SPEKTRUM DAN ENERGI GRAF TOTAL DIPERUMUM DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

OLEH:
YULIA DWI FERDIANI
NIM. 200601110105

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SPEKTRUM DAN ENERGI GRAF TOTAL DIPERUMUM DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Yulia Dwi Ferdiani
NIM. 200601110105

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SPEKTRUM DAN ENERGI GRAF TOTAL DIPERUMUM DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Oleh
Yulia Dwi Ferdiani
NIM. 200601110105

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 26 Agustus 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SPEKTRUM DAN ENERGI GRAF TOTAL DIPERUMUM DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Oleh
Yulia Dwi Ferdiani
NIM. 200601110105

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 30 Agustus 2024

Ketua Penguji	: Hisyam Fahmi, M. Kom.	....
Anggota Penguji 1	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....
Anggota Penguji 3	: Dr. Fachrur Rozi, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Yulia Dwi Ferdiani
NIM	: 200601110105
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Spektrum dan Energi Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atar perbuatan tersebut.

Malang, 30 Agustus 2024

Yang membuat pernyataan,

Yulia Dwi Ferdiani

NIM. 200601110105

MOTO

"Pahlawan yang setia itu berkorban, bukan untuk dikenal namanya, tetapi semata-mata membela cita-cita."

— Mohammad Hatta

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:
Alm. Bapak dan ibu tercinta Siyowarto dan Robikah yang senantiasa memberikan doa, dukungan, nasihat, dan motivasi terbaik untuk kesuksesan penulis. Kakak tersayang Eva Fitriana yang selalu memberikan doa dan semangat kepada penulis. Serta sahabat-sahabat penulis yang selalu memberikan bantuan dan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas segala rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Spektrum dan Energi Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo." Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad *shallahu 'alaihi wa sallam* yang telah membawa manusia dari zaman jahiliah menuju ke zaman islamiah.

Ucapan syukur dan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah memberikan bantuan, bimbingan dan arahan kepada penulis. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan berbagai pengetahuan, nasihat, motivasi dan arahan kepada penulis.
5. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, ilmu dan arahan kepada penulis.
6. Hisyam Fahmi, M. Kom., selaku ketua penguji yang telah memberikan saran yang bermanfaat bagi penulis.
7. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku penguji I yang telah memberikan saran yang bermanfaat bagi penulis.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Orang tua dan seluruh keluarga penulis yang senantiasa mendoakan, memberikan semangat dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir.

10. Seluruh mahasiswa Matematika angkatan 2020 yang telah memberikan semangat, bantuan dan motivasi terbaik.

Penulis berharap adanya skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 30 Agustus 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Ferdiani, Yulia Dwi. 2024. **Spektrum dan Energi Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D. (II) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: spektrum, energi, graf total, ring bilangan bulat modulo

Spektrum dari suatu matriks keterhubungan merupakan matriks yang memuat nilai eigen pada baris pertama dan multiplisitas masing-masing nilai eigen pada baris kedua. Energi adalah jumlah nilai absolut dari semua nilai eigen dari matriks keterhubungan. Misalkan R adalah ring. Graf total dari R yang dilambangkan dengan $GT_H(R)$ adalah graf dengan himpunan titik-titiknya adalah semua anggota dari ring R dan setiap $x, y \in R$ yang berbeda terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika $x + y \in H$ dengan H adalah himpunan bagian dari R. Nilai eigen yang besar pada graf menghasilkan spektrum dan energi yang tinggi yang bertujuan untuk menunjukkan konektivitas tinggi, kestabilan jaringan dengan banyak pohon rentang, kemampuan sinkronisasi yang efektif, serta efisiensi dalam penyebaran informasi atau aktivitas. Penelitian ini menyajikan rumus untuk menghitung spektrum dan energi graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dimana n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$ untuk H adalah himpunan semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$. Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan dengan menggunakan beberapa buku dan artikel sebagai bahan rujukan. Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Spektrum dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$
$$Spek\big(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}$$
2. Energi dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$
$$E\left(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)\right) = 4(n-1)$$

ABSTRACT

Ferdiani, Yulia Dwi. 2024. **Spectrum and Energy of Generalized Total Graph of Ring of Integers Modulo**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D. (II) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: spectrum, energy, total graph, ring of integers modulo

The spectrum of a connected matrix is a matrix that contains the eigenvalue in the first row and the multiplicity of each eigenvalue in the second row. Energy is the sum of the absolute values of all eigenvalues of the connectedness matrix. Suppose R is a ring. The total graph of R denoted by $GT_H(R)$ is a graph whose set of nodes are all members of the ring R and each distinct $x, y \in R$ is directly connected (adjacent) if and only if $x + y \in H$ where H is a subset of R. Large eigenvalues on the graph produce high spectra and energies that aim to show high connectivity, network stability with many spanning trees, effective synchronization capabilities, and efficiency in disseminating information or activities. This research presents formulas to calculate the spectrum and energy of the generalized total graph of the integer ring modulo $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ where n is a natural number and $n \geq 3$ for H is the set of all even numbers of $\mathbb{Z}_{2n}$. The research method used is a literature study using several books and articles as reference materials. The results of this research are as follows:

1. Spectrum of $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$
$$Spek\big(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}$$
2. Energy of $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$
$$E\left(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)\right) = 4(n-1)$$

مستخلص البحث

فردياني، يوليا دوي. ٢٠٢٤. **طيف وطاقة الرسم البياني الإجمالي من حلقة الأعداد الصحيحة المودولو**. أطروحة. برنامج دراسة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) الأستاذ الدكتور ح. تورمودي، ماجستير، دكتوراه. (٢) الدكتور فخر الروزي، ماجستير.

الكلمات الرئيسية: طيف، طاقة، الرسم البياني الإجمالي، حلقة الأعداد الصحيحة المودولو

طيف مصفوفة الاتصال هو مصفوفة تحتوي على القيم الذاتية في الصف الأول وتعدد كل قيمة ذاتية في الصف الثاني. الطاقة هي مجموع القيم المطلقة لجميع القيم الذاتية من مصفوفة الاتصال. افترض أن R هو حلقة. الرسم البياني الإجمالي لـ R الذي يُرمز إليه بـ $GT_H(R)$ هو رسم بياني يحتوي على مجموعة نقاطه جميع عناصر الحلقةR ، وكل عنصرين $x, y \in R$ مختلفين يتصلان مباشرة ($adjacent$) إذا وفقط إذا كانت$x + y \in H$ ، حيث Hهو مجموعة جزئية من R. القيم الذاتية الكبيرة في الرسم البياني تؤدي إلى طيف وطاقة عاليين، بهدف إظهار الاتصال العالي، استقرار الشبكة مع العديد من الأشجار الممتدة، القدرة الفعالة على التزامن، وكذلك الكفاءة في نشر المعلومات أو الأنشطة. يقدم هذا البحث صيغة لحساب الطيف والطاقة للرسم البياني الإجمالي المعمم من حلقة الأعداد الصحيحة المودولو $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ حيث n هو عدد طبيعي و$n \geq 3$، لـ H وهي مجموعة كل الأعداد الزوجية من $\mathbb{Z}_{2n}$. المنهجية البحثية المستخدمة هي دراسة مكتبية باستخدام بعض الكتب والمقالات كمراجع. نتائج هذا البحث هي كالتالي:

١. طيف $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

$$Spek\big(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}$$

٢. طاقة $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

$$E\left(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)\right) = 4(n-1)$$

BAB I

PENDAHULUAN

1. 1 Latar Belakang

Teori graf dikenal mulai dari tahun 1736 melalui tulisan Euler yang menjelaskan tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg di Eropa. Seratus tahun lebih setelah Euler menggunakan teori graf tidak ada perkembangan yang berkaitan dengan teori graf. Kemudian, pada tahun 1824 – 1887 G.R. Kirchoff mengembangkan ilmu teori graf yaitu teori pohon (*Theory of trees*) yang di terapkan dalam permasalahan jaringan listrik. Pada tahun 1821 – 1895 A. Cayley menerapkan teori pohon sebagai penjelasan dalam permasalahan kimia pada hidrokarbon (Buhaerah dkk., 2022).

Pada perkembangan teori graf masa Kirchoff dan Cayley telah memperoleh dua hal penting dalam teori graf. Salah satu yang diperoleh adalah konjektur empat warna. Konjektur empat warna menjelaskan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat macam warna, sehingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda. Ilmuwan yang memperoleh empat warna adalah A.F Mobius sejak tahun 1790 – 1868 dalam salah satu kuliahnya di tahun 1840 (Buhaerah dkk., 2022).

Pada tahun 1871 oleh A. Demorgan membahas kembali masalah teori graf empat warna bersama para ahli matematika lainnya di kota London. Tulisan Demorgan sebagai referensi pertama yang berkaitan dengan permasalahan empat warna. Oleh karena itu, teori graf empat warna menjadi dikenal banyak ilmuwan setelah Cayley menerapkannya tahun 1879 dalam *Proceeding of the Royal Geographic Society* volume pertama (Buhaerah dkk., 2022).

Periode saat ini adalah periode yang sangat intensif dalam pengembangan teori graf baik secara murni maupun terapannya. Sejumlah besar penelitian dilakukan, ribuan artikel dan buku telah banyak yang menulis tentang teori graf. Teori graf dalam cabang ilmu matematika dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan menganalisis model atau rumus teori graf, dapat terlihat peran dan kegunaan dalam memecahkan berbagai masalah.

Dalam ilmu Al-Quran menyajikan banyak ilmu, salah satunya hitungan matematika. Pada penelitian ini menyinggung keilmuan matematika dari Al-Quran yang berkaitan dengan teori graf. Teori graf membahas hubungan dari beberapa titik. Jika suatu titik memiliki keterhubungan, maka akan membentuk sebuah garis atau sisi yang disebut graf. Graf memiliki ukuran atau bobot yang berada pada sisi graf dengan sebutan graf berbobot.

Allah SWT berfirman dalam Al-Quran pada surat Ar-Rad ayat 8 yaitu (Kemenag., 2022):

Artinya: *"Dan segala sesuatu ada ukuran di sisi-Nya."* (QS. Ar-Rad: 8)

Surah Ar-Rad ayat 8 tersebut menjelaskan bahwa Allah SWT telah menciptakan segala hal yang ada di dunia sesuai ukuran dan takaran masing-masing pada tempatnya (Ula, 2023). Sebuah graf terbentuk dari aspek geometris seperti ukuran pada sisi, tetapi juga melibatkan aspek struktural yang lebih dalam, seperti keseimbangan antara spektrum dan energi. Keseimbangan antara spektrum, seperti nilai eigen dan energi yang berkaitan dengan jumlah titik dan hubungan di antara titik sangat penting dalam memahami perilaku graf secara menyeluruh.

Keseimbangan yang baik antara spektrum dan energi akan membentuk sifat yang terstruktur, sehingga dapat diandalkan dalam berbagai aplikasi.

Graf dapat diperoleh dari struktur aljabar pada grup dan ring. Pada penelitian ini membahas graf dari ring untuk ring R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yaitu operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma dari grup abelian terhadap penjumlahan (tertutup, asosiatif, mempunyai unsur identitas, dan invers), semi grup terhadap perkalian (tertutup dan asosiatif), dan distribusi kiri dan distribusi kanan. Misalkan ring R memenuhi sifat komutatif terhadap perkalian, maka ring R dikatakan sebagai ring komutatif (Gilbert & Gilbert, 2015).

J. Goswami, K.K Rajkhowa dan H.K Saikia memperkenalkan graf total suatu modulo M berdasarkan submodulo singular $\mathbb{Z}(M)$. Graf total $T(\Gamma(M))$ suatu modulo adalah graf tak berarah. Pada graf total terdapat titik $x, y \in M$. Misalkan, terdapat dua titik yang berbeda dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in \mathbb{Z}(M)$. $\mathbb{Z}(M)$ merupakan submodulo singular M jika $\mathbb{Z}(M) = \{x \in M \mid xI = 0,$ untuk suatu I ideal esensial $R\}$ dengan R ring komutatif dan M modulo-R (Ambarsari & Lukito, 2017).

Misalkan ring komutatif adalah R dan H adalah himpunan bagian dari ring R. Graf total diperumum dari ring R dapat dinotasikan dengan $GT_H(R)$ untuk semua elemen dari ring R sebagai titik. Untuk setiap $x, y \in R$, x berbeda dengan y dihungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $x + y \in H$ (Andika & Juniati, 2014).

Sebuah graf G dengan notasi $G = (V, E)$ adalah suatu graf yang berisikan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, \dots e_k\}$. Matriks keterhubungan titik dari graf G dinotasikan dengan $A(G)$ ukuran matriks $(p \times p)$, dengan p adalah banyaknya titik dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j. Bernilai 0 pada diagonal utamanya dan jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. (Abdussakir dkk., 2009).

Matriks keterhubungan titik dari graf G dinotasikan dengan $A(G)$ disebut dengan matriks *adjacency*. Matriks *adjacency* merupakan graf terhubung yang dipresentasikan dengan menyatakan dalam garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik. Matriks *adjacency* berkaitan dengan adanya konsep nilai eigen dan vektor eigen untuk memperoleh konsep spektrum dan energi.

Spektrum merupakan sifat-sifat graf yang memiliki hubungan dengan polinomial karakteristik, nilai eigen, dan vektor eigen dari matriks yang terkait dengan graf. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari $A(G)$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor masing-masing λ_i. Sehingga, matriks berordo $2 \times n$ memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$, $i = 1, 2, \dots, n)$ pada baris kedua adalah spektrum graf G yang dinotasikan dengan $Spek(G)$. Spektrum dari graf G dapat dituliskan dengan

$$Spek(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut dengan spektrum *adjacency* (Abdussakir & Khasanah, 2018).

Spektrum graf yang mencakup nilai-nilai eigen dari matriks yang berkaitan dengan graf memiliki informasi penting mengenai sifat dan perilaku teoritis graf. Beberapa aspek teoritis yang berguna untuk memvisualsasikan konsep-konsep spektrum, seperti dengan kekoneksian graf dapat dilihat dari nilai eigen yang semakin bernilai besar memiliki arti bahwa graf tersebut sangat terhubung, graf terhubung dilihat dari nilai eigen yang bernilai nol atau satu dari matriks menunjukkan jumlah komponen terhubung dalam graf. Produk nilai eigen non-nol dari matriks memberikan jumlah pohon rentang dari graf yang berkaitan dengan kestabilan jaringan, seperti graf yang memiliki banyak pohon rentang menunjukkan banyak jalur alternatif antar titik yang menunjukkan keandalan yang lebih tinggi. Selain itu, nilai eigen yang lebih besar menunjukkan kemampuan graf untuk mensinkronisasi lebih efektif, sehingga jaringan dengan nilai eigen pada spektrum yang tinggi memungkinkan penyebaran informasi atau aktivitas yang lebih seragam dan efisien diseluruh jaringan graf.

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks $A(G)$ pada graf G. Energi dari graf adalah konsep dalam teori graf yang berasal dari spektrum graf, tepatnya berhubungan dengan nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan graf. Energi graf didefinisikan sebagai jumlah mutlak dari nilai-nilai eigen pada matriks ketetanggaan $(A(G))$. Maka, energi dari graf G dinotasikan dengan $E(G)$.

Misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor masing-masing λ_i. Maka, energi dari graf G dapat dituliskan dengan

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} m(\lambda_i)|\lambda_i|$$

Dengan λ_i adalah nilai eigen dari matriks *adjacency* $A(G)$. Jadi, energi yang diperoleh dari matriks *adjacency* disebut dengan energi *adjacency* yang dinotasikan dengan $E(A(G))$ (Setyowidi dkk., 2012).

Energi graf memiliki beberapa aplikasi teoritis, seperti halnya digunakan untuk identifikasi struktur graf dengan energi yang lebih tinggi cenderung memiliki banyak sisi dan distribusi derajat yang tidak seragam yang menunjukkan adanya kerumitan dalam koneksi graf, sehingga graf dengan energi rendah cenderung lebih sederhana dan memiliki koneksi yang lebih merata. Energi graf yang rendah cenderung memiliki kestabilan yang lebih baik, sebaliknya jika energi graf yang tinggi pada optimasi jaringan akan lebih efektif dalam penyebaran informasi melalui banyak jalur pada sisinya yang sangat banyak.

Oleh karena itu, graf sederhana dengan memisalkan graf terdiri dari 4 titik dimana setiap titik terhubung secara linier satu sama lain dalam bentuk garis. Matriks ketetanggaannya akan memiliki nilai eigen yang rendah, sehingga energi totalnya juga rendah. Graf bintang memiliki titik tengah yang terhubung ke titik lainnya, sedangkan titik lainnya tidak saling terhubung, sehingga graf tersebut akan mendapatkan satu nilai eigen yang tinggi dan beberapa yang rendah. Hal tersebut memicu diperolehnya energi graf yang lebih tinggi. Graf bintang mendefinisikan pusat yang sangat terhubung dengan distribusi derajat yang tidak seragam dan tingginya kerumitan dalam koneksi.

Dengan demikian, keterkaitan antara spektrum dan energi graf merupakan topik yang menarik dalam teori graf yang menghubungkan struktur aljabar. Nilai-nilai eigen memberikan berbagai informasi tentang karakteristik graf. Energi ini adalah ukuran yang memberikan gambaran tentang stabilitas graf dan kerumitan interaksi antar titik dalam graf. Graf dengan energi yang lebih tinggi cenderung memiliki struktur yang lebih kompleks dan mungkin lebih dinamis dalam konteks tertentu, seperti penyebaran informasi.

Beberapa penelitian mengenai spektrum graf dan energi graf yang sudah pernah dilakukan, yaitu pada tahun 2018 oleh Abdussakir dan Khasanah meneliti spektrum *signless-laplace* dan spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral (Khasanah & Abdussakir, 2018). Pada tahun 2012, Akhadiyah meneliti spektrum *adjacency*, *laplace*, *signless laplace*, dan *detour* graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral (Akhadiyah, 2018). Pada tahun 2019, Walinda meneliti spektrum *adjacency*, *laplace*, dan *signless-laplace* pada graf pembagi nol dan komplemennya dari ring komutatif dengan unsur kesatuan (Walinda, 2019). Berdasarkan uraian tersebut, belum adanya penelitian terkait spektrum dan energi yang diperoleh dari graf total diperumum hingga saat ini. Oleh karena itu, penelitian ini berfokus pada spektrum dan energi graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo.

1. 2 Rumusan Masalah

Berdasarkan dari penjelasan dari latar belakang adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana rumus dari spektrum graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo?
2. Bagaimana rumus dari energi graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo?

1. 3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui rumus dari spektrum graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo.
2. Untuk mengetahui rumus dari energi graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo.

1. 4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian diharapkan dapat bermanfaat untuk berbagai pihak, antara lain:

1. Manfaat bagi akademis yaitu sebagai wawasan pengetahuan mengenai rumus dari spektrum dan energi graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo.
2. Manfaat untuk menerapkan ke dalam bidang ilmu matematika yang dapat dijadikan tambahan ilmu pengetahuan bidang matematika untuk memecahkan permasalahan khususnya pada teori graf terkait spektrum dan energi graf dari ring.
3. Dapat dijadikan sebagai bahan kepustakaan bagi mahasiswa lain khususnya di bidang matematika.

1. 5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada graf total diperumum $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dimana n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$ untuk H adalah semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Definisi Graf

Teori graf adalah ilmu matematika dan komputer yang mempelajari tentang bentuk graf. Graf digunakan untuk mempresentasikan himpunan titik atau titik (*vertex*) yang dapat dihubungkan dengan sisi (*edge*). Graf G merupakan pasangan dari (V, E) yang terdiri dari 2 himpunan bergingga. V adalah himpunan titik (*vertex*) yang himpunan tidak kosong. Sedangkan, E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik yang himpunan kemungkinan kosong.

Untuk setiap unsur e dalam E merupakan sebuah pasangan tak berurutan dari unsur-unsur sebagai titik di V.

$$E \subseteq \left\{\{x, y\} \mid x, y \in V \; dan \; x \neq y\right\}$$

Unsur pada himpunan E adalah himpunan bagian berpasangan dua tak terurut dari V yang dapat disebut sebagai graf sederhana tak berarah. Sebagai contoh, graf $G = (V, E)$ dengan himpunan:

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$

$$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}$$

Graf dibagi menjadi dua, yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tidak sederhana (*unsimple graph*). Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki sisi yang paralel atau gelang (*loop*), sedangkan graf yang tidak sederhana adalah graf yang mengandung rusuk yang paralel atau gelang (*loop*). Graf yang memiliki sisi paralel atau ganda disebut dengan graf ganda (*multigraph*). Graf yang memiliki sisi gelang (*loop*) disebut dengan graf semu (*pseudograph*) (Munir., 2005).

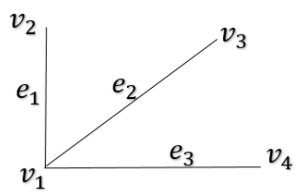
Graf sendiri memiliki jenis-jenis yang tersendiri dengan kelompokkan berdasarkan ada tidaknya sisi yang paralel atau *loop*, ada tidaknya arah pada sisinya, ada tidaknya bobot pada sisinya, atau ada tidaknya hubungan pada graf. Berikut adalah penjelasan dari setiap kelompoknya.

2.1.1 Graf Terhubung

Misalkan terdapat sisi $e = (v_1, v_2)$ merupakan sisi dari graf G. Titik v_1 dan v_2 dikatakan terhubung langsung (*adjacent*). Namun, hubungan antara v_1 dengan e dan v_2 dengan e dikatakan terkait langsung. Misalkan terdapat e_1 dan e_2 saling terkait lagsung pada satu titik yang sama, maka e_1 dan e_2 dikatakan terhubung langsung (Abdussakir dkk., 2009).

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik (*vertex*), $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi (*edge*), $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. G sebagai seperti Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G Terhubung Berorde 4

Dari Gambar 2.1 tersebut disimpulkan bahwa titik v_1 dan v_2 terhubung langsung, sedangkan v_1 dengan e_1 dan e_1 dengan v_2 terkait langsung. Namun, e_1, e_2 dan e_3 saling terkait langsung pada satu titik yaitu v_1, maka e_1, e_2 dan e_3 terhubung langsung.

2.1.2 Graf dalam Matriks

Misalkan G adalah graf dengan v adalah titik untuk himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan n adalah banyaknya titik, dan e adalah sisi untuk himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Matriks keterhubungan titik $A(G)$ berordo $n \times n$ yang mana n adalah baris dari matriks A dan n selanjutnya adalah kolom dari matriks A. Unsur baris ke-i dan kolom ke-j akan bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j dan bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j serta untuk diagonal utama. Matriks keterhubungan dapat dinotasikan $A(G) = [a_{ij}]$, dimana

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{jika } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

Graf dipresentasikan dengan menyatakan dalam garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik. Banyak baris dan kolom pada matriks keterhubungan sama dengan jumlah titik pada graf. Matriks keterhubungan suatu graf $\boldsymbol{G}$ adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat gelang (*loop*) dan tidak memuat sisi paralel (Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan terdapat graf G memiliki himpunan sisi $E = \{e_{1,} e_{2,} \dots, e_m\}$. Matriks keterhubungan sisi dari graf G dinotasikan $B(G)$ dengan ordo $m \times m$. Unsur baris ke-i dan kolom ke-j akan bernilai 1 jika sisi e_i terhubung langsung dengan sisi e_j dan bernilai 0 untuk diagonal utama. Matriks keterhubungan sisi dapat dinotasikan $B(G) = [b_{ij}]$, dimana

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } \{e_i, e_j\} \in E \\ 0, & \text{jika } \{e_i, e_j\} \notin E \end{cases}$$

Graf dipresentasikan dengan menyatakan dalam garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik. Banyak baris dan kolom pada matriks keterhubungan sama dengan jumlah sisi pada graf.

Contoh:

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan terdapat graf G yang terdiri dari himpunan titik $V = \{v_{1,} v_{2,} \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_{1,} e_{2,} \dots, e_m\}$. Matriks keterhubungan sisi dari graf G dinotasikan $I(G)$ dengan ordo $n \times m$. Unsur baris ke-i dan kolom ke-j akan bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik e_j. Matriks keterhubungan sisi dapat dinotasikan $I(G) = [c_{ij}]$, dengan

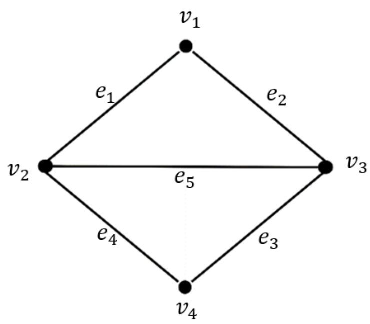
$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ terkait langsung dengan } e_j \\ 0, & \text{jika } v_i \text{ tidak terkait langsung dengan } e_j \end{cases}$$

Graf dipresentasikan dengan menyatakan dalam garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik. Banyak baris pada matriks keterhubungan sama dengan jumlah titik pada graf dan banyak kolom pada matriks keterhubungan sama dengan jumlah sisi pada graf.

Contoh:

$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks $A(G), B(G)$, dan $I(G)$, jika diaplikasikan dalam bentuk graf dapat digambarkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Graf G dengan Representasi $A(G), B(G), I(G)$

2.1.3 Graf Total

Graf total adalah graf tak berarah yang berisikan semua unsur di ring M sebagai titik. Graf total dilambangkan dengan $GT(M)$ graf dengan himpunan titiknya adalah semua unsur dari M. Misalkan x dan y adalah dua titik yang berbeda, dengan titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in M$ untuk setiap $x, y \in M$ (Ambarsari & Lukito, 2017).

2.1.4 Spektrum Graf

Spektrum dari graf yang dinotasikan sebagai $Spek(G)$. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari A dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vector masing-masing λ_i. Sehingga, matriks berordo $2 \times n$ memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua adalah spektrum graf G yang dinotasikan dengan $Spek(G)$. Spektrum dari graf G dapat dituliskan dengan

$$Spek(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut dengan spektrum *adjacency* (Schwenk, 1973).

2.1.5 Energi Graf

Energi dari graf G dinotasikan sebagai $E(G)$. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari dari matriks A pada graf G. Energi dari graf adalah jumlah dari nilai mutlak semua nilai eigen pada matriks A. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen yang berbeda dari A dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor masing-masing λ_i. Maka, energi dari graf G dapat dituliskan dengan

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} m(\lambda_i)|\lambda_i|.$$

Dengan λ_i adalah nilai eigen dari matriks *adjacency* A. Jadi, energi yang diperoleh dari matriks *adjacency* disebut dengan energi *adjacency* yang dinotasikan dengan $E(A(G))$ (Balakrishnan, 2004).

2.2 Bilangan Bulat Modulo

Bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_m$ adalah himpunan dari semua kelas residu modulo m yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Kelas residu adalah himpunan yang memuat unsur-unsur bilangan bulat yang menyisakan sisa yang sama jika dibagi dengan modulo tertentu. Himpunan bilangan bulat modulo berisikan $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$. Himpunan bilangan bulat modulo adalah sisa dari hasil bagi.

Misalkan x adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan asli. Pembagian x oleh m menyisakan sisa r, sehingga $0 \leq r \leq m$.

Sistem residu modulo jika bilangan bulat dibagi oleh 3 maka sisanya 0, 1, 2. Bilangan-bilangan bulat tersebut dijadikan atas 3 kelas yang berbeda yaitu $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Himpunan bulat tersebut telah dipisahkan menjadi 3 himpunan bilangan yaitu kelas-kelas residu moduo 3. Kelas-kelas residu modulo 3 itu adalah:

$$\bar{0} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\},$$

$$\bar{1} = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \text{dan}$$

$$\bar{2} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8\ , \dots\}.$$

Jika $p \equiv q(mod\ m)$ dengan $0 \leq r < m$ maka r disebut residu terkecil dari $a\ mod\ m$. Untuk kongruensi himpunan bilangan bulat modulo m:

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}.$$

2.2.1 Kongruensi

Definisi kongruensi jika p, q, m adalh bilangan-bilangan bulat, maka p disebut kongruen dengan q modulo m jika dan hanya jika m membagi $(p - q)$. Dinotasikan $p \equiv q(mod\ m)$ jika dan hanya jika $m \mid p - q$.

Jika m tidak membagi $(p - q)$, maka disebut p tidak kongruen dengan q modulo m. Dinotasikan $p \not\equiv q(mod\ m)$ jika $m \nmid p - q$.

Contoh:

1. $26 \equiv 1(mod\ 5)$ sebab $5 \mid 26 - 1$ atau $5 \mid 25$
2. $10 \equiv 4(mod\ 3)$ sebab $3 \mid 10 - 4$ atau $3 \mid 6$
3. $23 \equiv -1(mod\ 12)$ sebab $12 \mid 23 - (-1)$ atau $12 \mid 24$

4. $31 \not\equiv 5(mod\ 6)$ sebab $6 \nmid 31 - 5$ atau $6 \nmid 26$

Perhatikan bahwa $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$. $\bar{a} = \bar{b}$ jika dan hanya jika $m \mid a - b$ atau $a - b = mk$, utuk k bilangan bulat. Definisikan pada operasi penjumlahan bilangan bulat sebagai:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

Bukti:

Misalkan $\bar{a} = \bar{x}$ dan $\bar{b} = \bar{y}$, maka $\bar{a} + \bar{b} = \bar{x} + \bar{y}$.

Jika dan hanya jika $m \mid a - x$ dan $m \mid b - y$, sehingga $\overline{a + b} = \overline{x + y}$.

Akan ditunjukkan bahwa $m \mid (a + b) - (x + y)$.

Untuk $m \mid a - x$, $(a - x) = m \cdot s$

Untuk $m \mid b - x$, $(b - x) = m \cdot t$

$$\begin{aligned}(a + b) - (x + y) &= (a - x) + (b - x) \\ &= m \cdot s + m \cdot t \\ &= m(s + t)\end{aligned}$$

Jadi $m \mid (a + b) - (x + y)$.

Contoh:

Diperhatikan hal-hal berikut bahwa $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{m}}$ menyinggung sifat-sifat dari grup:

1. $\mathbb{Z}_m$ bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan, yaitu

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_m,$$

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \overline{(a + b)} + \bar{c} \\ &= \overline{(a + b) + c} \\ &= \overline{a + (b + c)} \\ &= \bar{a} + \overline{(b + c)} \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})\end{aligned}$$

2. Terdapat elemen identitas pada operasi penjumlahan yaitu

$$\exists\ \bar{0} \in \mathbb{Z}_m, \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m,$$

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{0 + a} = \bar{a}$$

3. Terdapat elemen invers pada operasi penjumlahan yaitu

$$\exists - \bar{a} \in \mathbb{Z}_m, \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m,$$

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \overline{a + (-a)} = \overline{(-a) + a} = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}$$

(Nugroho, 2009).

2.3 Grup dan Ring

2.3.1 Grup

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong. $(G,\cdot)$ adalah grup jika memenuhi aksioma berikut:

1. Sifat Tertutup

$$\forall a, b \in G, \exists\ a \cdot b = c$$

2. Sifat Asosiatif

$$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Mempunyai unsur identitas

$$\exists e \in G, \forall a \in G, e \cdot a = a \cdot e = a$$

4. Setiap elemen mempunyai invers

$$\exists a^{-1} \in G, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

Jika terdapat tambahan grup yang memenuhi hukum komutatif, yaitu:

5. Sifat Komutatif

$$\forall a, b \in G, a \cdot b = b \cdot a$$

Maka, $(G,\cdot)$ adalah Grup Komutatif (Grup Abelian).

(Andari, 2015).

Contoh:

Tunjukkan apakah $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

Jawab:

Pada grup bilangan bulat berlaku aksioma:

1. Tertutup, karena jika kita mengambil a dan b di $\mathbb{Z}$, maka $a + b$ juga merupakan elemen $\mathbb{Z}$.
2. Asosiatif, karena jika kita mengambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ juga merupakan elemen $\mathbb{Z}$.
3. Identitas, karena mempunyai identitas yaitu 0.
4. Invers, karena invers 0 adalah 0 dengan $0 + 0 = 0$. Invers 1 adalah -1 dengan $1 + (-1) = 0$ dan seterusnya.
5. Komutatif, karena dengan mengambil sembarang elemen $a, b \in \mathbb{Z}$, maka berlaku $a + b = b + a$ juga merupakan elemen $\mathbb{Z}$.

Jadi $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

2.3.2 Ring

Suatu ring R adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner pertama adalah operasi penjumlahan $(+)$ dan yang kedua adalah operasi perkalian $(\cdot)$, untuk setiap $a, b, c \in R$. Ring dapat dinosikan dengan $(R, +, \cdot)$ jika memenuhi aksioma sebagai berikut:

1. R tertutup pada operasi penjumlahan, yaitu $\forall a, b \in R, a + b \in R$
2. R bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan, yaitu $\forall a, b, c \in R, (a + b) + c = a + (b + c)$

3. Terdapat elemen identitas pada operasi penjumlahan yaitu $e = 0$. $\exists\, e \in R$, $\forall a \in R, a + e = e + a = a$
4. Terdapat elemen invers pada operasi penjumlahan yaitu $\forall a \in R, \exists\, a^{-1} \in R, a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$
5. R bersifat komutatif pada operasi penjumlahan, yaitu $\forall a, b \in R, a + b = b + a$
6. R tertutup pada operasi perkalian, yaitu $\forall a, b \in R, a \cdot b \in R$
7. R bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan, yaitu $\forall a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
8. Operasi perkalian bersifat distributif kiri dan kanan terhadap operasi penjumlahan pada R, yaitu $\forall a, b, c \in R$,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

(Rasiman dkk., 2018).

Contoh:

Suatu $\mathbb{Z}$ adalah semua himpunan bilangan bulat dengan operasi biner pertama adalah operasi penjumlahan $(+)$ dan yang kedua adalah operasi perkalian $(\cdot)$, sehingga dapat dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring.

Bukti:

1. Ditunjukkan $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi penjumlahan, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b \in \mathbb{Z}$.
2. Ditunjukkan $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Terdapat elemen identitas pada operasi penjumlahan yaitu $e = 0$. $\exists\, e \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Z}, a + 0 = 0 + a = a$.

4. Terdapat elemen invers pada operasi penjumlahan yaitu $-a$. $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}, a + (-a) = (-a) + a = 0$.
5. $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif pada operasi penjumlahan, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b = b + a$.
6. $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi perkalian, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \cdot b \in \mathbb{Z}$
7. $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
8. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$, yaitu $\forall a, b, c \in R$,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

2.3.3 Ring Komutatif

Ring R dikatakan sebagai ring komutatif jika operasi perkalian pada R bersifat komutatif (Rasiman dkk., 2018). Komutatif pada operasi perkalian pada ring yang dinotasikan dengan $(R,\cdot)$ memenuhi sifat komutatifnya, yaitu $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in R$.

2.3.4 Ring Bilangan Bulat Modulo

Suatu R dikatakan sebuah ring jika memenuhi aksioma-aksioma pada ring. Misalkan suatu $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah ring bilangan bulat modulo $2n$. Maka, $\mathbb{Z}_{2n}$ memenuhi aksioma ring pada operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_{2n}$. Operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_{2n}$ dapat didefinisikan sebagai $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ dan $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$.

$\mathbb{Z}_{2n}$ adalah semua himpunan bilangan bulat dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\cdot)$, sehingga dapat dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}_{2n}, +, \cdot)$ adalah ring.

1. $\mathbb{Z}_{2n}$ tertutup pada operasi penjumlahan, yaitu

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{2n},$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_{2n}$$

2. $\mathbb{Z}_{2n}$ bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan, yaitu

$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_{2n},$$

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \overline{(a + b)} + \bar{c} \\ &= \overline{(a + b) + c} \\ &= \overline{a + (b + c)} \\ &= \bar{a} + \overline{(b + c)} \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})\end{aligned}$$

3. Terdapat elemen identitas pada operasi penjumlahan yaitu

$$\exists\ \bar{0} \in \mathbb{Z}_{2n}, \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_{2n},$$

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{0 + a} = \bar{a}$$

4. Terdapat elemen invers pada operasi penjumlahan yaitu

$$\exists -\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2n}, \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_{2n},$$

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \overline{a + (-a)} = \overline{(-a) + a} = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}$$

5. $\mathbb{Z}_{2n}$ bersifat komutatif pada operasi penjumlahan, yaitu

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{2n},$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{b} + \bar{a}$$

6. $\mathbb{Z}_{2n}$ tertutup pada operasi perkalian, yaitu

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{2n},$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} \in \mathbb{Z}_{2n}$$

7. $\mathbb{Z}_{2n}$ bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan, yaitu

$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_{2n},$$

$$\left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \overline{(a \cdot b)} \cdot \bar{c}$$

$$= \overline{(a \cdot b) \cdot c}$$

$$= \overline{a \cdot (b \cdot c)}$$

$$= \bar{a} \cdot \overline{(b \cdot c)}$$

$$= \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c})$$

8. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_{2n}$, yaitu $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_{2n}$,

$$\bar{a} \cdot \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \cdot \overline{(b + c)}$$

$$= \overline{a \cdot (b + c)}$$

$$= \overline{(a \cdot b) + (a \cdot c)}$$

$$= \overline{(a \cdot b)} + \overline{(a \cdot c)}$$

$$= \left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right) + \overline{(a \cdot c)}$$

$$= \left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right) + (\bar{a} \cdot \bar{c})$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \overline{(a + b)} \cdot \bar{c}$$

$$= \overline{(a + b) \cdot c}$$

$$= \overline{(a \cdot c) + (b \cdot c)}$$

$$= \overline{(a \cdot c)} + \overline{(b \cdot c)}$$

$$= (\bar{a} \cdot \bar{c}) + \overline{(b \cdot c)}$$

$$= (\bar{a} \cdot \bar{c}) + \left(\bar{b} \cdot \bar{c}\right)$$

9. Operasi perkalian bersifat komutatif $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{2n}$,

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= \overline{a \cdot b} \\ &= \overline{b \cdot a} \\ &= \bar{b} \cdot \bar{a} \end{aligned}$$

Jadi, $(\mathbb{Z}_{2n}, +, \cdot)$ adalah ring bilangan bulat modulo. Karena memenuhi sifat komutatif terhadap perkalian juga, maka dapat disebut dengan ring komutatif pada bilangan bulat modulo.

2.4 Graf Total Diperumum dari Ring Komutatif

Graf total dari ring komutatif R dinotasikan dengan $GT(R)$. Graf total dari ring komutatif dengan himpunan titik-titik adalah semua unsur dari ring R dan setiap $x, y \in R$, $x \neq y$. Maka, x dan y dihubungkan oleh sisi jika dan hanya jika $x + y \in H$. H adalah himpunan bagian dari R sedemikian sehingga H adalah himpunan bagian yang tertutup terhadap operasi perkalian dari R. Jadi, graf total dari ring komutatif R dengan H himpunan bagian dari R dapat dinotasikan dengan $GT_H(R)$ (Anderson & Badawi, 2013).

Contoh:

Ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan H adalah himpunan bagian yang tertutup terhadap operasi perkalian di $\mathbb{Z}_6$. Dari setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in H$. Jika H adalah himpunan bilangan genap, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Tunjukkan graf total dari ring bilangan bulat modulo 6.

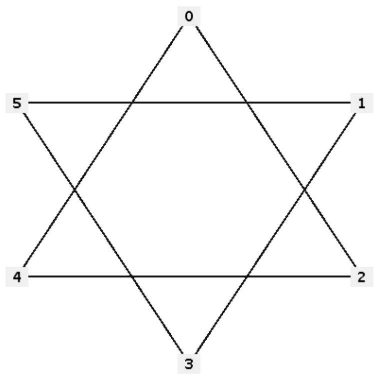
Bukti:

Akan ditunjukkan dengan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan untuk $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Tabel Cayley Ring Komutatif $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Himpunan titik graf dari $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ adalah $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Sehingga, jika unsur dari $\mathbb{Z}_6$ dioperasikan menggunakan operasi penjumlahan yang bersifat komutatif berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh gambar graf seperti Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Contoh Graf Total dari $\mathbb{Z}_6$

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen berkaitan dengan vektor eigen dalam aljabar linier. Nilai eigen adalah himpunan nilai skalar khusus yang dikaitkan dengan himpunan persamaan linier yang kemungkinan besar ada dalam persamaan matriks. Sederhannya, nilai eigen adalah skalar yang digunakan untuk mengubah vektor eigen. Persamaan dasarnya adalah sebagai berikut:

$$Ax = \lambda x$$

Untuk A sebuah matriks $n \times n$. Bilangan λ adalah nilai eigen dari A jika terdapat vektor tidak nol. Untuk vektor x disebut vektor eigen dari A yang berpasangan ke nilai eigen λ (Jain & Gunawardena, 2004).

Untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks A dituliskan persamaan $Ax = \lambda x$ sebagai berikut:

$$Ax = \lambda Ix$$

di mana, bernilai ekuivalen dengan

$$(\lambda I - A)x = 0.$$

Mencari nilai eigen λ dari persaaman sebelumnya dengan solusi tak nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0.$$

Persamaan tersebut dinamakan dengan polinomial karakteristik atau pesamaan karakteristik A dan scalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A.

2.6 Determinan Matriks Blok

Matriks blok atau matriks partisi adalah matriks yang dipartisi atau diblok menjadi beberapa matriks yang berukuran lebih kecil dengan memasukkan garis horizontal dan verikal antara baris dan kolom matriks. Matriks-matriks berukuran kecil hasil partisi disebut dengan submatriks. Matriks blok berukuran 2×2 berbentuk persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom.

Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(n-k)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kemudian diberi garis horizontal dan vertikal menjadi matriks sebagai berikut:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(n-k)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

Dengan memisalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)(k-1)} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1)1} & \cdots & a_{(m-(k-1)(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1)(n-(k-1)} & \cdots & a_{m-(k-1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1)} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Jika A dan B merupakan matriks $n \times n$, maka

(i) $det(AB) = det\ (A) \cdot det\ (B)$

(ii) $det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = det\ (A) \cdot det\ (D)$, jika A dan D merupakan matriks persegi

Dengan demikian, determinan matriks blok melibatkan struktur matriks keterhubungan masing-masing graf (Ilhamsyah dkk., 2017).

2.7 Kajian Graf Terhubung dalam Al-Quran

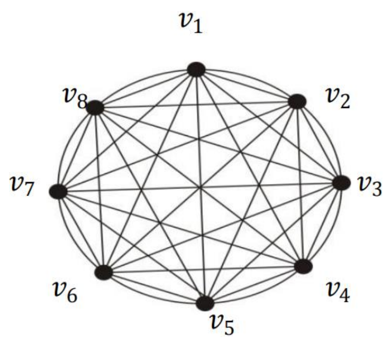
Manusia memiliki dua jenis keterhubungan dalam Islam. Hubungan yang pertama adalah hubungan dengan Allah SWT. Hubungan yang kedua adalah hubungan dengan sesama manusia. Manusia diciptakan oleh Allah SWT sebagai makhluk sosial yang saling membutuhkan dikarenakan setiap manusia memiliki ukuran kemampuan hidup masing-masing.

Kedudukan manusia dalam ajaran Islam sangat mulia. Kedudukan manusia yang mulia dalam perspektif Al-Quran dibagi dalam lima kelompok pada ciptaan-Nya, yaitu Bani Adam yang artinya anak keturunan Nabi Adam as, Al-Insan artinya manusia yang diciptakan dengan bentuk yang indah, *Al-Ins* adalah makhluk spiritual, *Basyar* artinya makhluk biologis, dan *An-Nas* artinya makhluk sosial. Lima kelompok manusia tersebut disimpulkan bahwasanya manusia adalah makhluk yang diciptakan oleh Allah SWT dengan beberapa kelompok sesuai dengan kriteria masing-masing manusia (Masjidaljabbar, 2023). Banyaknya macam karakter manusia yang diciptakan, Allah SWT berfirman pada surat Al-Hujurat ayat 13 sebagai berikut (Kemenag., 2022):

Artinya: *"Wahai manusia, sesungguhnya Kami telah menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan perempuan. Kemudian, Kami menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku agar kamu saling mengenal. Sesungguhnya yang paling* *mulia di antara kamu di sisi Allah adalah orang yang paling bertakwa. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Mahateliti.”* (QS. Al-Hujarat: 13)

Berdasarkan surat Al-Hujarat ayat 13, Allah SWT menciptakan manusia secara berbeda-beda karena memiliki tujuan. Hal ini agar setiap manusia saling mengenal satu sama lain, termasuk untuk belajar saling menghormati karena adanya perbedaan antar suku, jenis kelamin, sekaligus perbedaan karakter setiap manusia (Liya., 2022). Oleh karena itu, manusia di dalam dunia ini memiliki keterhubungan antara manusia satu dengan manusia yang lainnya.

Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya kejadian antar ciptaan Allah. Kemudian, kejadian-kejadian tersebut mempunyai keterhubungan antar titik satu sama lain yang merupakan kejadian sesudahnya. Hal ini menunjukkan bahwa suatu hubungan antar titik yang satu dengan titik yang lain. Jika diaplikasikan dalam bentuk graf dapat digambarkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Representasi Hubungan Antar Manusia (Dewi, D. N. P., 2011)

Pada Gambar 2.4 terlihat bahwa terdapat delapan titik yang diasumsikan sebagai delapan manusia, dimana di antara titik tersebut ada yang terhubung (*adjacency*) dan ada yang tidak terhubung (*non-adjacency*). Namun, semua titik saling terhubung satu dengan yang lainnya walaupun terdapat yang tidak terhubung secara langsung. Hubungan seorang umat Islam dengan yang lainnya dapat digambarkan seperti Gambar 2.4 dengan delapan orang yang disimbolkan

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$, dan v_8. Mereka adalah saudara sesama umat Islam dengan karakteristik yang berbeda-beda. Oleh karena itu, Allah SWT melarang untuk umat-Nya saling merendahkan dan mencela sesama manusia serta saling menghormati agar tidak menimbulkan perselisihan.

Graf pada Gambar 2.4 dengan unsur v_1 sampai dengan v_8 dapat disebut juga dengan himpunan bilangan bulat yang menghasilkan graf terhubung kemudian direpresentasikan pada matriks keterhubungan yang digunakan untuk mencari kestabilan ukuran spektrum pada bilangan bulat dengan keadaan energi pada bilangan bulat tersebut. Ukuran-ukuran yang dihasilkan pada bilangan bulat akan menghasilkan pola spektrum dan energi dengan syarat terbentuknya graf terhubung yang diperoleh dari bilangan bulat. Sehingga, spektrum dan energi saling berkaitan untuk menghasilkan pola kestabilan pada ukuran bilangan bulat.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini menggunakan pendekatan pada metode kualitatif. Metode kualitatif berbentuk studi literatur. Studi literatur adalah metode yang menggunakan data yang berbentuk kajian. Pembahasan dilakukan dengan cara mengkaji literatur dengan menganalisis objek penelitian secara khusus (induktif) menuju hasil yang umum (deduktif). Hasil kajian dituangkan dalam bentuk laporan penelitian untuk menjawab rumusan masalah pada Bab I yang akhirnya akan ditarik kesimpulan.

3.2 Pra Penelitian

Penelitian ini mengumpulkan berbagai macam jurnal, artikel, dan buku yang berkaitan dengan topik yang dibahas pada penelitian ini. Adapun beberapa rujukan yang digunakan sebagai rujukan utama pada penelitian ini.

Rujukan pertama pada tahun 2014 oleh Andika dan Juniati. Penelitian tersebut tentang permasalahan Graf Total dari Ring Komutatif. Penelitian ini membahas tentang pendefinisian graf total, sub graf total yang dibangun oleh $Z(R)$, subgraph total yang dibangun oleh $Reg(R)$, dan subgraph total yang dibangun oleh $Nil(R)$. Hasil dari penelitian tersebut mengenai graf total dari ring komutatif R dengan notasi $T(\Gamma(R))$ adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari ring R dan setiap $x, y \in R$, $x \neq y$, maka titik x dan y dihubungkan dengan sebuah sisi jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$. Sifat-sifat 3 subgraf total tersebut disimpulkan dalam bentuk teorema dan lemma (Andika & Juniati, 2014).

Rujukan kedua tahun 1973 oleh Schwenk. Penelitian tersebut tentang spektrum dari sebuah graf. Demikian pula, $\mu(G;x) = \mu(G) = \mu(x) = \sum_{n=0}^{d} b_n x^n$ adalah polinomial minimum dari A. Kita telah memilih untuk memberi label pada koefisien ϕ dan μ dalam urutan yang berbeda untuk digunakan nanti . Akar-akar dari $\phi(G)$ adalah nilai eigen dari G, dilambangkan dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Akar-akar p ini (yang mungkin mencakup beberapa akar) membentuk spektrum G. Dua graf bersifat kospektral jika mempunyai spektrum yang sama. Jari-jari spektral $p(G)$ adalah jari-jari piringan terkecil yang berpusat di titik asal yang memuat seluruh spektrum. Jadi $p(G) = max|\lambda_i|$ (Schwenk, 1973).

Rujukan ketiga tahun 2004 oleh Balakrishnan. Penelitian tersebut tentang energi dari sebuah graf. Energi $E(G)$ dari sebuah graf sederhana G sidefinisikan sebagai jumlah dari nilai absolut semua nilai eigen dari G. Jika G adalah graf k-reguler dengan n buah titik, maka $E(G) =\leq k + \sqrt{k(n-1)(n-k)} = B_2$ dan ikatan ini tajam. Terlihat bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, ada tak terhingga banyak n untuk masing-masing terdapat sebuah graf k-regular G berordo n dengan $k < n - 1$ dan $\frac{E(G)}{B_2} < \epsilon$. Dua graf dengan jumlah titik yang sama adalah equienergetik jika mereka memiliki energi yang sama. Ditunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 3$, ada dua graf ekuenergi dengan orde $4n$ yang tidak bersifat cospectral (Balakrishnan, 2004).

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Struktur pembahasan akan dimulai dari hal-hal yang khusus menuju pada hal yang bersifat umum. Tahapan yang digunakan dalam penelitian ini untuk memperoleh spektrum dan energi pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo ($\mathbb{Z}_{2n}$). Tahapan penelitian ini disusun untuk menentukan spektrum dan energi graf total dari ring $\mathbb{Z}_{2n}$ sebagai berikut:

a. Menentukan Spektrum dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$
    1. Membangun $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan H adalah himpunan semua bilangan genap di $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{2n}}$ dan $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.
    2. Menentukan matriks *adjacency* dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.
    3. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *adjacency* $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$.
    4. Menentukan polinomial karakteristik graf total dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.
    5. Menentukan spektrum graf total dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.
    6. Membuat dugaan berdasarkan pola polinomial dan spektrum yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
    7. Menyusun suatu lemma polinomial dan teorema spektrum graf total dari ring $\mathbb{Z}_{2n}$.

b. Menentukan Energi dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$
    1. Menentukan energi graf total dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ berdasarkan hasil spektrumnya.
    2. Membuat dugaan berdasarkan pola energi yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
    3. Menyusun suatu teorema energi graf total dari ring $\mathbb{Z}_{2n}$.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan membahas mengenai rumus umum dari spektrum dan energi graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ yang dinotasikan dengan $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan H adalah himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$. Pencarian spektrum dan energi graf menggunakan matriks *adjacency* $A(G)$ dari graf G. Terdapat beberapa kasus H genap, contohnya $H \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

4.1 Spektrum dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

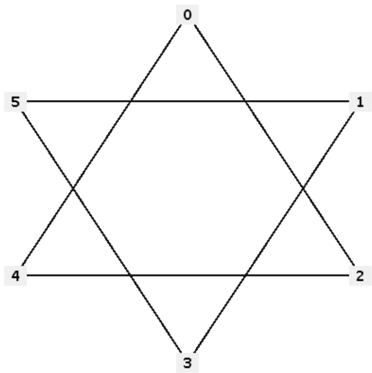
4.2.1 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_6$

Unsur dari ring bilangan bulat modulo 6 adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Pembangun dari graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo 6 yang dinotasikan sebagai $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ dengan H adalah himpunan bagian yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_6$, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ adalah graf yang memuat semua unsur dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai titik pada graf, dengan dua titik yang berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_6$ disebut terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ jika $x + y \in H$. Sehingga, dapat dinyatakan dalam tabel Cayley dengan operasi penjumlahan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Tabel Cayley $GT_H(\mathbb{Z}_6)$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Titik-titik graf dari $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ adalah $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Sehingga, jika unsur dari $\mathbb{Z}_6$ dioperasikan menggunakan operasi penjumlahan yang bersifat komutatif berdasarkan Tabel 4.1, maka diperoleh gambar graf seperti Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$

Berdasarkan Gambar 4.1 graf total diperumum dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}_6$ dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut:

$$A\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency*, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big)$ untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *adjacency*, sebagai berikut:

$det\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_6)\right) - \lambda I\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination, dapat diperoleh polinomial karakteristiknya pada hasil perkalian diagonal utama di matriks segitiga atas, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda + 1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda + 1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{\lambda - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{\lambda - 1} \end{bmatrix}$$

Sehingga, $det\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_6)\right) - \lambda I\right)$ tidak lain adalah perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$det\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_6)\right) - \lambda I\right) = \lambda^6 - 6\lambda^4 - 4\lambda^3 - 9\lambda^2 - 12\lambda + 4$$
$$= (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^4$$

Polinomial karakteristik diperoleh dari hasil $det\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_6)\right) - \lambda I\right)$ sebagai berikut:

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^4$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$, maka

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^4 = 0$$

Sehingga, diperoleh nilai eigen tersebut adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$. Artinya, nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_6))$ adalah 2 dan -1. Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen dari nilai eigen.

Untuk $\lambda_1 = 2$ disubstitusi ke dalam $A\left(GT_H(\mathbb{Z}_6)\right) - \lambda I$, maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil matriks tersebut direduksi menggunakan metode eliminasi gaus, maka diperoleh hasil matriks baru:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 2$ adalah $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_1 = -1$ disubstitusi ke dalam $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) - \lambda I$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil matriks tersebut direduksi menggunakan metode eliminasi gaus, maka diperoleh hasil matriks baru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = -1$ adalah $m(\lambda_1) = 4$.

Sehingga, diperoleh spektrum dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut:

$$Spek\left(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big)\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_6))$ adalah 2 dan -1 pada baris pertama. Sedangkan, banyaknya basis untuk ruang vektor eigen adalah 2 dan 4 pada baris kedua.

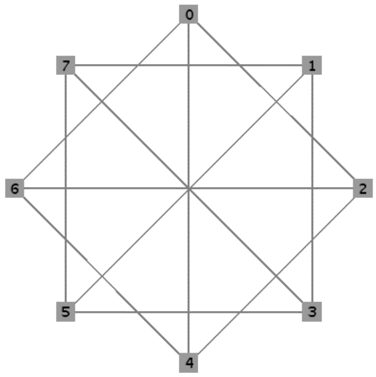
4.2.2 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_8$

Unsur dari ring bilangan bulat modulo 8 adalah $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Pembangun dari graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo 8 yang dinotasikan sebagai $GT_H(\mathbb{Z}_8)$ dengan H adalah himpunan bagian yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_8$, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. $GT_H(\mathbb{Z}_8)$ adalah graf yang memuat semua unsur dari $\mathbb{Z}_8$ sebagai titik pada graf, dengan dua titik yang berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_8$ disebut terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_8)$ jika $x + y \in H$. Sehingga, dapat dinyatakan dalam tabel Cayley dengan operasi penjumlahan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Tabel Cayley $GT_H(\mathbb{Z}_8)$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$

Titik-titik graf dari $GT_H(\mathbb{Z}_8)$ adalah $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_8)\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Sehingga, jika unsur dari $\mathbb{Z}_8$ dioperasikan menggunakan operasi penjumlahan yang bersifat komutatif berdasarkan Tabel 4.2, maka diperoleh gambar graf seperti Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_8)$

Berdasarkan Gambar 4.2 graf total diperumum dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}_8$ dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $GT_H(\mathbb{Z}_8)$ sebagai berikut:

$$A\big(GT_H(\mathbb{Z}_8)\big)=\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency*, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_8)\big)$ untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *adjacency*, sebagai berikut:

$det\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_8)\right) - \lambda I\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination, dapat diperoleh polinomial karakteristiknya pada hasil perkalian diagonal utama di matriks segitiga atas, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} \end{bmatrix}$$

Sehingga, $det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) - \lambda I\big)$ tidak lain adalah perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_8)\big) - \lambda I\big) = \lambda^8 - 12\lambda^6 - 16\lambda^5 - 30\lambda^4 - 96\lambda^3 - 100\lambda^2 - 48\lambda + 9$$

$$= (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)^6$$

Polinomial karakteristik diperoleh dari hasil $det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_8)\big) - \lambda I\big)$ sebagai berikut:

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)^6$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$, maka

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)^6 = 0$$

Sehingga, diperoleh nilai eigen tersebut adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$. Artinya, nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_8))$ adalah 3 dan -1. Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen dari nilai eigen.

Untuk $\lambda_1 = 3$ disubstitusi ke dalam $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_8)\big) - \lambda I$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil matriks tersebut direduksi menggunakan metode eliminasi gaus, maka diperoleh hasil matriks baru:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 3$ adalah $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_1 = -1$ disubstitusi ke dalam $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_8)\big) - \lambda I$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil matriks tersebut direduksi menggunakan metode eliminasi gaus, maka diperoleh hasil matriks baru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = -1$ adalah $m(\lambda_1) = 6$.

Sehingga, diperoleh spektrum dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_8)$ sebagai berikut:

$$Spek\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_8)\right)\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_8))$ adalah 3 dan -1 pada baris pertama. Sedangkan, banyaknya basis untuk ruang vektor eigen adalah 2 dan 6 pada baris kedua.

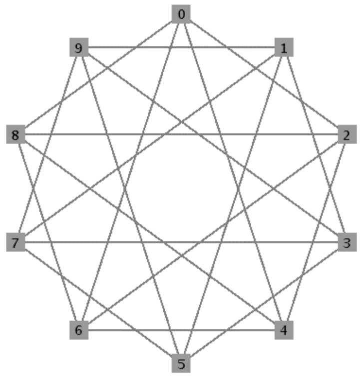
4.2.3 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_{10}$

Unsur dari ring bilangan bulat modulo 10 adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Pembangun dari graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo 10 yang dinotasikan sebagai $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ dengan H adalah himpunan bagian yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{10}$, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$. $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ adalah graf yang memuat semua unsur dari $\mathbb{Z}_{10}$ sebagai titik pada graf, dengan dua titik yang berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$ disebut terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ jika $x + y \in H$. Sehingga, dinyatakan dalam table Cayley dengan operasi penjumlahan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Tabel Cayley $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$

Titik-titik graf dari $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ adalah $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Sehingga, jika unsur dari $\mathbb{Z}_{10}$ dioperasikan menggunakan operasi penjumlahan yang bersifat komutatif berdasarkan Tabel 4.3, maka diperoleh gambar graf seperti Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$

Berdasarkan Gambar 4.3 graf total diperumum dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}_{10}$ dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut:

$$A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency*, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big)$ untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *adjacency*, sebagai berikut:

$det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) - \lambda I\big)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination, dapat diperoleh polinomial karakteristiknya pada hasil perkalian diagonal utama di matriks segitiga atas, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3} \end{bmatrix}$$

Sehingga, $det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) - \lambda I\big)$ tidak lain adalah perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) - \lambda I\big) &= \lambda^{10} - 20\lambda^8 - 40\lambda^7 - 70\lambda^6 + 392\lambda^5 + \\ &\quad 700\lambda^4 + 680\lambda^3 + 385\lambda^2 + 120\lambda + 16 \\ &= (\lambda - 4)^2(\lambda + 1)^8 \end{aligned}$$

Polinomial karakteristik diperoleh dari hasil $det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) - \lambda I\big)$ sebagai berikut:

$$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 1)^8$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$, maka

$$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 1)^8 = 0$$

Sehingga, diperoleh nilai eigen tersebut adalah $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -1$. Artinya, nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_{10}))$ adalah 4 dan -1. Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen dari nilai eigen.

Untuk $\lambda_1 = 4$ disubstitusi ke dalam $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) - \lambda I$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil matriks tersebut direduksi menggunakan metode eliminasi gaus, maka diperoleh hasil matriks baru:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 4$ adalah $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_1 = -1$ disubstitusi ke dalam $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) - \lambda I$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil matriks tersebut direduksi menggunakan metode eliminasi gaus, maka diperoleh hasil matriks baru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = -1$ adalah $m(\lambda_1) = 8$.

Sehingga, diperoleh spektrum dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut:

$$Spek\left(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big)\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_{10}))$ adalah 4 dan -1 pada baris pertama. Sedangkan, banyaknya basis untuk ruang vektor eigen adalah 2 dan 8 pada baris kedua.

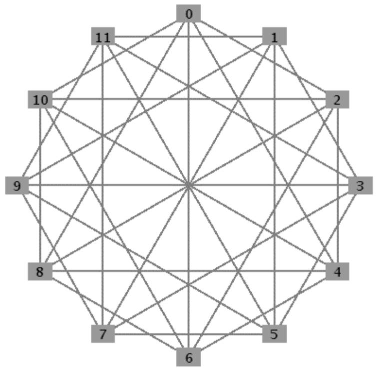
4.2.4 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_{12}$

Unsur dari ring bilangan bulat modulo 12 adalah $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$. Pembangun dari graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo 12 yang dinotasikan sebagai $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$ dengan H adalah himpunan bagian yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{12}$, maka $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$. $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$ adalah graf yang memuat semua unsur dari $\mathbb{Z}_{12}$ sebagai titik pada graf, dengan dua titik yang berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$ disebut terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$ jika $x + y \in H$. Sehingga, dinyatakan dalam tabel Cayley dengan operasi penjumlahan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Tabel Cayley $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$

Titik-titik graf dari $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$ adalah $V(GT_H(\mathbb{Z}_{12})) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$. Sehingga, jika unsur dari $\mathbb{Z}_{12}$ dioperasikan menggunakan operasi penjumlahan yang bersifat komutatif berdasarkan Tabel 4.4, maka diperoleh gambar graf seperti Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$

Berdasarkan Gambar 4.4 graf total diperumum dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}_{12}$ dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$ sebagai berikut:

$$A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency*, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\big)$ untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *adjacency*, sebagai berikut:

$det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\big) - \lambda I\big)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} -\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&-\lambda&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&-\lambda&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&-\lambda&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&-\lambda&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&-\lambda&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&-\lambda&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&-\lambda&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination, dapat diperoleh polinomial karakteristiknya pada hasil perkalian diagonal utama di matriks segitiga atas, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-2} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-2} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-4\lambda-5}{\lambda-4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-4\lambda-5}{\lambda-4}
\end{bmatrix}$$

Sehingga, $det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\big) - \lambda I\big)$ tidak lain adalah perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\big) - \lambda I\big) &= \lambda^{12} - 30\lambda^{10} - 80\lambda^9 + 135\lambda^8 + \\ &\quad 1152\lambda^7 + 2940\lambda^6 + 4320\lambda^5 + 4095\lambda^4 + \\ &\quad 2560\lambda^3 + 1026\lambda^2 + 240\lambda + 25 \\ &= (\lambda - 5)^2(\lambda + 1)^{10} \end{aligned}$$

Polinomial karakteristik diperoleh dari hasil $det\big(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\big) - \lambda I\big)$ sebagai berikut:

$$p(\lambda) = (\lambda - 5)^2(\lambda + 1)^{10}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$, maka

$$p(\lambda) = (\lambda - 5)^2(\lambda + 1)^{10} = 0$$

Sehingga, diperoleh nilai eigen tersebut adalah $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = -1$. Artinya, nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_{12}))$ adalah 5 dan -1. Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen dari nilai eigen.

Untuk $\lambda_1 = 5$ disubstitusi ke dalam $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\big) - \lambda I$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil matriks tersebut direduksi menggunakan metode eliminasi gaus, maka diperoleh hasil matriks baru:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 5$ adalah $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_1 = -1$ disubstitusi ke dalam $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\big) - \lambda I$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil matriks tersebut direduksi menggunakan metode eliminasi gaus, maka diperoleh hasil matriks baru:

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = -1$ adalah $m(\lambda_1) = 10$.

Sehingga, diperoleh spektrum dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$ sebagai berikut:

$$Spek\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\right)\right) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_{12}))$ adalah 5 dan -1 pada baris pertama. Sedangkan, banyaknya basis untuk ruang vektor eigen adalah 2 dan 10 pada baris kedua.

4.2.5 Rumus Umum Spektrum dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

Bagian ini menyajikan hasil tinjauan literatur terkait topik penelitian spektrum graf total dari ring bilangan bulat modulo serta analisis dan pembahasan temuan tersebut. Penelitian ini meninjau berbagai studi untuk memperoleh rumus spektrum dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$. Berdasarkan perhitungan beberapa spektrum pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ yang meliputi $\mathbb{Z}_{2.3}, \mathbb{Z}_{2.4}, \mathbb{Z}_{2.5}$, dan $\mathbb{Z}_{2.6}$ diperoleh pola polinomial karatkteristik dan spektrum pada $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ sebagai berikut:

Table 4.5 Pola Polinomial Karatkteristik dan Spektrum pada $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

$\mathbb{Z}_{2n}$	Polinomial Karakteristik $p(\lambda)$	$Spek(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))$
$\mathbb{Z}_{2\cdot 3}$	$(\lambda-2)^2(\lambda+1)^4$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
$\mathbb{Z}_{2\cdot 4}$	$(\lambda-3)^2(\lambda+1)^6$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
$\mathbb{Z}_{2\cdot 5}$	$(\lambda-4)^2(\lambda+1)^8$	$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$
$\mathbb{Z}_{2\cdot 6}$	$(\lambda-5)^2(\lambda+1)^{10}$	$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

Berdasarkan pola percobaan pada Tabel 4.5 diperoleh sebuah dugaan sebagai berikut:

1. Polinomial Karakteristik dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

$$p(\lambda) = (\lambda-(n-1))^2(\lambda+1)^{2(n-1)}$$

2. Spektrum graf dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

$$Spek\big(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pola polinomial karakteristik dan spektrum dari graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dapat diperoleh:

Lemma 1

$$GT_H(\mathbb{Z}_{2n}) \cong 2K_n, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$$

$2K_n$ pada graf total diperumum $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan H adalah himpunan semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$.

Bukti:

Himpunan $\mathbb{Z}_{2n}$ terdiri dari $\{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$.

Misalkan $M, N \subseteq \mathbb{Z}_{2n}$, di mana:

Misal $M = \{2i - 1 : i = 1, 2, 3, \dots, n\}$

Misal $N = \{2i : i = 1,2,3, \dots, n-1\}$

Jumlah bilangan ganjil dan genap masing-masing adalah n. Sehingga, $|M| = |N| = n$.

Akan ditunjukkan bahwa $GT_H(\mathbb{Z}_{2n}) \cong 2K_n, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$ memenuhi sifat sebagai berikut:

1. x, y terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, $\forall\ x, y \in M$, $x \neq y$

   Misalkan $x, y \in M$

   Misalkan $x = 2s - 1$ dan $y = 2t - 1$, untuk suatu $s, t\ \in \mathbb{Z}$

   Sehingga, $x + y = 2s - 1 + 2t - 1 = 2s + st - 2 = 2(s + t - 1) \in H$

   Jadi, terbukti bahwa x dan y terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, $\forall\ x, y \in M$, $x \neq y$.

2. x, y terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, $\forall\ x, y \in N$, $x \neq y$

   Misalkan $x, y \in N$

   Misalkan $x = 2s$ dan $y = 2t$, untuk suatu $s, t\ \in \mathbb{Z}$

   Sehingga, $x + y = 2s + 2t = 2(s + t) \in H$

   Jadi, terbukti bahwa x dan y terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, $\forall\ x, y \in N$, $x \neq y$.

3. x, y tidak terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, $\forall\ x \in M$ dan $y \in N$

   Misalkan $x \in M$ dan $y \in N$

   Misalkan $x = 2s - 1$ dan $y = 2t$, untuk suatu $s, t\ \in \mathbb{Z}$

   Sehingga, $x + y = 2s - 1 + 2t = 2s + 2t - 1 = 2(s + t) - 1 \notin H$

   Jadi, terbukti bahwa x dan y tidak terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, $\forall\ x \in M$ dan $y \in N$.

   Dengan demikian terbukti bahwa $GT_H(\mathbb{Z}_{2n}) \cong 2K_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$.

Lemma 2

Polinomial karakteristik matriks *adjacency* $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ untuk $n \geq 3$ dengan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - (n-1))^2(\lambda + 1)^{2(n-1)}$$

Bukti:

Dua unsur dari $\mathbb{Z}_{2n}$ yang hasil penjumlahannya bilangan genap akan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$. Sesuai definisi dari graf total dengan H adalah semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$. Hal tersebut menghasilkan graf $2K_n$. Maka, diperoleh matriks *adjacency* sebagai berikut:

$$A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Lemma 1, graf $2K_n$ terdiri dari dua komponen K_n, masing-masing adalah graf lengkap dengan n titik. Matriks *adjacency* A dari $2K_n$ dapat diwakili sebagai matriks blok diagonal, karena tidak ada sisi antara dua subgraf. Sehingga dapat dituliskan matriks blok sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

dimana B adalah matriks *adjacency* dari K_n. Matriks B berukuran $n \times n$ dengan semua elemen di luar diagonal utama adalah 1 dikarenakan setiap titik terhubung langsung dengan titik lainya dan diagonalnya adalah 0 dikarenakan tidak adanya *loop*:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency*, maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen menggunakan polinomial karaktetistik yang diperoleh dari K_n. Menggunakan matriks blok diagonal A, polinomial karakteristik $p_A(\lambda)$ merupakan hasil kali polynomial karakteristik masing-masing blok, dituliaskan sebagai:

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = det(\lambda I - B)^2$$

dimana $(\lambda I - B)$ adalah:

$$(\lambda I - B) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Pada titik ini, dengan mengetahui nilai eigen dari B, dapat diketahui bahwa polynomial karakteristik dari B adalah

$$p_B(\lambda) = \big(\lambda - (n-1)\big)(\lambda + 1)^{n-1}.$$

Maka polynomial karakteristik dari A adalah:

$$p_A(\lambda) = [(\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}]^2 = (\lambda - (n-1))^2(\lambda + 1)^{2(n-1)}$$

Teorema 1

Misalkan $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah ring bilangan bulat modulo $2n$ untuk $n \geq 3$. Rumus umum Spektrum $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$Spek\left(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)\right) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 2, polinomial karakteristik dari $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ untuk $n \geq 3$ dan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_{2n}$

$$p(\lambda) = (\lambda - (n-1))^2(\lambda + 1)^{2(n-1)}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$, maka

$$p(\lambda) = (\lambda - (n-1))^2(\lambda + 1)^{2(n-1)} = 0$$

Sehingga, diperoleh nilai eigen tersebut adalah

$$\lambda_1 = n - 1 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

serta diperoleh multiplisitasnya adalah

$$m(\lambda_1) = 2 \text{ dan } m(\lambda_1) = 2(n-1)$$

Jadi dapat diperoleh rumus umum spektrum *adjacency* dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ adalah

$$Spek\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}$$

4.2 Energi dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

4.2.1 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_6$

Berdasarkan spektrum dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ untuk $n \geq 3$ dan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_6$, yang diperoleh:

$$Spek\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_6)\right)\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\lambda_1 = 2 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

serta multiplisitasnya adalah

$$m(\lambda_1) = 2 \text{ dan } m(\lambda_1) = 4.$$

Dengan 2 dan -1 adalah nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_6))$ serta 2 dan 4 adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing.

Kemudian, diperoleh energi dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut:

$$E(A(GT_H(\mathbb{Z}_6))) = (2 \cdot |2|) + (4 \cdot |-1|)$$
$$= 8$$

4.2.2 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_8$

Berdasarkan spektrum dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_8)$ untuk $n \geq 3$ dan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_8$, yang diperoleh:

$$Spek\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_8)\right)\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\lambda_1 = 3 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

serta multiplisitasnya adalah

$$m(\lambda_1) = 2 \text{ dan } m(\lambda_1) = 6.$$

Dengan 3 dan -1 adalah nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_8))$ serta 2 dan 6 adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing.

Kemudian, diperoleh energi dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_8)$ sebagai berikut:

$$E(A(GT_H(\mathbb{Z}_6))) = (2 \cdot |3|) + (6 \cdot |-1|)$$

$$= 12$$

4.2.3 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_{10}$

Berdasarkan spektrum dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ untuk $n \geq 3$ dan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_{10}$, yang diperoleh:

$$Spek\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\right)\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\lambda_1 = 4 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

serta multiplisitasnya adalah

$$m(\lambda_1) = 2 \text{ dan } m(\lambda_1) = 8.$$

Dengan 4 dan -1 adalah nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_{10}))$ serta 2 dan 8 adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing.

Kemudian, diperoleh energi dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut:

$$E(A(GT_H(\mathbb{Z}_{10}))) = (2 \cdot |4|) + (8 \cdot |-1|)$$

$$= 16$$

4.2.4 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_{12}$

Berdasarkan spektrum dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$ untuk $n \geq 3$ dan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_{12}$, yang diperoleh:

$$Spek\left(A\left(GT_H(\mathbb{Z}_{12})\right)\right) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\lambda_1 = 5 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

serta multiplisitasnya adalah

$$m(\lambda_1) = 2 \text{ dan } m(\lambda_1) = 10.$$

Dengan 5 dan -1 adalah nilai eigen dari matriks $A(GT_H(\mathbb{Z}_{12}))$ serta 2 dan 10 adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing.

Kemudian, diperoleh energi dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{12})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(A(GT_H(\mathbb{Z}_6))) &= (2 \cdot |5|) + (10 \cdot |-1|) \\ &= 20 \end{aligned}$$

4.2.5 Rumus Umum Energi dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

Bagian ini menyajikan hasil tinjauan literatur terkait topik penelitian energi graf total dari ring bilangan bulat modulo serta analisis dan pembahasan temuan tersebut. Penelitian ini meninjau berbagai studi untuk memperoleh rumus energi dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$. Berdasarkan perhitungan beberapa energi pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ yang meliputi $\mathbb{Z}_{2.3}, \mathbb{Z}_{2.4}, \mathbb{Z}_{2.5}$, dan $\mathbb{Z}_{2.6}$ diperoleh pola polinomial karakteristik dan spektrum pada $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ pada Tabel 4.6.

Table 4.6 Pola Energi pada $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$

$\mathbb{Z}_{2n}$	$E(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))$
$\mathbb{Z}_{2\cdot 3}$	$2\cdot\|2\| + 4\cdot\|-1\| = 8$
$\mathbb{Z}_{2\cdot 4}$	$2\cdot\|3\| + 6\cdot\|-1\| = 12$
$\mathbb{Z}_{2\cdot 5}$	$2\cdot\|4\| + 8\cdot\|-1\| = 16$
$\mathbb{Z}_{2\cdot 6}$	$2\cdot\|5\| + 10\cdot\|-1\| = 20$

Berdasarkan pola percobaan pada Tabel 4.6 diperoleh sebuah dugaan energi dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, yaitu:

$$E(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))) = 2\cdot|(n-1)| + 2(n-1)\cdot|-1| = 4(n-1)$$

Berdasarkan pola energi dari graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dapat diperoleh sebagai serikut:

Teorema 2

Misalkan $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah ring bilangan bulat modulo $2n$ untuk $n \geq 3$. rumus umum Energi $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$E(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))) = 4(n-1)$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 1, spektrum dari $A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ untuk $n \geq 3$ dan H himpunan bilangan genap di $\mathbb{Z}_{2n}$

$$Spek\left(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)\right) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}$$

Dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\lambda_1 = n-1 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

serta multiplisitasnya adalah

$$m(\lambda_1) = 2 \text{ dan } m(\lambda_1) = 2(n-1).$$

Jadi dapat diperoleh rumus umum energi *adjacency* dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ adalah

$$\begin{aligned} E(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))) &= (2 \cdot |(n-1)|) + (2(n-1) \cdot |-1|) \\ &= 2(n-1) + 2(n-1) \\ &= 4(n-1) \end{aligned}$$

4.3 Harmoni dan Keterhubungan Graf dalam Al-Quran

Pada kajian teori telah disinggung pada surat Al-Hujurat ayat 13 yang menjelaskan teori dasar graf terhubung dalam representasi hubungan antar manusia yang disimbolkan dengan unsur v_1 sampai dengan v_8 sebagai manusia (titik). Dalam pembahasan dan hasil penelitian ini terdapat ayat Al-Qur'an yang bisa diinterpretasikan secara metaforis dalam konteks spektrum dan energi terkait graf terhubung dan harmoni yaitu surat Al-Baqarah ayat 164 yang menggambarkan keteraturan dan keseimbangan dalam alam semesta, yang bisa dihubungkan dengan konsep harmoni dan keterhubungan dalam teori graf.

Pendukungan teori dalam hasil penelitian pada surat Al-Baqarah ayat 164 menggambarkan berbagai fenomena alam yang menunjukkan keteraturan dan keseimbangan dalam ciptaan Allah. Jika kita menghubungkan ayat ini dengan konsep harmoni dan keterhubungan dalam teori graf, kita dapat melihat analogi yang menarik. Berikut firman Allah SWT pada surat Al-Baqarah ayat 164 (Kemenag., 2022):

Artinya: *"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hidupkan bumi sesudah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; (semua itu) sungguh merupakan tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan."* (QS. Al-Baqarah: 164)

Surat Al-Baqarah ayat 164 tersebut mengandung hubungan dengan konsep harmoni dan keterhubungan dalam teori graf. Konsep Keterhubungan dalam fenomena alam yang dimana ayat ini mencakup berbagai elemen alam seperti langit, bumi, siang, malam, bahtera, air, hewan, angin, dan awan yang dapat dikaitkan dalam teori graf. Setiap elemen ini dapat dianggap sebagai titik (*node*) dalam sebuah graf yang terhubung oleh sisi (*edges*). Misalnya, air (titik) yang turun dari langit terhubung dengan bumi (titik) melalui proses hujan (sisi). Setiap simpul terhubung dalam sebuah jaringan yang kompleks namun teratur. Konsep Harmoni dalam fenomena alam yaitu silih bergantinya malam dan siang, serta interaksi antara elemen-elemen seperti air, angin, dan awan menunjukkan adanya keseimbangan dan harmoni dalam alam, hal tersebut dapat dikaitkan dalam teori graf. Harmoni dapat diwakili oleh distribusi derajat titik yang seimbang dan distribusi nilai eigen yang mencerminkan stabilitas sistem. Misalnya, graf dengan nilai eigen yang seimbang menunjukkan bahwa sistem tersebut stabil dan harmoni.

Keteraturan dalam konsep fenomena alam pada pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi menunjukkan keteraturan yang diciptakan oleh Allah SWT. Dalam graf, keteraturan bisa dilihat melalui struktur graf yang simetris dan teratur, seperti graf lengkap pada $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, yang menunjukkan keteraturan dalam koneksi antara titik-titik. Fenomena air yang menghidupkan bumi, bahtera yang membawa manfaat bagi manusia, menunjukkan bagaimana elemen-elemen alam saling berinteraksi dan mempengaruhi satu sama lain. Dalam graf, interaksi dan dampak dapat dilihat melalui jalan dan siklus yang menunjukkan bagaimana informasi atau pengaruh dapat menyebar melalui jaringan. Energi graf mencerminkan total pengaruh atau intensitas interaksi dalam jaringan tersebut.

Representasi fenomena alam dalam graf dapat dimisalkan graf sederhana dengan titik-titik yang mewakili elemen-elemen alam, seperti v_1: Langit, v_2: Bumi, v_3: Air, v_4: Bahtera, v_5: Hewan, v_6: Angin, dan v_7: Awan. Sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik ini dapat mewakili interaksi antara elemen-elemen tersebut, yang meliputi e_1: Langit ke Bumi (hujan), e_2: Bumi ke Hewan (kehidupan), e_3: Angin ke Awan (pengisaran angin), e_4: Bahtera ke Air (navigasi), e_5: Langit ke Angin (keteraturan atmosfer), dan e_7: Air ke Bumi (penyebaran air).

Graf ini menunjukkan bagaimana setiap elemen terhubung dan berinteraksi dalam sebuah jaringan yang harmonis dan teratur. Dengan mencerminkan keteraturan dan keseimbangan dalam alam sebagaimana digambarkan dalam surat Al-Baqarah ayat 164.

Spektrum graf adalah himpunan nilai eigen dari matriks *adjacency* dari graf. Nilai eigen ini memberikan informasi tentang berbagai sifat struktural graf. Keteraturan dan harmoni yang digambarkan dalam ayat ini bisa dihubungkan dengan spektrum graf yang menunjukkan struktur dan keseimbangan dalam graf. Misalnya, jika kita memodelkan elemen-elemen alam seperti langit, bumi, air, dan hewan sebagai titik dalam graf, nilai eigen dari graf ini dapat memberikan informasi tentang bagaimana elemen-elemen ini saling berinteraksi dan membentuk jaringan yang harmonis. Spektrum yang seimbang dan teratur mencerminkan harmoni dalam jaringan, sama seperti harmoni yang ada dalam alam semesta.

Energi graf adalah jumlah nilai absolut dari semua nilai eigen matriks *adjacency* graf. Ini memberikan ukuran tentang intensitas interaksi atau keterhubungan dalam graf. Energi graf dapat dianggap sebagai analog dari 'energi' atau 'kekuatan' keterhubungan dan interaksi antara elemen-elemen alam yang digambarkan dalam ayat tersebut. Misalnya, interaksi antara langit dan bumi melalui hujan, atau antara angin dan awan, dapat diinterpretasikan sebagai hubungan yang memiliki intensitas tertentu yang diukur oleh energi graf. Graf dengan energi tinggi menunjukkan bahwa elemen-elemen dalam jaringan sangat terhubung dan interaksinya kuat. Hal ini mencerminkan bagaimana elemen-elemen alam saling mendukung dan bekerja sama untuk menciptakan keseimbangan dan keberlanjutan.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa nilai eigen dari matriks *adjacency* graf ini akan memberikan informasi tentang struktur dan hubungan antara elemen-elemen tersebut. Misalnya, nilai eigen terbesar dapat menunjukkan seberapa kuat jaringan ini terhubung secara keseluruhan. Energi graf, yang merupakan jumlah nilai absolut dari semua nilai eigen, akan menunjukkan intensitas total dari semua interaksi dalam graf. Graf dengan energi yang lebih tinggi menunjukkan bahwa elemen-elemen dalam jaringan sangat terhubung dan interaksi mereka sangat intens.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV, maka dapat diperoleh rumus umum spektrum dan energi dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$, sebagai berikut:

1. Spektrum dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ adalah

$$Spek\left(A\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)\right) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}$$

2. Energi dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ adalah

$$E(A(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))) = 4(n-1)$$

5.2 Saran

Berdasarkan pembahasan yang sudah penulis lakukan, maka penulis menyarankan agar pembaca bisa melanjutkan penelitian ini yaitu misalkan mengkaji spektrum dan energi *detour*, *laplace*, *signless laplace* pada graf yang sama maupun graf yang lain dan masih banyak lagi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, A., & Khasanah, R. (2018). Spektrum signless-Laplace dan spektrum detour graf konjugasi dari grup dihedral. *Jurnal Kubik*, *3*(1), 45-51.

Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.

Akhadiyah, D. A. (2012). *Spektrum Adjacency, Laplace, Signless Laplace, dan Detour Graf Subgrup dan Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Ambarsari, D., & Lukito, A. (2017). Graf Total Suatu Modul Berdasarkan Submodul Singuler. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 5(2).

Andari, A. (2015). *Teori Grup*. Universitas Brawijaya Press.

Anderson, D. F., & Badawi, A. (2013). The generalized total graph of a commutative ring. *Journal of algebra and its applications*, *12*(05), 1250212.

Andika, A., & Juniati, D. (2014). *Graf Total dari Ring Komutatif* (Doctoral dissertation, State University of Surabaya).

Balakrishnan, R. (2004). The energy of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, *387*, 287-295.

Buhaerah, B., Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). Teori Graf dan Aplikasinya.

Chu, Z. Q., Nazeer, S., Zia, T. J., Ahmed, I., & Shahid, S. (2019). Some new results on various graph energies of the splitting graph. *Journal of Chemistry*, *2019*, 1-12.

Dewi, D. N. P. (2011). *Spectrum detour graf n-partisi komplit* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2015). *Elements of Modern Algebra Eighth Edition*. Stamford: Nelson Education, Ltd.

Ilhamsyah, I., Helmi, H., & Fran, F. (2017). Determinan dan Invers Matriks Blok 2×2. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, *6*(03).

Jain, S.K. & Gunawardena, A.D. 2004. Linier Algebra an Interactive Approach. Unit States of America: Thomson Brooks/Cole.

Kemenag. (2022). *Al-Qur'an dan Terjemahan*.

Liya. (2022). Kajian Surat Al Hujurot Ayat 13. Moderanesia.

Masjidaljabbar. (2023). 5 Istilah Manusia dalam Al-Qur'an. Masjid Raya Jawa Barat. https://masjidaljabbar.com/5-istilah-manusia-dalam-al-quran/.

Munir, R. (2005). Ilmu Komputer Matematika Diskrit. *Edisi Ketiga. Informatika. Bandung*.

Nugroho, D. B. (2009). Diktat Kuliah (2 sks) MX 127: Teori Bilangan (Revisi Terakhir: Juli 2009).

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasdyahsari, A.S. (2018). *Teori Ring*. Maret, 61-79. http://eprints.upgris.ac.id/637/1/Buku Teori Ring.pdf.

Schwenk, A. J. C. (1973). *The spectrum of a graph*. University of Michigan.

Setyowidi, D. D., & Ratnasari, L. (2012). Energi Derajat Maksimal pada Graf Terhubung. *Jurnal Matematika*, *1*(1), 46-55.

Ula, W. (2023). Bacaan Surat Ar Ra'd Ayat 8, Lengkap Tafsir dan Terjemah Bahasa Indonesia. Jatim Network.

Umam, K. (2019). Spectrum dan Spectrum Laplacian pada Graf Mahkota. *Kalbiscientia Jurnal Sains dan Teknologi*, *6*(2), 161-161.

Walindra, N. (2019). *Spektrum adjacency*, *laplace*, *dan signless-laplace pada graf pembagi nol dan komplemennya dari ring komutatif dengan unsur kesatuan* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

RIWAYAT HIDUP

Yulia Dwi Ferdiani, lahir di Kabupaten Malang pada 1 Juli 2001. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan Alm. Bapak Siyowarto dan Ibu Robikah. Penulis telah menempuh pendidikan mulai dari TK Kemala Bhayangkari 100 yang lulus pada tahun 2008, dilanjutkan menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN 2 Ampeldento dan lulus pada tahun 2014. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMPN 22 Malang dan lulus pada tahun 2017. Selanjutnya menempuh pendidikan sekolah menengah atas di SMA "Islam" Kota Malang dan lulus pada tahun 2020. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menempuh pendidikan tinggi, penulis aktif mengikuti beberapa kegiatan. Penulis bergabung dalam organisasi HMPS "Integral" Matematika selama dua periode sebagai anggota Kewirausahaan dan koordinator Divisi Pengembangan minat dan bakat. Selain itu penulis juga mengikuti kegiatan di luar kampus seperti pelatihan dan seminar.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Yulia Dwi Ferdiani
NIM	: 200601110105
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Spektrum dan Energi Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo
Pembimbing I	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.
Pembimbing II	: Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	6 Oktober 2023	Konsultasi Topik	1.
2.	9 Oktober 2023	Konsultasi Bab I	2.
3.	16 Oktober 2023	Konsultasi Bab I dan II	3.
4.	6 November 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	29 November 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	4 Desember 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	11 Desember 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	7.
8.	15 Januari 2024	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	22 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	27 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	10.
11.	14 Maret 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	11.
12.	3 April 2024	ACC Seminar Proposal	12.
13.	30 Mei 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	13.
14.	4 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	6 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	15.

16.	7 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	16.
17.	10 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	17.
18.	12 Juni 2024	ACC Bab IV dan V	18.
19.	13 Juni 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	19.
20.	14 Juni 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	20.
21.	19 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	21.
22.	24 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	22.
23.	26 Agustus 2024	ACC Sidang Skripsi	23.
24.	30 Agustus 2024	ACC Keseluruhan	24.

Malang, 30 Agustus 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005