutuhkan dalam melakukan penelitian ini. Selain itu, peneliti juga mempelajari literature lain, berupa jurnal dan referensi lain yang berkaitan dengan penelitian. Pada tahap ini juga dilakukan proses penurunan rumus dan pengumpulan data yang dibutuhkan.

3.3.2 Analisis Data

Adapun langkah-langkahnya adalah, sebagai berikut:

1. Menentukan bentuk estimasi parameter model statistik nonlinier yaitu dengan NML secara iterasi *Newton-Raphson* dan iterasi BHHH
2. Implementasi data nonlinier (data Cobb-Douglass)
3. Mengetahui kenormalan data
4. Mengetahui kenonlinieran data
5. Mengestimasi parameter pada data dengan iterasi *Newton-Rhapson* dan iterasi BHHH
6. Membandingkan antara iterasi *Newton-Rhapson* dan iterasi BHHH
7. Membuat kesimpulan dan saran

3.4 *Flowchart* Analisis Data



BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Metode *Nonlinear Maximum Likelihood*

4.1.1 Iterasi *Newton-Raphson*

Fungsi distribusi peluang dari y_i dengan diketahuiX_i, β dan σ^2 adalah

$$f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - f\left(X_i, \beta\right)\right)^2\right) \tag{4.1}$$

dengan $i = 1, 2, \ldots, n$, maka diperoleh

$$i = 1 \rightarrow f\left(y_1 \mid X_1, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_1 - f\left(X_1, \beta\right)\right)^2\right)$$

$$i = 2 \rightarrow f\left(y_2 \mid X_2, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_2 - f\left(X_2, \beta\right)\right)^2\right)$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow f\left(y_n \mid X_n, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_n - f\left(X_n, \beta\right)\right)^2\right)$$

Sehingga fungsi distribusi peluang gabungan dari $y_1, \ldots, y_n$ dengan diketahui X, β dan σ^2 adalah

$$f\left(y_1, \ldots, y_n \mid X, \beta, \sigma^2\right) = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_1 - f\left(X_1, \beta\right)\right)^2\right)\right]$$

$$\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_2 - f\left(X_2, \beta\right)\right)^2\right)\right] \ldots$$

$$\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_n - f\left(X_n, \beta\right)\right)^2\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n}\exp\left(\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(y_i-f\left(X_i,\beta\right)\right)^{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}}\right)^{n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f\left(X_i,\beta\right)\right)^{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\left(2\pi\sigma^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f\left(X_i,\beta\right)\right)^{2}\right)$$

$$=\left(\left(2\pi\sigma^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f\left(X_i,\beta\right)\right)^{2}\right)$$

$$=\left(2\pi\sigma^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}}\sum_{t=1}^{n}\left(y_i-f\left(X_i,\beta\right)\right)^{2}\right)$$

$$=\left(2\pi\sigma^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)\right) \qquad (4.2)$$

Pada kenyataan penelitian, yang diketahui adalah X dan y dari data sedangkan yang dicari parameter β dan σ^2 sehingga diubah menjadi

$$l\left(\beta,\sigma^{2}\mid X,y\right)=\left(2\pi\sigma^{2}\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)\right) \qquad (4.3)$$

yang dinamakan fungsi likelihood.

Untuk memaksimumkan fungsi likelihood tersebut, maka diperlukan turunannya dan menyamakannya dengan nol. Dalam kasus ini, terlebih dahulu dicari fungsi logaritmanya untuk memudahkan proses turunannya karena berbentuk eksponensial, yaitu:

$$L=\ln l\left(\beta,\sigma^{2}\mid X,y\right)$$

$$=\ln\left[\left(2\pi\sigma^{2}\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)\right)\right]$$

$$= \ln\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} + \ln\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) + \ln\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)\ln\exp$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T\left(y - f\left(X,\beta\right)\right).1$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}e^T e$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}S\left(\beta\right) \tag{4.4}$$

dengan

$$S(\beta) = \left(y - f(X,\beta)\right)^T\left(y - f(X,\beta)\right)$$

merupakan fungsi jumlah kuadrat error dengan variabel β.

Untuk mencari σ^2 maka dapat dilakukan dengan menurunkan persamaan (4.4) terhadap σ^2, maka diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}S\left(\beta\right)$$

$$= 0 - \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}S\left(\beta\right)$$

$$= \frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4}S\left(\beta\right) \tag{4.5}$$

dan menyamakannya dengan nol akan diperoleh

$$0 = \frac{n}{2\hat{\sigma}^2} - \frac{1}{2\hat{\sigma}^4}S\left(\beta\right)$$

$$= \frac{n\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{S\left(\beta\right)}{2\hat{\sigma}^4}$$

$$= \frac{n\hat{\sigma}^2 - S(\beta)}{2\hat{\sigma}^4}$$

$$= n\hat{\sigma}^2 - S(\beta)$$

$$n\hat{\sigma}^2 = S(\beta)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\beta)}{n} \quad (4.6)$$

Dari persamaan (4.6)maka L pada persamaan (4.4)dapat ditulis menjadi

$$L(\beta) = L = -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{S(\beta)}{n}\right)\right) - \frac{1}{2\left(\frac{S(\beta)}{n}\right)} S(\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{S(\beta)}{n}\right)\right) - \frac{n}{2} \quad (4.7)$$

Sedangkan untuk mencari β diperlukan bentuk deret Taylor orde 2 sebagai berikut:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{(x - x_0) f''(x_0)(x - x_0)}{2!} \quad (4.8)$$

Sehingga aproksimasi $L(\beta)$ dengan nilai-nilai awal yang ditentukan dari iterasi pertama, $\beta^{(1)}$, secara deret Taylor orde 2, yaitu

$$L(\beta) = L(\beta^{(1)}) + \frac{L'(\beta^{(1)})^T (\beta - \beta^{(1)})}{1!} + \frac{(\beta - \beta^{(1)})^T L''(\beta^{(1)})(\beta - \beta^{(1)})}{2!}$$

(1 x 1) = (1 x 1) + $(\text{k x 1})^T$(k x 1–k x 1) + $(\text{k x 1-k x 1})^T$(k x k) (k x 1-k x 1)

= (1 x 1) + $(\text{k x 1})^T$(k x 1) + $(\text{k x 1})^T$ (k x k) (k x 1)

= (1 x 1) + (1 x k)(k x 1) + (1 x k) (k x k) (k x 1)

= (1 x 1) + (1 x 1) + (1 x k) (k x 1)

= (1 x 1) + (1 x 1) + (1 x 1)

$$L(\beta)=L(\beta^{(1)})+L'(\beta^{(1)})^{T}(\beta-\beta^{(1)})+\frac{1}{2}(\beta-\beta^{(1)})^{T}L''(\beta^{(1)})(\beta-\beta^{(1)})$$

dengan

$$L'(\beta^{(1)})=\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}}$$

(k x 1)

dan

$$L''(\beta^{(1)})=\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}}$$

$$=\left.\frac{\partial}{\partial \beta^T}\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}}$$

(k x 1) (1 x k)

(k x k)

$$L(\beta)=L\left(\beta^{(1)}\right)+\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)+\frac{1}{2}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)$$

$$=L\left(\beta^{(1)}\right)+\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}(\beta)-\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(1)}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\beta^T\right)-\left(\beta^{(1)}\right)^T\right)\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}}(\beta)-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(1)}\right)\right)$$

$$=L\left(\beta^{(1)}\right)+\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}(\beta)-\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(1)}\right)+\frac{1}{2}\left(\beta^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta-\beta^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}-\right.$$

(1 x 1) =(1x1) +(1xk)(kx1)-(1xk)(kx1)+(1xk)(kxk)(kx1)-(1xk)(kxk)(kx1)-

= (1x1)+ (1x1) - (1x1) + (1xk)(kx1) - (1xk)(kx1) -

= (1x1)+ (1x1) - (1x1) + (1x1) - (1x1)

$$\beta^{(1)T}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta+\beta^{(1)T}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}\Bigg) \tag{4.9}$$

(1xk)(kxk)(kx1) + (1xk)(kxk)(kx1)

(1xk)(kx1) + (1xk)(kx1)

(1x1) + (1x1)

diperoleh

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial\beta}=0+\left(\frac{\partial L}{\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\right)^T-0+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta+\left(\beta^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\right)^T-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}-\right.$$

(kx1) = (1xk)^T + (kxk)(kx1) + ((1xk)(kxk))^T - (kxk)(kx1)

= (kx1) + (kx1) + (1xk)^T - (kx1)

= (kx1) + (kx1) + (kx1) - (kx1)

$$\left(\beta^{(1)T}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\right)^T+0$$

((1xk)(kxk))^T

(1xk)^T

(kx1)

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\right)^T+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta+\beta\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}-\beta^{(1)}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\right)^T+\frac{1}{2}\left(2\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta\right)-2\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\right|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial \beta^T}|_{\beta^{(1)}}\right)^T+\left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\bigg|_{\beta^{(1)}}\beta\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\bigg|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial \beta^T}|_{\beta^{(1)}}\right)^T+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\bigg|_{\beta^{(1)}}\right)\left(\beta-\beta^{(1)}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial \beta^T}|_{\beta^{(1)}}\right)^T+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\bigg|_{\beta^{(1)}}\right)\left(\beta-\beta^{(1)}\right) \tag{4.10}$$

(k x 1) = (k x 1) + (1 x 1) (k x 1 - k x 1)

= (k x 1) + (1 x 1) (k x 1)

= (k x 1) + (k x 1)

Karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \beta^T}|_{\beta^{(1)}}\right)^T=\frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} \tag{4.11}$$

maka

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta}=\frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}+\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\bigg|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right) \tag{4.12}$$

Menyamakannya dengan nol akan diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\right)\left(\beta-\beta^{(1)}\right)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\right)\beta-\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\right)\hat{\beta}=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\right)\beta^{(1)}-\frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}$$

$$\hat{\beta}=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\right)^{-1}\left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\right)\beta^{(1)}-\frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\right)$$

$$\hat{\beta} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(1)}}$$

$$\hat{\beta} = \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(1)}} \qquad (4.13)$$

(k x 1) = (k x 1) – (k x k)$^{-1}$ (k x 1)

= (k x 1) – (k x k) (k x 1)

= (k x 1) – (k x 1)

Persamaan ini dikatakan sebagai bentuk iterasi kedua dari aproksimasi β.

Nilai-nilai aproksimasi β pada iterasi ke-2 $\left(\beta^{(2)}\right)$ digunakan untuk mencari nilai-nilai $\beta^{(3)}$ sehingga diperoleh

$$\beta^{(3)} = \left(\beta^{(2)}\right) - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(2)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(2)}} \qquad (4.14)$$

Secara umumnya diperoleh iterasi

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \qquad (4.15)$$

(kx1) = (kx1) – (kxk)$^{-1}$ (kx1)

= (kx1) – (kxk) (kx1)

= (kx1) – (kx1)

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi Newton Raphson untuk *nonlinear maximum likelihood.*

4.1.2 Iterasi Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH)

Pandang kembali fungsi distribusi peluang dari $y_i$dengan diketahuiX_i, β dan σ^2yaitu

$$f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - f\left(X_i, \beta\right)\right)^2\right) \tag{4.16}$$

Pada kenyataan penelitian yang diketahui adalah X dan y dari data sedangkan yang dicari parameter β dan σ^2 sehingga diubah menjadi

$$l_i\left(\beta, \sigma^2 \mid y_i, X_i\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - f\left(X_i, \beta\right)\right)^2\right) \tag{4.17}$$

persamaan (4.17) merupakan *likelihood function.*

Perhatikan dari persamaan (4.16) dan (4.17), maka

$$l_i\left(\beta, \sigma^2 \mid y_i, X_i\right) = f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) \tag{4.18}$$

sehingga

$$L_i = \ln l_i\left(\beta, \sigma^2\right) = \ln f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) \tag{4.19}$$

maka

$$\frac{\partial L_i}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln l_i\left(\beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta}$$

$$= \frac{1}{l_i\left(\beta, \sigma^2\right)} \frac{\partial l_i\left(\beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta}$$

$$= \frac{1}{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)} \frac{\partial l_i\left(\beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} \tag{4.20}$$

Dengan menggunakan sifat dari fungsi distribusi peluang, yaitu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) dy_i = 1 \tag{4.21}$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) dy_i = 0 \tag{4.22}$$

atau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} f\left(y_i \mid x_i, \beta, \sigma^2\right) dy_i = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} \frac{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)} dy_i = 0 \tag{4.23}$$

Dari persamaan (4.23), maka

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} \frac{1}{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial l_i(\beta, \sigma^2)}{\partial \beta} \frac{1}{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)} \frac{\partial l_i(\beta, \sigma^2)}{\partial \beta} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial L_i}{\partial \beta} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) dy_i \tag{3.24}$$

Misalkan

$$u = \frac{\partial L_i}{\partial \beta}$$

$$v = f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)$$

$$u' = \frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta}$$

$$v' = \frac{\partial f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta^T}$$

maka diperoleh turunan pertama yang disamakan dengan nol, yaitu

$$0 = \frac{\partial}{\partial \beta^T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u\, v\, dy_i\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial \beta^T}(u\, v)\, dy_i\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[u' v + v' u]\, dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) + \frac{\partial f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta^T}\frac{\partial L_i}{\partial \beta}\right) dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) + \frac{\partial f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta^T}\right.$$

$$\left.\frac{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}\frac{\partial L_i}{\partial \beta}\right) dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) + \frac{\partial f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta^T}\frac{1}{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}\right.$$

$$\left. f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)\frac{\partial L_i}{\partial \beta}\right) dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) + \frac{1}{f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}\frac{\partial f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta^T}\right.$$

$$\left. f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right)\frac{\partial L_i}{\partial \beta}\right) dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) + \frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) \frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right) dy_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} + \frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right) f\left(y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) \right) dy_i$$

$$= E\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} + \frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right)$$

$$= E\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} \right) + E\left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} \right) = -E\left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right) \quad (3.25)$$

Berdasarkan hukum bilangan besar, taksiran untuk

$$E\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} \tag{4.26}$$

Sedangkan taksiran untuk

$$E\left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \frac{\partial L_i}{\partial \beta} \tag{4.27}$$

Dengan demikian dari persamaan (4.25) diperoleh

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \frac{\partial L_i}{\partial \beta}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta^T \partial \beta} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \frac{\partial L_i}{\partial \beta}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right)^T \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \right) \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} \right)^T \tag{4.28}$$

dan

$$\left(E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}=\left(E\left(\frac{\partial^2\sum_{i=1}^{n}L_i}{\partial\beta^T\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}$$

$$=\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 L_i}{\partial\beta^T\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(E\frac{\partial^2 L_i}{\partial\beta^T\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 L_i}{\partial\beta^T\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}$$

$$=-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L_i}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)\left(\frac{\partial L_i}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^T\right)^{-1} \quad (4.29)$$

Diperoleh iterasi pengembangan dari *Newton-Rhapson*

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T\partial\beta}\Big|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\frac{\partial L}{\partial\beta}\Big|_{\beta^{(n)}}$$

$$=\beta^{(n)}-\left(-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L_i}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)\left(\frac{\partial L_i}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^T\right)^{-1}\right)\frac{\partial L}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}$$

$$=\beta^{(n)}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L_i}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)\left(\frac{\partial L_i}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^T\right)^{-1}\frac{\partial L}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} \quad (3.30)$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) untuk *nonlinier maximum likelihood*.

4.2 Aplikasi Metode Nonlinear *Maximum Likelihood*

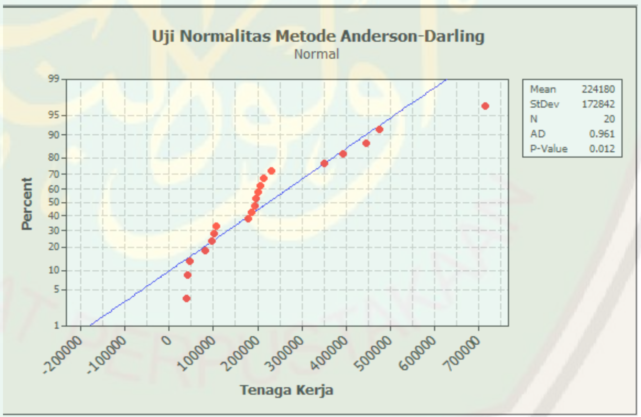
Aplikasi dari metode nonlinier *maximum likelihood* pada penelitian ini menggunakan fungsi produksi Cobb-Douglas (CD). Fungsi tersebut adalah fungsi nonlinier yang tidak dapat ditransformasikan ke dalam bentuk linier.

4.2.1 Kenormalan Data

Data yang digunakan pada penelitian ini, terlebih dahulu diuji kenormalan datanya, sebagai berikut:

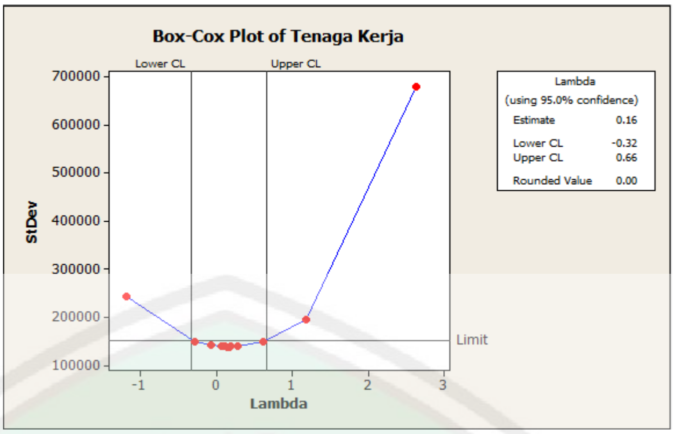
a. Data Tenaga Kerja

Data tenaga kerja ini merupakan data yang belum normal karena nilai *P-value* kurang dari nilai signifikansi ($\alpha = 0{,}05$), seperti terlihat pada gambar 3.1.



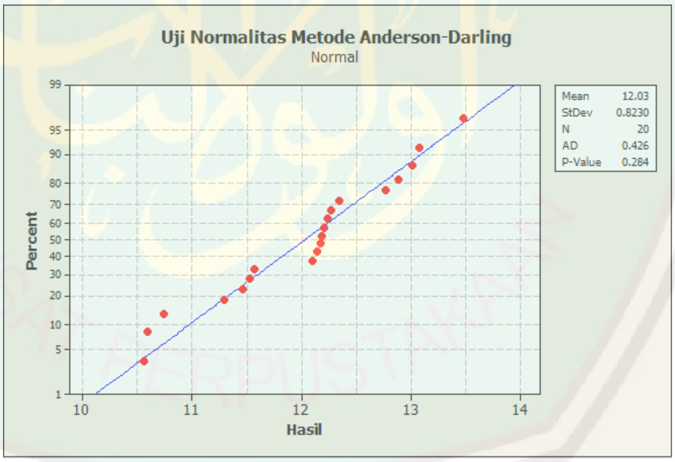
Gambar 4.1 Plot Uji Kenormalan pada Data Tenaga Kerja

Karena diperlukan data tenaga kerja yang normal, maka data tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk data yang normal dengan menggunakan metode *Box Cox Transformation* pada program Minitab, sehingga diperoleh data normal seperti gambar 3.2.



Gambar 4.2 Plot Data Transformasi Normal pada Data Tenaga Kerja

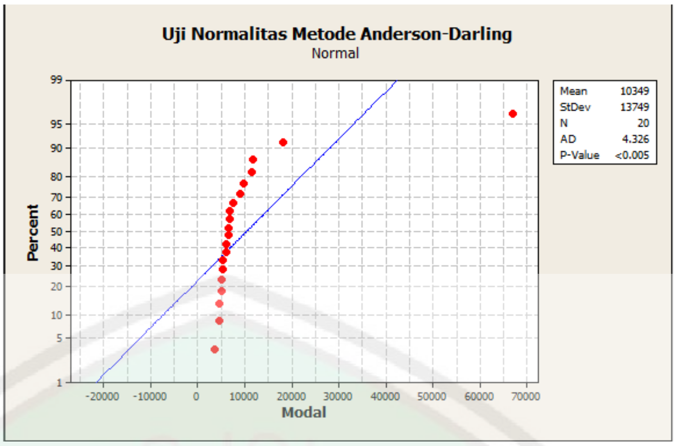
Setelah data tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk data yang normal diperoleh nilai *P-value* sebesar 0,284, maka data tersebut dapat dikatakan sebagai data normal karena nilai *P-value* lebih besar dari nilai signifikansi (α=0,05), seperti terlihat pada gambar 4.3.



Gambar 4.3 Plot Uji Kenormalan pada Data Transformasi Tenaga Kerja

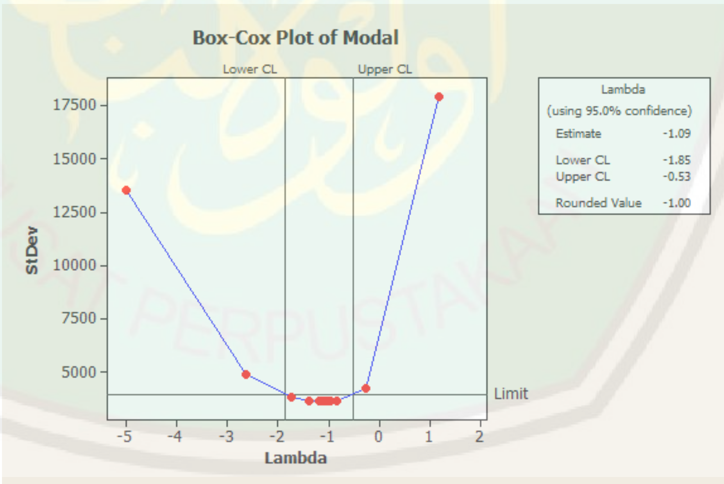
b. Data Modal

Data modal ini merupakan data yang belum normal karena nilai *P-value* kurang dari nilai signifikansi ($\alpha = 0{,}05$), seperti terlihat pada gambar 4.4.



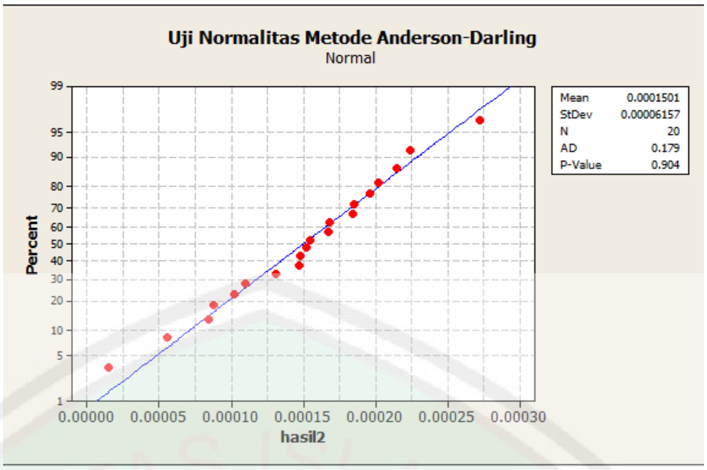
Gambar 4.4 Plot Uji Kenormalan pada Data Modal

Karena diperlukan data modal yang normal, maka data tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk data yang normal dengan menggunakan metode *Box Cox Transformation* pada program Minitab, sehingga diperoleh data normal seperti gambar 4.5.



Gambar 4.5 Plot data transformasi normal pada data modal

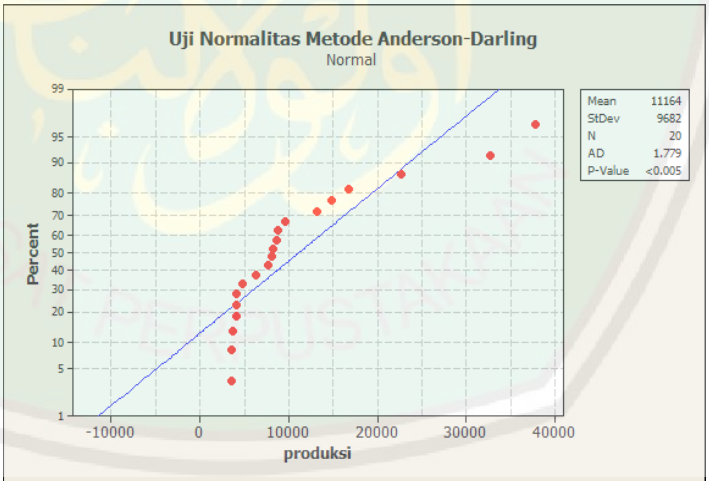
Setelah data tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk data yang normal diperoleh nilai *P-value* sebesar 0,904, maka data tersebut dapat dikatakan sebagai data normal karena nilai *P-value* lebih besar dari nilai signifikansi (α=0,05), seperti terlihat pada gambar 4.6.



Gambar 4.6 Plot Uji Kenormalan pada Data Transformasi Modal

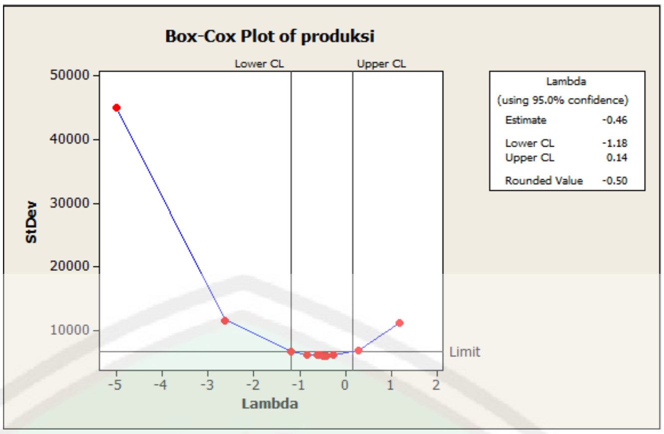
c. Data Jumlah Produksi

Data jumlah produksi ini merupakan data yang belum normal karena nilai *P-value* kurang dari nilai signifikansi ($\alpha = 0{,}05$), seperti terlihat pada gambar 4.7.



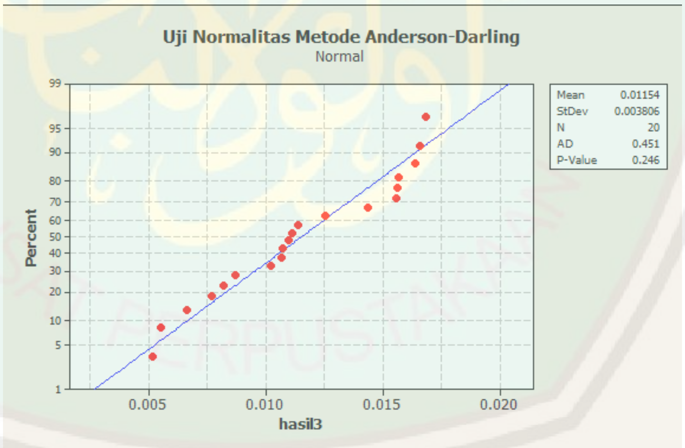
Gambar 4.7 Plot Uji Kenormalan pada Data Jumlah Produksi

Karena diperlukan data jumlah produksi yang normal, maka data tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk data yang normal dengan menggunakan metode *Box Cox Transformation* pada program Minitab, sehingga diperoleh data normal seperti gambar 4.8.



Gambar 4.8 Plot Data Transformasi Normal pada Data Jumlah Produksi

Setelah data tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk data yang normal diperoleh nilai *P-value* sebesar 0,246, maka data tersebut dapat dikatakan sebagai data normal karena nilai *P-value* lebih besar dari nilai signifikansi (α=0,05), seperti terlihat pada gambar 4.9.



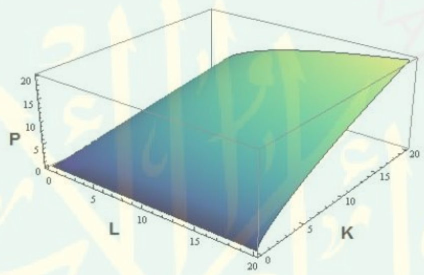
Gambar 4.9 Plot Uji Kenormalan pada Data Transformasi Jumlah Produksi

4.2.2 Kenonlinieran Data

Salah satu bentuk dari fungsi nonlinier adalah fungsi produksi Cobb-Douglas (CD). Adapun bentuk umum dari fungsi Cobb-Douglas adalah sebagai berikut:

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

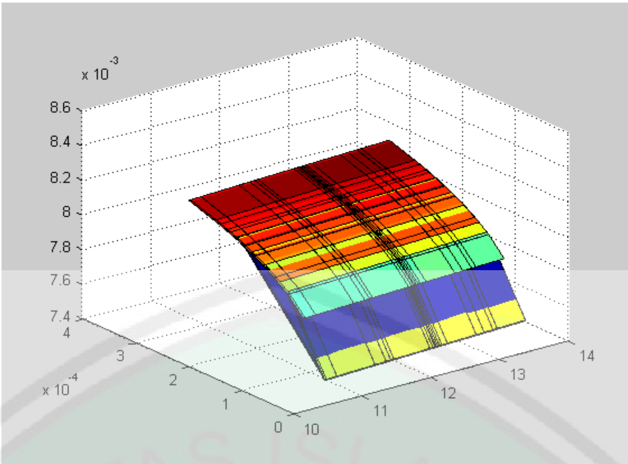
Jika fungsi tersebut dibuat dalam bentuk grafik, maka diperoleh bentuk nonlinier seperti tampak pada gambar, berikut ini:



Gambar 4.10 Fungsi Produksi Cobb-Douglas

(Sumber: Hong dan Tan, 2008)

Pada penelitian kali ini, data yang dipakai peneliti adalah Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) *Industry of Metals, Machines, Textiles, and Miscellaneous Industries* mulai tahun 1993 – 2012 Propinsi Jawa Timur. Selanjutnya, data tersebut diaplikasikan ke dalam fungsi produksiCobb-Douglas dengan mengambil nilai awal $\beta_1 = 0,01; \beta_2 = 0,02; \text{dan } \beta_3 = 0,03$, maka diperoleh bentuk sebagai berikut:



Gambar 4.11 Fungsi Produksi Cobb-Douglas dari Aplikasi Data

Dari gambar di atas, dapat disimpulkan bahwa data tersebut adalah data nonlinier karena gambar 4.10 dengan gambar 4.11 mempunyai kemiripan bentuk.

4.2.3 Estimasi Parameter Secara Iterasi *Newton-Rhapson*

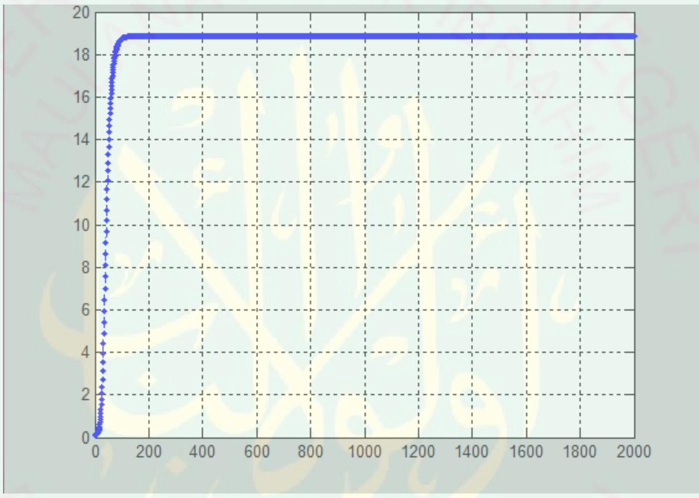
Data yang digunakan adalah data fungsi produksi Cobb-Douglas yang diaplikasikan pada Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) *Industry of Metals, Machines, Textiles, and Miscellaneous Industries* mulai tahun 1993 – 2012 Propinsi Jawa Timur. Data X dan y diberikan dalam matriks LKy. Untuk L adalah data tenaga kerja, untuk K adalah data modal dan untuk y adalah data jumlah produksi. Dari data yang dipakai oleh peneliti akan dilakukan penaksiran parameter-parameter secara berulang.

Setelah dilakukan iterasi hingga mencapai konvergen, maka berikut ini adalah hasil output iterasi *Newton-Rhapson* dengan fungsi produksi Cobb-Douglas dengan nilai parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ yang sama ($\beta_1, \beta_2, \beta_3 = 0{,}1$)

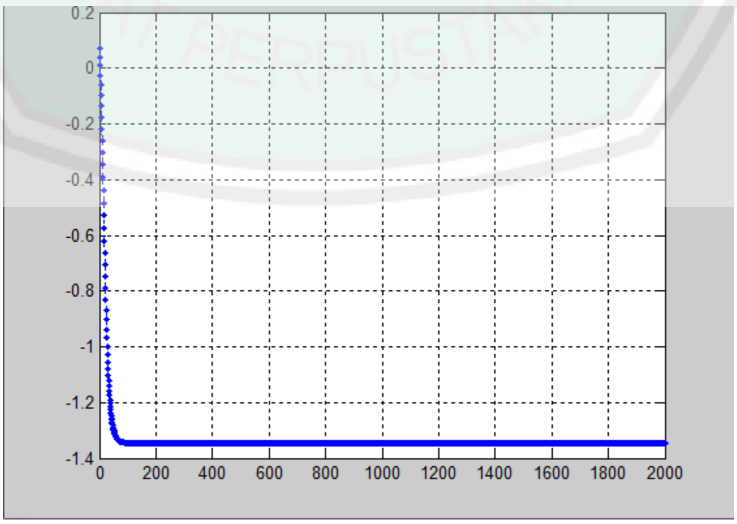
Tabel 4.1 Hasil iterasi *Newton-Rhapson*

N	β_1	β_2	β_3	L
0	0, 1	0, 1	0, 1	
1	0.103212335703027	0.071207259764383	0.104339982431597	0.027619756294795
50	13.309614726964172	-1.297595503308181	0.434114719557973	1.485868002893782e-004
100	18.737654039771535	-1.345104554309435	0.458645456952703	1.480863478898055e-004
150	18.852534854294994	-1.345778782262763	0.459144948178003	1.480862552121347e-004
200	18.854760619229904	-1.345790973322383	0.459154977154214	1.480862551838690e-004
250	18.854794211019200	-1.345791055720720	0.459155157828680	1.480862551838599e-004
300	18.854796012210755	-1.345791077973742	0.459155162477324	1.480862551838599e-004
303	18.854793988051924	-1.345791046510193	0.459155159079776	0.000148086255184

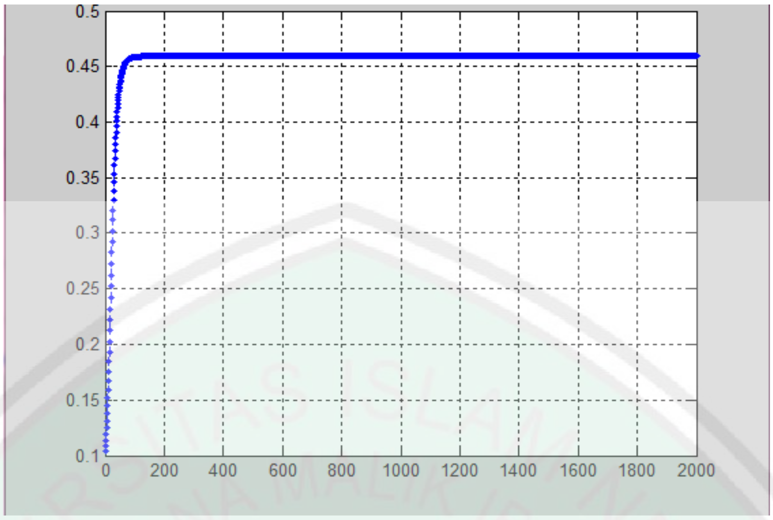
Adapun grafik dari iterasi *Newton-Rhapson* adalah



Gambar 4.12 Grafik kekonvergenan dari β_1 pada iterasi *Newton-Rhapson*



Gambar 4.13 Grafik kekonvergenan dari β_2 pada iterasi *Newton-Rhapson*



Gambar 4.14 Grafik kekonvergenan dari β_3 pada iterasi *Newton-Rhapson*

Dari grafik di atas dengan menggunakan iterasi *Newton-Rhapson* diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke 303. Hasil NML untuk fungsi CD-nya adalah

$\beta_1 = 18.854793988051924$ $\beta_3 = 0.459155159079776$

$\beta_2 = -1.345791046510193$ $L = 0.000148086255184$

Jadi, model Cobb-Douglas (CD) pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dianggap optimum (konvergen) menurut iterasi *Newton-Rhapson* adalah sebagai berikut:

$$Q = 18.854793988051924 L^{-1.345791046510193} K^{0.459155159079776}$$

4.2.4 Estimasi Parameter Secara Iterasi BHHH

Data yang digunakan adalah data fungsi produksi Cobb-Douglas yang diaplikasikan pada Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) *Industry of Metals, Machines, Textiles, and Miscellaneous Industries* mulai tahun 1993 – 2012 Propinsi Jawa Timur. Data X dan y diberikan dalam matriks LKy.

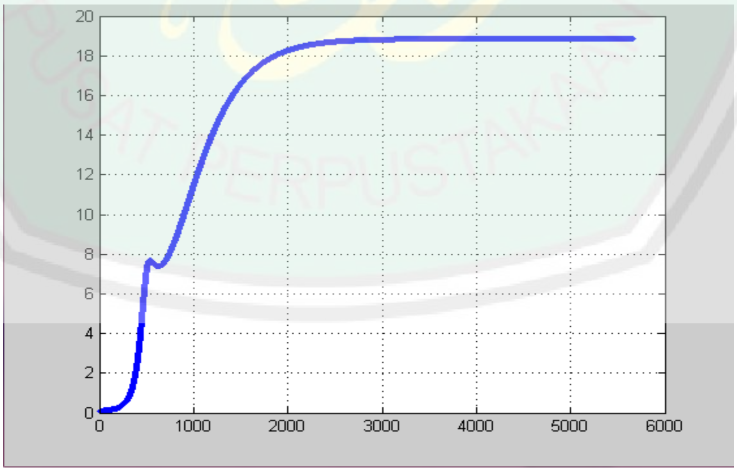
Untuk L adalah data tenaga kerja, untuk K adalah data modal dan untuk y adalah data jumlah produksi. Dari data yang dipakai oleh peneliti akan dilakukan penaksiran parameter-parameter secara berulang.

Setelah dilakukan iterasi hingga mencapai konvergen, maka berikut ini adalah hasil output iterasi BHHH dengan fungsi produksi Cobb-Douglas dengan nilai parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ yang sama ($\beta_1, \beta_2, \beta_3 = 0{,}1$)

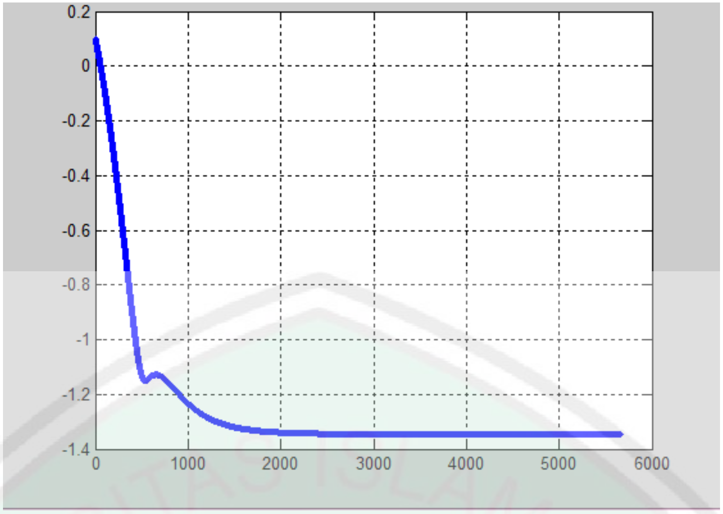
Tabel 4.2 Hasil iterasi BHHH

N	β_1	β_2	β_3	L
0	0,1	0,1	0,1	
700	0.076725324904392	-0.011323038292627	0.004118079175364	-0.050321856703238
1400	0.015918033610031	-0.001311348640911	0.000449330206973	-0.005012350984346
2100	0.018411159924646	-0.001341262334987	0.000457694338954	-0.005012217078995
2800	0.018792212071302	-0.001345165158706	0.000458949546925	-0.005012214620727
3500	0.018846052275708	-0.001345703883468	0.000459126443782	-0.005012214573039
4200	0.018853574403373	-0.001345778895018	0.000459151151937	-0.005012214572112
4900	0.018854625852590	-0.001345789387763	0.000459154601902	-0.005012214572094
5600	0.018854759152260	-0.001345790649469	0.000459155059120	-0.005012214572093
5665	18.854764345197498	-1.345790711233265	0.459155073276545	-5.012214572093259

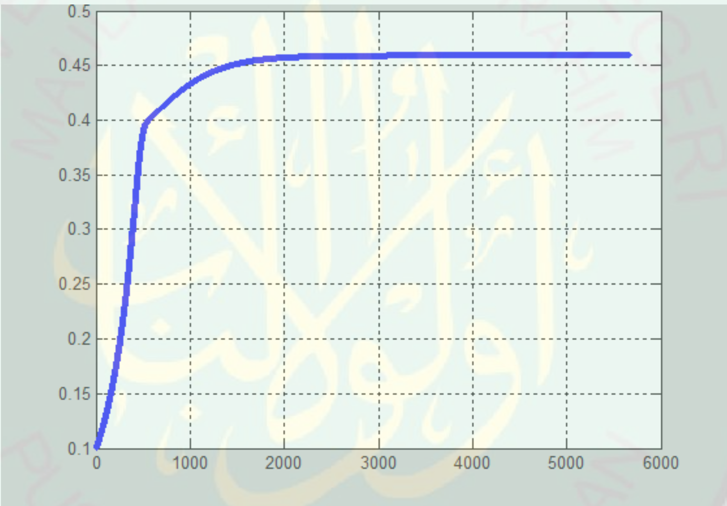
Adapun grafik dari iterasi BHHH adalah



Gambar 4.15 Grafik kekonvergenan dari β_1 pada iterasi BHHH



Gambar 4.16 Grafik kekonvergenan dari β_2 pada iterasi BHHH



Gambar 4.17 Grafik kekonvergenan dari β_3 pada iterasi BHHH

Dari grafik di atas dengan menggunakan iterasi BHHH diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke 5665. Hasil NML untuk fungsi CD-nya adalah

$\beta_1 = 18.854764345197498$ $\beta_3 = 0.459155073276545$

$\beta_2 = -1.345790711233265$ $L = -5.012214572093259$

Jadi, model Cobb-Douglas (CD) pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dianggap optimum (konvergen) menurut iterasi BHHH adalah sebagai berikut:

$$Q = 18.854764345197498 L^{-1.345790711233265} K^{0.459155073276545}$$

4.2.5 Hasil Perbandingan Iterasi

Hasil perbandingan antara iterasi *Newton-Rhapson* dengan iterasi BHHH pada fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan nilai awal $\beta_1, \beta_2, \beta_3 = 0{,}1$ adalah sebagai berikut:

Tabel 4.3 Hasil perbandingan iterasi *Newton-Rhapson* dan BHHH

Fungsi CD	Metode Nonlinier Maximum Likelihood	
	Newton-Rhapson	BHHH
β_1	18.854793988051924	18.854764345197498
β_2	−1.345791046510193	−1.345790711233265
β_3	0.459155159079776	0.459155073276545
L	0.000148086255184	−5.012214572093259
Jumlah Iterasi	303	5665

Dari tabel di atas, untuk iterasi *Newton-Rhapson* dan iterasi BHHH dengan parameter-parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ yang dihasilkan oleh iterasi *Newton-Rhapson* dan BHHH dapat dikatakan sama karena mempunyai ketelitian yang sangat dekat. Sedangkan untuk nilai L dari kedua iterasi berbeda. Nilai perhitungan fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Newton-Raphson* lebih kecil daripada nilai perhitungan fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi BHHH. Sehingga fungsi produksi yang cocok dengan data yang telah diberikan (Lampiran 2) adalah fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Newton-Raphson* dengan modelnya adalah

$$Q = 18.854793988051924 L^{-1.345791046510193} K^{0.459155159079776}$$

4.3 Estimasi dalam Pandangan Islam

Dalam al-Qur'an ada beberapa ayat yang menjelaskan tentang estimasi. Selain itu, ada pula hadits Nabi Muhammad Saw yang menjelaskan mengenai estimasi. Pada pembahasan BAB II telah disebutkan ayat dalam al-Qur'an dan hadits nabi Muhammad Saw yang berkaitan dengan estimasi. Surat al-Jaatsiyah ayat 24 merupakan salah satu ayat dalam al-Qur'an yang membahas tentang estimasi, sedangkan dalam hadits nabi Muhammad Saw yang menceritakan kisah perang Badar juga membahas mengenai estimasi.

Pada surat al-Jaatsiyah ayat 24 menjelaskan tentang orang-orang kafir dan musyrik yang mengingkari adanya hari kiamat dan hari kebangkitan. Menurut mereka kehidupan yang sebenarnya adalah kehidupan di dunia ini, tidak ada kehidupan lain setelahnya dan yang mematikan mereka adalah masa. Semua perkataan orang-orang kafir dan musyrik tersebut tidak mempunyai dasar yang kuat, melainkan mereka hanya memperkirakan saja.

Sedangkan pada hadits nabi Muhammad Saw dalam kisah perang Badar membahas tentang nabi Muhammad Saw yang memperkirakan jumlah tentara Mekkah (tentara Quraisy) berdasarkan keadaan yang sebenarnya, yaitu dengan mengamati jumlah unta yang disembelih setiap harinya untuk santapan mereka. Sehingga perkiraan tersebut bukanlah perkiraan yang hanya sekedar perkiraan saja, tetapi perkiraan yang mempunyai dasar yang dapat dipertimbangkan.

Berdasarkan kisah perang Badar dalam hadits nabi Muhammad Saw menerangkan bahwa satu ekor unta Arab jika diukur dari punuknya, tingginya mencapai 2,1 meter dan beratnya mencapai 726 kilogram. Unta Arab hanya memiliki satu punuk yang menyimpan lemak dan beratnya mencapai 36 kilogram.

Satu orang dapat mengkonsumsi daging unta 6 sampai 7 kilogram dalam sehari dengan tiga kali makan. Karena berat dari unta Arab mencapai 726 kilogram dan satu orang dapat mengkonsumsi hingga 7 kilogram, maka dapat diperkirakan bahwa satu ekor unta dapat dikonsumsi 100 orang. Jadi, sembilan atau sepuluh ekor unta dapat dimakan oleh 900 atau 1000 orang.

Jika diuraikan dalam matematika dapat ditulis sebagai berikut:

Diketahui: Berat untuk 1 ekor unta = 726 kg

Konsumsi untuk 1 orang dalam sehari dengan tiga kali makan = 6-7 kg

Ditanya : Berapa kira-kira jumlah musuh?

Jawab : 726 kg : 6 kg = 121 orang

726 kg : 7 kg = 103 orang

Dari perhitungan di atas dapat dirata-rata

121 orang + 103 orang = 224 orang

224 orang : 2 = 112 orang

Jadi, dapat diperkirakan jumlah musuhnya adalah sekitar 100 orang. Sehingga jika dalam sehari menyembelih 9 sampai 10 unta dapat diperkirakan jumlah musuhnya adalah 900 sampai 1000 orang.

Dari kedua pembahasan mengenai perkiraan (estimasi) di atas antara surat al-Jaatsiyah ayat 24 dan kisah perang Badar dalam hadits nabi Muhammad Saw, dapat disimpulkan bahwa kisah perang Badar yang menjelaskan tentang perkiraan (estimasi) lebih cocok dengan pembahasan dalam penelitian ini dibadingkan dengan perkiraan (estimasi) dalam surat al-Jaatsiyah ayat 24 karena pada kisah perang Badar perkiraan yang digunakan bukan hanya sekedar perkiraan saja, tetapi perkiraan yang mempunyai dasar yang cukup kuat yang hampir mendekati nilai yang sebenarnya. Seperti halnya dalam memperkirakan (mengestimasi) nilai parameter (β) pada penelitian ini. Pada penelitian ini, dalam mengestimasi model statistik nonlinier secara *maximum likelihood* dengan menggunakan metode iterasi *Newton-Raphson* dan *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (BHHH), sehingga diperoleh nilai parameter (β) yang mendekati nilai kebenaran.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan, sebagai berikut:

1. Bentuk estimasi *Nonlinear Maximum Likelihood* pada model statistik nonlinier dengan metode *Newton-Rhapson* dan BHHH adalah

   a. Bentuk estimasi parameter secara iterasi *Newton-Rhapson*

   $$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}}$$

   b. Bentuk estimasi parameter secara iterasi BHHH

   $$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} |_{\beta^{(n)}} \right) \left(\frac{\partial L_i}{\partial \beta^T} |_{\beta^{(n)}} \right)^T \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}}$$

2. Hasil perbandingan estimasi dari model statistik nonlinier secara *maximum likelihood* pada implementasi data Cobb-Douglas (data Industri Logam, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur) dapat disimpulkan bahwa iterasi *Newton-Rhapson* lebih cepat mencapai kekonvergenan dibandingkan dengan menggunakan iterasi BHHH. Sehingga fungsi produksi yang cocok dengan data yang telah diberikan adalah fungsi produksi Cobb-Douglas (CD) dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Newton-Raphson* dengan modelnya adalah

   $$y = 18.8547939880519 24 L^{-1.345791046510193} K^{0.459155159079776}$$

5.2 Saran

Pada penelitian ini, peneliti menggunakan model statistik *Nonlinear Maximum Likelihod* dengan membandingkan dua metode, yaitu *Newton-Rhapson* dan BHHH. Bagi penelitian selanjutnya, peneliti menyarankan agar dilakukan analisis antara kedua iterasi tersebut, kemudian dapat pula dilanjutkan dengan menguji hasil analisis estimasi tersebut dengan uji yang sesuai.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN PRESS.

Al-Mahalli, I.J. & As-Suyuti, I.J.. 2008. *Tafsir Jalalain Berikut Asbabun Nuzul Ayat Surat Al-Kahfi s.d. An-Nas 2*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

Ash-Shidddieqy, H.. 1972. *Tafsir Al-Qur'an IX Djuz 26 s/d 27*. Jakarta: Bulan Bintang.

Ash-Sdiddieqy, T.M.H.. 2003. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur 5*. Semarang: PT Pustaka Rizki Putra.

Aziz, A.. 2010. *Ekonometrika Teori Dan Praktek Eksperimen Dengan Matlab*. Malang: UIN MALIKI PRESS.

Bahreisy, S. & Bahreisy, S.. 1992. *Terjemah Singkat Tafsir Ibnu Katsier Jilid 7*. Surabaya: PT Bina Ilmu.

Hong, B. dan Tan. 2008. *Cobb-Douglas Production Function*. http://en.wikipedia.org/wiki/Cobb_douglas. (diunduh pada tanggal 02 Juni 2014).

Dahlan, Z.. 1991. *Al Qur'an Dan Tafsirnya*. Yogyakarta: PT Dana Bhakti Wakaf

Dudewicz, E.J. & Mishra, S.N.. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Bandung: ITB.

Endri. 2008. *Jurnal Ekonomi Pembangunan*. Jakarta: Institut Perbanas.

Firdaus, M.. 2004. *Ekonometrika Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: Sinar Grafika Offset.

Ghozali, I.. 2005. *Aplikasi Analisis Multivariat dengan program SPSS*. Semarang: Badan Penerbit Universitas Diponegoro.

Gujarati, N.D.. 1995. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Jakarta: Erlangga.

Gujarati, N.D.. 2004. *Basic Econometric, Fourth Edition*. New York: Mc Graw-Hill.

Gujarati, N.D.. 2007. *Dasar-dasar Ekonometri Jilid 1 dan 2*. Jakarta: Erlangga

Gujarati, N.D.. 2010. *Dasar-Dasar Ekonometrika Jilid I*. Jakarta: Erlangga.

Harini, S. dan Turmudi. 2008. *Metode Statistika*. Malang: UIN-Malang Press.

Hasan, M.I.. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik I (Statistik Deskriptif)*. Jakarta: PT Bumi Aksara.

Kislam, S..1994. *Seri Statistika Matematika Jilid 2*. Malang: IKIP Malang.

Kurniawan, D.. 2008. *Regresi Linier*. http://ineddeni.wordpress.com (diakses pada tanggal 13 Juni 2014)

Kusumawati, R..2009. *Aljabar Linear & Matriks*. Malang: UIN-Malang Press.

Mood, M. A.. 1986. *Introduction To The Theory Of Statistics*. Megarw Hill Book Company.

Munir, R.. 2008. *Metode Numerik revisi ke-2*. Bandung: Informatika.

Nugroho, S.. 2010. *Skripsi Sistem Informasi Peringatan Dini Dan Peramalan Penderita Demam Berdarah Di Surakarta*. digilib.uns.ac.id/pdf_13515 _sistem-informasi-peringatan-dini-dan peramalan-penderita-demam-berdarah-di-surakarta.pdf (diakses pada tanggal 18 Juni 2014)

Sembiring. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: ITB.
Setiawan dan Kusrini, D.E.. 2010. *Ekonometrika*. Yogyakarta. C.V ANDI OFFSET.
Syamsuddin, M.. 2006. *Catatan Kuliah Ekonometrika 3.* Depok: Universitas Indonesia.
Yitnosumarto dan Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika.* Jakarta: CV Rajawali.
Walpole, R.E. & Myers, R.H.. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan Terjemahan RK Sembiring*. Bandung: ITB.
Wei, W.S.. 2006. *Time Series Analysis Univariate and Multivariate 2nd Edition.* New Jersey: Pearson Education.
Wibisono, Y.. 2005. *Metode Statistik.* Yogyakarta: Gajah Mada University Press.