ORTOGONALITAS-g PADA RUANG BERNORMA-2

SKRIPSI

Oleh:
RUMATUS SHOFIA
NIM. 10610087

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

ORTOGONALITAS-g PADA RUANG BERNORMA-2

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
RUMATUS SHOFIA
NIM. 10610087

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

ORTOGONALITAS-g PADA RUANG BERNORMA-2

SKRIPSI

Oleh:
RUMATUS SHOFIA
NIM. 10610087

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 15 Januari 2014

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ORTOGONALITAS-g PADA RUANG BERNORMA-2

SKRIPSI

Oleh:
RUMATUS SHOFIA
NIM. 10610087

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Maret 2014

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	____________________
Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, S,Si, M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	____________________
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	____________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	____________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rumatus Shofia
NIM	: 10610087
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Ortogonalitas-*g* pada Ruang Bernorma-2

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 14 Januari 2014

Yang Membuat Pernyataan

Rumatus Shofia

NIM. 10610087

MOTTO

Milikilah hati yang tulus untuk mencintai Allah SWT sebagai garis hidup vertikal (hablun minallah) dan mencintai makhlukNYA sebagai garis hidup horizontal (hablun minannaas), layaknya sebuah ortogonalitas yang menunjukkan ketegak-lurusan antara garis vertikal dan garis horizontal.

(Penulis)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim......

Skripsi ini dipersembahakan untuk:

Ibunda tercinta Hj. Fatimah

Ayahanda tercinta H. Muchammad Ichsan

Kakak-kakak tercinta Syafi'i dan Achmad Turmudzi

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum warahmatullah wabarokatuh

Alhamdulilah, puji syukur ke hadirat Allah atas segala limpahan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Ortogonalitas-*g* pada Ruang Bernorma-2**". Sholawat dan salam tetap tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW yang telah membawa manusia dari jaman jahiliyyah menuju jaman yang terang benderang yakni agama Islam (kebenaran).

Keberhasilan dalam menyelesaikan skripsi ini tidak lepas dari arahan, bimbingan, motivasi, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapakan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan pembimbing akademik yang telah memberikan motivasi dan bimbingan selama perkuliahan.

4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan arahan mengenai kajian agama yang berintegrasi dengan skripsi ini.
6. Para dosen Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mengajar, mendidik, memotivasi, dan memberikan arahan kepada penulis selama perkuliahan.
7. Para staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan pelayanan administrasi dengan baik.
8. Para mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010 yang telah memberikan masukan, dukungan, dan pengalaman-pengalaman selama perkuliahan.
9. Ibunda Hj. Fatimah dan Ayahanda H. Muchammad Ichsan yang telah berkorban memberikan jasa-jasanya dalam kehidupan penulis yang tidak dapat terhitung.
10. Kakak-kakak penulis, Syafi'i dan Achmad Turmudzi yang telah memberikan motivasi, dukungan, dan doa kepada penulis.
11. Teman-teman seperjuangan, Akhmad Syarifuddin Fauqanori, Binti Tsamrotul Fitria, Hamim Muchsin, Muflihatun Nafisah, Muhammad Imam Mutamaqin, dan Sri Susanti yang telah memberikan bantuan, masukan, dukungan, dan doa kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah memberikan dukungan dan doa kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya serta balasan kebaikan. Semoga skripsi ini membawa manfaat. *Amin ya robbal 'Alamin*

Wassalamu'alaikum warahmatullah wabarokatuh

Malang, Maret 2014

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\|\cdot\|$: Norma (*norm*)

$\|\cdot,\cdot\|$: Norma-2 (2-*norm*)

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: Hasilkali Dalam

$\perp$: Ortogonalitas

$\perp_g$: Ortogonalitas- g (*Milicic*)

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Shofia, Rumatus. 2014. **Ortogonalitas-g pada Ruang Bernorma-2**. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata Kunci: *Ruang Vektor, Ruang Bernorma, Ruang Bernorma-2, Ruang Hasilkali Dalam, dan Ortogonalitas.*

Ortogonalitas adalah suatu konsep yang terdapat pada ruang hasilkali dalam dimana ortogonalitas ini berhubungan dengan besar sudut antara dua vektor. Misalkan $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ adalah suatu ruang hasilkali dalam dan $x, y \in X$, maka x dikatakan ortogonal pada y, ditulis $x \perp y$, jika dan hanya jika $\langle x, y\rangle = 0$. Ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam memiliki berbagai macam definisi di antaranya ortogonalitas-BJ (*Birkhoff-James*), ortogonalitas-D (*Diminnie*), ortogonalitas-g (*Milicic*), dan lain-lain. Pada penelitian yang dilakukan oleh Hendra Gunawan 2005, ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam memenuhi sifat-sifat di antaranya nondegenerasi, simetri, homogenitas, aditif kanan, resolvabilitas, dan kontinuitas.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji definisi dan sifat-sifat ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam yang dikembangkan pada ruang bernorma khususnya ruang bernorma-2 dengan macam ortogonalitas-g. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode kepustakaan (*library research*) yaitu melakukan penelitian dengan mengumpulkan berbagai informasi dan data dengan bantuan buku-buku, jurnal, artikel, sumber-sumber lainnya yang relevan.

Dari pembahasan dapat diperoleh kesimpulan bahwa ortogonalitas pada ruanghasil kali dalam berlaku pula pada ruang bernorma-2. Salah satu dari jenis definisi ortogonalitas pada ruanghasil kali dalam yaitu ortogonalitas-g dapat dibuktikan bahwa berlaku pada ruang bernorma-2. Ortogonalitas-g (*Milicic*) pada ruang bernorma-2 riil memenuhi sifat *nondegenerasi*, *homogenitas* dan *aditif* kanan.

Untuk penelitian yang lain dapat melakukan pengkajian definisi-definisi dan sifat-sifat ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam untuk dikembangkan pada ruang bernorma-n. Masih terdapat definisi-definisi ortogonalitas lain pada ruang hasilkali dalam yang perlu diteliti diantaranya ortogonalitas-BJ, ortogonalitas-D, ortogonalitas-I, ortogonalitas-P, dan ortogonalitas-R pada ruang bernorma-2.

ABSTRACT

Shofia, Rumatus. 2014. **Orthogonality-g in Normed Space-2**. Thesis, Department of Mathematic, The Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
Supervisors: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Keywords: *Vector Space, Normed Space, Normed Space-2, Inner Product Space, and Orthogonality*.

Orthogonality is a concept contained in inner product space in which this orthogonality related to large angle between two vectors. For example $(X, \langle .,. \rangle)$ is an inner product space and $x, y \in X$, so x said to be orthogonal to y, written $x \perp y$, if and only if $\langle x, y \rangle = 0$. Orthogonality in inner product space has many definitions such as BJ-orthogonality (Birkhoff-James), D-orthogonality (Diminnie), g-orthogonality (Milicic), and others. In a research done by Hendra Gunawan 2005, orthogonality in inner product space complies some principles such as nondegeneration, symmetry, homogenity, right additive, resolvability and continuity.

This research has an aim to examine deeply about orthogonality's definitions and characteristics in inner product space which developed in normed space especially in normed space-2 with orthogonality's definition is g-orthogonality. Library research is a method which used in this research, it is a method which done by collecting information and data from books, journals, articles, and other relevant resources.

From the discussion, it is concluded that orthogonality in inner product space prevails to riil normed space-2. One of orthogonality's definitions in inner product space is g-orthogonality that could be proved that prevails to the riil normed space-2. g-Orthogonality (Milicic) in real normed space-2 complies nondegeneration, homogeneity and right additive's principles.

For the next research, one can examine deeply about orthogonalithy definitions and principles in inner product space to be developed in normed space-n. There are many other orthogonality definitions in inner product space that can be studied such as BJ-orthogonality, D-orthogonality, I-orthogonality, P-orthogonality, and R-orthogonality in real normed space-2.

ملخصة

الصافية، رمة. 2014 . أورطوقوناليتية-g فى فضاء المساحة -2
البحث، كلية العلوم والتكنولوجية فى شعبة الرياضية، جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلامية الحكومية بمالنج. تحت المشرف :
1- خير الرحمن الماجستير
2- فخر الرازي الماجستير
الكلمة الرئيسية : سهم التوجيه، فضاء المساحة، فضاء المساحة -2، الفضاء من نتائج الضرب الداخلي و أورطوقوناليتية.

أورطوقوناليتية هي الفكرة من نتائج الضرب الداخلي من حيث أن أورطوقوناليتية تصل بدرجة كبيرة الزاوية بين سهم التوجيه. على المثال : $(X,\langle .,. \rangle)$ هو الفضاء من نتائج الضرب الداخلي و $x,y \in X$، إذا x يقال هو أورطوقونال عن y ، ويكتب $x \perp y$ إذا كان أو يلزم $\langle x,y \rangle = 0$. أورطوقوناليتية فى الفضاء من نتائج الضرب الداخلي يملك التعريفات المتنوعة، منها : اورطوقوناليتية - BJ (بيكوف – جايم)، اورطوقوناليتية-g (ميليسك) و اورطوقوناليتية- D (ديميني). وفي البحث الذى جرى حيندرا قوناوان 2005 ، اورطوقوناليتية فى الفضاء من نتائج الضرب الداخلي يشتمل بالاوصاف، منها غير الانحطاط ، التماثل، التجانس، الاضافات الاجابية، الاتصالية و الاستمرارية.

ويهدف هذا البحث لمعرفة تعريفات وأوصاف اورطوقوناليتية فى الفضاء من نتائج الضرب الداخلي الذى يوجد فى فضاء المساحة وتختص فى فضاء المساحة-2 بأورطوقوناليتية- g. وطريقة البحث التى تستخدم فى هذا البحث هي البحث المكتبي يعنى البحث بطريقة جمع المعلومات والمراجع من الكتب والمجلات والبحوث العلمية والمراجع الاضافية المناسبة بهذا البحث.

ومن هذا البحث أخذ الباحث النتيجة أن اورطوقوناليتية فى الفضاء من نتائج الضرب الداخلي تعمل فى فضاء المساحة-2 حقيقية. وأحد من اورطوقوناليتية فى الفضاء من نتائج الضرب هي اورطوقوناليتية-g آستطعت دلّل النتيجة الداخلي تعمل فى فضاء المساحة-2. أورطوقوناليتية - g (ميليسك) فى فضاء المساحة-2 حقيقية يشتمل غير الانحطاط، التجانس و الإضافية الإجابية.

وكان البحث الاتي يصلح أن يجري البحث عن تعريفات وأوصاف اورطوقوناليتية فى فضاء المساحة من نتائج الضرب الداخلي لأجل التنمية فى فضاء المساحة- n. وتوجد التعريفات عن اورطوقوناليتية الأخرى فى فضاء المساحة من نتائج الضرب الداخلي منها اورطوقوناليتية – BJ, اورطوقوناليتية – D, اورطوقوناليتية – I، اورطوقوناليتية-P،و اورطوقوناليتية-R فى فضاء المساحة-2 حقيقية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika memiliki banyak cabang di dunia. Salah satu cabang dari ilmu matematika adalah analisis. Analisis dalam matematika meliputi analisis riil, analisis fungsional, teori ukuran, teori operator, analisis kompleks, topologi, persamaan diferensial biasa, dan persamaan diferensial parsial. Salah satu analisis yang akan dibahas adalah analisis fungsional. Dalam analisis fungsional sendiri terdapat konsep penting yang merupakan pangkal dari analisis fungsional, yaitu konsep ruang bernorma dan konsep ruang hasilkali dalam (Gunawan, dkk., 2005).

Terdapat konsep dasar untuk memasuki konsep ruang bernorma dan konsep ruang hasilkali dalam, yaitu ruang vektor. Ruang vektor atas lapangan F adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan dua fungsi, yaitu fungsi yang memetakan $V \times V \rightarrow V$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ (penjumlahan vektor) dan fungsi yang memetakan $F \times V \rightarrow V$ dinotasikan dengan $\alpha\boldsymbol{x}$ (perkalian vektor dengan skalar), untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ dan $\alpha \in F$ memenuhi sifat ruang vektor (Rynne & Youngson, 2008).

Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang di dalamnya terdapat fungsi norma dan memenuhi sifat-sifat ruang bernorma. Fungsi norma sendiri adalah fungsi pemetaan dari suatu himpunan tak kosong V ke suatu lapangan F yang dapat berupa bilangan riil R atau bilangan kompleks C. Istilah norma pada vektor didefinisikan sebagai panjang (*length*) vektor. Ruang bernorma tidak terbatas hanya pada ruang bernorma-1, akan tetapi terdapat ruang bernorma-2 hingga ruang bernorma-*n*.

Ruang hasilkali dalam merupakan ruang vektor yang di dalamnya terdapat hasilkali dalam dan memenuhi sifat ruang hasilkali dalam. Hasilkali dalam sendiri merupakan fungsi yang mengelompokan (mengasosiasikan) bilangan riil R dengan sepasang vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ di dalam V sehingga dapat ditulis $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma ruang hasilkali dalam (Anton & Rorres, 2004).

Ruang hasilkali dalam memuat konsep penting, yaitu ortogonalitas karena ortogonalitas berhubungan dengan besar sudut antara dua vektor. Dua vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ dalam ruang hasilkali dalam V dikatakan ortogonal jika $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ (Anton & Rorres, 2004).

Dua konsep penting dalam analisis fungsional ini, yaitu konsep ruang berbernormaa dan ruang hasilkali dalam memiliki kesamaan. Keduanya merupakan ruang vektor namun fungsi yang melengkapinya berbeda. Jika dilihat dalam kehidupan, faktanya setiap sesuatu yang memiliki kesamaan tidak semua unsur di dalamnya adalah sama. Sebagai salah satu contoh adalah manusia laki-laki dan perempuan. Keduanya memiliki kesamaan, yaitu sebagai manusia. Tetapi unsur yang melengkapi masing-masing dari laki-laki dan perempuan adalah berbeda. Dalam hal kesamaan laki-laki dan perempuan, Allah berfirman dalam surat ‘Abasa (80) ayat 18-19:

مِنۡ أَيِّ شَيۡءٍ خَلَقَهُۥ ۝١٨ مِن نُّطۡفَةٍ خَلَقَهُۥ فَقَدَّرَهُۥ ۝١٩

Artinya: "*Dari apakah Allah menciptakannya (manusia)?Dari setetes mani*, *Allah menciptakannya (manusia) lalu menentukannya.*"

Ayat di atas menerangkan bahwa manusia berasal dari setetes mani. Laki-laki dan perempuan merupakan manusia, sehingga dapat dikatakan penciptaan laki-laki dan perempuan berasal dari setetes mani (*sperma*). Dalam hal perbedaan, laki-laki dan perempuan adalah manusia yang memiliki bentuk berbeda yang disebabkan unsur-unsur yang melengkapi tubuhnya berbeda. Perbedaan tersebut dapat langsung dilihat oleh mata. Perbedaan itu bukan hanya pada fisik yang cenderung dilihat secara biologis, melainkan terdapat perbedaan pula dari segi psikisnya. Sebagaimana Profesor Rick, seorang psikolog Amerika berkata: "Dunia lelaki dan dunia perempuan secara total benar-benar berbeda. Lelaki dengan karakteristik fisik dan psikologisnya berbeda dengan perempuan dalam merespon dan menyikapi berbagai peristiwa dalam kehidupan. Lelaki dan perempuan berdasarkan tuntutan jenis kelaminnya tidak berperilaku sama. Tepatnya mereka seperti dua bintang yang berputar di dua jalur yang berbeda. Ya, mereka dapat saling mengerti dan memahami satu sama lain. Namun mereka sama sekali tidak sama" (Maya, 2012).

Adapun hak laki-laki dan perempuan juga memiliki perbedaan yang telah ditegaskan dalam surat An-Nisa' (4) ayat 34, yaitu:

ٱلرِّجَالُ قَوَّٰمُونَ عَلَى ٱلنِّسَآءِ بِمَا فَضَّلَ ٱللَّهُ بَعْضَهُمْ عَلَىٰ بَعْضٍ وَبِمَآ أَنفَقُوا۟ مِنْ أَمْوَٰلِهِمْ ۚ

Artinya: "*Kaum laki-laki itu adalah pemimpin bagi kaum wanita, oleh karena Allah telah melebihkan sebahagian mereka (laki-laki) atas sebahagian yang lain (wanita), dan karena mereka (laki-laki) telah menafkahkan sebagian dari harta mereka.*"

Ayat di atas menegaskan bahwa Allah memberikan laki-laki tingkatan yang lebih daripada wanita sebab laki-laki berperan sebagai pemimpin bagi kaum wanita. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi laki-laki juga berbeda dengan perempuan. Ditegaskan pula dalam surat Al-Baqarah (2) ayat 228, yaitu:

وَلَهُنَّ مِثْلُ ٱلَّذِى عَلَيْهِنَّ بِٱلْمَعْرُوفِ ۚ وَلِلرِّجَالِ عَلَيْهِنَّ دَرَجَةٌ ۗ وَٱللَّهُ عَزِيزٌ حَكِيمٌ ﴿٢٢٨﴾

Artinya: "*Dan para wanita mempunyai hak yang seimbang dengan kewajibannya menurut cara yang makruf. Akan tetapi para suami mempunyai satu tingkatan kelebihan daripada istrinya. Dan Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana.*"

Hal ini menunjukkan bahwa laki-laki dan perempuan berbeda dalam segi hak. Sehingga dapat disebut bahwa laki-laki dan perempuan memiliki kesamaan, yaitu sebagai manusia yang berasal dari setetes mani tetapi unsur, bentuk, hak, dan fungsi yang melengkapinya yang berbeda.

Kehidupan tidak lepas dari aturan dan hukum. Allah menurunkan Al- Qur'an sebagai wahyu kepada Nabi Muhammad SAW untuk memberikan pengetahuan kepada manusia tentang yang *haq* dan yang *bathil*. Salah satu yang diambil di sini adalah hukum tentang laki-laki muslim yang dilarang menikahi wanita musyrik dan sebaliknya, yang ditegaskan dalam firman Allah SWT dalam surat Al-Baqarah (2) ayat 221, yaitu:

وَلَا تَنكِحُواْ ٱلۡمُشۡرِكَٰتِ حَتَّىٰ يُؤۡمِنَّۚ وَلَأَمَةٞ مُّؤۡمِنَةٌ خَيۡرٞ مِّن مُّشۡرِكَةٖ وَلَوۡ أَعۡجَبَتۡكُمۡۗ
وَلَا تُنكِحُواْ ٱلۡمُشۡرِكِينَ حَتَّىٰ يُؤۡمِنُواْۚ وَلَعَبۡدٞ مُّؤۡمِنٌ خَيۡرٞ مِّن مُّشۡرِكٖ وَلَوۡ أَعۡجَبَكُمۡۗ
أُوْلَٰٓئِكَ يَدۡعُونَ إِلَى ٱلنَّارِۖ وَٱللَّهُ يَدۡعُوٓاْ إِلَى ٱلۡجَنَّةِ وَٱلۡمَغۡفِرَةِ بِإِذۡنِهِۦۖ وَيُبَيِّنُ ءَايَٰتِهِۦ
لِلنَّاسِ لَعَلَّهُمۡ يَتَذَكَّرُونَ ٢٢١

Artinya: "*Dan janganlah kamu nikahi wanita-wanita musyrik, sebelum mereka beriman. Sesungguhnya wanita budak yang mukmin lebih baik dari wanita musyrik, walaupun dia menarik hatimu. Dan janganlah kamu menikahkan orang-orang musyrik (dengan wanita-wanita mukmin) sebelum mereka beriman. Sesungguhnya budak yang mukmin lebih baik dari orang musyrik walaupun dia menarik hatimu. Mereka mengajak ke neraka, sedang Allah mengajak ke surga dan ampunan dengan izin-Nya. Dan Allah menerangkan ayat-ayat-Nya (perintah-perintah-Nya) kepada manusia supaya mereka mengambil pelajaran.*"

Ayat di atas memuat hukum larangan orang Islam untuk menikahi orang yang bukan Islam. Hukum ini berlaku tidak hanya untuk kaum laki-laki tetapi juga untuk kaum perempuan. Hal itu dapat dilihat dari ayatnya yang diulang dengan *dhomir* yang jelas untuk menunjukkan penggunaan kalimat untuk laki-laki dan perempuan. Dalam hal ini dapat diartikan bahwa sesuatu yang berbeda yang asalnya sama berlaku hukum yang sama di dalam dirinya.

Tafsir ini memberikan sebuah pengetahuan untuk manusia bahwa pengetahuan itu semua berasal dari Allah dan hanya milik-Nya. Dalam firman-Nya surat 'Ali-Imran (3) Ayat 189 disebutkan:

وَلِلَّهِ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ ۗ

Artinya: "*Kepunyaan Allah-lah segala apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi*."

Ayat tersebut menerangkan bahwa segala apa yang ada di langit dan di bumi hanyalah milik-Nya. Termasuk ilmu-ilmu yang ada di dalamnya. Dari hal ini timbul dorongan untuk meneliti apakah selain hukum dalam agama juga berlaku di dalamnya bahwa dua hal yang berbeda yang asalnya sama akan terdapat hukum yang berlaku untuk keduanya. Ilmu matematika juga merupakan pengetahuan (ilmu) Allah karena seperti yang telah diterangkan bahwa semua yang ada di langit maupun di bumi hanyalah milik-Nya termasuk ilmu-ilmu yang ada di dalamnya.

Matematika sendiri memuat dua hal yang asalnya sama tetapi fungsi yang melengkapinya berbeda, yaitu ruang bernorma dan ruang hasilkali dalam. Keduanya berasal dari ruang vektor tetapi fungsi dan sifat-sifat yang melengkapinya berbeda. Pada ruang hasilkali dalam terdapat konsep ortogonalitas. Ortogonalitas adalah konsep yang menunjukkan bahwa vektor-vektor yang ada di dalamnya adalah ortogonal. Karena ruang bernorma merupakan ruang vektor yang dilengkapi fungsi norma dan memenuhi sifat-sifat ruang bernorma, maka pada ruang bernorma terdapat vektor. Apakah terdapat vektor-vektor pada ruang bernorma yang ortogonal? Sedangkan ortogonalitas sendiri merupakan konsep yang terdapat pada ruang hasilkali dalam.

Pada penelitian terdahulu telah diteliti ortogonalitas pada ruang bernorma-1. Diperoleh bahwa ortogonalitas pada ruang bernorma-1 memenuhi sifat-sifat dalam ortogonalitas. Norma-1 pada vektor didefinisikan sebagai panjang (*length*) vektor dan norma-2 didefinisikan sebagai luas bangun yang terbentuk dari vektor. Dari hasil penelitian tersebut apakah pada ruang bernorma-2 juga terdapat ortogonalitas. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji ortogonalitas pada ruang bernorma-2. Terdapat banyak jenis definisi ortogonalitas seperti ortogonalitas-BJ, ortogonalitas-D, ortogonalitas-g, ortogonalitas-I, dan ortogonalitas-P. Namun dalam penelitian ini hanya mengambil satu jenis definisi ortogonalitas, yaitu ortogonalitas-g. Sehingga penelitian ini mengambil judul "**Ortogonalitas-g pada Ruang Bernorma-2**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Apakah ortogonalitas berlaku pada ruang bernorma-2?
2. Bagaimana pembuktian ortogonalitas-g pada ruang bernorma-2?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menunjukkan bahwa ortogonalitas berlaku pada ruang bernorma-2.
2. Memaparkan pembuktian ortogonalitas-g pada ruang bernorma-2.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini antara lain:

1. Masalah yang dikaji adalah pembuktian ortogonalitas pada ruang bernorma-2.
2. Ortogonalitas yang akan dikaji terbatas pada ortogonalitas-g.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini antara lain:

1. Manfaat bagi Penulis

   Untuk memperdalam mengenai disiplin ilmu yang telah dipelajari, yaitu ilmu matematika dan untuk mengembangkan wawasan atau pengetahuan yang telah didapat di bangku kuliah khususnya mengenai analisis.

2. Manfaat bagi Instansi

   Hasil penelitian ini dapat dijadikan bahan bacaan dan referensi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta mendapatkan sumbangan pemikiran sebagai konstribusi nyata.

3. Manfaat bagi Pembaca

   Sebagai tambahan ilmu, wawasan, referensi, dan informasi mengenai ortogonalitas pada ruang bernorma-2.

1.6 Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode kepustakaan (*library research)* yang melakukan penelitian dengan mengumpulkan berbagai informasi dan data dengan bantuan buku-buku, jurnal, artikel, dan sumber-sumber lainnya yang relevan. Adapun langkah-langkah yang ditempuh pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memaparkan penjelasan tentang ruang vektor (*vector space*), ruang hasilkali dalam (*inner product space)*, ruang bernorma (*normaed space*), dan konsep ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam.
2. Mendefinisikan hubungan antara ruang hasilkali dalam dengan ruang bernorma.
3. Menjelaskan pembuktian ortogonalitas-*g* pada ruang bernorma-2 melalui definisi ortogonalitas-*g* pada ruang hasilkali dalam yang dikontruksi dari norma-1.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika pada penelitian ini terdiri dari empat bab, yaitu sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini akan dijelaskan teori yang bersangkutan dengan konsep ortogonalitas pada ruang bernorma. Di antaranya teori tentang ruang vektor (*vector space*), ruang bernorma (*normaed space*), ruang hasilkali dalam (*inner product space*), dan ortogonalitas.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini akan ditunjukkan otogonalitas pada ruang bernorma-2 dan akan dibuktikan bahwa ortogonalitas-g berlaku pada ruang bernorma-2.

BAB IV Penutup

Pada bab ini akan diisi dengan kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ruang Vektor (*vector space*)

Definisi 2.1.1

Ruang vektor (*vector space*) atas lapangan *field* F adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan dua fungsi, yaitu fungsi yang memetakan V x $V \rightarrow V$ dan fungsi yang memetakan F x $V \rightarrow V$, yang secara berturut-turut dinotasikan dengan $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ dan $\alpha\boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ dan $\alpha \in F$, sedemikian hingga untuk setiap $\alpha, \beta \in F$ dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ V berlaku:

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (komutatif pada penjumlahan)
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (assosiatif pada penjumlahan)
3. Terdapat $\boldsymbol{0} \in V$ sedemikian hingga $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ (eksistensi identitas pada penjumlahan)
4. Terdapat $-\boldsymbol{x} \in V$ sedemikian hingga $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ (eksistensi invers pada penjumlahan)
5. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (eksistensi identitas pada perkalian)
6. $\alpha\,(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ (assosiatif pada perkalian)
7. $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ (distribusi kiri perkalian skalar terhadap penjumlahan vektor)
8. $(\alpha + \beta)\ \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ (distribusi kanan perkalian vektor terhadap penjumlahan skalar)

Jika $F = R$ maka V merupakan ruang vektor riil (*real vector space*). Jika $F = C$ maka V merupakan ruang vektor kompleks (*complex vector space*). Anggota dari F disebut skalar dan anggota dari V disebut vektor. Operasi $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ disebut penjumlahan vektor (*vector addition*) dan operasi $\alpha\boldsymbol{x}$ disebut perkalian skalar (*scalar multiplication*) (Rynne & Youngson, 2008).

Teorema 2.1.2

Misalkan V suatu ruang vektor, $\boldsymbol{x}$ merupakan suatu vektor pada V dan k adalah suatu skalar maka berlaku:

1. $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
3. $-1(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$
4. Jika $k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ maka $k = 0$ atau $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Bukti:

1. Berdasarkan definisi 2.1.1 diperoleh:

   $0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} = (0 + 0)\boldsymbol{x}$ (sifat 8)

   $= 0\boldsymbol{x}$

   Berdasarkan sifat 4, vektor $0\boldsymbol{x} \in V$ terdapat $-0\boldsymbol{x} \in V$. Tambahkan $-0\boldsymbol{x}$ pada kedua ruas di atas sehingga diperoleh:

   $0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} + -0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x})$

   $0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x})) = 0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x})$ (sifat 2)

   $0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ (sifat 4)

   $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (sifat 3)

2. Bedasarkan sifat 7 pada definisi 2.1.1 diperoleh:

   $k\mathbf{0} + k\mathbf{0} = k(\mathbf{0} + \mathbf{0})$ (sifat 7)

   $= k\mathbf{0}$

   Berdasarkan sifat 4, vektor $k\mathbf{0} \in V$ terdapat - $k\mathbf{0} \in V$. Tambahkan – $k\mathbf{0}$ pada kedua ruas di atas sehingga diperoleh:

   $k\mathbf{0}$ + $k\mathbf{0}$ + (-$k\mathbf{0}$) = $k\mathbf{0}$ + (-$k\mathbf{0}$)

   $k\mathbf{0}$ + ($k\mathbf{0}$ + (-$k\mathbf{0}$)) = ($k\mathbf{0}$ + (-$k\mathbf{0}$)) (sifat 2)

   $k\mathbf{0}$ + $\mathbf{0}$ = $\mathbf{0}$ (sifat 4)

   $k\mathbf{0}$ = $\mathbf{0}$ (sifat 3)

3. Untuk menunjukkan -1($\boldsymbol{x}$) = -$\boldsymbol{x}$ maka melihat pada teorema 2.1.2 bagian 1, yaitu $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vektor $0\boldsymbol{x}$ dapat ditulis $(1 + (-1))\boldsymbol{x}$, maka berlaku

   $0\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x}$ (sifat invers pada penjumlahan)

   $= 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x}$ (sifat 8)

   Sehingga diperoleh -1($\boldsymbol{x}$) = -$\boldsymbol{x}$

4. Untuk k = 0 dan $x \neq \mathbf{0}$ maka $k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, sedangkan untuk $k \neq 0$ dan $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ maka $k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Dapat disimpulkan jika $k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ maka $k = 0$ atau $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (Anton & Rorres, 2004).

2.2. Bebas Linier dan Bergantung Linier

Definisi 2.5.1.

Jika $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ suatu himpunan vektor, untuk $S \in R$, maka persamaan vektor

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n = 0$$

Mempunyai paling sedikit satu selesaian, yakni

$$a_1 = 0, a_2 = 0, \dots , a_n = 0$$

Jika $a = 0$ satu-satunya selesaian, maka S dinamakan sebagai himpunan bebas linier, jika sebaliknya maka S dinamakan sebagai bergantung linier.

Contoh:

1. Diberikan vektor $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, apakah $\boldsymbol{v}_1$dan $\boldsymbol{v}_2$ bebas linier?

   Penyelesaian:

   Untuk menunjukkan bebas linier,

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = 0$$

   Mempunyai paling sedikit satu selesaian, $a = 0$

$$a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_1(2, 0) + a_2(0, 3) = (0, 0)$$

$$(2a_1, 0) + (0, 3a_2) = (0, 0)$$

   Didapatkan $a_1 = a_2 = 0$, dengan demikian maka $\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{v}_2$ bebas linier.

2. Diberikan $\boldsymbol{x}_1 = (2, 4)$, $\boldsymbol{x}_2 = (-1, -2)$ apakah $\boldsymbol{x}_1$ dan $\boldsymbol{x}_2$ bergantung linier?

   Penyelesaian:

   Untuk menunjukkan bergantung linier maka

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = 0$$

$$a_1(2, 4) + a_2(-1, -2) = (0, 0)$$

   Ambil sembarang $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$ maka:

$$1(2, 4) + 2(-1, -2) = (0, 0)$$

$$(2, 4) + (-2, -4) = (0, 0)$$

Sehingga $\boldsymbol{x}_1$ dan $\boldsymbol{x}_2$ adalah bergantung linier, karena terdapat $a \in R$ selain 0 yang menyebabkan $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = 0$ (Rynne & Youngson, 2008).

2.3. Ruang Hasilkali Dalam (*inner product space*)

Definisi 2.3.1

Jika diketahui *V* sebagai ruang vektor riil. Hasilkali dalam pada *V* adalah fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathrm{R}$ sedemikian hingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$
2. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$, jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
3. $\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ (Rynne & Youngson, 2008).

Definisi 2.3.2

Jika diketahui *V* sebagai ruang vektor kompleks. Hasilkali dalam pada *V* adalah fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathrm{C}$ sedemikian hingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ dan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \in \mathrm{R}$
2. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
3. $\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}$ (Rynne & Youngson, 2008).

Lemma 2.3.3

Misalkan *H* merupakan ruang hasilkali dalam, untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in H$ dan $\alpha, \beta \in \mathrm{C}$, maka berlaku:

1. $\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mathbf{0} \rangle = 0$
2. $\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z} \rangle = \bar{\alpha}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \bar{\beta}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$
3. $\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \rangle = |\alpha|^2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \alpha\beta\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \beta\alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + |\beta|^2\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$ (Rynne & Youngson, 2008).

Bukti:

1. Berdasarkan definisi 2.3.2 diperoleh

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{y} + (-\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle (-\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{0} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) \rangle \\
&= \overline{\langle \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle} \\
&= \overline{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} + \overline{\langle (-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle} \\
&= \overline{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} - \overline{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Berdasarkan definisi 2.3.2 diperoleh

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z} \rangle &= \overline{\langle \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle} \text{ (sifat 4)} \\
&= \bar{\alpha}\overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle} + \bar{\beta}\overline{\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle} \text{ (sifat 3)} \\
&= \bar{\alpha}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \bar{\beta}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \text{ (sifat 4)}
\end{aligned}$$

3. Berdasarkan definisi 2.3.2 diperoleh

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \rangle &= \langle \alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \rangle + \langle \beta\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \rangle \\
&= \overline{\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x} \rangle} + \overline{\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \beta\boldsymbol{y} \rangle}
\end{aligned}$$

$$= \overline{\langle \alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}\rangle} + \overline{\langle \beta\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x}\rangle} + \overline{\langle \alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}\rangle} + \overline{\langle \beta\boldsymbol{y}, \beta\boldsymbol{y}\rangle}$$

$$= \bar{\alpha}\overline{\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}\rangle} + \bar{\beta}\overline{\langle \boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x}\rangle} + \bar{\alpha}\overline{\langle \boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}\rangle} + \bar{\beta}\overline{\langle \boldsymbol{y}, \beta\boldsymbol{y}\rangle}$$

$$= \bar{\alpha}\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \bar{\beta}\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \bar{\alpha}\langle \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \bar{\beta}\langle \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \bar{\beta}\alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \bar{\alpha}\beta\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \bar{\beta}\beta\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$$

$$= |\alpha|^2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + |\beta|^2\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$$

Definisi 2.3.4

Jika H sebuah ruang hasilkali dalam, maka norma atau panjang (*lenght*) sebuah vektor $\boldsymbol{x}$ di dalam H dinotasikan dengan $\|\boldsymbol{x}\|$ dan didefinisikan dengan

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$$ (Anton & Rorres, 2004).

2.4. Ruang Bernorma (*normaed space*)

Definisi 2.4.1

Misalkan V suatu ruang vektor R. Suatu fungsi $\|\cdot\|: V \to R$ disebut vektor bernorma jika untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ berlaku,

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
3. $\|c\boldsymbol{x}\| = |c|\|\boldsymbol{x}\|$ untuk setiap $c \in R$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (Rynne & Youngson, 2008).

Contoh 2.4.2

Misalkan $V = R^n = \{f = (a_1, \dots, a_n) | a_i \in R\}$ dan definisikan fungsi $\|\cdot\|: V \to R$ dengan

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

Dapat diperiksa bahwa $\|\cdot\|$ memenuhi sifat norma dan norma ini dikenal dengan norma *euclid*. Besaran $\|f\|$ dapat dimaknai sebagai panjang vektor.

Definisi 2.4.3.

Pasangan $(V, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorma riil dengan V merupakan ruang vektor atas lapangan (*field*) bilangan riil R dan fungsi $\|\cdot\|: V \to R$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$ dan untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$
3. $\|c\boldsymbol{x}\| = |c|\|\boldsymbol{x}\|$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$ dan $c \in R$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ (Rynne & Youngson, 2005).

Definisi 2.4.4.

Misalkan X ruang vektor berdimensi d, $2 \leq d \leq \infty$, norma-2 pada X adalah fungsi $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to R$ dan untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dipenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ bergantung linier.
2. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$
3. $\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$ untuk setiap $\alpha \in R$.
4. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$.

Dan pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang bernorma-2 (Rafflesia, 2007).

Definisi 2.4.5.

Jika X suatu ruang hasilkali dalam dan untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, maka dapat didefinisikan norma-2 sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}}$$

Hal ini menunjukkan bahwa ruang bernorma adalah ruang vektor yang di dalamnya terdapat fungsi norma. Ruang vektornya dapat berupa ruang vektor riil jika vektornya adalah bilangan riil dan dapat berupa ruang vektor kompleks jika vektornya adalah bilangan kompleks (Ghozali, 2010).

Teorema 2.4.6.

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ suatu ruang bernorma-2 untuk semua $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in R$ maka:

a. $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| \geq 0$

b. $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$

c. Jika $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ bergantung linier maka

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|$$

atau

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|$$ (Rafflesia, 2007).

Bukti:

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ suatu ruang bernorma-2. Ambil sebarang $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in R$.

a. Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| \geq 0$

Jelas bahwa $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| \geq 0$ jika $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ bebas linier. Berdasarkan definisi ruang bernorma-2, jika $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ bergantung linier maka $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = 0$. Akibatnya $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| \geq 0$.

b. Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$, yaitu dengan menunjukkan:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \text{ dan } \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$$

(i). $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + 0$ (karena $\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}$ bebas linier) $\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$, sehingga

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$$

(ii). $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}, -\alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| + 0 \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\|$, jadi

$$\|x, y + \alpha\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$$

c. Misalkan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ bergantung linier.

Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$:

(i). Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$, yaitu dengan menunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \geq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$

1. Dari definisi 2.4.4 diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \tag{2.4.4.1}$$

2. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \geq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$ atau $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\|$.

Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ bergantung linier maka $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{z} = \beta\boldsymbol{x}$. Akibatnya $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{x}\| = 0$.

Pilih $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \geq 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\|$ (2.4.4.2)

Dari (2.4.4.1) dan (2.4.4.2) diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| = \|x, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$$

(ii) Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$, yaitu dengan menunjukkan

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \geq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$$

dan

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$$

a. Dari definisi 2.4.4 diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \qquad (2.4.4.3)$$

b. Akan ditunjukkan

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \geq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \text{ atau } \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \leq \|x, y - \boldsymbol{z}\|$$

Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ bergantung linier, maka

$$\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x} \text{ dan } \boldsymbol{z} = \beta \boldsymbol{x},$$

maka

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{x}\| = 0.$$

Pilih $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \geq 0$, sehingga

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \qquad (2.4.4.4)$$

Dari (2.4.4.3) dan (2.4.4.4) diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$$

2.5. Ortogonalitas

Definisi 2.5.1.

Misalkan V ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi hasilkali dalam. Vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ dikatakan ortogonal jika $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Jika vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ saling ortogonal dapat ditulis $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ (Rynne & Youngson, 2008).

Beberapa sifat dasar ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam adalah:

1. Nondegenerasi: Jika $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{x}$, maka $x = 0$.
2. Simetri: Jika $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, maka $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}$.

3. Homogenitas: Jika $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, maka $\alpha\boldsymbol{x} \perp \beta\boldsymbol{y}$ untuk setiap α dan β skalar.
4. Aditif Kanan: Jika $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{z}$, maka $\boldsymbol{x} \perp (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.
5. Resolvabilitas: Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ terdapat skalar α sedemikian hingga $\boldsymbol{x} \perp (\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.
6. Kontinuitas: Jika $\boldsymbol{x}_n \rightarrow \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \rightarrow \boldsymbol{y}$ (dalam *norma*) dan $\boldsymbol{x}_n \perp \boldsymbol{y}_n\boldsymbol{y}_n$ untuk setiap n, maka $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ (Gunawan, dkk., 2005).

Macam-macam definisi ortogonalitas di antaranya sebagai berikut:

1. Ortogonalitas-BJ (*Birkhoff-James*)

Definisi 2.5.5.

$\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonalitas-BJ ke $\boldsymbol{y}$ (ditulis $\boldsymbol{x} \perp_{BJ} \boldsymbol{y}$) jika dan hanya jika

$$\|\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\| \text{ untuk setiap } \alpha \in R \text{ (Gunawan, dkk., 2005).}$$

Teorema 2.5.6.

Ortogonalitas-BJ memenuhi sifat nondegenerasi, homogenitas, dan kontinuitas.

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{x} \perp_{BJ} \boldsymbol{x}$ maka $\|\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{x}\|^2 \geq \|\boldsymbol{x}\|^2$ atau $(1 + a)^2\|\boldsymbol{x}\|^2 \geq \|\boldsymbol{x}\|^2$ untuk setiap $\alpha \in R$. Ketaksamaan ini berlaku hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$. Jadi ortogonalitas-BJ memenuhi sifat nondegenerasi. Sekarang misalkan $\boldsymbol{x} \perp_{BJ} \boldsymbol{y}$, maka untuk $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, dan $\lambda \in R$, maka diperoleh

$$\|\boldsymbol{x} + \lambda\beta\boldsymbol{y}\| = |\alpha|.\|\boldsymbol{x} + \omega\boldsymbol{y}\| \geq |\alpha|\|\boldsymbol{x}\| = \|\alpha\boldsymbol{x}\|$$

(dengan $\omega = \frac{\lambda\beta}{\alpha}$), yang berarti $\alpha\boldsymbol{x} \perp_{BJ} \beta\boldsymbol{y}$. Jadi ortogonalitas-$BJ$ memenuhi sifat homogenitas. Selanjutnya misalkan $\boldsymbol{x}_n \rightarrow \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \rightarrow \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x}_n \perp_{BJ} \boldsymbol{y}_n$

untuk setiap n dan mengingat bahwa *norma* $\|.\|$ merupakan pemetaan yang kontinu, maka peroleh

$$\|\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y}\| = \lim\|\boldsymbol{x}_n-\alpha\boldsymbol{y}_n\|^2 \geq \lim\|\boldsymbol{x}_n\| = \|\boldsymbol{x}\|,$$

untuk setiap $\alpha \in R$, yang berarti $\boldsymbol{x} \perp_{BJ} \boldsymbol{y}$. Jadi ortogonalitas-$BJ$ memenuhi sifat kontinuitas (Gunawan, dkk., 2005).

2. Ortogonalitas-D

Definisi 2.5.10.

Misalkan X ruang bernorma yang juga dilengkapi *norma*-2, maka $\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonalitas-D ke $\boldsymbol{y}$, ditulis $\boldsymbol{x} \perp_D \boldsymbol{y}$, jika dan hanya jika $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$. Pada ruang hasilkali dalam yang juga dilengkapi dengan *norma*-2 baku, dapat diperiksa bahwa $\boldsymbol{x} \perp_D \boldsymbol{y}$ jika dan hanya jika $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = 0$, dapat ditulis $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ (Gunawan, dkk., 2005).

Teorema 2.5.11.

Ortogonalitas-D memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan homogen.

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{x} \perp_D \boldsymbol{x}$, maka $\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0$, dan karenanya $\boldsymbol{x} = 0$. Jadi ortogonalitas-D memenuhi sifat nondegenerasi. Karena norma-2 bersifat simetri, maka ortogonalitas-D juga bersifat simetri. Selanjutnya, misalkan $\boldsymbol{x} \perp_D \boldsymbol{y}$ dan $\alpha, \beta \in R$, maka

$$\|\alpha\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y}\| = |\alpha||\beta|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = |\alpha||\beta|\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| = \|\alpha\boldsymbol{x}\|\|\beta\boldsymbol{y}\|,$$

yang berarti $\alpha\boldsymbol{x} \perp_D \beta\boldsymbol{y}$. Jadi Ortogonalitas-$D$ memenuhi sifat homogen (Gunawan, dkk., 2005).

3. Ortogonalitas-g

Sebelum mendefinisikan ortogonalitas-g, terlebih dahulu mendefinisikan fungsional $g : X \times X \times X \to R$ sebagai

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \coloneqq \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}[\tau + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \tau - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]$$

dengan

$$\tau_{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \coloneqq \lim_{t\to\pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\|}{t}.$$

Definisi 2.5.7.

Dapat diperiksa bahwa g memenuhi:

1. $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$.
2. $g(\alpha\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y}) = \alpha\beta g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha,\beta \in R$.
3. $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ untuk semua $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$.
4. $|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ untuk semua $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$.

Jika fungsional $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ linier terhadap $\boldsymbol{y} \in X$, maka g disebut semi hasikkali dalam pada X (Gunawan, dkk., 2005).

Definisi 2.5.8.

Misalkan g suatu semi hasilkali dalam pada X, maka $\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonalitas-g pada $\boldsymbol{y}$, ditulis $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$, jika dan hanya jika $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ (Gunawan, dkk., 2005).

Teorema 2.5.9.

Ortogonalitas-g memenuhi sifat nondegenerasi, homogen, aditif kanan, dan resolvabilitas.

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{x}$ atau $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, maka $\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0$, dan karenanya $\boldsymbol{x} = 0$. Jadi ortogonalitas-g memenuhi sifat nondegenerasi. Selanjutnya jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$ dan $\alpha, \beta \in R$, maka $g(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ yang berarti $\alpha\,\boldsymbol{x} \perp_g \beta\boldsymbol{y}$. Jadi ortogonalitas-$g$ memenuhi sifat homogen. Kemudian karena $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ linier terhadap $\boldsymbol{y} \in X$, maka ortogonalitas-g memenuhi sifat aditif kanan. Terakhir, misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ dua vektor tidak nol di X dan $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, maka untuk $\alpha = \frac{g(x,y)}{\|x\|^2}$ diperoleh

$$g(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha^{-1} g(\alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\|\boldsymbol{x}\|^2 + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

Ini menunjukkan bahwa ortogonalitas-g memenuhi sifat resolvabilitas (Gunawan, dkk., 2005).

4. Ortogonalitas-I (*Isosceles*)

Definisi 2.5.2.

$\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonalitas-I pada $\boldsymbol{y}$ (ditulis $\boldsymbol{x} \perp_I \boldsymbol{y}$) jika dan hanya jika

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \text{ (Gunawan, dkk., 2005).}$$

Teorema 2.5.3.

Ortogonalitas-I memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan kontinuitas.

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{x} \perp_I \boldsymbol{x}$, maka $2\|\boldsymbol{x}\| = 0$, dan karenanya $\boldsymbol{x} = 0$. Jadi Ortogonalitas-I memenuhi sifat nondegenerasi. Karena $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\|$ dan $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$, maka ortogonalitas-$I$ memenuhi sifat simetri. Selanjutnya misalkan $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x}_n \perp_I \boldsymbol{y}_n$ untuk setiap n dan mengingat bahwa norma $\|.\|$ merupakan pemetaan yang kontinu, maka diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \lim\|\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n\| = \lim\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

yang berarti $\boldsymbol{x} \perp_I \boldsymbol{y}$. Jadi ortogonalitas-$I$ memenuhi sifat kontinuitas (Gunawan, dkk., 2005).

5. Ortogonalitas-*P* (*Pythagoras*)

Definisi 2.5.3

$\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonalitas-P pada $\boldsymbol{y}$ (ditulis $\boldsymbol{x} \perp_P \boldsymbol{y}$) jika dan hanya jika

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 \text{ (Gunawan, dkk., 2005).}$$

Teorema 2.5.4.

Ortogonalitas-P memenuhi sifat nondegenerasi, simetri dan kontinuitas.

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{x} \perp_P \boldsymbol{x}$, maka $2\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0$, dan karenanya $\boldsymbol{x} = 0$. Jadi ortogonalitas-P memenuhi sifat nondegenerasi. Sekarang misalkan $\boldsymbol{x} \perp_P \boldsymbol{y}$, maka$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2$ dan karenanya maka $\boldsymbol{y} \perp_P \boldsymbol{x}$. Jadi ortogonalitas-$P$ memenuhi sifat simetri. Selanjutnya misalkan $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x}_n \perp_P \boldsymbol{y}_n$ untuk setiap n, dan mengingat bahwa norma $\|.\|$ merupakan pemetaan yang kontinu, maka diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \lim\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n\|^2 = \lim(\|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2,$$

yang berarti $\boldsymbol{x} \perp_P \boldsymbol{y}$. Jadi ortogonalitas-$P$ memenuhi sifat kontinuitas (Gunawan, dkk., 2005).

2.6. Inspirasi Al-Qur'an Mengenai Ortogonalitas

Ortogonalitas merupakan konsep pada ruang hasilkali dalam yang berhubungan dengan besar sudut antara dua vektor. Dikatakan ortogonalitas jika dua vektor tersebut tegak lurus. Tegak lurus menunjukkan garis yang berbentuk garis vertikal dan horizontal. Dalam kehidupan, terdapat garis vertikal dan horizontal yang harus manusia lewati. Garis vertikal adalah garis yang menunjukkan hubungan manusia dengan Tuhannya, yaitu Allah SWT dan garis horizontal adalah garis yang menunjukkan hubungan manusia dengan manusia. Hal ini dijelaskan dalam surat 'Ali-Imran (3) ayat 112:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓا۟ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا۟ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوا۟ وَّكَانُوا۟ يَعْتَدُونَ ١١٢

Artinya: "*Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. Yang demikian itu karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. Yang demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas.*"

Dalam ayat di atas diperintahkan kepada manusia untuk berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia. Berpegang teguh kepada tali Allah berarti ketaatan terhadap agama Allah dengan menjalani kehidupan sesuai perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya sebagai bentuk realisasi hubungan manusia dengan Allah. Sedangkan berpegang teguh pada tali (perjanjian) dengan manusia berarti berbuat baik terhadap sesama dan menepati janji-janji (dalam hal kebaikan) yang telah diikrarkan sebagai bentuk realisasi hubungan manusia dengan manusia. Dan hal ini juga tidak lepas bahwa manusia merupakan makhluk sosial yang saling membutuhkan antara satu dengan yang lainnya.

BAB III

PEMBAHASAN

1.1. Ortogonalitas pada Ruang Bernorma

Definisi 2.5.1.

Misalkan V merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi hasilkali dalam. Vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ dikatakan ortogonal jika $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$, dapat ditulis $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. Adapun fungsi hasilkali dalam yaitu $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathrm{R}$ sedemikian hingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$
2. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
3. $\langle \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ (Rynne & Youngson, 2008).

Definisi 2.3.4

Jika H ruang hasilkali dalam, maka norma atau panjang (*lenght*) sebuah vektor $\boldsymbol{x}$ di dalam H dinotasikan dengan $\|\boldsymbol{x}\|$ dan didefinisikan dengan

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$ (Anton & Rorres, 2004).

Maka dapat ditulis:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\langle \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \|\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}\| \|\boldsymbol{z}\| = \alpha \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{z}\| + \beta \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{z}\|$

   Dari teorema 2.4.6 diperoleh

   $\|\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}\| \|\boldsymbol{z}\| \quad = (\|\alpha \boldsymbol{x}\| + \|\beta \boldsymbol{y}\|) \|\boldsymbol{x}\|$

$$= \|\alpha \boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}\| + \|\beta \boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{x}\|$$

$$= \alpha\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{z}\| + \beta\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{z}\|$$

4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = \|\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

Sehingga ortogonalitas pada ruang bernorma yang dapat ditulis:

Misalkan V merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi hasilkali dalam. Vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ dikatakan ortogonal jika $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| = 0$, dapat ditulis $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. Sedemikian hingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ dan $\alpha, \beta \in R$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
3. $\|\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{z}\| = \alpha\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \beta\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$
4. $\|\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$

1.2. Ortogonalitas-g (*Milicic*)

Definisi 3.2.1.

Misalkan X ruang vektor bilangan riil R dan g suatu semi hasilkali dalam pada X. Maka $\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonalitas-g pada $\boldsymbol{y}$, ditulis $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$, jika dan hanya jika $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

Diberikan g suatu fungsional $g: X \times X \to X$ yang didefinisikan sebagai

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}[\tau_+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \tau_-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]$$

dengan

$$\tau_\pm(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{t \to \pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\|}{t}$$

Sehingga untuk norma-2 menjadi

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_{+}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \tau_{-}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \qquad (3.2.1.1)$$

dengan

$$\tau_{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lim_{t\to\pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}$$

Untuk menunjukkan bahwa g merupakan suatu fungsional $g: X \times X \times X \to R$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Dari persamaan (3.2.1.1) diperoleh

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_{+}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \tau_{-}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]$$

dengan

$$\tau_{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lim_{t\to\pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}$$

Maka $\tau_{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ disubstitusikan ke persamaan (3.2.1.1) menjadi

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x},z\|}{2}[\tau_{+}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \tau_{-}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]$$

$$= \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t} + \lim_{t\to\pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan teorema 2.4.6 diperoleh

$$= \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}\left[2\lim_{t\to\pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\| + \|t\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0} \frac{\|t\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan definisi 2.4.4. (sifat 4) diperoleh

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0} \frac{t\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \left[\lim_{t \to \pm 0} \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| \right]$$

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| \quad (3.2.1.2)$$

Sehingga diperoleh bahwa $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ berbentuk norma-2. Berdasarkan definisi 2.4.3, norma-2 pada X adalah fungsi $\|.,.\|: X \times X \to X$. Maka $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ fungsional.

Teorema 3.2.2.

Misalkan g merupakan suatu semi hasilkali dalam pada X dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ maka berlaku

1. $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$.
2. $g(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha, \beta \in R$.
3. $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.
4. $|g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|$.

Sehingga untuk norma-2 berlaku

1. $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|^2$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$.
1. $g(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha, \beta \in R$.
2. $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|^2 + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.
3. $|g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$.

Bukti:

1. Dari persamaan (3.2.1.1) diperoleh

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2} [\tau_+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \tau_-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})] \quad (3.2.1.3)$$

dengan

$$\tau_\pm(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lim_{t \to \pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}$$

Maka $\tau_\pm(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ disubstitusi ke persamaan (3.2.1.3) menjadi

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad = \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_{+}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+\tau_{-}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})]$$

$$= \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm0}\frac{\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|-\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}+\lim_{t\to\pm0}\frac{\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|-\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan teorema 2.4.6 diperoleh

$$= \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}\left[2\lim_{t\to\pm0}\frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|+\|t\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|-\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm0}\frac{\|t\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan definisi 2.4.4. (sifat 4) diperoleh

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm0}\frac{t\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm0}\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|^{2}$$

2. Dari persamaan (3.2.1.1) diperoleh

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \frac{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_{+}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+\tau_{-}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})]$$

dengan

$$\tau_{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to\pm0}\frac{\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|-\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}$$

untuk setiap $\alpha,\beta \in R$, dapat ditulis

$$g(\alpha\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y}) = \frac{\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_{+}(\alpha\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y})+\tau_{-}(\alpha\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y})] \qquad (3.2.1.4)$$

dengan

$$\tau_{\pm}(\alpha\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y}) = \lim_{t\to\pm0}\frac{\|\alpha\boldsymbol{x}+t\beta\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|-\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|}{t}$$

Maka $\tau_{\pm}(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y})$ disubstitusi ke persamaan (3.2.1.4) menjadi

$$g(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) = \frac{\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_{+}(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) + \tau_{-}(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y})]$$

$$= \frac{\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\alpha\boldsymbol{x} + t\beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| - \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right.$$

$$\left. + \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\alpha\boldsymbol{x} + t\beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| - \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan teorema 2.4.6 diperoleh

$$= \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|t\beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| - \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|t\beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan definisi 2.4.4. (sifat 4) diperoleh

$$= \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{t\|\beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|[\lim_{t\to\pm 0}\|\beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|]$$

$$= \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$$

$$= \alpha\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\beta\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$$

$$= \alpha\beta\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$$

$$g(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

3. Dari persamaan (3.2.1.1) diperoleh

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_{+}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \tau_{-}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})] \qquad (3.2.1.5)$$

dengan

$$\tau_{\pm}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}$$

Maka $\tau_{\pm}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ disubstitusi ke persamaan (3.2.1.5) menjadi

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_{+}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + \tau_{-}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})]$$

$$= \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right.$$

$$\left. + \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}\left[2\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan teorema 2.4.6 diperoleh

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|t\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{t(\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|)}{t}\right]$$

Berdasarkan definisi 2.4.4. (sifat 4) diperoleh

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|]$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|^2 + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

4. Dari persamaan (3.2.1.1) diperoleh persamaan (3.2.1.2), yaitu

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|$$

untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$.

Berdasarkan sifat mutlak, maka dapat ditulis

Jika $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| \geq 0$, maka $|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|$ jika dan hanya jika

$$-\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| \leq |g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|$$

sehingga diperoleh

$$|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|$$

Teorema 3.2.3.

Ortogonalitas-g memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. Nondegenerasi, yaitu jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{x}$ maka $\boldsymbol{x} = 0$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$.
2. Homogenitas, yaitu jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$ maka $\alpha\boldsymbol{x} \perp_g \beta\boldsymbol{y}$, untuk setiap α, β skalar dan $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$.
3. Aditif Kanan, yaitu jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{r}$ maka $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}+\boldsymbol{r}$, untuk semua $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{r} \in X$.

Bukti:

1. Dari persamaan (3.2.1.3) diperoleh hasil

$$g(x,\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|^2$$

Asumsikan bahwa $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$. Berdasarkan definisi 3.2.1, dapat dikatakan bahwa $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$. Oleh karena itu $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|^2 = 0$.

Berdasarkan definisi 2.3.4 diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$$

$$\|\boldsymbol{z}\|^2 = \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle.$$

Berdasarkan definisi 2.3.1 (sifat 2) dikatakan bahwa $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$ dan $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{z} = 0$. Dari definisi 2.3.5 diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|^2 \quad = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle \end{vmatrix}$$

Maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|^2 \quad = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$ dan $\boldsymbol{z} = 0$. Sehingga terbukti bahwa jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{x}$ maka $\boldsymbol{x} = 0$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$.

2. Dari persamaan 3.2.1.4 diperoleh hasil

$$g(\alpha \boldsymbol{x}, \beta \boldsymbol{y}) = \alpha \beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Berdasarkan definisi 3.2.1, jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$ maka $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Sehingga

$g(\alpha \boldsymbol{x}, \beta \boldsymbol{y}) = \alpha \beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

$= \alpha \beta . 0$

$= 0$

Karena $g(\alpha \boldsymbol{x}, \beta \boldsymbol{y}) = 0$, maka $\alpha \boldsymbol{x} \perp_g \beta \boldsymbol{y}$. Sehingga terbukti bahwa jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$ maka $\alpha \boldsymbol{x} \perp_g \beta \boldsymbol{y}$, untuk setiap α, β skalar dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

3. Dari persamaan 3.2.1.5 diperoleh hasil

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \qquad = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|^2 + g(x, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

sehingga

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}) = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}).$$

Dari persamaan 3.2.1.2 diperoleh

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$$

maka dapat ditulis

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

Berdasarkan definisi 3.2.1 dikatakan bahwa jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$ maka $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ dan jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{z}$ maka $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}) &= g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\ &= g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}) = 0$, maka $\boldsymbol{x} \perp_g (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r})$. Terbukti bahwa jika $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{r}$ maka $\boldsymbol{x} \perp_g \boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

Contoh 3.2

Diberikan $X = R^3$ merupakan ruang bernorma-2 dan R^3 didefinisikan

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \left| det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j \\ \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_j \end{pmatrix} \right|$$

untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^3$, maka diberikan g suatu fungsional $g: X \times X \times X \to \boldsymbol{R}^3$ yang didefinisikan sebagai

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2} [\tau_+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \tau_-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]$$

dengan

$$\tau_\pm(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{t \to \pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}$$

dan g merupakan semi hasilkali dalam pada X. Untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in R^3$, ambil $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = (-1, 1, 2)$, $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) = (4, 0, 2)$ dan $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3) = (0, 1, 0)$. Tunjukkan bahwa $\boldsymbol{x}$ ortogonalitas-g pada $\boldsymbol{y}$.

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan $\boldsymbol{x}$ ortogonalitas-g pada $\boldsymbol{y}$, maka akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $\boldsymbol{x}$ ortogonalitas pada $\boldsymbol{y}$ yaitu $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$, dapat ditulis $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

Diberikan:

$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = (-1, 1, 2)$

$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) = (4, 0, 2)$

$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3) = (0, 1, 0)$

maka

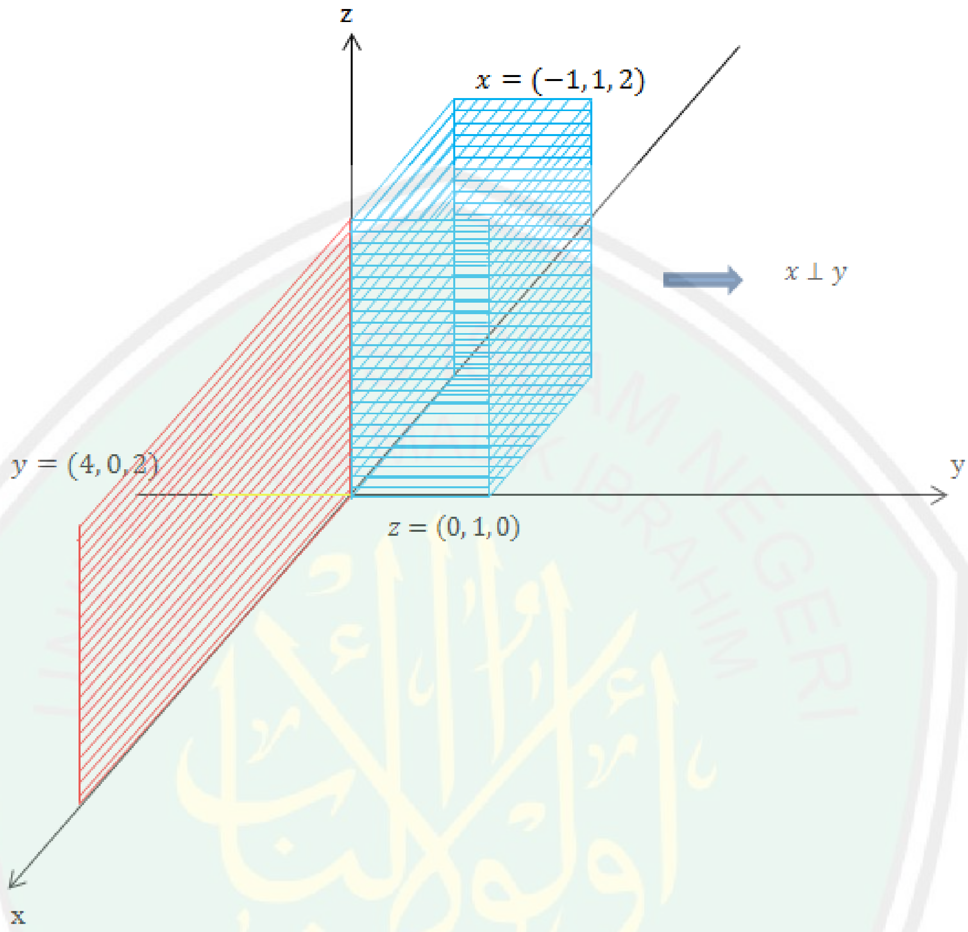
$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = (-1)(4) + (1)(0) + (2)(2)$

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -4 + 0 + 4$

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$

Karena $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$, maka $\boldsymbol{x}$ ortogonalitas pada $\boldsymbol{y}$, dapat ditulis $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.



Gambar 01. Ilustrasi $\boldsymbol{x}$ Ortogonal pada $\boldsymbol{y}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{x}$ ortogonalitas-g pada $\boldsymbol{y}$ pada ruang bernorma-2, yaitu sebagai berikut:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}[\tau_+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \tau_-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]$$

$$= \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t} + \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan teorema 2.4.6 diperoleh

$$= \frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{2}\left[2\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

Berdasarkan definisi 2.4.4. (sifat 4) diperoleh

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\| \left[\lim_{t\to\pm 0} \frac{t\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|}{t}\right]$$

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\| \left[\lim_{t\to\pm 0} \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|\right]$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|$$

untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$.

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left|det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j\\ \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_j\end{pmatrix}\right|\right]\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left|det\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_j\\ \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_j\end{pmatrix}\right|\right]$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{z}_j - \boldsymbol{x}_j\boldsymbol{z}_i|\right]\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{z}_j - \boldsymbol{y}_j\boldsymbol{z}_i|\right]$$

$$g(x,\boldsymbol{y}) = \left[\sum_{i=1}^{3}\big((\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_i) + (\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{z}_2) + (\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{z}_3 - \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{z}_i)\big)\right]\left[\sum_{i=1}^{3}\big((\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_i) + (\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{z}_i) + (\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{z}_3 - \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{z}_i)\big)\right]$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left[\sum_{i=1}^{3}\big((\boldsymbol{x}_i(0) - (-1)\boldsymbol{z}_i) + (\boldsymbol{x}_i(1) - (1)\boldsymbol{z}_i) + (\boldsymbol{x}_i(0) - (2)\boldsymbol{z}_i)\big)\right]\left[\sum_{i=1}^{3}\big((\boldsymbol{y}_i(0) - (4)\boldsymbol{z}_i) + (\boldsymbol{y}_i(1) - (0)\boldsymbol{z}_i) + (\boldsymbol{y}_i(0) - (2)\boldsymbol{z}_i)\big)\right]$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left[\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{z}_i - 2\boldsymbol{z}_i))\right]\left[\sum_{i=1}^{3}(4\boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{y}_i - 2\boldsymbol{z}_i))\right]$$

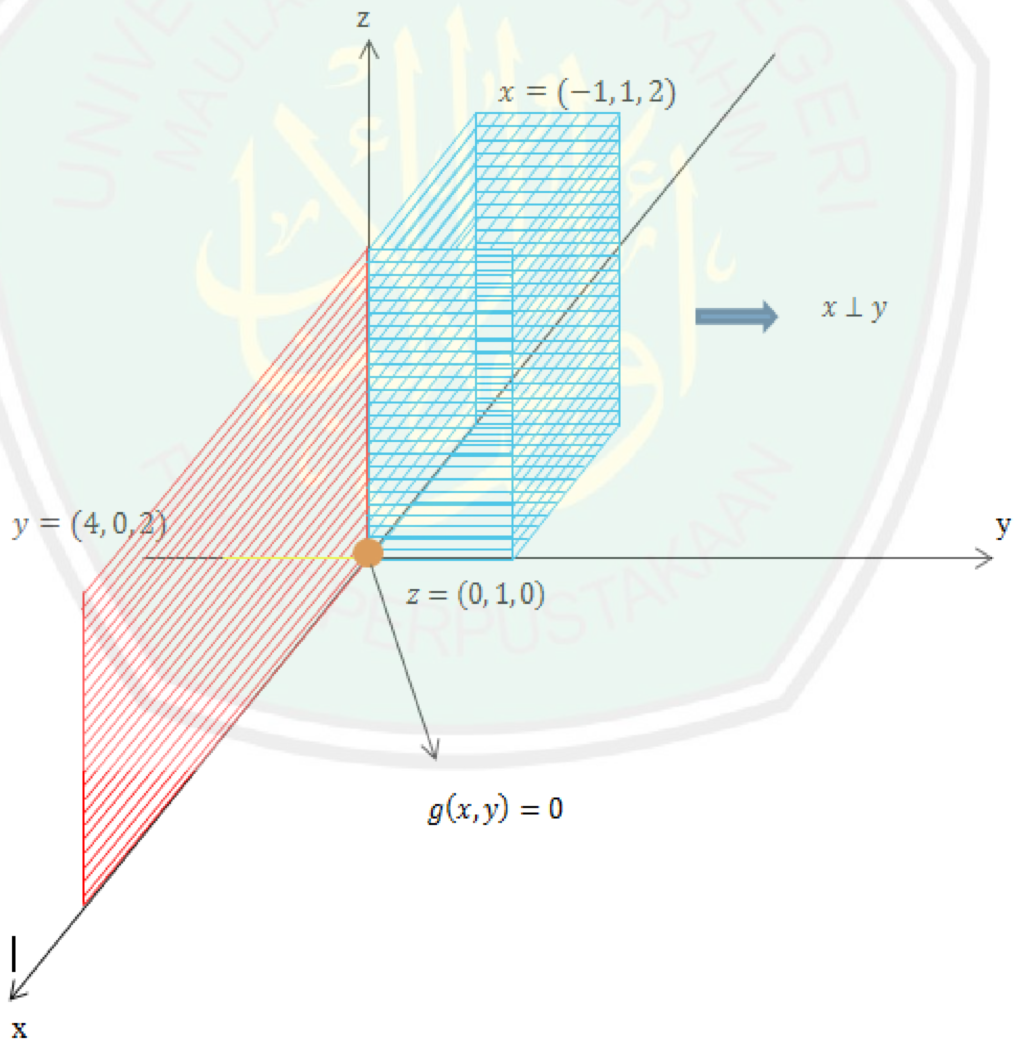
$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left[\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{x}_i - 2\boldsymbol{z}_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{3}(2\boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{y}_i)\right]$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = [((-1)-2(0)) + ((1)-2(1)) + ((2)-2(0))][(2(0)+(4)) + (2(1)+(0)) + (2(0)+(2))]$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (0)(8)$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$$

Karena $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$, maka terbukti bahwa $\boldsymbol{x}$ ortogonalitas-g pada $\boldsymbol{y}$.



Gambar 02. Ilustrasi $\boldsymbol{x}$ Ortogonalitas-g pada $\boldsymbol{y}$

1.3. Kajian Analisis dalam Al-Qur'an

Dari pembahasan di atas menunjukkan bahwa pada ruang bernorma-2 terdapat konsep ortogonalitas yang merupakan konsep pada ruang hasilkali dalam. Ruang bernorma-2 memenuhi sifat-sifat ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam. Pada dasarnya ruang hasilkali dalam bebeda dengan ruang bernorma. Meskipun keduanya merupakan ruang vektor tetapi fungsi yang terdapat di masing-masing dari ruang hasilkali dalam dan ruang bernorma berbeda sehingga keduanya berbeda. Setelah dilakukan analisis dan pembuktian konsep ortogonalitas berlaku pada ruang hasilkali dalam dan berlaku pada ruang bernorma.

Hal ini berpedoman pada Al-Qur'an yang dalam tafsirnya menjelaskan bahwa terdapat hukum Allah berlaku untuk manusia baik laki-laki maupun perempuan, yaitu surat Al-Baqarah (2) ayat 221. Laki-laki dan perempuan pada dasarnya merupakan manusia yang berasal dari mani (*nuthfah*). Namun terdapat unsur, bentuk, dan hak yang membedakan antara keduanya. Dalam penelitian ini dianalogikan manusia tersebut adalah ruang vektor yang merupakan bagian definisi ruang hasilkali dalam dan ruang bernorma. Unsur, bentuk, dan hak yang membedakan antara laki-laki dan perempuan tersebut adalah fungsi yang melengkapi ruang hasilkali dalam dan ruang bernorma. Dan ada hukum Allah berlaku untuk laki-laki dan perempuan. Begitupun konsep ortogonalitas berlaku di dalam ruang hasilkali dalam dan ruang bernorma.

Hal ini diperoleh dari analisis dan pembuktian yang tidak lain adalah hasil dari berpikir. Berpikir adalah tanda rasa syukur terhadap anugerah Allah yang diberikan pada manusia yaitu otak. Dari berpikir itulah manusia dapat mengambil pelajaran dari setiap unsur yang terdapat dalam kehidupan. Sebagaimana firman Allah dalam surat Al-Baqarah (2) Ayat 269:

يُؤْتِي ٱلْحِكْمَةَ مَن يَشَآءُ ۚ وَمَن يُؤْتَ ٱلْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِيَ خَيْرًا كَثِيرًا ۗ وَمَا
يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٢٦٩﴾

Artinya:" *Allah menganugrahkan al hikmah (kefahaman yang dalam tentang Al Qur'an dan As Sunnah) kepada siapa yang Dia kehendaki. Dan barang siapa yang dianugrahi al hikmah itu, ia benar-benar telah dianugrahi karunia yang banyak. Dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah).*"

Ayat tersebut menjelaskan bahwa orang-orang yang berakal (yang mau berpikir) yang dapat mengambil pelajaran dari setiap unsur dalam kehidupan. Termasuk berpikir tentang sebuah analogi dari ilmu matematika terhadap kehidupan yang tidak lepas dari aturan-aturan agama.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam berlaku pada ruang bernorma-2. Salah satu dari jenis definisi ortogonalitas pada ruanghasil kali dalam, yaitu ortogonalitas-g dapat dibuktikan bahwa ortogonalitas-g berlaku pada ruang bernorma-2. Ortogonalitas-g (*Milicic*) pada ruang bernorma-2 riil memenuhi sifat *nondegenerasi*, *homogenitas*, dan *aditif* kanan.

4.2. Saran

Pada skripsi ini, penulis menfokuskan pada ortogonalitas pada ruang bernorma-2, khususnya pada ortogonalitas-g dari beberapa jenis definisi ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam. Penelitian selanjutnya dapat melakukan pengkajian dan pembuktian ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam berlaku pada ruang bernorma-2 dengan definisi-definisi ortogonalitas yang lain seperti ortogonalitas-BJ, ortogonalitas-D, ortogonalitas-I, ortogonalitas-P, dan ortogonalitas-R. Dapat juga melakukan pengkajian dan pembuktian ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam berlaku pada pada ruang bernorma-n.

.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisis Delapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Alsina, C., Sikorsa, J., dan Tomas, M.S.. 2003. *Norma Derivatif and Characterizations of Inner Product Spaces*. Singapore: Word Scientific.

Bartle, R.G., dan Sherbert, D.R.. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York: John wiley & Sons, Inc.

Gunawan, H., Nursupiamin, dan Kikianty, E.. 2005. Beberapa Konsep Ortogonalitas di Ruang bernorma. *Pengembangan dari Tesis S2 Penulis Kedua dan Skripsi S1 Penulis Ketiga*. Bandung: Department Matematika Institut Teknologi Bandung.

Ghozali, S. M.. 2010. *Pengantar Analisis Fungsional*. Bandung: Pusat Perbukuan Departement Pendidikan Nasional

Maya, H.. 2012. Persamaan dan Perbedaan Lelaki dan Perempuan. (online: *http://hauzahmaya.com/2012/04/22/persamaan -dan -perbedaan -lelaki -dan -perempuan/* (diakses pada tanggal 22 April 2012).

Rafflesia, U.. 2007. *Kekonvergenan Suatu Barisan pada Ruang bernorma-2*, volume 4 Halaman 333-336.

Rynne, B.P. dan Youngson, M. A.. 2008. *Linear Functional Analysis*. New York: Springger-Verlag.

Syamsuddin, A.M.. 2012. *Integrasi Multidimensi Agama dan Sains*. Yogyakarta: IRCiSoD