

**PENYELESAIAN DAN KESTABILAN MODEL LOGISTIK PADA
PEMANENAN IKAN**

SKRIPSI

Oleh:
SILVIA ANGGRAINI
NIM. 10610086



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**PENYELESAIAN DAN KESTABILAN MODEL LOGISTIK PADA
PEMANENAN IKAN**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SILVIA ANGGRAINI
NIM. 10610086

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**PENYELESAIAN DAN KESTABILAN MODEL LOGISTIK PADA
PEMANENAN IKAN**

SKRIPSI

Oleh:
SILVIA ANGGRAINI
NIM. 10610086

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 04 September 2014

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN DAN KESTABILAN MODEL LOGISTIK PADA
PEMANENAN IKAN**

SKRIPSI

Oleh:
SILVIA ANGGRAINI
NIM. 10610086

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 12 September 2014

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004 _____

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004 _____

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001 _____

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002 _____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Silvia Anggraini

NIM : 10610086

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penyelesaian dan Kestabilan Model Logistik Pada Pemanenan Ikan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 September 2014

Yang membuat Pernyataan,

Silvia Anggraini

NIM. 10610086

MOTO

من خرج في طلب العلم فهو في سبيل الله

Barang siapa keluar untuk mencari ilmu maka dia berada di jalan Allah

(HR. Turmudzi)



PERSEMBAHAN

**Dengan segenap rasa cinta kasih penulis, karya kecil ini dipersembahkan
untuk orang-orang yang penulis sayangi dan cintai
kepada ayahanda tercinta bapak Ahmad Aini & ibunda tercinta ibu Nur
Saidah yang selalu mendukung dan mendo'akan penulis dalam
menyelesaikan penulisan skripsi ini.**



KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kepada Allah Swt, berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan lancar. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada nabi Muhammad Saw, berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha, dan menjadi lebih baik.

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini, penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak tugas akhir ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay M.Si, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Abdul Aziz M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.

6. Hairur Rahman M.Si sebagai dosen wali yang telah memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.
7. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan pelajaran dan didikan, terima kasih atas masukan dan arahannya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu dosen, dan karyawan Fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.
9. Kedua orang tua penulis Bapak Ahmad Aini Ibu Nur Saidah yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a, dan dorongan semangat kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
10. Adik Zarfino terima kasih telah menghibur di saat susah, senang.
11. Jefri Susanto terima kasih telah memberi masukan dan arahan kepada penulis.
12. Semua teman-teman Matematika, terutama angkatan 2010 semuanya. Terimakasih atas semua pengalaman dan motivasinya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
13. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak dan semoga Allah Swt membalas kebaikan mereka semua.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, September 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Batasan Masalah.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Logistik.....	7
2.2 Kriteria Kestabilan pada Persamaan Logistik.....	12
2.3 Pemanenan dalam Perikanan.....	13
2.4 Manajemen Pemanenan dalam Perikanan.....	14
2.5 Pembentukan Model Matematika pada Pemanenan Ikan.....	16
2.6 Identifikasi Parameter Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	18
2.7 Analisis Pembentukan Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	18
2.8 Pemodelan Matematika dalam Prespektif Islam.....	21
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Besaran Parameter Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	24
3.2 Solusi Analitik dari Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	24
3.3 Analisis Kestabilan dari Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	29
3.4 Simulasi dari Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	38
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan.....	42
4.2 Saran.....	42

DAFTAR PUSTAKA43

LAMPIRAN



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Nilai Parameter	19
Tabel 3.1 Nilai Parameter	24
Tabel 3.2 Nilai Parameter Kestabilan	32
Tabel 3.3 Nilai Parameter Solusi	39



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik Pembentukan Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	19
Gambar 2.2 Grafik Pembentukan Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	20
Gambar 2.3 Grafik Pembentukan Model Logistik pada Pemanenan Ikan.....	20
Gambar 3.1 Grafik Kestabilan $f'(N_1^*)$	33
Gambar 3.2 Grafik Kestabilan $f'(N_2^*)$	34
Gambar 3.3 Grafik Solusi $N(t)$	39
Gambar 3.4 Grafik Solusi $N(t)$	40



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu model pertumbuhan populasi adalah model logistik (*logistic growth models*). Setiap makhluk hidup selalu mengalami perubahan dari waktu ke waktu, dimulai dari adanya kelahiran, perkembangan, hingga kematian. Untuk menggambarkan pertumbuhan suatu populasi, pada tahun 1838 Verhulst memperkenalkan suatu model pertumbuhan logistik. Model ini mengasumsikan bahwa pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama (Timuneno, 2008).

Pada perkembangannya, model ini kemudian mengalami banyak modifikasi misalnya dalam bidang perikanan. Lebih tepatnya pada usaha pemanenan ikan dengan menggunakan model logistik yang lebih kompleks dimana pemanenan ikan tersebut dibatasi oleh musim pemanenan.

Sumber daya alam hayati khususnya ikan mengalami pertumbuhan. Pertumbuhan tersebut dipengaruhi oleh antara lain persediaan makanan, faktor-faktor lingkungan (intensitas cahaya, suhu, habitat, musim), intensitas penangkapan. Pengaruh faktor lingkungan terutama musim pemanenan dan intensitas penangkapan sangat signifikan terhadap jumlah populasi ikan (Riyanto dan Kartono, 2006).

Bagian paling penting dalam manajemen perikanan adalah diperolehnya keuntungan maksimum yang dapat berkelanjutan. Selain itu, hal penting lainnya

adalah usaha pemanenan. Agar mencapai hasil yang diinginkan terdapat beberapa strategi pemanenan yang dapat diterapkan dalam manajemen perikanan, diantaranya pemanenan yang dilakukan secara konstan, proporsional, *threshold* proporsional, dan musiman (Lestari, 2009).

Seiring perkembangannya, model logistik dikembangkan dengan penelitian tentang model logistik pada pemanenan ikan. Menurut Idels, L.V dan Wang, M (2006), dengan melakukan modifikasi pada fungsi pemanenannya menjelaskan bahwa terdapat enam strategi usaha pemanenan yaitu pemanenan konstan, pemanenan proporsional, pemanenan *restricted* proporsional, pemanenan *threshold* proporsional, pemanenan musiman, dan pemanenan *rotational*. Berdasarkan enam macam usaha pemanenan tersebut, dalam penelitian Idels, L.V dan Wang, M dihasilkan tiga macam usaha pemanenan yang terbaik yaitu dengan menggunakan laju pemanenan proporsional, laju pemanenan *threshold* proporsional, dan laju pemanenan musiman.

Menurut Riyanto dan Kartono (2006), tentang model logistik untuk pemanenan ikan dengan laju pemanenan proporsional, didapatkan solusi analitik, nilai kestabilan, dan dihasilkan nilai dari pemanenan secara maksimum.

Pada dasarnya manusia hanya menemukan rumus-rumus atau persamaan-persamaan yang bersesuaian dengan alam sehingga terdapat model matematika, dalam penerapan pemodelan matematika terdapat beberapa model pertumbuhan. Hasil kedua penelitian tentang pemanenan dalam perikanan tersebut, dari ketiga macam usaha pemanenan yang terbaik yaitu laju pemanenan *threshold* proporsional dan laju pemanenan musiman belum dikaji. Berdasarkan uraian diatas, maka dalam penelitian ini akan diturunkan model logistik dan analisis

kestabilan dari laju pemanenan musiman. Seperti yang tertulis dalam firman Allah surat asy-Syuura: 52

وَكَذَلِكَ أَوْحَيْنَا إِلَيْكَ رُوحًا مِّنْ أَمْرِنَا مَا كُنْتَ تَدْرِي مَا الْكِتَابُ وَلَا الْإِيمَانُ وَلَكِن جَعَلْنَاهُ نُورًا نَّهْدِي بِهِ مَن نَّشَاءُ
مِّنْ عِبَادِنَا وَإِنَّكَ لَتَهْدِي إِلَى صِرَاطٍ مُّسْتَقِيمٍ ٥٢

Artinya:

“Dan demikianlah kami wahyukan kepadamu wahyu (al-Qur’an) dengan perintah kami. Sebelumnya kamu tidaklah mengetahui apakah al Kitab (al-Qur’an) dan tidak pula mengetahui apakah iman itu, tetapi kami menjadikan al-Qur’an itu cahaya, yang kami tunjuki dengan dia siapa yang kami kehendaki di antara hamba-hamba kami. Dan sesungguhnya kamu benar-benar memberi petunjuk kepada jalan yang lurus”.

Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007).

Suatu bentuk penerapan ilmu tidak terlepas dari kebenaran al-Qur’an, sebagaimana dalam (QS. al-Qamar: 49)

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ٤٩

Artinya:

“Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”

Ayat ini menjelaskan tentang segala sesuatu yang ada di bumi ini sesuai dengan kemampuan makhluk hidup. Jika dianalogikan dengan peristiwa pemanenan ikan maka setiap orang hendaknya selalu menjaga populasi ikan. Menurut penulis, sesuatu menurut ukurannya dapat dikategorikan sebagai jumlah dari populasi ikan dan pemanenan dilakukan secara maksimal. Contohnya dalam kebaikan untuk menjaga jumlah populasi ikan sebab apabila populasi ikan terjaga dengan baik maka akan tercipta suatu keseimbangan dalam lingkungannya sehingga, pemanenan didapatkan hasil yang maksimal.

Allah menciptakan semuanya saling bersesuaian dan seimbang. Tidak ada pertentangan, benturan, ketidakcocokan, kekurangan, dan kerusakan. Dijelaskan juga bahwa di muka bumi ini segala segala sesuatu yang diciptakan oleh Allah sudah seimbang dan sesuai dengan ukurannya. Apabila ada kerusakan di muka bumi ini adalah disebabkan oleh perbuatan manusia.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji model matematika khususnya model logistik pada laju pemanen ikan. Dari model pemanenan ikan yang stabil maka akan didapatkan hasil pemanenan yang maksimal. Pada penelitian ini mengangkat tema “Penyelesaian dan Kestabilan Model Logistik pada Pemanenan Ikan” .

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam skripsi ini adalah Bagaimana penyelesaian dan kestabilan model logistik pada pemanenan ikan dan simulasinya?.

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan dari pembahasan skripsi ini adalah Untuk menyelesaikan model logistik pada pemanenan ikan dan simulasinya.

1.4 Batasan Masalah

Pembahasan tentang permasalahan ikan begitu luas. Sehingga, agar tidak melampaui dari tujuan penelitian penulis membatasi permasalahan yang ada pada skripsi ini. Penangkapan ikan yang dimaksud dalam penelitian ini adalah di perairan umum dan model yang dibahas oleh peneliti yang mengacu pada jurnal Idels, L.V dan Wang, M (2006) dengan model logistik

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1-\lambda q\beta} N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta} N(t)$$

dengan

$$\lambda(t) = 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t - n - t_{start})}{H}\right) \text{ dengan } n = 1, H = 0,25, t_{start} = 0,25.$$

1.5 Manfaat Penelitian

Pada penelitian ini penulis membahas tentang penyelesaian dan kestabilan model logistik pada pemanenan ikan beserta simulasinya. Sehingga, dapat memberikan manfaat bagi pembaca dalam hal penyelesaian dan analisis kestabilan pada strategi usaha pemanenan ikan.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka.

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti sebagai berikut:

1. Menganalisis pembentukan model logistik pada pemanenan ikan
2. Mencari besaran parameter model logistik pada pemanenan ikan
3. Mencari solusi analitik dari model logistik pada perikanan dengan batas

$$\lambda(t) = 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t - n - t_{start})}{H}\right) \text{ dengan } n = 1, H = 0,25, t_{start} = 0,25.$$

4. Menganalisis kestabilan dari model logistik pada pemanenan ikan
5. Membuat simulasi persamaan logistik pada perikanan secara program
6. Membuat kesimpulan dan saran

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pembaca dalam memahami hasil penelitian ini, maka dalam penyajiannya ditulis berdasarkan sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penelitian.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri dari konsep-konsep yang mendukung dalam penelitian ini. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang persamaan logistik, kriteria kestabilan pada persamaan logistik, pemanenan dalam perikanan, manajemen perikanan, pembentukan model matematika pada pemanenan ikan, identifikasi parameter model logistik pada pemanenan ikan, analisis pembentukan model logistik pada pemanenan ikan, dan matematika dalam prespektif Islam.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang besaran parameter model logistik pada pemanenan ikan, solusi analitik dari model logistik pada pemanenan ikan, analisa kestabilan dari model logistik pada pemanenan ikan, dan simulasi dari model logistik pada pemanenan ikan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini terdapat kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Logistik

Pembentukan model oleh Malthus dengan memberikan notasi waktu independen populasi sebagai $N(t)$. Menggunakan asumsi model yaitu konstanta laju kelahiran perkapita adalah a , dan konstanta laju kematian per kapita adalah b , dalam hal ini pengaruh perpindahan penduduk baik imigrasi maupun emigrasi diabaikan. Sehingga model persamaan diferensial yang dapat dibentuk oleh populasi N adalah

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN \quad (2.1.1)$$

untuk mencari solusi analitik dari persamaan (2.1.1) dilakukan pengintegralan dari persamaan (2.1.1) sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$\int \frac{dN}{aN - bN} = \int dt$$

$$\int \frac{dN}{N(a-b)} = \int dt$$

dengan memindahkan konstanta $\frac{1}{a-b}$ didepan integral maka dapat ditulis

$$\frac{1}{a-b} \int \frac{dN}{N} = \int dt$$

setelah itu, dengan hasil dari $\int \frac{dN}{N} = \ln N$ maka ditulis

$$\frac{1}{a-b} \ln N = t + C$$

$$\frac{1}{a-b} \ln N - t = C$$

dengan memisalkan $N_0 = N$ dan $t_0 = t$ maka diperoleh

$$\frac{1}{a-b} \ln N_0 - t_0 = C$$

langkah selanjutnya yaitu mensubstitusikan $\frac{1}{a-b} \ln N_0 - t_0 = C$ kedalam persamaan

$$\frac{1}{a-b} \ln N = t + C \text{ sehingga hasilnya}$$

$$\frac{1}{a-b} \ln N = t + \frac{1}{a-b} \ln N_0 - t_0$$

$$\frac{1}{a-b} \ln N - \frac{1}{a-b} \ln N_0 = t - t_0$$

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{N}{N_0} = t - t_0$$

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{N}{N_0} = e^{t-t_0}$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{(t-t_0)(a-b)}$$

sehingga menghasilkan solusi analitik sebagai berikut

$$N(t) = N_0 e^{(a-b)(t-t_0)} \quad (2.1.2)$$

Dimana N_0 adalah populasi awal pada waktu awal t_0 . Dari hasil integral tersebut, Malthus memberikan gambaran bahwa jika laju kelahiran melebihi laju kematian, maka populasi akan tumbuh secara eksponensial tanpa batas, akan tetapi jika laju kematian melebihi laju kelahiran maka spesies akan punah atau lenyap.

Pertumbuhan secara eksponensial sangat membutuhkan nilai $a > b$, tetapi pada beberapa prinsip populasi biologi yang lain memberikan beberapa persyaratan lain. P. F. Verhulst pada 1838 merupakan orang pertama yang

mengemukakan mengenai beberapa batasan dalam model pertumbuhan sebelumnya, dari pada harus mengabaikannya karena dapat menyebabkan adanya ambiguitas *katatostropik* yang ada pada model Malthus. Persamaan yang diusulkan oleh Verhulst, dinamakan persamaan logistik, yang sampai dengan saat ini persamaan tersebut masih dianggap lebih mendekati realita lapangan. Persamaan ini berdasarkan kehadiran spesies pada lingkungan akan memiliki populasi maksimum. Hal ini sama dengan yang dikemukakan oleh Malthus, akan tetapi Verhulst menghubungkan konsep ini pada persamaan populasi. Jika pertumbuhan maksimum populasi K , maka Verhulst berpendapat bahwa laju pertumbuhan per kapita bersih (laju kelahiran dikurangi laju kematian) harus menurun sepanjang N mendekati K , dan akan menjadi negatif ketika N melebihi K . Fungsi yang paling mudah untuk menggambarkan persamaan persamaan tersebut adalah $r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, dimana r merupakan konstanta positif. Sehingga menggunakan asumsi tersebut maka untuk laju pertumbuhan bersih (net) per kapita, didapatkan persamaan logistik sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.1.3)$$

ketika $N < K$, maka persamaan tersebut akan mendekati persamaan Malthus dengan $r = a - b$. Penyelesaian persamaan logistik menjadi tumbuh secara eksponensial jika dimulai dari nilai yang sangat jauh dari nilai maksimum. Jika N mendekati K , maka $\frac{dN}{dt}$ akan mendekati nol, dan tingkat populasi secara asimtotik mendekati nilai K . Dengan menggunakan argumen yang sama dapat diterapkan jika populasi terjadi mulai diatas K . Hal tersebut akan menurun lagi

dan mendekati K , pada waktu diatas. Pernyataan ini dapat diverifikasi dengan pemisahan variabel

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-r(t-t_0)}} \quad (2.1.4)$$

Dimana N_0 merupakan populasi pada waktu awal t_0 , dan mendapatkan $N_0 < K$, sehingga $Ke^{-r(t-t_0)}$ merupakan penyelesaian yang mendekati persamaan Malthus. Pada model logistik memiliki dua titik keseimbangan sebagai solusi, yaitu $N = 0$ dan $N = K$. Titik keseimbangan tersebut dapat ditemukan, untuk penyelesaian yang pertama adalah tidak stabil sedangkan penyelesaian kedua stabil. Selain itu, bisa mendapatkannya dengan menggunakan analisis kestabilan. Menggunakan sifat turunan didapatkan turunan pertama dari persamaan (2.1.3) sebagai berikut

$$F'(N) = r \left(1 - 2 \frac{N}{K} \right)$$

Stabilitas ditentukan oleh tanda pada nilai hasil F' pada titik keseimbangan. Dengan mendapatkan nilai $F'(0) = r > 0$ dan $F'(K) = -r < 0$, sehingga nilai kestabilan untuk $N = 0$ adalah tidak stabil dan nilai kestabilan untuk $N = K$ adalah stabil, sebagaimana yang diharapkan (Iswanto, 2012:117-119).

Dalam penyelesaian persamaan logistik dari persamaan (2.1.5) cara untuk menyelesaikannya adalah sebagai berikut:

dimana persamaan logistik adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(a - bN) \quad (2.1.5)$$

dapat ditulis menjadi

$$\frac{dN(t)}{N(t)(a - bN)} = dt$$

Mengintegrasikan kedua ruas diperoleh:

$$\frac{1}{a} \ln N(t) - \frac{1}{a} \ln a - bN(t) = t + c,$$

dimana

$$\frac{1}{N(t)(a - bN(t))} = \frac{\frac{1}{a}}{N(t)} + \frac{\frac{b}{a}}{a - bN(t)}$$

dengan nilai awal, $N(0) = N_0$ maka menghasilkan

$$\frac{1}{a} \ln N(t) - \frac{1}{a} \ln a - bN(t) = t + \frac{1}{a} \ln N_0 - \frac{1}{a} \ln a - bN_0$$

atau

$$\frac{1}{a} \ln \frac{N(t)}{N_0} + \frac{1}{a} \ln \frac{a - bN_0}{a - bN(t)} = t$$

maka diperoleh

$$\frac{N(t)}{N_0} \left(\frac{a - bN_0}{a - bN(t)} \right) = e^{at}$$

$$\frac{N(t)a - bN(t)N_0}{N_0a - bN(t)N_0} = e^{at}$$

dengan berlakunya persamaan segitiga maka diperoleh

$$N(t)a - bN(t)N_0 = e^{at}N_0a - e^{at}bN(t)N_0$$

$$N(t)a - bN(t)N_0 + e^{at}bN(t)N_0 = e^{at}N_0a$$

$$N(t)(a - bN_0 + e^{at}bN_0) = e^{at}N_0a$$

$$N(t) = \frac{e^{at}N_0a}{(a - bN_0 + e^{at}bN_0)}$$

dimana

$$N(t) = N = \frac{aN_0 e^{at}}{a - bN_0 + bN_0 e^{at}}$$

atau

$$N(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a - bN_0}{bN_0}\right) e^{-at}}$$

(Usman, 2009:15-16)

2.2 Kriteria Kestabilan pada Persamaan Logistik

Pada persamaan logistik cara untuk mengetahui tipe kestabilan dari titik tetap dapat menggunakan turunan dari fungsi diferensialnya. Adapun teoremanya sebagai berikut (Robinson, 2012:136-137):

Teorema:

Misalkan $\frac{dx}{dt} = f(x)$ dengan x^* merupakan titik tetap maka:

- Jika $f'(x^*) < 0$, maka x^* adalah stabil
- Jika $f'(x^*) > 0$, maka x^* adalah tidak stabil
- Jika $f'(x^*) = 0$, maka x^* adalah tidak dapat ditentukan stabil atau tidak stabil

Bukti:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \dots$$

$$f(x) = 0 + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \dots$$

$$f(x) = f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \dots$$

jika x cukup dekat dengan x^* maka nilai $(x - x^*)$ cukup kecil, sehingga $(x - x^*)^2 \dots (x - x^*)^n$ dapat diabaikan sehingga menghasilkan

$$f(x) = f'(x^*)(x - x^*)$$

dengan memisalkan $u = (x - x^*)$ maka

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt} \quad (2.2.1)$$

dikarenakan x^* adalah konstanta maka,

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad (2.2.2)$$

sehingga, dari $\frac{dx}{dt} = f(x)$ maka apabila disubstitusikan kedalam persamaan (2.2.1)

diperoleh sistem

$$\frac{du}{dt} = f'(x^*)u \quad (2.2.3)$$

Jika $x = x^*$ maka $u = u^*$

sehingga terdapat $u' = au$ dimana $a = f'(x^*)$ sehingga solusi analitiknya adalah $u = Ce^{at}$ maka dari itu jika $a < 0$ dikatakan stabil dan jika $a > 0$ dikatakan tidak stabil.

2.3 Pemanenan dalam Perikanan

Pemanenan dilakukan pada setiap akhir siklus budidaya. Pada budidaya ikan ada dua siklus produksi yaitu pembenihan dan pembesaran. Pada usaha pembenihan ikan maka yang akan dipanen adalah benih ikan. Sedangkan pada usaha pembesaran ikan yang akan dipanen adalah ikan ukuran konsumsi. Prinsip pemanenan benih ikan dan ikan ukuran konsumsi pada umumnya adalah sama. Pada pemanenan benih ikan harus dilakukan dengan hati-hati. Selain itu waktu

dan cuaca pada saat panen perlu diperhatikan. Banyak petani benih yang gagal karena kurang hati-hati pada saat panen (Gusrina, 2008).

2.4 Manajemen Pemanenan dalam Perikanan

Menurut Idels, L.V dan Wang, M (2006) manajemen pemanenan dalam perikanan terdapat enam macam strategi pemanenan, sebagai berikut:

1. Pemanenan konstan

Pada pemanenan konstan jumlah ikan tidak mengalami kenaikan dan tidak mengalami penurunan disetiap tahunnya. Pada pemanenan ini diasumsikan pembudidaya ikan mendapatkan hasil yang maksimal. Sehingga model yang didapatkan sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[1 - \frac{N}{K} \right] - qE$$

2. Pemanenan proporsional

Pada pemanenan proporsional diasumsikan adanya pengaruh dari laju kelahiran yang dilambangkan dengan β dan laju kematian yang dilambangkan dengan α beserta λ yang merupakan laju pemanenan yang berubah secara konstan disetiap tahunnya. Sehingga model dari pemanenan konstan menjadi

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[1 - \frac{N}{K} \right] - \lambda q N \left(\alpha - \beta \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[1 - \frac{N}{K} \right] - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N$$

dimana $\lambda q \beta \neq 1$

3. Pemanenan *restricted* proporsional

Pada pemanenan *restricted* proporsional merupakan limit dari model pemanenan proporsional. Sehingga model yang didapatkan adalah

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} rN \left[1 - \frac{N}{K} \right] - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N & \text{jika } Y(t) \leq Y_{limit} \\ rN \left[1 - \frac{N}{K} \right] - Y_{limit} & \text{jika } Y(t) > Y_{limit} \end{cases}$$

dimana $Y_{limit} \geq 0$. Jika hanya jika $0 \leq Y_{limit} \leq \frac{rK}{4}$ dan ketika $Y(t) \leq Y_{limit}$, maka hasil dari pemanenan ikan tersebut hasilnya akan sama dengan pemanenan proporsional. Ketika $Y(t) > Y_{limit}$ maka akan ditemukan dua titik keseimbangan.

4. Pemanenan *threshol*d proporsional

Pada pemanenan *threshol*d proporsional menjelaskan tentang limit dari proporsi pemanenan ikan dengan $N_{thre} > 0$ sehingga didapatkan model sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN \left[1 - \frac{N}{K} \right] - \lambda q \alpha (N - N_{thre})}{1 - \lambda q \beta \left(1 - \frac{N_{thre}}{N} \right)}$$

dimana $N_{thre} \neq N \left(1 - \frac{1}{\lambda \beta q} \right)$

5. Pemanenan musiman

Pada pemanenan musiman dengan memodifikasi $\lambda(t)$ dari model pemanenan proporsional maka didapatkan model sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[1 - \frac{N}{K} \right] - \lambda(t) q N \left(\alpha - \beta \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)$$

dengan $\lambda(t) = 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t - n - t_{start})}{H}\right)$ dan dengan $\lambda(t)$ merupakan fungsi

periodik laju proporsional pemanenan ikan pada waktu t , t_{start} merupakan waktu awal pemanenan, H merupakan laju pemanenan pada musim panas, dan n merupakan indeks laju proporsional pemanenan ikan.

6. Pemanenan *rotational*

Pada strategi ini diasumsikan tidak ada ikan yang imigrasi atau migrasi dengan menganggap jumlah area dari rotasi sistem dinamik saja, dan sistem tersebut akan berjalan hampir sama dengan periodik *harvesting*. Analisis numeriknya akan sama dengan periodik *harvesting*, perbedaannya hanya ada pada periode terakhir dan populasi ikan di waktu yang akan datang akan pulih kembali dari pemanenan musiman.

2.5 Pembentukan Model Matematika pada Pemanenan Ikan

Dalam jurnal Riyanto dan Kartono (2006) model pemanenan ikan menurut Schaefer adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)F(N(t),t) - Y(t) \quad (2.5.1)$$

dengan

$$F(N(t),t) = \frac{K - N(t)}{K} \quad (2.5.2)$$

dari persamaan (2.5.1) dan (2.5.2) maka diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - Y(t) \quad (2.5.3)$$

dimana model pemanenannya diasumsikan dengan laju pemanenan berubah secara konstan setiap tahunnya. Sehingga dari persamaan (2.5.3) diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - \lambda Y(t) \quad (2.5.4)$$

dimana λ merupakan laju proporsional dengan batas $0 \leq \lambda \leq 1$ konstan. Dan dengan fungsi pemanenannya didefinisikan sebagai

$$Y(t) = qN(t)E \quad (2.5.5)$$

dimana $q \geq 0$ yang merupakan nilai proposional dari populasi ikan setiap unit usaha dan $E \geq 0$ yang didefinisikan sebagai intensitas usaha manusia dalam pemanenan ikan. Dari persamaan (2.5.5) maka fungsi populasi ikan per unit usahanya adalah

$$\frac{Y(t)}{E} = qN(t) \quad (2.5.6)$$

dalam model perikanan $E = E(t)$ merupakan fungsi kontinu. Akan tetapi, ketika besar kecilnya pemanenan ikan disaat waktu ke t maka, untuk mengetahui E sebagai fungsi populasi maka dapat diasumsikan

$$E(t, N(t)) = \alpha(t) - \beta(t) \frac{1}{N(t)} \frac{dN}{dt} \quad (2.5.7)$$

dimana $\alpha \geq 0$ dan $\beta \geq 0$ adalah fungsi kontinu disaat waktu ke t . Jika persamaan (2.5.7) disubstitusikan dengan persamaan (2.5.5) maka menghasilkan

$$Y(t) = qN \left(\alpha(t) - \beta(t) \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) \quad (2.5.8)$$

selanjutnya mensubstitusi persamaan (2.5.8) dengan persamaan (2.5.4) sehingga menghasilkan

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[1 - \frac{N}{K} \right] - \lambda qN \left(\alpha(t) - \beta(t) \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) \quad (2.5.9)$$

diasumsikan $\alpha(t)$ dan $\beta(t)$ konstan, maka persamaan (2.5.9) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r}{1 - \lambda q \beta} N \left[1 - \frac{N}{K} \right] - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \alpha \lambda \beta} N \quad (2.5.10)$$

2.6 Identifikasi Parameter Model Logistik pada Pemanenan Ikan

Model logistik pada pemanenan ikan yang diambil dari jurnal Lev V. Idels (2006) dan Riyanto dan Kartono (2006), adalah sebagai berikut:

$N(t)$ = jumlah populasi ikan pada waktu t

$\lambda(t)$ = fungsi periodik laju proporsional pemanenan ikan pada waktu t

r = laju pertumbuhan populasi ikan

K = *carrying capacity* (daya dukung lingkungan) atau maksimal ikan yang dapat di tampung pada suatu lokasi tertentu

λ = laju proporsional pemanenan ikan

α = laju kematian ikan

β = laju kelahiran ikan

q = nilai proporsional dari populasi ikan setiap unit usaha

t_{start} = waktu awal pemanenan

H = laju pemanenan pada musim panas

n = indeks laju proporsional pemanenan ikan

2.7 Analisis Pembentukan Model Logistik pada Pemanenan Ikan

Pembentukan model logistik pada pemanenan ikan dengan menggunakan parameter sebagai berikut

Tabel 2.1: Nilai Parameter

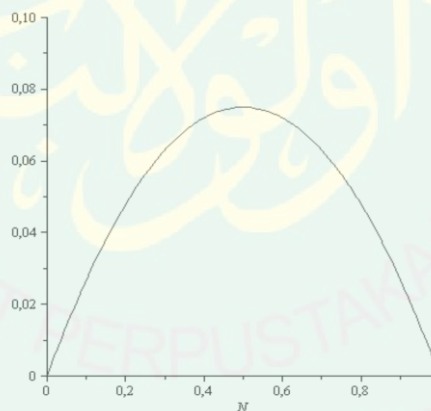
Parameter	Nilai
q	0,24
r	0,3
β	1,0
α	1,0
K	1
λ	0,5

Sumber: Lev. V (2006)

Pertumbuhan jumlah populasi ikan $N(t)$ dari waktu ke waktu dipengaruhi oleh laju tumbuh populasi ikan yang jumlah populasi ikan dihambat agar tidak terjadi peningkatan secara terus-menerus sebesar K , sehingga laju pertumbuhan populasi ikan adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] \quad (2.7.1)$$

dari persamaan (2.7.1) diperoleh gambar sebagai berikut

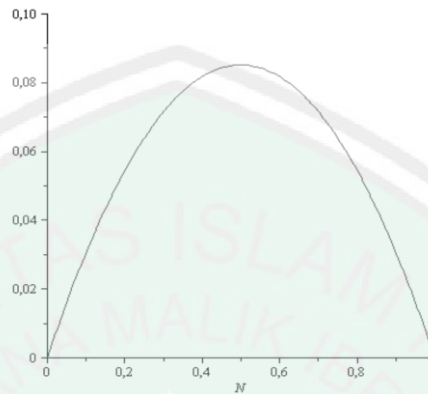


Gambar 2.1 Grafik dari persamaan (2.7.1) dengan menggunakan parameter pada tabel (2.1)

Sebab populasi ikan juga dipengaruhi oleh laju pertumbuhan perindividu dari ikan tersebut dengan setiap individu yang dipengaruhi oleh laju pertumbuhan proporsional dengan dilambangkan oleh λ dan nilai proporsional sebesar q selain itu juga dipengaruhi oleh adanya laju kelahiran dari ikan tersebut, sehingga laju pertumbuhan populasi ikan adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1-\lambda q\beta} N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] \quad (2.7.2)$$

dari persamaan (2.7.2) diperoleh gambar sebagai berikut

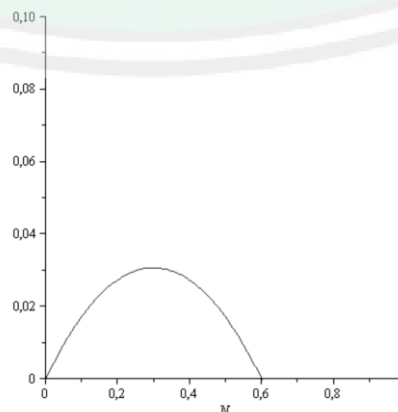


Gambar 2.2 Grafik dari persamaan (2.7.2) dengan menggunakan parameter pada tabel (2.1)

Populasi ikan akan berkurang dikarenakan adanya pengaruh dari laju pertumbuhan proporsional yang dilambangkan dengan λ dan nilai proporsional sebesar q selain itu juga adanya pengaruh laju kematian dari ikan tersebut terhadap laju pertumbuhan ikan perindividu, sehingga laju pertumbuhan dari populasi ikan adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1-\lambda q\beta} N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta} N(t) \quad (2.7.3)$$

dari persamaan (2.7.3) diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 2.3 Grafik dari persamaan (2.7.3) dengan menggunakan parameter pada tabel (2.1)

Pada penelitian ini penulis akan mengkaji mengenai pemanenan ikan berdasarkan musim dengan fungsi laju pertumbuhan proporsional yang dilambangkan dengan $\lambda(t)$ sebagai berikut

$$\lambda(t) = 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t - n - t_{start})}{H}\right)$$

2.8 Pemodelan Matematika dalam Prespektif Islam

Matematika dalam Islam ialah matematika yang menjadikan al-Qur'an dan sunnah nabi sebagai postulat. Oleh sebab itu, kita tidak perlu membuktikan suatu data yang datang dari Allah dan rasul-Nya, sekalipun pada perjalanannya, matematika dalam Islam telah membuktikan kebenaran sunnah-sunnah nabi. Data bilangan dari al-Qur'an dan nabi, dapat diolah dan dibuat model matematikanya, seperti pilar al-Qur'an, permata sholat, roda gigi sholat, dan lain sebagainya. Pada fenomena seperti itu, disebut dengan sains Qur'an atau sains spiritual Qur'an, dikarenakan al-Qur'an merupakan ruh.

Allah berfirman:

وَكَذَلِكَ أَوْحَيْنَا إِلَيْكَ رُوحًا مِّنْ أَمْرِنَا مَا كُنْتَ تَدْرِي مَا الْكِتَابُ وَلَا الْإِيمَانُ وَلَكِن جَعَلْنَاهُ نُورًا نَّهْدِي بِهِ مَن نَّشَاءُ
مِّنْ عِبَادِنَا وَإِنَّكَ لَتَهْدِي إِلَى صِرَاطٍ مُسْتَقِيمٍ ٥٢

Artinya:

“Dan demikianlah kami wahyukan kepadamu wahyu (al-Qur'an) dengan perintah kami. sebelumnya kamu tidaklah mengetahui apakah Al kitab (al-Qur'an) dan tidak pula mengetahui apakah iman itu, tetapi kami menjadikan al-Qur'an itu cahaya, yang kami tunjuki dengan dia siapa yang kami kehendaki di antara hamba-hamba kami. dan sesungguhnya kamu benar-benar memberi petunjuk kepada jalan yang lurus” (QS. asy Syuura:52).

Dijelaskan juga atas dasar sains yaitu,

﴿وَلَقَدْ جِئْنَاهُمْ بِكِتَابٍ فَصَّلْنَاهُ عَلَىٰ عِلْمٍ هُدًى وَرَحْمَةً لِّقَوْمٍ يُؤْمِنُونَ ٥٢﴾

Artinya:

“Dan sesungguhnya kami telah mendatangkan sebuah kitab (al-Qur’an) kepada mereka yang kami telah menjelaskannya atas dasar pengetahuan kami (atas dasar pengetahuan kami tentang apa yang menjadi kemashlahatan bagi hamba-hamba kami di dunia dan akhirat) menjadi petunjuk dan rahmat bagi orang-orang yang beriman” (QS. al-A’raaf: 52).

Orang awam sering mengalami kekeliruan dalam membedakan antara sains dan teori. Banyak orang berpikiran bahwa sains akan berubah sedangkan wahyu tidak akan berubah, sebenarnya yang berubah itu teorinya bukan sains. Di dalam ilmu pengetahuan, ayat berada di alam berbeda dengan teori. Jadi, sains dalam al-Qur’an merupakan sains tidak ada kaitannya dengan al-Qur’an dikarenakan al-Qur’an sebagai bukti bahwa di dada manusia terdapat ayat-ayat yang berhubungan dengan ilmu.

Allah berfirman dalam al-Qur’an:

بَلْ هُوَ آيَاتٌ بَيِّنَاتٌ فِي صُدُورِ الَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ وَمَا يَجْحَدُ بِآيَاتِنَا إِلَّا الظَّالِمُونَ ٤٩

Artinya:

“Sebenarnya, al-Qur’an itu adalah ayat-ayat yang nyata di dalam dada orang-orang yang diberi ilmu (ayat-ayat al-Qur’an itu terpelihara dalam dada dengan dihapal oleh banyak kaum muslimin turun temurun dan dipahami oleh mereka, sehingga tidak ada seorangpun yang dapat mengubahnya) dan tidak ada yang mengingkari ayat-ayat kami kecuali orang-orang yang zalim” (QS. al-Ankabuut: 49).

لَوْ أَنْزَلْنَا هَذَا الْقُرْآنَ عَلَى جَبَلٍ لَرَأَيْتَهُ خَاشِعًا مُتَصَدِّعًا مِّنْ خَشْيَةِ اللَّهِ وَتِلْكَ الْأَمْثَلُ نَضْرِبُهَا لِلنَّاسِ لَعَلَّهُمْ يَتَفَكَّرُونَ ٢١

Artinya:

Kalau sekiranya kami turunkan al-Qur’an ini kepada sebuah gunung, pasti kamu akan melihatnya tunduk terpecah belah disebabkan ketakutannya kepada Allah. dan perumpamaan-perumpamaan itu kami buat untuk manusia supaya mereka berfikir (QS. Hasyr: 21).

Hal ini menjelaskan bahwa al-Qur’an suatu formula. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan modelnya harus memikirkan cara penyelesaiannya. Salah satu di

dalamnya adalah menyelesaikan masalah pemodelan matematika dimana salah satunya adalah penyelesaian solusi eksplisit dalam persamaan logistik.



BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Besaran Parameter Model Logistik pada Pemanenan Ikan

Parameter yang digunakan dalam model logistik pada pemanenan ikan berdasarkan jurnal Idels, L.V dan Wang, M (2006) adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1: Nilai Parameter

No	Parameter	Nilai
1	αq	0,24
2	r	0,3
3	β	1,0
4	K	1
5	H	0,25
6	t_{start}	0,25
7	n	1

3.2 Solusi Analitik dari Model Logistik pada Pemanenan Ikan

Solusi analitik dari model logistik pada pemanenan ikan dapat dicari dengan cara sebagai berikut

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1-\lambda q\beta} N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta} N(t) \quad (3.2.1)$$

dimana persamaan diatas ekuivalen dengan

$$\frac{dN(t)}{\frac{r}{1-\lambda q\beta} N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta} N(t)} = dt$$

$$\frac{dN(t)}{rN(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - \lambda q\alpha N(t)} = dt$$

$$\frac{dN(t)}{1-\lambda q\beta}$$

$$\frac{dN(t)(1-\lambda q\beta)}{rN(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - \lambda q\alpha N(t)} = dt$$

$$\frac{(1-\lambda q\beta)}{rN(t)\left[1-\frac{N(t)}{K}\right]-\lambda q\alpha N(t)}dN(t) = dt$$

$$\frac{1}{rN(t)-r\frac{(N(t))^2}{K}-\lambda q\alpha N(t)}dN(t) = \frac{1}{(1-\lambda q\beta)}dt$$

dari persamaan (3.2.1) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{dN(t)}{N(t)\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right)} = \frac{1}{(1-\lambda q\beta)}dt \quad (3.2.2)$$

setelah disederhanakan, selanjutnya untuk mencari solusi analitik persamaan (3.2.2) dapat dilakukan pengintegralan sehingga dapat ditulis

$$\int \frac{1}{N(t)\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right)}dN(t) = \int \frac{1}{(1-\lambda q\beta)}dt \quad (3.2.3)$$

maka dari itu, integral dari ruas kiri dari persamaan diatas adalah

$$\int \frac{1}{N(t)\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right)} = \frac{A}{N(t)} + \frac{B}{\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right)}$$

$$\int \frac{1}{N(t)\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right)} = \frac{A\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right) + BN(t)}{N(t)\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right)}$$

$$\int \frac{N(t)\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right)}{N(t)\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right)} = A\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right) + BN(t)$$

$$1 = A\left(r-r\frac{N(t)}{K}-\lambda q\alpha\right) + BN(t)$$

$$1 = Ar + \frac{ArN(t)}{K} - A\lambda q\alpha + BN(t)$$

$$1 = A(r - \lambda q \alpha) + N(t) \left(B - \frac{Ar}{K} \right)$$

$$A = \frac{1}{r - \lambda q \alpha}$$

maka menghasilkan nilai $A = \frac{1}{r - \lambda q \alpha}$

setelah mencari nilai A maka langkah selanjutnya mencari nilai B . Untuk mencari nilai B adalah sebagai berikut

$$B - \frac{Ar}{K} = 0$$

dimana $A = \frac{1}{r - \lambda q \alpha}$ maka dapat disubstitusikan sehingga

$$B - \frac{\frac{1}{r - \lambda q \alpha} \cdot r}{K} = 0$$

$$B = \frac{r}{r - \lambda q \alpha} \times \frac{1}{K}$$

$$B = \frac{r}{r - \lambda q \alpha} \times \frac{1}{K}$$

$$B = \frac{r}{(r - \lambda q \alpha) K}$$

$$B = \frac{r}{rK - \lambda q \alpha K}$$

sehingga menghasilkan nilai

$$B = \frac{r}{rK - \lambda q \alpha K}$$

Setelah diketahui nilai A dan nilai B maka langkah selanjutnya disubstitusikan kedalam persamaan (3.2.3), dengan mengintegalkan kedua ruas maka diperoleh

$$\int \frac{A}{N(t)} dN(t) + \int \frac{B}{(r - rN(t)/K - \lambda q\alpha)} dN(t) = \int \frac{1}{(1 - \lambda q\beta)} dt$$

$$\int \frac{1}{r - \lambda q\alpha} \frac{1}{N(t)} dN(t) + \int \frac{r}{(rK - \lambda q\alpha K) (r - rN(t)/K - \lambda q\alpha)} dN(t) = \int \frac{1}{(1 - \lambda q\beta)} dt$$

$$\int \frac{1}{r - \lambda q\alpha} \times \frac{1}{N(t)} dN(t) + \int \frac{r}{rK - \lambda q\alpha K} \times \frac{1}{(r - rN(t)/K - \lambda q\alpha)} dN(t) = \int \frac{1}{(1 - \lambda q\beta)} dt$$

$$\int \frac{1}{(r - \lambda q\alpha) N(t)} dN(t) + \int \frac{r}{(rK - \lambda q\alpha K) (r - rN(t)/K - \lambda q\alpha)} dN(t) = \int \frac{1}{(1 - \lambda q\beta)} dt$$

$$\int \frac{1}{(r - \lambda q\alpha) N(t)} dN(t) + \int \frac{r}{(rK - \lambda q\alpha K) \left(\frac{rK - rN(t) - \lambda q\alpha K}{K} \right)} dN(t) = \int \frac{1}{(1 - \lambda q\beta)} dt$$

$$\int \frac{1}{(r - \lambda q\alpha) N(t)} dN(t) + \int \frac{r}{K(r - \lambda q\alpha) \cdot \frac{1}{K} (rK - \lambda q\alpha K - rN(t))} dN(t) = \int \frac{1}{(1 - \lambda q\beta)} dt$$

$$\frac{1}{(r - \lambda q\alpha)} \left(\int \frac{1}{N(t)} dN(t) + \int \frac{r}{(r - \lambda q\alpha) (rK - \lambda q\alpha K - rN(t))} dN(t) \right) = \int \frac{1}{(1 - \lambda q\beta)} dt$$

$$\int \frac{1}{N} dN(t) + r \int \frac{1}{(rK - \lambda q\alpha K - rN(t))} dN(t) = \int \frac{(r - \lambda q\alpha)}{(1 - \lambda q\beta)} dt$$

dimana,

$$\ln N(t) - \ln (rK - \lambda q\alpha K - rN(t)) = \frac{(r - \lambda q\alpha)}{(1 - \lambda q\beta)} t + C$$

dengan syarat awal $N(0) = N_0$ maka diperoleh

$$\ln N_0 - \ln (rK - \lambda q\alpha K - rN_0) = C$$

selanjutnya, mensubstitusikan $\ln N_0 - \ln (rK - \lambda q\alpha K - rN_0) = C$ ke dalam

persamaan $\ln N(t) - \ln (rK - \lambda q\alpha K - rN(t)) = \frac{(r - \lambda q\alpha)}{(1 - \lambda q\beta)} t + C$ sehingga hasilnya

$$\ln N(t) - \ln (rK - \lambda q\alpha K - rN(t)) = \frac{(r - \lambda q\alpha)}{(1 - \lambda q\beta)} t + \ln N_0 - \ln (rK - \lambda q\alpha K - rN_0)$$

$$\ln \frac{N(t)}{(rK - \lambda q \alpha K - rN(t))} = \frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t + \ln \frac{N_0}{(rK - \lambda q \alpha K - rN_0)}$$

$$\ln \frac{N(t)}{(rK - \lambda q \alpha K - rN(t))} - \ln \frac{N_0}{(rK - \lambda q \alpha K - rN_0)} = \frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t$$

$$\ln \frac{N(t)}{(rK - \lambda q \alpha K - rN(t))} \cdot \frac{(rK - \lambda q \alpha K - rN_0)}{N_0} = \frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t$$

$$\frac{N(t)(rK - \lambda q \alpha K - rN_0)}{N_0(rK - \lambda q \alpha K - rN(t))} = e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t}$$

$$\frac{N(t)rK - \lambda q \alpha KN(t) - rN_0N(t)}{N_0rK - \lambda q \alpha KN_0 - rN(t)N_0} = e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t}$$

untuk setiap t positif, sehingga

$$N(t)rK - \lambda q \alpha KN(t) - rN_0N(t) = N_0rKe^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} - \lambda q \alpha KN_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} - rN(t)N_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t}$$

$$N(t)rK - \lambda q \alpha KN(t) - rN_0N(t) + rN(t)N_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} = N_0rKe^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} - \lambda q \alpha KN_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t}$$

$$N(t) \left(rK - \lambda q \alpha K - rN_0 + rN_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} \right) = N_0rKe^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} - \lambda q \alpha KN_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t}$$

sehingga, menghasilkan solusi analitik sebagai berikut

$$N(t) = \frac{N_0rKe^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} - \lambda q \alpha KN_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t}}{rK - \lambda q \alpha K - rN_0 + rN_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t}}$$

$$N(t) = \frac{N_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} (r - \lambda q \alpha)}{e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} \left(\frac{rK - \lambda q \alpha K - rN_0}{e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t}} + rN_0 \right)}$$

$$N(t) = \frac{-N_0(-r + \lambda q \alpha)}{- \left(-rKe^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} + \lambda q \alpha Ke^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} + rN_0e^{\frac{(r - \lambda q \alpha)}{(1 - \lambda q \beta)} t} - rN_0 \right)}$$

$$N(t) = \frac{N_0(-r + \lambda q \alpha)}{\left(-rKe^{\frac{(r-\lambda q \alpha)t}{(1-\lambda q \beta)}} + \lambda q \alpha Ke^{\frac{(r-\lambda q \alpha)t}{(1-\lambda q \beta)}} + rN_0e^{\frac{(r-\lambda q \alpha)t}{(1-\lambda q \beta)}} - rN_0 \right)} \quad (3.2.4)$$

dimana dalam penelitian ini dengan memodifikasi $\lambda(t) = 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t-n-t_{start})}{H}\right)$

dengan $n = 1, H = 0.25, t_{start} = 0.25$.

3.3 Analisis Kestabilan dari Model Logistik pada Pemanenan Ikan

Laju pertumbuhan populasi ikan dengan maksimum dapat diketahui dengan mencari nilai kestabilannya, kriteria kestabilan dalam model logistik yaitu:

- Jika $f'(x^*) < 0$, maka x^* adalah stabil
 - Jika $f'(x^*) > 0$, maka x^* adalah tidak stabil
 - Jika $f'(x^*) = 0$, maka x^* adalah tidak dapat ditentukan stabil atau tidak stabil
- dalam mencari nilai kestabilan terlebih dahulu mencari titik potong dari model logistik pada pemanenan ikan. Dimana titik potong dari model logistik pemanenan ikan diperoleh dari persamaan sebagai berikut

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1-\lambda q \beta} N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] - \frac{\lambda q \alpha}{1-\lambda q \beta} N(t) \quad (3.3.1)$$

dengan memisalkan

$$\frac{r}{1-\lambda q \beta} = a$$

dan

$$\frac{\lambda q \alpha}{1-\lambda q \beta} = b$$

persamaan (3.3.1) diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t)[1 - N(t)/K] - bN(t) = 0$$

$$aN(t)[1 - N(t)/K] = bN(t)$$

$$aN(t) - \frac{a(N(t))^2}{K} = bN(t)$$

$$-\frac{a(N(t))^2}{K} = bN(t) - aN(t)$$

$$\frac{aN(t)}{K} = b - a$$

$$N(t) = -\frac{(b-a)K}{a}$$

$$N(t) = \frac{(a-b)K}{a} \quad (3.3.2)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.4.2) dengan $\frac{r}{1-\lambda q\beta} = a$ dan $\frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta} = b$

maka

$$N = \frac{\left(\frac{r}{1-\lambda q\beta} - \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta}\right)K}{\frac{r}{1-\lambda q\beta}}$$

$$N = \left(\frac{r}{1-\lambda q\beta} - \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta}\right)K \cdot \frac{1-\lambda q\beta}{r}$$

$$N = \frac{rK - \lambda q\alpha K}{r}$$

$$N_2 = K - \frac{\lambda q\alpha K}{r}$$

sehingga diperoleh N_2 adalah

$$N = K \left(1 - \frac{\lambda q\alpha}{r}\right) \quad (3.3.3)$$

sehingga, titik potong dari laju pemanenan adalah

$$N_1^* = 0$$

atau

$$N_2^* = K \left(1 - \frac{\lambda q \alpha}{r} \right)$$

setelah mendapatkan titik potong dari laju pemanenan ikan, selanjutnya mencari

$f'(N)$ dimana

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1 - \lambda q \beta} N(t) \left[1 - N(t) / K \right] - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{rN(t)}{1 - \lambda q \beta} \left[\frac{K}{K} - \frac{N(t)}{K} \right] - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{rN(t)}{1 - \lambda q \beta} \left[\frac{K - N(t)}{K} \right] - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{(rN(t))K - (rN(t))N}{(1 - \lambda q \beta)K} - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{rN(t)K - r(N(t))^2}{(1 - \lambda q \beta)K} - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{rN(t)K}{(1 - \lambda q \beta)K} - \frac{r(N(t))^2}{(1 - \lambda q \beta)K} - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{rN(t)}{(1 - \lambda q \beta)} - \frac{r(N(t))^2}{(1 - \lambda q \beta)K} - \frac{\lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{rN(t) - \lambda q \alpha N(t)}{1 - \lambda q \beta} - \frac{r(N(t))^2}{(1 - \lambda q \beta)K}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r - \lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t) - \frac{r}{(1 - \lambda q \beta)K} r(N(t))^2$$

atau dapat ditulis sebagai berikut

$$f(N) = \frac{r - \lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} N(t) - \frac{r}{(1 - \lambda q \beta) K} (N(t))^2 \quad (3.3.4)$$

dari persamaan (3.3.4) sehingga didapatkan

$$f'(N) = \frac{r - \lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} - \frac{r}{(1 - \lambda q \beta) K} N(t) \quad (3.3.5)$$

dengan kriteria kestabilan dalam model logistik yaitu:

- Jika $f'(x^*) < 0$, maka x^* adalah stabil
- Jika $f'(x^*) > 0$, maka x^* adalah tidak stabil
- Jika $f'(x^*) = 0$, maka x^* adalah tidak dapat ditentukan stabil atau tidak stabil

Langkah selanjutnya yaitu dengan mensubstitusikan N_1^* kedalam persamaan

(3.3.5) dimana $N_1^* = 0$ sehingga dihasilkan

$$f'(N_1^*) = \frac{r - \lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} - \frac{r}{(1 - \lambda q \beta) K} \cdot 0$$

$$f'(N_1^*) = \frac{r - \lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} \quad (3.3.6)$$

dimana dalam penelitian ini dengan menggunakan

$\lambda(t) = 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t - n - t_{start})}{H}\right)$ dengan $n = 1, H = 0,25, t_{start} = 0,25$ dan nilai

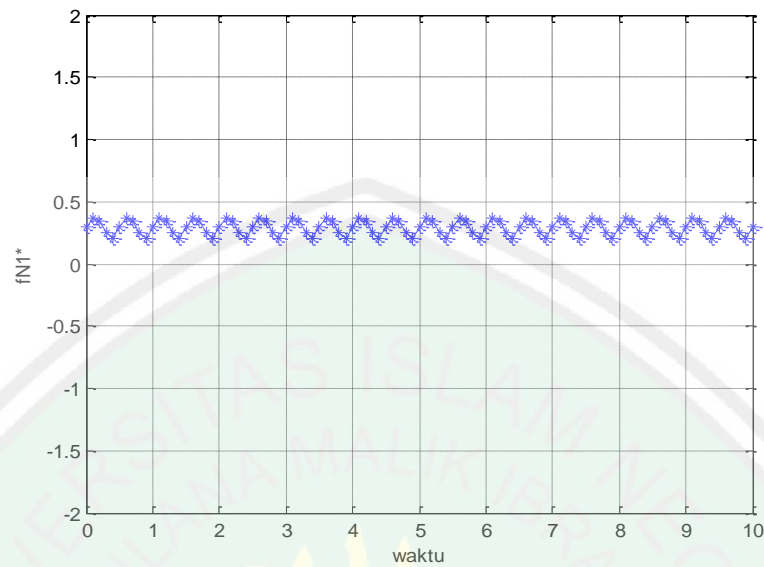
parameter sebagai berikut

Tabel 3.2: Nilai Parameter Kestabilan

Parameter	Nilai
q	0,24
r	0,3
β	1,0
α	1,0
K	1
H	0,25
t_{start}	0,25
N_0	1

Sumber: Idels, L.V dan Wang, M (2006)

sehingga di dapatkan gambar sebagai berikut



Gambar 3.1 Grafik kestabilan dengan menggunakan $f'(N_1^*)$ pada persamaan (3.3.6)

Pada gambar 3.1 berdasarkan kriteria kestabilan jumlah populasi ikan dengan menggunakan titik potong pertama yaitu $N_1^* = 0$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil dikarenakan $f'(N_1^*) > 0$.

Setelah diketahui bahwa titik potong pada N_1^* adalah titik keseimbangan yang tidak stabil. Langkah selanjutnya yaitu mensubstitusikan N_2^* kedalam persamaan

(3.3.5) dimana $N_2^* = K \left(1 - \frac{\lambda q \alpha}{r} \right)$ sehingga

$$f'(N_2^*) = \frac{r - \lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} \left(\frac{K}{2} \left(1 - \frac{\lambda q \alpha}{r} \right) \right) - \frac{r}{(1 - \lambda q \beta) K} \left(\frac{K}{2} \left(1 - \frac{\lambda q \alpha}{r} \right) \right)^2$$

$$f'(N_2^*) = \frac{r - \lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} \left(\frac{K}{2} \left(\frac{r - \lambda q \alpha}{r} \right) \right) - \frac{r}{(1 - \lambda q \beta) K} \left(\frac{K}{2} \left(\frac{r - \lambda q \alpha}{r} \right) \right)^2$$

$$f'(N_2^*) = \frac{(r - \lambda q \alpha)^2 K}{1 - \lambda q \beta 2r} - \frac{r}{(1 - \lambda q \beta) K} \frac{K^2 (r - \lambda q \alpha)^2}{4 r^2}$$

$$f'(N_2^*) = \frac{(r - \lambda q \alpha)^2 K}{1 - \lambda q \beta 2r} - \frac{r \cdot K^2 \cdot (r - \lambda q \alpha)^2}{(1 - \lambda q \beta) K \cdot 4 \cdot r^2}$$

$$f'(N_2^*) = \frac{(r - \lambda q \alpha)^2 K}{1 - \lambda q \beta 2r} - \frac{K \cdot (r - \lambda q \alpha)^2}{(1 - \lambda q \beta) \cdot 4 \cdot r}$$

$$f'(N_2^*) = \frac{2(r - \lambda q \alpha)^2 K - K \cdot (r - \lambda q \alpha)^2}{(1 - \lambda q \beta) \cdot 4 \cdot r}$$

$$f'(N_2^*) = \frac{2(r - \lambda q \alpha)^2 K}{(1 - \lambda q \beta) \cdot 4 \cdot r} - \frac{K \cdot (r - \lambda q \alpha)^2}{(1 - \lambda q \beta) \cdot 4 \cdot r}$$

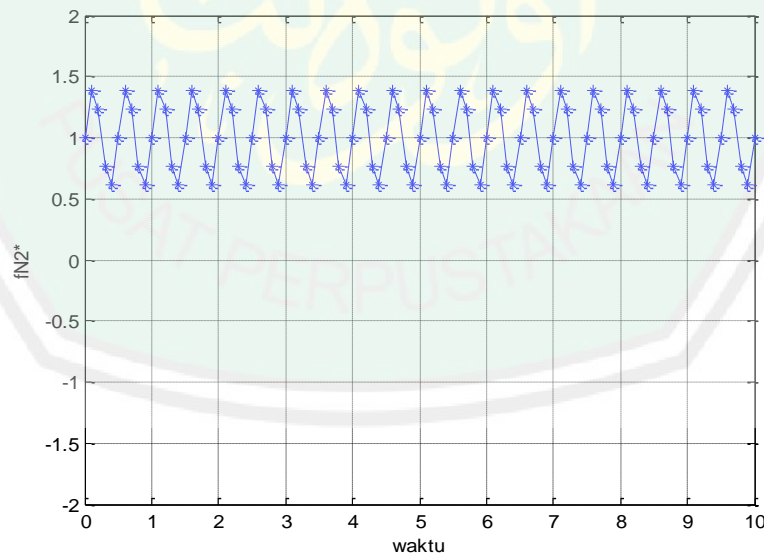
$$f'(N_2^*) = \frac{(r - \lambda q \alpha)^2 K}{(1 - \lambda q \beta) 4r} \quad (3.3.7)$$

dimana dalam penelitian ini dengan menggunakan

$$\lambda(t) = 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t - n - t_{start})}{H}\right)$$

dengan $n = 1, H = 0.25, t_{start} = 0.25$ dan nilai

parameter pada tabel (3.2) sehingga di dapatkan gambar sebagai berikut



Gambar 3.2 Grafik kestabilan dengan menggunakan $f'(N_2^*)$ pada persamaan (3.3.7)

Pada gambar 3.2 berdasarkan kriteria kestabilan jumlah populasi ikan dengan

menggunakan titik potong kedua yaitu $N_2^* = K\left(1 - \frac{\lambda q \alpha}{r}\right)$ merupakan titik

keseimbangan yang tidak stabil dikarenakan $f'(N_1^*) > 0$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa jumlah populasi ikan dengan menggunakan titik potong pertama N_1^* dan titik potong kedua N_2^* tidak stabil.

Setelah didapatkan titik potong, maka dapat diperoleh hasil pemanenan secara maksimal. Dimana pemanenan disekitar daerah kesetimbangan maka berarti nilai

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0 \text{ dengan}$$

$$Y(t) = \lambda q N(t) E \quad (3.3.8)$$

dimana $E(t, N(t)) = \alpha(t) - \beta(t) \frac{1}{N(t)} \frac{dN}{dt}$ jika disubstitusikan dalam persamaan (3.3.8) maka menghasilkan

$$Y(t) = \lambda q N \left(\alpha(t) - \beta(t) \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) \quad (3.3.9)$$

dengan nilai $\frac{dN(t)}{dt} = 0$ sehingga persamaan (3.3.10) menjadi

$$Y(t) = \lambda q N (\alpha(t) - \beta(t) \cdot 0)$$

sehingga

$$Y(t) = \lambda \alpha q N(t) \quad (3.3.10)$$

Untuk menjaga keseimbangan populasi ikan maka pemanenan dilakukan disekitar $N(t) = N_2$ maka persamaan (3.3.10) menjadi

$$Y(t) = \lambda \alpha q N_2$$

dimana $N_2 = K \left(1 - \frac{\lambda q \alpha}{r} \right)$ maka

$$Y = \lambda \alpha q K \left(1 - \frac{\lambda q \alpha}{r} \right)$$

$$Y = \lambda\alpha qK - \frac{K}{r}(\lambda\alpha q)^2 \quad (3.3.11)$$

jika $\frac{dY}{d(\lambda\alpha q)} = 0$ maka

$$0 = K - \frac{2K}{r}(\lambda q\alpha)$$

$$K = \frac{2K}{r}(\lambda q\alpha)$$

$$rK = 2K(\lambda q\alpha)$$

$$\frac{rK}{2K} = \lambda q\alpha$$

sehingga diperoleh

$$\frac{r}{2} = \lambda q\alpha \quad (3.3.12)$$

selanjutnya, persamaan (3.3.12) disubstitusikan dalam persamaan (3.3.11) maka diperoleh pemanenan secara maksimal dimana

$$Y_{max} = \lambda q\alpha K - \frac{K}{r}(\lambda q\alpha)^2$$

$$Y_{max} = \frac{r}{2}K - \frac{K}{r}\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$Y_{max} = \frac{rK}{2} - \frac{K}{r}\left(\frac{r^2}{4}\right)$$

$$Y_{max} = \frac{rK}{2} - \frac{Kr^2}{r4}$$

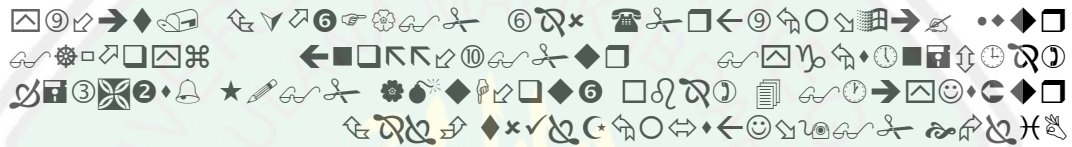
$$Y_{max} = \frac{2rK - Kr^2}{r4}$$

$$Y_{max} = \frac{2Kr - Kr}{r4}$$

$$Y_{max} = \frac{Kr}{4}$$

sehingga pemanenan ikan didapatkan secara maksimal pada saat $\frac{Kr}{4}$.

Allah Swt telah menciptakan semuanya dengan setimbang sehingga manusia dapat hidup dengan harmoni didalamnya dan apabila ada kerusakan Allah Swt pula yang memperbaikinya. Dalam surat al-Araf ayat 56 Allah berfirman

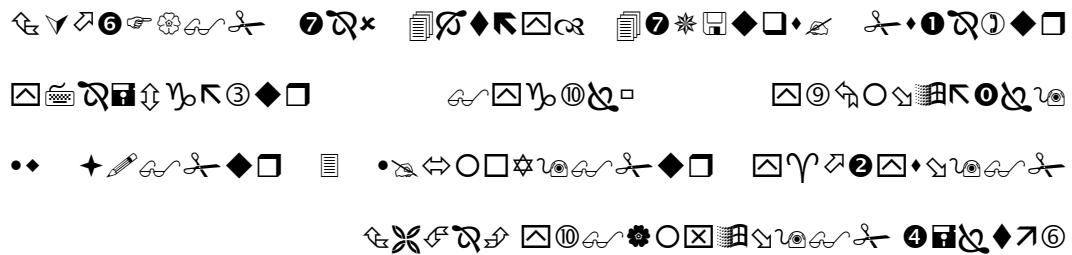


Artinya:

Dan janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi, sesudah (Allah) memperbaikinya dan berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut (tidak akan diterima) dan harapan (akan dikabulkan). Sesungguhnya rahmat Allah amat dekat kepada orang-orang yang berbuat baik (QS. al-Araf: 56).

Ayat al-Qur'an di atas menjelaskan bahwa semuanya saling berhubungan dan seimbang. Tidak ada pertentangan, benturan, kekurangan, dan kerusakan. Dijelaskan juga bahwa di bumi ini segala sesuatunya diciptakan oleh Allah Swt sudah seimbang sesuai dengan ukurannya. Dan kerusakan di bumi ini disebabkan karena perbuatan manusia. Pada ayat tersebut juga dijelaskan bahwa manusia harus mensyukuri atas semua ciptaan Allah yang ada di bumi ini yang pasti tidak akan menemukan kekurangan sedikitpun.

Banyak hal yang dapat dilakukan untuk menjaga keseimbangan lingkungan. Salah satunya dengan cara tidak merusak lingkungan tersebut agar tetap terjaga keseimbangan bumi ini. Seperti pada firman Allah pada surat al-Baqarah ayat 205 Allah berfirman



Artinya:

Dan apabila ia berpaling (dari kamu), ia berjalan di bumi untuk mengadakan kerusakan padanya, dan merusak tanam-tanaman dan binatang ternak, dan Allah tidak menyukai kebinasaan (QS. al-Baqarah: 205).

Dari ayat tersebut dijelaskan bahwa Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan di muka bumi. Allah telah memberikan nikmat yang begitu banyak maka seharusnya manusia selalu bersyukur atas nikmat yang telah diberikan Allah.

3.4 Simulasi dari Model Logistik pada Pemanenan Ikan

Dengan menggunakan satuan waktu yang berbeda dan fungsi periodik laju pemanenan ikan yang berbeda, dapat diketahui perubahan jumlah populasi ikan pada saat waktu t . Dimana dengan menggunakan persamaan dari solusi analitik model logistik pada pemanenan ikan sebagai berikut

$$N(t) = \frac{N_0(-r + \lambda(t)q\alpha)}{\left(-rKe^{\frac{(r-\lambda(t)q\alpha)}{(1-\lambda(t)q\beta)}t} + \lambda(t)q\alpha Ke^{\frac{(r-\lambda(t)q\alpha)}{(1-\lambda(t)q\beta)}t} + rN_0e^{\frac{(r-\lambda(t)q\alpha)}{(1-\lambda(t)q\beta)}t} - rN_0 \right)} \quad (3.4.1)$$

dengan

$$\lambda(t) = 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t-n-t_{start})}{H}\right) \text{ dengan } n=1, H=0,25, t_{start}=0,25 \quad (3.4.2)$$

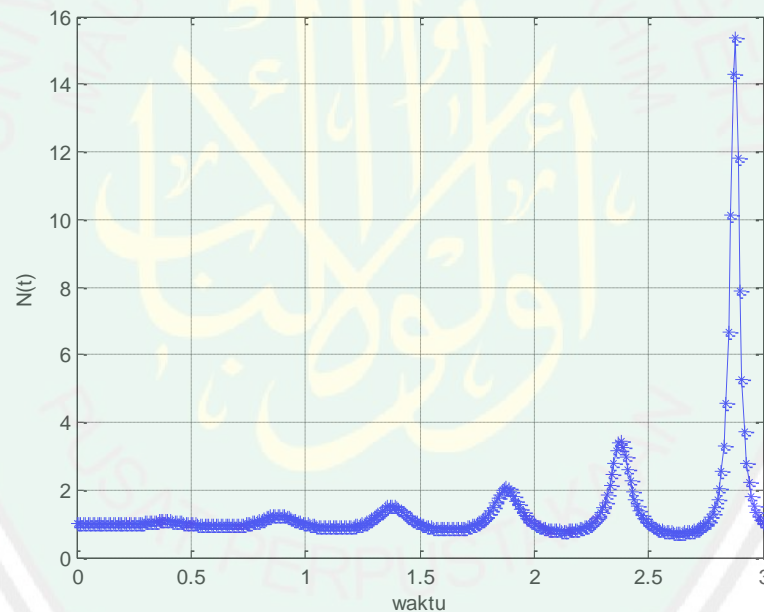
parameter dari persamaan (3.4.1) adalah sebagai berikut

Tabel 3.3: Nilai Parameter Solusi

Parameter	Nilai
q	0,24
r	0,3
β	1,0
α	1,0
K	1
H	0,25
t_{start}	0,25
N_0	1

Sumber: Idels, L.V dan Wang, M (2006)

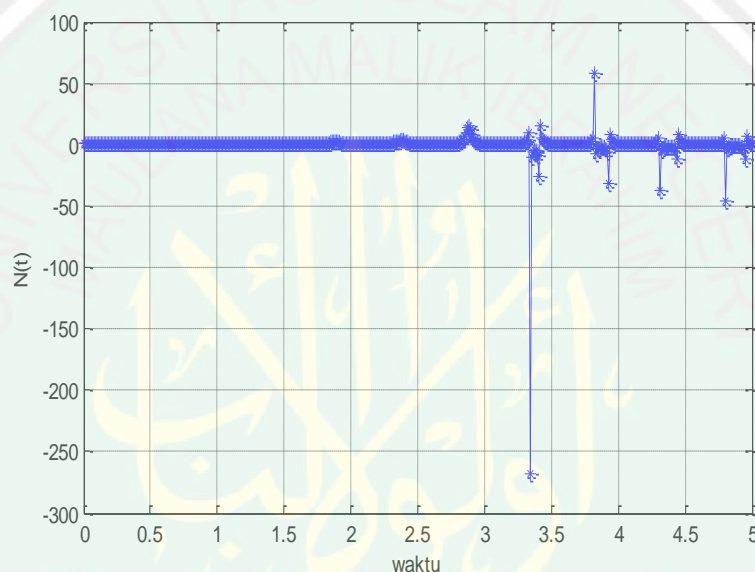
dengan mensubstitusikan $\lambda(t)$ kedalam solusi $N(t)$ maka di dapatkan gambar grafik sebagai berikut



Gambar 3.3 Grafik solusi $N(t)$ pada persamaan (3.4.1) dengan menggunakan parameter pada tabel (3.2) dan dengan menggunakan $\lambda(t)$ pada persamaan (3.4.2)

Pada gambar 3.3 jumlah populasi ikan dengan diberikan nilai awal sebesar satu satuan perproporsi pemanenan ikan mengalami kenaikan secara periodik pada setiap proporsi pemanenan ikan. Artinya, dalam setiap periode pemanenan ikan mengalami kenaikan jumlah populasi ikan yang berbeda-beda. Seperti halnya pada saat periode persatuan waktu jumlah populasi ikan mengalami kenaikan sebesar 0,2 satuan perproporsi pemanenan ikan pada saat 0,4 satuan waktu.

Setelah 0,4 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami penurunan yang disebabkan oleh fungsi periodik laju proporsional pemanenan ikan pada waktu t . Dan jumlah populasi ikan mengalami kenaikan secara drastis sebesar 15,36 satuan perproporsi pemanenan ikan pada saat 2,88 satuan waktu. Setelah itu, mengalami penurunan sebesar 11,815 satuan perproporsi pemanenan ikan pada saat 2,89 satuan waktu.



Gambar 3.4 Grafik solusi $N(t)$ pada persamaan (3.4.1) dengan menggunakan parameter pada tabel (3.2) dan dengan menggunakan $\lambda(t)$ pada persamaan (3.4.2)

Pada gambar 3.4 jumlah populasi ikan dengan diberikan nilai awal sebesar satu satuan perproporsi pemanenan ikan mengalami kenaikan secara periodik pada setiap proporsi pemanenan ikan. Artinya, dalam setiap periode pemanenan ikan mengalami kenaikan jumlah populasi ikan yang berbeda-beda. Seperti halnya pada saat periode persatuan waktu jumlah populasi ikan mengalami kenaikan sebesar 0,2 satuan perproporsi pemanenan ikan pada saat 0,4 satuan waktu. Setelah 0,4 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami penurunan yang disebabkan oleh fungsi periodik laju proporsional pemanenan ikan pada waktu t .

Jumlah populasi ikan mengalami kenaikan secara drastis sebesar 15,36 satuan perproporsi pemanenan ikan pada saat 2,88 satuan waktu. Setelah itu, mengalami penurunan sebesar 11,81 satuan perproporsi pemanenan ikan pada saat 2,89 satuan waktu. Disaat 3,33 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami penurunan sebesar 9,8 satuan perproporsi pemanenan dan pada saat 3,34 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami penurunan secara drastis sebesar -268 satuan perproporsi pemanenan ikan. Pada saat 3,42 sampai 3,82 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami kestabilan. Dan pada saat 4,31 satuan waktu, 4,44 satuan waktu, dan 4,8 satuan waktu jumlah populasi mengalami penurunan secara drastis. Dimana disaat 4,31 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami penurunan sebesar -37,4 satuan perproporsi pemanenan, disaat 4,44 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami penurunan sebesar -12 satuan perproporsi pemanenan, dan disaat 4,8 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami penurunan sebesar -46,6 satuan perproporsi pemanenan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari model logistik pada pemanenan ikan didapatkan solusi analitik yaitu

$$N(t) = \frac{N_0(-r + \lambda q \alpha)}{\left(-rK e^{\frac{(r-\lambda q \alpha)t}{(1-\lambda q \beta)}} + \lambda q \alpha K e^{\frac{(r-\lambda q \alpha)t}{(1-\lambda q \beta)}} + rN_0 e^{\frac{(r-\lambda q \alpha)t}{(1-\lambda q \beta)}} - rN_0 \right)}$$

dan dari solusi analitik

pada pemanenan ikan diperoleh titik potong $N_1^* = 0$ dan $N_2^* = K \left(1 - \frac{\lambda q \alpha}{r} \right)$ dan

$$\text{diperoleh } f'(N_1^*) = \frac{r - \lambda q \alpha}{1 - \lambda q \beta} > 0 \quad \text{dan} \quad f'(N_2^*) = \frac{(r - \lambda q \alpha)^2 K}{(1 - \lambda q \beta) 4r} > 0 \quad \text{sehingga}$$

model logistik pada pemanenan ikan tidak stabil dan pemanenan dapat dilakukan

secara maksimum pada saat $Y_{max} = \frac{Kr}{4}$.

Pada simulasi model pemanenan ikan dengan menggunakan fungsi periodik laju proporsional pemanenan ikan yang berbeda maka diperoleh jumlah populasi ikan yang berbeda-beda. Pada saat periode persatuan waktu jumlah populasi ikan mengalami kenaikan sebesar 0,2 satuan perproporsi pemanenan ikan pada saat 0,4 satuan waktu. Setelah 0,4 satuan waktu jumlah populasi ikan mengalami penurunan yang disebabkan oleh fungsi periodik laju proporsional pemanenan ikan pada waktu t .

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada metode pemanenan yang berbeda sehingga akan diperoleh solusi dan nilai kestabilan yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Gusrina. 2008. *Budidaya Ikan Jilid I*. Jakarta: Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan.
- Idels, L. V. & Mei, W.. 2006. Harvesting Fisheries Management Strategies with Modified Effort Function. *IJMC jurnal dalam Modelling Complex system*.
- Iswanto, R.L.. 2012. *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomene Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Lestari, D.. 2009. *Model Pemanenan dalam Manajemen Perikanan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Bogor: IPB.
- Pagalay, U.. 2009. *Mathematical Modelling Aplikasi pada Kedokteran, Immunologi, Biologi, Ekonomi dan Perikanan*. Malang: UIN Press.
- Riyanto, N.S & Kartono. 2006. Model Pemanenan Logistik untuk Pemanenan Ikan dengan Laju Pemanenan Proporsional. *UNDIP*.
- Robinson, R.C.. 2012. *An Introduction to Dynamical Systems Continous and Discrete*. New Jersey: Pearson.
- Timuneno, H.M.. 2008. Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda. *UNDIP*.

LAMPIRAN

Grafik kestabilan pada titik potong $f'(N_1^*)$

```
clc,clear all
format short
t=0:0.1:10;
Nt=length(t);
n0=1;
r=0.3;
a=1;
b=1;
q=0.24;
k=1;
tstart=0.25;
H=0.25;
n=1;

L=(0.5*sin(pi*(t-n-tstart)/H));

for i=1:length(t)
    Nt(i)=((r-L(i)*q*a)/(1-L(i)*q*b));
end

plot(t,Nt,'-*');
grid on
xlabel('waktu');

ylim([-2 2])
ylabel('N(t)')
```

Grafik kestabilan pada titik potong $f'(N_2^*)$

```
clc,clear all
format short
t=0:0.1:10;
Nt=length(t);
n0=1;
r=0.3;
a=1;
b=1;
q=0.24;
k=1;
tstart=0.25;
H=0.25;
n=1;

L=(0.5*sin(pi*(t-n-tstart)/H));

for i=1:length(t)
    Nt(i)=(k-(L(i)*q*a/r));
end

plot(t,Nt,'-*');
grid on
xlabel('waktu');
ylabel('fN1*');
ylim([-2 2])
```

Grafik Solusi Analitik dari Model Logistik pada Pemanenan Ikan

```
clc,clear all
format short
t=0:0.01:3;
Nt=length(t)-1;
n0=1;
r=0.3;
a=1;
b=1;
q=0.24;
k=1;
tstart=0.25;
H=0.25;
n=1;

L=(0.5*sin(pi*(t-n-tstart)/H));

e=exp(((r-L*q*a)/(1-L*q*b))*t);

Nt=(n0.*(-r+(L.*q.*a))./((-r*k.*e)+(L.*q.*a.*k.*e)+(r.*n0.*e)-
r.*n0); %solusi analitik

plot(t,Nt,'-*');
grid on
xlabel('waktu');
ylabel('fN2*')
```

LAMPIRAN

Grafik kestabilan pada titik potong $f'(N_1^*)$

```
clc,clear all
format short
t=0:0.1:10;
Nt=length(t);
n0=1;
r=0.3;
a=1;
b=1;
q=0.24;
k=1;
tstart=0.25;
H=0.25;
n=1;

L=(0.5*sin(pi*(t-n-tstart)/H));

for i=1:length(t)
    Nt(i)=(r-L(i)*q*a)/(1-L(i)*q*b);
end

plot(t,Nt,'-*');
grid on
xlabel('waktu');

ylim([-2 2])
ylabel('N(t)')
```

Grafik kestabilan pada titik potong $f'(N_2^*)$

```
clc,clear all
format short
t=0:0.1:10;
Nt=length(t);
n0=1;
r=0.3;
a=1;
b=1;
q=0.24;
k=1;
tstart=0.25;
H=0.25;
n=1;

L=(0.5*sin(pi*(t-n-tstart)/H));

for i=1:length(t)
    Nt(i)=(k-(L(i)*q*a/r));
end

plot(t,Nt,'-*');
grid on
xlabel('waktu');
ylabel('fN1*')
ylim([-2 2])
```

Grafik Solusi Analitik dari Model Logistik pada Pemanenan Ikan

```
clc,clear all
format short
t=0:0.01:3;
Nt=length(t)-1;
n0=1;
r=0.3;
a=1;
b=1;
q=0.24;
k=1;
tstart=0.25;
H=0.25;
n=1;

L=(0.5*sin(pi*(t-n-tstart)/H));

e=exp(((r-L*q*a)/(1-L*q*b))*t);

Nt=(n0.*(-r+(L.*q.*a))./((-r*k.*e)+(L.*q.*a.*k.*e)+(r.*n0.*e)-
r.*n0); %solusi analitik

plot(t,Nt,'-*');
grid on
xlabel('waktu');
ylabel('fN2*')
```