

**PENERAPAN METODE PEMISAHAN VARIABEL  
PADA EVOLUSI GELOMBANG HARMONIK  
MELALUI SEBUAH PEMECAH GELOMBANG**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**KHAFIDHOH NURUL AINI**  
**NIM. 10610069**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2014**

**PENERAPAN METODE PEMISAHAN VARIABEL  
PADA EVOLUSI GELOMBANG HARMONIK  
MELALUI SEBUAH PEMECAH GELOMBANG**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:  
KHAFIDHOH NURUL AINI  
NIM. 10610069**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2014**

**PENERAPAN METODE PEMISAHAN VARIABEL  
PADA EVOLUSI GELOMBANG HARMONIK  
MELALUI SEBUAH PEMECAH GELOMBANG**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**KHAFIDHOH NURUL AINI**  
**NIM. 10610069**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal 03 April 2014:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004

Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENERAPAN METODE PEMISAHAN VARIABEL  
PADA EVOLUSI GELOMBANG HARMONIK  
MELALUI SEBUAH PEMECAH GELOMBANG**

**SKRIPSI**

**Oleh:  
KHAFIDHOH NURUL AINI  
NIM. 10610069**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 10 April 2014

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001 \_\_\_\_\_

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004 \_\_\_\_\_

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004 \_\_\_\_\_

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002 \_\_\_\_\_

Mengesahkan,

Ketua Jurusan Matematika

**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
**NIP. 19751006 200312 1 001**

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : KHAFIDHOH NURUL AINI

NIM : 10610069

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penerapan Metode Pemisahan Variabel pada Evolusi Gelombang  
Harmonik Melalui Sebuah Pemecah Gelombang

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 01 April 2014  
Yang membuat pernyataan,

Khafidhoh Nurul Aini  
NIM. 10610069

## MOTTO

خير الناس أ نفعهم للناس

Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia yang  
lainnya (HR. Thobroni).



## HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah-Ibu tercinta Nur Ichsan dan Nur Zuliastutik serta adik Azzahra Talita Qotrunnada, nenek Afiyah, tante Alif yang selalu memberikan dukungan, kasih sayang dan mengorbankan segalanya untuk mewujudkan cita-cita penulis.

Orang terdekat penulis yang selalu menemani dengan sabar. Terima kasih atas motivasi dan do'a yang telah diberikan kepada penulis selama ini.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh*

Alhamdulillah robbil alamin, puji syukur penulis haturkan atas rahmat Allah SWT sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, serta dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul “ *Penerapan Metode Pemisahan Variabel pada Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Sebuah Pemecah Gelombang* ”. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing dan memberikan jalan yang terang.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan terselesaikan dengan baik tanpa adanya saran, arahan, bimbingan serta do'a dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah membimbing dan memberikan saran kepada penulis demi selesainya penyusunan skripsi ini.

5. Abdul Aziz, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
6. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku Dosen Wali yang telah banyak memberikan arahan dan nasihat kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah.
8. Ayah dan ibu, selaku orang tua yang selalu memberikan do'a, semangat serta menjadi motivator terbaik untuk penulis.
9. Teman-teman matematika angkatan 2010, terutama Muhammad Sukron, Syifa'ul Amamah, Farida Maslucuh, Binti Tsamrotul, Fatma Mufidah, "Keluarga Cemara", "Kontrakan 158" yang memberikan kenangan dan motivasi kepada penulis.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan bagi pembaca. Amin.

*Wassalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh*

Malang, April 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiv
<b>ملخص</b> .....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	4
1.4 Manfaat Penelitian .....	5
1.5 Batasan Masalah .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	6
1.7 Sistematika Penulisan .....	7
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Gelombang Harmonik .....	9
2.2 Persamaan Kontinuitas .....	10
2.3 Kekekalan Momentum .....	13
2.4 Persamaan <i>Bernoulli</i> .....	16
2.5 Persamaan <i>Laplace</i> .....	17
2.6 Kondisi Batas .....	18
2.6.1 Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Fluida .....	19
2.6.2 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Fluida .....	20
2.6.3 Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Saluran .....	21
2.7 Teori Gelombang Linier .....	22
2.7.1 Kondisi-Kondisi Batas Linier .....	23
2.7.1.1 Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Fluida .....	23
2.7.1.2 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Fluida .....	23
2.7.1.3 Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Saluran .....	24
2.8 Pemisahan Variabel .....	24
2.9 Kajian Tentang Gelombang dalam Al-Qur'an .....	26

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Penyelesaian Persamaan <i>Laplace</i> Beserta Kondisi Batas dengan Pemisahan Variabel .....	29
3.2 Menentukan Relasi Dispersi .....	36
3.3 Model Gelombang Harmonik untuk Dasar Berundak .....	37
3.4 Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan .....	48

### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	57
4.2 Saran .....	58

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	59
-----------------------------	----

### **LAMPIRAN-LAMPIRAN**



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Laju Perubahan Massa .....	10
Gambar 3.1 Perambatan Gelombang Melalui Pemecah Gelombang Terendam...38	
Gambar 3.2 Fungsi Potensial $\phi$ .....	48
Gambar 3.3 Simulasi dengan Modifikasi Lebar Balok Pemecah Gelombang.....	49
Gambar 3.4 Pengaruh Lebar Balok dengan $\omega = 2$ .....	50
Gambar 3.5 Pengaruh Lebar Balok dengan $\omega = 1$ .....	52
Gambar 3.6 Pengaruh Lebar Balok dengan $\omega = 3$ .....	52
Gambar 3.7 Simulasi dengan Modifikasi Tinggi Balok Pemecah Gelombang ....	54
Gambar 3.8 Pengaruh Tinggi Balok.....	55



## ABSTRAK

Aini, Khafidhoh Nurul. 2014. **Penerapan Metode Pemisahan Variabel pada Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Sebuah Pemecah Gelombang**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Abdul Aziz, M.Si.

**Kata kunci:** Metode Pemisahan Variabel, Gelombang Harmonik, Pemecah Gelombang, Relasi Dispersi.

Dalam penelitian ini dibahas tentang penerapan metode pemisahan variabel pada evolusi gelombang harmonik yang melalui sebuah pemecah gelombang berupa sebuah balok. Permasalahan ini dipandang sebagai aliran fluida pada saluran 2 dimensi yang diasumsikan sebagai fluida ideal dan tak berotasi. Penurunan persamaan dasar fluida menggunakan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum sehingga diperoleh persamaan *Laplace* dengan kondisi batas kinematik dan kondisi batas dinamik.

Teori gelombang yang digunakan adalah teori gelombang linier, maka kondisi batas yang digunakan adalah yang linier dan persamaan *Laplace* beserta kondisi-kondisi batasnya pada fluida diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Gelombang permukaan sepanjang saluran yang bergantung terhadap ruang dan waktu berupa gelombang harmonik. Untuk mengamati evolusi gelombang sepanjang saluran, digunakan relasi dispersi yang diturunkan dari model linier.

Dengan pemberian nilai amplitudo gelombang transmisi  $A$ , frekuensi gelombang ( $\omega$ ), kedalaman saluran ( $h_1, h_2, h_3$ ), dan bilangan gelombang ( $k_1, k_2, k_3$ ) yang diperoleh dari persamaan dispersi, maka dilakukan simulasi dengan memodifikasi lebar balok dengan frekuensi gelombang dan tinggi balok sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin besar frekuensi gelombang ( $\omega$ ) maka semakin kecil lebar optimal balok pemecah gelombang dan semakin besar tinggi balok pemecah gelombang maka semakin besar pula penurunan amplitudo gelombang yang dihasilkan. Bagi peneliti selanjutnya dapat menggunakan teori gelombang nonlinier untuk mengamati evolusi gelombang melalui pemecah gelombang.

## ABSTRACT

Aini, Khafidhoh Nurul. 2014. **Application of Variable Separation Method in Harmonic Wave Evolution Through a Breakwater**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Abdul Aziz, M.Si.

**Keyword:** Variable Separation, Harmonic Waves, Breakwater, The Dispersion Relation.

This research discussed about application of the variable separation method on the evolution of harmonic waves through a breakwater which form a bar. This problem is seen as fluid flow on two dimensional channel that is assumed as an ideal fluid and irrotational. The derivation of fluid basic equation uses mass conservation laws and momentum conservation laws so obtained *Laplace* equation with kinematic and dynamic boundary conditions.

The wave theory used is linear, so boundary conditions used are linear and *Laplace* equation with boundary conditions of fluid solved by using the variable separation method. Surface wave along the channel that depends on space and time is harmonic wave. To observe the evolution of the wave along the channel will be used dispersion relation which derived from the linear model.

From the given value of transmission wave amplitude  $A$ , wave frequency ( $\omega$ ), depth channel ( $h_1, h_2, h_3$ ), and we can obtain the wave number ( $k_1, k_2, k_3$ ) from the dispersion equation, so we do simulation by modifying bar width, wave frequency and bar height. Thus it can be concluded that the greater the wave frequency ( $\omega$ ) the smaller the optimal width of the breakwater bar would be. And the higher the breakwater bar the more wave amplitude reduction will be obtained. For the next researcher can use nonlinear wave theory to observe the evolution of the wave through the breakwater.

## ملخص

العين، حافظة نور. ٢٠١٤. يصبّ النظرية تفريق متغيرٍ في تطوّر الموج هرمونيك من خلاك كاسر الامواج. البحث الجامعي، شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم مالانخ. المشرف: (١) محمد جمهوري الماجستير. (٢) عبد العزيز الماجستير.

الكلمة المفتاحية: النظرية تفريق متغيرٍ، والموج هرمونيك، خلاك كاسر الامواج، عميل دسفرسي.

في هذا البحث تبحث عن يصبّ النظرية تفريق متغيرٍ في تطوّر الموج هرمونيك من خلاك كاسر الامواج التي هي الغشبة. هذه المسائل ينظر بالجريان فلودا الذي يقدرّ مثل فلودا خيالي بدون دوران في مجرى مقياسان. إنّ اشتقاق المعادلة الأساسية الفلودا يستعمل الحكم جمهور الثابت والحكم المناسب الثابت حتى ينال المعادلة لابلاس بحال حدّ الكينماتيك وحال حدّ الدينميك.

نظرية الموج المستعمك هونظرية الموج الخطية، فإذا يستعمل حال الحدّ يعني الخطية و معادلة لابلاس وحال الحدّ فلودا بالنظرية التفريق متغير. الموج يتعلف في كل مجار بالمكان والوقت يعني الموج هرمونيك. ليراقب تطوّر الموج في كل مجار يستخدم عميل دسفرسي الذي يشناق من طرز الخطية.

وعطية القيمة أمفليتودو إرسال الموج، فركونسي الموج ( $\omega$ ) وعمق المجرى ( $h_1, h_2, h_3$ ). والعدد الموج ( $k_1, k_2, k_3$ ) ينال من معادلة ديسفرسي فلذلك تظاهر يتعدّل عرض الجذع فركو يدفسى الموج وعال الجذع حتى يستطيع أن يستخلص أمّا الأكبر فركونسي الموج ( $\omega$ ) فأصغر العرض الأحسن الجذع حلّ الموج و إذا الأكبر عال الجذع حلّ الموج فأكبر تصغير أمفليتودو الموج أيضا. يستطيع الباحث المقبل ان يستخدم هذه نظرية الموج غير الخطية ليراقب تطوّر الموج من خلاك كاسر الامواج.



## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan ilmu matematika yang dapat digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah fisis merupakan masalah yang berkaitan dengan hukum alam, yang dibahas dalam ilmu fisika. Masalah fisis tersebut dapat dipahami sebab akibatnya, jika dibentuk dalam model persamaan diferensial. Tetapi hanya sistem fisis sederhana saja yang bisa dimodelkan dalam persamaan diferensial biasa. Berbagai bidang fisis lainnya yang dimodelkan dalam persamaan diferensial parsial seperti masalah fluida, transfer panas, maupun perambatan gelombang. Salah satu masalah fisis yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari yaitu masalah gelombang. Penyelesaian permasalahan tersebut dapat dilakukan dengan berbagai metode. Seperti firman Allah SWT dalam Al-Qur'an yaitu

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۗ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِن نَّسِينَا  
أَوْ أَخْطَاْنَا ۗ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِن قَبْلِنَا ۗ رَبَّنَا وَلَا  
تَحْمِلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۗ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا ۗ أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ  
الْكٰفِرِيْنَ ﴿١٠٧﴾

*Artinya: "Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau hukum Kami jika Kami lupa atau Kami tersalah. Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau bebaskan kepada Kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau pikulkan kepada Kami apa yang tak sanggup Kami*

*memikulnya. beri ma'afilah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong Kami, Maka tolonglah Kami terhadap kaum yang kafir “ (QS. Al-Baqarah: 286).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah SWT memberi beban kepada seseorang hanyalah sesuai dengan batas kemampuannya. Karena apabila seseorang dibebani di luar batas kemampuannya, pastilah tidak akan sanggup menjalani beban itu. Agama Islam adalah agama yang tidak memberatkan manusia dengan beban yang berat dan sukar. Mudah, ringan dan tidak sempit adalah asas pokok dari agama Islam.

Selain itu, Allah berfirman dalam QS. Yunus ayat 101

قُلْ أَنْظَرُوا مَاذَا فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَمَا تُغْنِي الْآيَاتُ وَالنُّذُرُ عَنْ قَوْمٍ لَا يُؤْمِنُونَ ﴿١٠١﴾

*Artinya: Katakanlah: “Perhatikanlah apa yang ada di langit dan di bumi, tidaklah bermanfaat tanda kekuasaan Allah dan Rasul-rasul yang memberi peringatan bagi orang-orang yang tidak beriman“ (QS. Yunus:101).*

Ayat tersebut menganjurkan manusia untuk melakukan pengkajian, penelitian, dan pengamatan tentang fenomena alam yang ada di langit dan di bumi. Dengan harapan manusia dapat mengambil manfaatnya sebagai ilmu pengetahuan agar dapat digunakan untuk kebutuhan dan kesejahteraan hidupnya. Selain itu, hal pokok yang harus diperoleh dengan mengamati tanda-tanda kekuasaan Allah tersebut, yaitu agar dapat mengambil pelajaran untuk meningkatkan keimanan dan ketakwaan dirinya kepada Allah SWT.

Seperti yang telah diuraikan sebelumnya bahwa ada berbagai macam masalah gelombang dalam kehidupan sehari-hari, maka untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dapat dilakukan dengan berbagai metode. Seperti metode separasi variabel atau dikenal dengan metode pemisahan variabel. Karena

gelombang yang terjadi di alam ini sangat kompleks, maka banyak orang terdorong untuk mempelajari fenomena gelombang yang terjadi di alam dan dilakukan beberapa asumsi sehingga muncul beberapa teori gelombang.

Pada gelombang harmonik, penyelesaian persamaannya didapatkan dari persamaan dasar fluida yang diturunkan berdasarkan asumsi fluida tak mampat dan tak kental yang tak berotasi. Penurunan persamaan dasar fluida menggunakan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum. Persamaan dasar yang diperoleh berupa persamaan *Laplace* (Hermansyah, 2011).

Wiryanto (2011) menurunkan model gelombang permukaan yang muncul akibat gangguan yang terjadi pada dasar saluran. Gangguan tersebut berupa pemecah gelombang berpori dengan bagian bawah saluran berbentuk datar dan padat. Model yang dihasilkan adalah pengembangan dari persamaan air dangkal atau *Shallow-water Equations* (SWE).

Menurut Wiryanto, model *Shallow-water Equations* (SWE) mampu menjelaskan pengurangan amplitudo gelombang yang melewati pemecah gelombang yang berpori, energi yang dibawa oleh gelombang juga berkurang karena sebanding dengan kuadrat amplitudo. Tsai, dkk (2006) mengadopsi fungsi potensial untuk membangun model dari permasalahan tersebut dengan menurunkan model perambatan gelombang sepanjang lapisan berpori sebagai persamaan hiperbolik dan menyelesaikannya dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

Dalam uraian mendatang, peneliti mengasumsikan gelombang permukaan yang dihasilkan adalah gelombang linier yang mengalami perubahan

terhadap ruang dan waktu, dengan tinggi gelombang lebih kecil dari panjang gelombang dan tidak terjadi interaksi antara gelombang satu dengan gelombang yang lain, serta aliran dalam dua dimensi untuk fluida ideal dan tak berotasi dengan dasar salurannya datar. Untuk menurunkan model, peneliti menyelesaikan persamaan *Laplace* dengan kondisi batasnya.

Berdasarkan penjelasan di atas, penelitian difokuskan untuk memodelkan gelombang pada perairan dangkal yang dihasilkan oleh aliran yang melalui sebuah pemecah gelombang, dengan mengambil judul “ *Penerapan Metode Pemisahan Variabel pada Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Sebuah Pemecah Gelombang* ”.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana solusi masalah evolusi gelombang harmonik yang melalui sebuah pemecah gelombang dengan menggunakan metode pemisahan variabel?
2. Bagaimana pengaruh ketinggian balok dan lebar balok pemecah gelombang terhadap penurunan amplitudo gelombang harmonik?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Sesuai dengan rumusan masalah yang ada, tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Untuk mengetahui solusi masalah evolusi gelombang harmonik yang melalui sebuah pemecah gelombang dengan menggunakan metode pemisahan variabel.
2. Untuk mengetahui pengaruh ketinggian balok dan lebar balok pemecah gelombang terhadap penurunan amplitudo gelombang harmonik.

#### **1.4 Manfaat Penelitian**

1. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini diharapkan dapat dijadikan sebagai dasar perhitungan untuk mendesain suatu pemecah gelombang yang dapat mereduksi amplitudo gelombang secara maksimal.
2. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjelaskan karakteristik dasar laut, karakteristik pemecah gelombang yang berupa balok terendam (tak berpori) terhadap evolusi gelombang harmonik pada permukaan fluida.

#### **1.5 Batasan Masalah**

Batasan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Permasalahan ditinjau sebagai masalah dua dimensi.
2. Pemecah gelombang berupa sebuah balok terendam.
3. Teori gelombang yang digunakan adalah teori gelombang linier untuk mengamati evolusi gelombang harmonik pada permukaan fluida.
4. Fluida diasumsikan ideal, yaitu tak termampatkan, tak kental, dan mempunyai kerapatan konstan.
5. Fluida diasumsikan sebagai fluida tak berotasi.

6. Tidak terjadi interaksi antara gelombang satu dengan gelombang yang lain.

### 1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan jenis penelitian deskriptif kualitatif dengan metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelusuran dan penelaahan terhadap beberapa literatur yang berhubungan dengan topik bahasan. Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menurunkan persamaan-persamaan pengatur pada media fluida dan hukum-hukum kesetimbangan yang terjadi pada aliran fluida tersebut.
2. Menentukan kondisi batas dinamik dan kinematik yang terjadi pada permukaan fluida dan pada dasar saluran.
3. Melakukan pelinieran terhadap persamaan-persamaan yang berlaku pada fluida dan media terendam.
4. Menyelesaikan persamaan *Laplace* beserta kondisi-kondisi batasnya pada fluida dengan menggunakan metode pemisahan variabel.
5. Menentukan relasi dispersi antara bilangan gelombang dan frekuensi gelombang.
6. Membuat simulasi evolusi gelombang permukaan dari solusi dan relasi dispersi yang diperoleh dengan memodifikasi parameter yang ada untuk melihat pengaruh dari masing-masing parameter terhadap fenomena yang terjadi.

7. Menentukan tinggi balok dan lebar optimal balok pada pemecah gelombang terendam.
8. Memberikan interpretasi dari hasil simulasi yang telah dibuat.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari laporan penelitian ini yang terbagi menjadi empat bagian, yaitu :

#### Bab I      Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

#### Bab II      Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan tentang gelombang harmonik, persamaan kontinuitas, kekekalan momentum, persamaan *Bernoulli*, persamaan *Laplace*, kondisi batas, teori gelombang linier, metode pemisahan variabel dan kajian tentang gelombang dalam Al-Qur'an.

#### Bab III      Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penulisan yang menjabarkan tentang cara penyelesaian masalah tersebut menggunakan metode pemisahan variabel, menentukan relasi dispersi serta akan disajikan hasil simulasi dengan memodifikasi lebar balok dan tinggi balok pemecah

gelombang untuk melihat pengaruhnya terhadap fenomena yang terjadi.

#### Bab IV Penutup

Pada bab ini dibahas tentang rangkuman hasil penelitian yang berupa kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian yang telah dibahas dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 1.1 Gelombang Harmonik

Setiap gerak yang terjadi secara berulang dalam selang waktu yang sama disebut gerak periodik. Karena gerak ini terjadi secara teratur maka disebut juga sebagai gerak harmonik/harmonis. Gerak harmonik sederhana yakni gerak periodik dengan lintasan yang ditempuh selalu sama (tetap) dan mempunyai persamaan gerak dalam bentuk sinusoidal dan digunakan untuk menganalisis suatu gerak periodik tertentu (Intan, 2012).

Untuk mencari kecepatan  $v$  gelombang sinusoidal disuatu titik tertentu  $x$  maka fungsi gelombang  $y(x, t)$  diturunkan terhadap  $t$  dengan mempertahankan  $x$  konstan. Jika fungsi gelombang itu adalah

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

maka

$$v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx)$$

persamaan di atas memperlihatkan bahwa kecepatan suatu partikel berubah seiring dengan waktu, seperti pada gerak harmonik sederhana. Laju partikel maksimum adalah  $\omega A$  yang dapat lebih besar, lebih kecil, atau sama dengan laju gelombang  $v$ , bergantung pada amplitudo dan frekuensi gelombang (Young & Freedman, 2003).

Untuk gelombang permukaan yang harmonik pada koordinat horizontal dimisalkan dalam  $\eta$  dalam bentuk khusus yang mewakili gelombang harmonik

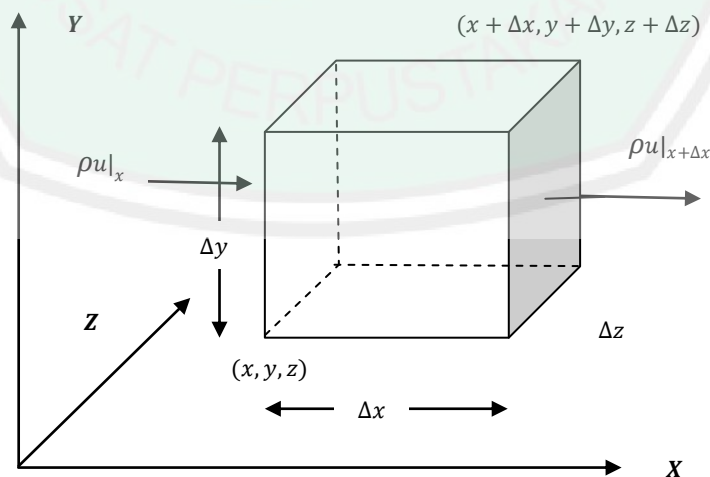
dengan asumsi permukaan dalam bentuk gelombang yang memiliki amplitudo  $a$ , nomor gelombang  $k$ , dan frekuensi gelombang  $\omega$ , dinyatakan sebagai persamaan (2.1) berikut:

$$\eta(x, t) = ae^{-i(kx - \omega t)} \quad (2.1)$$

### 1.2 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas mengungkapkan persyaratan bahwa suatu fluida harus kontinu dan massanya harus bersifat kekal, yakni tidak dapat diciptakan ataupun dimusnahkan. Kekekalan massa fluida mempersyaratkan bahwa dalam suatu volume zat massa selalu konstan, dan karena itu laju perubahan massanya sama dengan nol (Olson, 1993).

Hukum kekekalan massa untuk fluida menyatakan massa fluida yang masuk suatu elemen volume stasioner  $\Delta x \Delta y \Delta z$  sama dengan massa fluida yang keluar seperti pada gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1 Laju Perubahan Massa

Selisih antara massa rata-rata yang masuk dan massa rata-rata yang keluar dari elemen volume tersebut disebut perubahan massa rata-rata. Jika rapat massa dinotasikan oleh  $\rho$  dan aliran fluida dipandang dalam satu arah, misalkan arah sumbu  $x$ , maka rata-rata massa yang masuk pada elemen volume (melintasi bidang  $x$ ) dapat dinyatakan dengan  $\rho u|_x \Delta y \Delta z$ , dan rata-rata massa yang keluar melintasi bidang  $x + \Delta x$  dapat dinyatakan dengan  $\rho u|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Notasi  $u$  menyatakan komponen kecepatan dalam arah  $x$ . Secara lengkap vektor kecepatan dinotasikan dengan  $\bar{q} = (u, v, w)$ . Cara yang sama dapat dilakukan untuk arah aliran fluida lainnya, yaitu arah sumbu  $y$  dan sumbu  $z$ . Oleh karena itu, hukum kekekalan massa dapat ditulis

Perubahan massa = massa yang masuk - massa yang keluar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = & (\rho u|_x \Delta y \Delta z - \rho u|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z) \\ & + (\rho v|_y \Delta x \Delta z - \rho v|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z) \\ & + (\rho w|_z \Delta x \Delta y - \rho w|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = & (\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \\ & + (\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z \\ & + (\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2.3)$$

Jika kedua ruas pada persamaan (2.3) dibagi dengan  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , maka diperoleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z})}{\Delta z}$$

untuk  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  dan  $\Delta z \rightarrow 0$ , maka

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z})}{\Delta z} = -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

dan diperoleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

Dengan menggunakan asumsi fluida tak termampatkan, yaitu fluida yang mengalir tanpa mengalami perubahan volume atau massa jenis, maka kepadatan massa ( $\rho$ ) akan konstan dan  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  (yaitu semua turunan  $\rho$  adalah nol). Sehingga persamaan tersebut tereduksi menjadi persamaan (2.4).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$0 + \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) merupakan persamaan kontinuitas yang berasal dari persamaan kekekalan massa, namun massa atau kepadatan massa ( $\rho$ ) seperti telah

menghilang dari persamaan. Ini adalah persamaan linier dalam hal kecepatan partikel air  $u$ ,  $v$  dan  $w$  (Holthuijsen, 2007).

### 2.3 Kekekalan Momentum

Teorema momentum dapat diterapkan pada aliran-aliran baik yang *steady* maupun tidak *steady*; berdimensi satu, dua, atau tiga, dapat mampat atau tidak dapat mampat. Sebagaimana halnya dalam kasus partikel-partikel padat atau diskrit, fluida cenderung meneruskan keadaan diamnya atau gerak serempaknya kecuali bila diganggu oleh gaya-gaya dari luar (Olson, 1993).

Momentum adalah sebuah nilai dari perkalian materi yang bermassa (memiliki bobot) dengan pergerakan (kecepatan). Dalam Fisika momentum dilambangkan dengan huruf  $P$ , secara matematis momentum dapat dirumuskan:

$$P = mv \quad (2.5)$$

dengan  $P$  adalah momentum,  $m$  adalah massa, dan  $v$  adalah kecepatan.

Momentum akan berubah seiring dengan perubahan massa dan kecepatan. Semakin cepat pergerakan suatu materi/benda akan semakin besar juga momentumnya. Semakin besar momentum, maka semakin besar kekuatan yang dimiliki oleh suatu benda. Jika materi dalam keadaan diam, maka momentumnya sama dengan nol. Sebaliknya semakin cepat pergerakannya, semakin besar juga momentumnya.

Karena  $m = \rho V$  maka persamaan (2.5) menjadi

$$P = \rho V v \quad (2.6)$$

dimana  $V$  adalah volume, dan  $\rho$  adalah kerapatan massa.

Dengan  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , sehingga persamaan (2.6) menjadi

$$P = \rho \Delta x \Delta y \Delta z v \quad (2.7)$$

dan persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= (u|_x - u|_{x+\Delta x}) \rho \Delta y \Delta z + (v|_y - v|_{y+\Delta y}) \rho \Delta x \Delta z \\ &+ (w|_z - w|_{z+\Delta z}) \rho \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

dengan

$$(u|_x - u|_{x+\Delta x}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{kecepatan pada arah } x$$

$$(v|_y - v|_{y+\Delta y}) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \text{kecepatan pada arah } y$$

$$(w|_z - w|_{z+\Delta z}) = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \text{kecepatan pada arah } z$$

Karena perubahan momentum merupakan selisih jumlah momentum yang masuk dengan momentum yang keluar ditambah dengan gaya-gaya eksternal, maka untuk momentum pada arah  $x$  dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Perubahan momentum} &= P_{\text{masuk}} - P_{\text{keluar}} + \text{gaya gaya eksternal} \\ &= (\text{massa} \times \text{kecepatan}) - (\text{massa} \times \text{kecepatan}) + \text{gaya gaya eksternal} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sehingga persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} (\Delta x \Delta y \Delta z) &= [(\rho u^2|_x) \Delta y \Delta z - (\rho u^2|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z] + \\ &[(\rho u v|_y) \Delta x \Delta z - (\rho u v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z] + \\ &[(\rho u w|_z) \Delta x \Delta y - (\rho u w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y] + \\ &(p|_x - p|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z + \rho g_{(x)} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Jika kedua ruas dibagi dengan  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , maka diperoleh

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \left[ \frac{(\rho u^2|_x) - (\rho u^2|_{x+\Delta x})}{\Delta x} \right] + \left[ \frac{(\rho uv|_y) - (\rho uv|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \right] + \left[ \frac{(\rho uw|_z) - (\rho uw|_{z+\Delta z})}{\Delta z} \right] + \frac{(p|_x - p|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{\rho g_{(x)}}{\Delta x}$$

untuk  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0$  maka

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0} \left[ \frac{(\rho u^2|_x) - (\rho u^2|_{x+\Delta x})}{\Delta x} \right] + \left[ \frac{(\rho uv|_y) - (\rho uv|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \right] + \left[ \frac{(\rho uw|_z) - (\rho uw|_{z+\Delta z})}{\Delta z} \right] + \frac{(p|_x - p|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{\rho g_{(x)}}{\Delta x}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} &= - \left[ \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} \right] - \left[ \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} \right] - \left[ \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_{(x)} \\ &= -\rho \left[ \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_{(x)} \end{aligned}$$

atau

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_{(x)}$$

Dikalikan dengan  $\frac{1}{\rho}$  sehingga diperoleh

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_{(x)} \quad (2.9)$$

Dengan cara yang sama, maka akan diperoleh kekekalan momentum pada arah  $y$  dan arah  $z$  sebagai berikut:

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_{(y)} \quad (2.10)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_{(z)} \quad (2.11)$$

Dari persamaan (2.9), (2.10) dan (2.11) dapat ditulis dalam notasi vektor

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \bar{g} \quad (2.12)$$

dengan  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ,  $\bar{q} = (u, v, w)$ , karena gaya gravitasi hanya bekerja pada arah  $y$  maka  $\bar{g} = -\nabla g y$ .

#### 2.4 Persamaan Bernoulli

Menurut Spiegel (1999) hasil kali silang dari tiga buah vektor  $A, B$ , dan  $C$  yang dapat ditulis sebagai  $A \times (B \times C)$  disebut hasil kali triple vektor dan berlaku

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

Sehingga hasil kali triple vektor  $\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q})$  berlaku

$$\begin{aligned} \bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) &= (\bar{q} \cdot \bar{q})\nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q} \\ &= \left( \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 \right) \nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q} \end{aligned}$$

(bukti dapat dilihat pada lampiran 5). Untuk fluida dengan aliran seragam dan fluida tak berotasi ( $\nabla \times \bar{q} = 0$ ), maka

$$\bar{q} \times 0 = \left( \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 \right) \nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}$$

$$0 = \nabla \left( \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 \right) - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}$$

$$\nabla \left( \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 \right) = (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}$$

sehingga persamaan (2.12) menjadi

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla g y \quad (2.13)$$

dengan  $\bar{q} = \nabla \phi(x, y, z) = (\phi_x, \phi_y, \phi_z) = (u, v, w)$  dan  $|\bar{q}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ,

$|\bar{q}|$ : besarnya laju (kecepatan). Maka Persamaan (2.13) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \nabla \left( \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 \right) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla g y \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \nabla \left( \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla g y &= 0 \\ \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 + \frac{1}{\rho} p + g y \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Selanjutnya dengan menggunakan integral batas, persamaan (2.14) menjadi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 + \frac{1}{\rho} p + g y = f(t) \quad (2.15)$$

dengan  $f(t)$  fungsi sembarang dari  $t$ , dan persamaan (2.15) dikenal sebagai persamaan *Bernoulli*.

## 2.5 Persamaan Laplace

Selanjutnya, dengan asumsi bahwa partikel fluida yang ditinjau tak berotasi yaitu  $\nabla \times \bar{q} = 0$ , maka terdapat fungsi potensial  $\phi$ . Menurut Holthuijsen (2007) fungsi potensial  $\phi(x, y, z, t)$  didefinisikan sebagai

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.16)$$

atau dalam notasi vektor  $\bar{q} = \nabla \phi$ .

Jika dilakukan substitusi persamaan (2.16) ke persamaan kontinuitas (2.4) maka

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.17)$$

atau dalam notasi vektor  $\bar{q} = \nabla^2 \phi$ . Persamaan (2.17) disebut persamaan *Laplace*.

Setiap fungsi  $\phi(x, y)$  yang memenuhi persamaan *Laplace* disebut harmonik dan merupakan salah satu kecepatan potensial yang mungkin untuk menggambarkan aliran tak berotasi tertentu. Komponen-komponen kecepatan pada aliran demikian dapat diperoleh dari persamaan  $u$  dan  $v$ . Solusi untuk persamaan *Laplace* tidak terbatas, karena itu untuk mendapatkan solusi yang dikehendaki kita perlu menerapkan kondisi-kondisi batas yang sesuai (Olson, 1993).

Persamaan differensial *Laplace 2D* mempunyai banyak solusi yang masing-masing bergantung pada nilai batas yang ada. Secara analitis, solusi persamaan *Laplace 2D* tidak dapat diturunkan secara umum melainkan hanya secara khusus saja. Hal ini disebabkan karena pengaruh nilai batas (kondisi batas) yang ada dan bentuk dari domain persamaan *Laplace 2D* tersebut berlaku sehingga dapat diselesaikan secara analitik menggunakan metode pemisahan variabel (Hamzah, 2008).

## 2.6 Kondisi Batas

Kondisi batas diperlukan untuk dapat menyelesaikan model yang ada. Terdapat dua jenis kondisi batas, yaitu kondisi batas kinematik dan kondisi batas dinamik. Kondisi batas kinematik muncul karena gerak dari partikel fluida itu sendiri. Sedangkan kondisi batas dinamik terjadi karena adanya gaya-gaya yang bekerja pada fluida (Hermansyah, 2011).

### 2.6.1 Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Fluida

Kondisi batas kinematik pada permukaan fluida  $y = h + \eta(x, t)$  diperoleh dengan cara menuliskan kondisi tersebut secara implisit sebagai berikut

$$F = y - h - \eta(x, t) = 0 \quad (2.18)$$

misalkan permukaan  $F$  pada fluida dinyatakan sebagai persamaan  $F(x, y, t) = 0$  untuk suatu partikel yang berada pada koordinat  $(x, y)$ . Partikel tersebut tetap pada permukaan fluida, maka dapat dinyatakan dalam operator turunan total

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

dan didefinisikan

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

maka

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \quad (2.19)$$

Dan dilakukan substitusi persamaan (2.18) ke persamaan (2.19), sehingga

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(y - h - \eta(x, t))}{\partial t} + u \frac{\partial(y - h - \eta(x, t))}{\partial x} + v \frac{\partial(y - h - \eta(x, t))}{\partial y} \\ &= -\eta_t - u \eta_x + v \end{aligned}$$

dengan  $u = \phi_x$  dan  $v = \phi_y$  maka

$$\begin{aligned} 0 &= -\eta_t - \phi_x \eta_x + \phi_y \\ &= \phi_y - \eta_t - \phi_x \eta_x \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) merupakan kondisi batas kinematik pada permukaan fluida.

### 2.6.2 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Fluida

Untuk kondisi batas dinamik pada permukaan fluida dinyatakan dalam fungsi potensial yang diperoleh dengan mengambil persamaan *Bernoulli* (2.15) berikut.

$$\phi_t + \frac{1}{2}|\bar{q}|^2 + \frac{1}{\rho}p + gy = f(t)$$

Kondisi batas dinamik permukaan fluida pada  $y = h + \eta(x, t)$  tekanan udara dianggap sangat kecil dan dapat diabaikan sehingga  $P = 0$ . Maka persamaan *Bernoulli* menjadi

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + g(h + \eta(x, t)) = f(t) \quad (2.21)$$

Pada keadaan seragam (*uniform*) maka ruas kiri dari persamaan *Bernoulli* berlaku kecepatan vertikal  $\phi_y = 0$ , kecepatan horizontal  $\phi_x = c$  dan  $\phi_t = 0$  karena tidak ada perubahan terhadap waktu, sehingga

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + g(h + \eta(x, t)) = f(t)$$

$$0 + \frac{1}{2}(c^2 + 0) + g(h) = f(t)$$

$$\frac{1}{2}c^2 + g(h) = f(t) \quad (2.22)$$

dengan substitusi persamaan (2.22) ke persamaan (2.15) maka

$$\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\rho}p + g(h + \eta(x, t)) = \frac{1}{2}c^2 + g(h)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gh + g\eta(x, t) = \frac{1}{2}c^2 + g(h)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta(x, t) = \frac{1}{2} c^2$$

Jika diberikan kecepatan mula-mula nol ( $c = 0$ ) maka dapat ditulis sebagai

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0 \quad \text{di } y = \eta(x, t) \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) disebut kondisi batas dinamik pada permukaan fluida.

### 2.6.3 Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Saluran

Kondisi batas kinematik pada dasar fluida  $y = -h$  diperoleh dengan cara menuliskan kondisi tersebut secara implisit berikut

$$F = y + h = 0 \quad (2.24)$$

misalkan permukaan  $F$  pada fluida dinyatakan sebagai persamaan  $F(x, y, t) = 0$  untuk suatu partikel yang berada pada koordinat  $(x, y)$ . Partikel tersebut tetap pada permukaan fluida, maka dapat dinyatakan dalam operator turunan total

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

dan didefinisikan

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

maka

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \quad (2.25)$$

Dan dilakukan substitusi persamaan (2.24) ke persamaan (2.25), sehingga

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(y+h)}{\partial t} + u \frac{\partial(y+h)}{\partial x} + v \frac{\partial(y+h)}{\partial y} \\ &= 0 + 0 + v \end{aligned}$$

dengan  $u = \phi_x$  dan  $v = \phi_y$  maka

$$0 = \phi_y$$

Sehingga kondisi batas kinematik dibagian bawah (dasar) saluran dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ pada } y = -h$$

## 2.7 Teori Gelombang Linier

Teori gelombang adalah formulasi pendekatan dari gelombang yang terjadi sebenarnya. Teori gelombang mendeskripsikan fenomena alam dengan memenuhi asumsi tertentu. Teori gelombang linier merupakan teori gelombang yang paling sederhana yang pertama kali ditemukan oleh *Sir George Biddell Airy* pada tahun 1845. Gelombang dikategorikan linier artinya puncak dan lembah gelombang memiliki amplitudo yang sama. Teori gelombang linier juga disebut dengan teori gelombang amplitude kecil dengan asumsi tinggi gelombang adalah sangat kecil jika dibandingkan terhadap panjang gelombang atau kedalaman laut (Yahya, 2012).

Persamaan Teori Gelombang Linier diturunkan dari persamaan *Laplace* untuk aliran tak berotasi. Kondisi batas permukaan yang diambil menggunakan persamaan *Bernoulli* yang dilinierkan, sedangkan kondisi batas dasar laut diambil dari kecepatan arah vertikal sama dengan nol.

## 2.7.1 Kondisi-Kondisi Batas Linier

### 2.7.1.1 Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Fluida

Menurut Ridwan dkk, persamaan (2.20) bersifat nonlinier akibat suku-suku  $\phi_x \eta_x$  dan dapat disederhanakan dengan ekspansi di sekitar  $y = 0$ .

$$(\phi_y)_\eta = (\phi_y)_0 + \eta(\phi_{yy})_0 + \dots$$

Berdasarkan pendekatan orde pertama,  $\phi_y$  dalam persamaan (2.20) dapat dievaluasi di  $y = 0$  daripada di  $y = \eta$ . Sehingga syarat batas kinematik pada permukaan fluida dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.26)$$

### 2.7.1.2 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Fluida

Dysthe (2004) menyatakan untuk gelombang dengan kecuraman yang kecil maka suku nonlinearnya kecil. Oleh karena itu untuk mendapatkan pendekatan yang baik terhadap sifat gelombang maka akan dilakukan proses linierisasi dengan mengabaikan kuadrat dan orde yang lebih tinggi.

$$\phi(x, \eta, z, t) = \phi(x, 0, z, t) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, z, t)\eta + \dots$$

Ini berarti bahwa unsur yang mengandung  $\phi$  dievaluasi pada  $y = 0$  saat linierisasi. Sehingga dapat ditulis sebagai persamaan (2.23) yaitu persamaan *Bernoulli* linier untuk aliran *unsteady*.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

Karena fluida tak termampatkan, maka kerapatan dalam fluida ( $\rho$ ) adalah konstan. Sehingga persamaan *Bernoulli* tersebut dapat ditulis sebagai kondisi batas dinamik pada permukaan  $y = \eta$  dan  $\rho = 0$  berikut.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (2.27)$$

### 2.7.1.3 Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Saluran

Berdasarkan penurunan pada subbab sebelumnya, maka kondisi batas kinematik dibagian bawah (dasar) saluran yang akan digunakan dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ pada } y = -h \quad (2.28)$$

## 2.8 Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Misalnya saja solusi  $u(x, t)$  untuk persamaan diferensial parsial. Untuk menentukan solusi  $u(x, t)$  bisa ditulis dengan variabel terpisah  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Selanjutnya dilakukan substitusi dari bentuk ini ke persamaan diferensial. Dengan cara ini akan dihasilkan solusi persamaan untuk persamaan diferensial parsial (Nagle, dkk., 2012).

Metode pemisahan variabel diterapkan untuk solusi awal atau masalah nilai batas dan kondisi batas pada persamaan homogen (Zauderer, 2006). Untuk menentukan solusi persamaan gelombang yakni:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ untuk } 0 < x < l \quad (2.29)$$

$$u(0, t) = 0 = u(l, t) \quad (2.30)$$

dengan beberapa kondisi awal yaitu

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2.31)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.29) dan (2.30), akan dimisalkan  $u$  ke dalam bentuk terpisah berikut:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.32)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi persamaan (2.32) ke dalam persamaan (2.29)

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \quad (2.33)$$

dan membagi kedua ruas persamaan (2.33) dengan  $-c^2 X(x)T(t)$

$$\begin{aligned} \frac{X(x)T''(t)}{-c^2 X(x)T(t)} &= \frac{c^2 X''(x)T(t)}{-c^2 X(x)T(t)} \\ \frac{T''(t)}{-c^2 T(t)} &= -\frac{X''(x)}{X(x)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Strauss (2007) menyebutkan bahwa pada persamaan (2.34) ruas kiri hanya tergantung pada  $t$  dan ruas kanan tergantung pada  $x$ . Sehingga dapat dimisalkan menjadi sebuah konstanta yang tidak tergantung pada keduanya.

Misalkan konstanta adalah  $\lambda$  maka persamaan (2.34) dapat ditulis menjadi

$$\frac{T''(t)}{-c^2 T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (2.35)$$

Karena pada akhir pembahasan akan ditunjukkan bahwa  $\lambda > 0$ , maka  $\lambda$  dapat dimisalkan menjadi  $\beta^2$  sehingga persamaan (2.35) dapat dipisah menjadi

$$\frac{T''(t)}{-c^2 T(t)} = \beta^2$$

$$T''(t) = -c^2 T(t) \beta^2$$

$$T''(t) + c^2 \beta^2 T(t) = 0 \quad (2.36)$$

dan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \beta^2$$

$$X(x) \beta^2 = -X''(x)$$

$$X''(x) + X(x) \beta^2 = 0 \quad (2.37)$$

Sehingga dapat ditemukan solusi dari persamaan (2.36) dan persamaan (2.37) sebagai berikut:

$$T(t) = A \cos \beta ct + B \sin \beta ct$$

$$X(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x \quad (\text{Strauss, 2007}).$$

## 2.9 Kajian Tentang Gelombang dalam Al-Qur'an

Evolusi gelombang merupakan perubahan bentuk dari getaran yang merambat pada suatu medium. Dalam Al-Qur'an telah disinggung tentang gelombang yaitu surah Ar-Rum ayat 46, Allah berfirman

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ يُرْسِلَ الرِّيحَ مُبَشِّرَاتٍ وَلِيُذِيقَكُمْ مِنْ رَحْمَتِهِ وَلِتَجْرِيَ الْفُلُكُ بِأَمْرِهِ وَلِتَبْتَغُوا

مِنْ فَضْلِهِ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٤٦﴾

Artinya: "Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa Dia mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-Nya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya dan (juga) supaya kamu dapat mencari karunia-Nya, mudah-mudahan kamu bersyukur" (QS.Ar Ruum: 46).

Secara umum kata “ angin ” yaitu angin yang bertiup membawa awan untuk menurunkan hujan dan yang meniup kapal layar agar dapat berlayar di lautan. Kedekatan makna “angin” dalam ayat di atas adalah gelombang. Dalam tafsir Al-Misbah ayat di atas berbicara tentang angin untuk menggambarkan nikmat Allah dan kuasa Allah di darat dan di laut. Angin ada yang membawa manfaat ada juga yang mengakibatkan bencana. Manusia pun demikian, yang kafir dengan perusakannya mengakibatkan bencana sedangkan yang mukmin dengan amal salehnya mengandung manfaat.

Kata “ بَأْمَرِهِ ” (atas perintah/ izin-Nya) ditekankan oleh ayat tersebut untuk mengingatkan manusia betapa besar nikmat Allah yang dianugerahkan kepada mereka melalui kemampuan kapal menggarungi samudra serta keselamatan selama perjalanan, dan bahwa Allah menetapkan hukum-hukum alam yang memungkinkan manusia memanfaatkan lautan dengan segala isinya (Quraish, 2002).

Allah SWT juga berfirman dalam Al-Qur’an masalah gelombang pada surat Lukman ayat 32 yaitu

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوَّجٌ كَالظُّلَلِ دَعَوْا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ فَلَمَّا نَجَّاهُمْ إِلَى الْبَرِّ فَمِنْهُمْ مُّقْتَصِدٌ وَمَا تَجْحَدُ بِقَائِتِنَا إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ﴿٣٢﴾

Artinya: “Dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya Maka tatkala Allah menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap menempuh jalan yang lurus, dan tidak ada yang mengingkari ayat- ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar“ (QS. Lukman: 32).

Dalam tafsir Al-Qurthubi kata “ الموج ” artinya gelombang diserupakan dengan “ الظلل ” artinya gunung-gunung, karena gelombang datang sedikit demi

sedikit dan saling menghantam satu sama lain, seperti halnya awan (Al-Qurthubi, 2009).

Selain itu, tanda-tanda kekuasaan Allah SWT diperjelas pada surat Al-Anbiya' ayat 30 yaitu

أُولَئِكَ الَّذِينَ كَفَرُوا أَنَّ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَاهُمَا<sup>ط</sup> وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ<sup>ط</sup>

Artinya: “Dan Apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya. dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka Mengapakah mereka tiada juga beriman?” (QS. Al-Anbiya’: 30).

Dalam tafsir Al-Misbah (2002), pendapat ulama tentang firman-Nya tersebut. Ada ulama yang memahaminya dalam arti langit dan bumi tadinya merupakan gumpalan yang terpadu. Hujan tidak turun dan bumipun tidak ditumbuhi pepohonan, kemudian Allah membelah langit dan bumi dengan jalan menurunkan hujan dari langit dan menumbuhkan tumbuh-tumbuhan di bumi. Ulama lain berpendapat bahwa bumi dan langit tadinya merupakan sesuatu yang utuh tidak terpisah, kemudian Allah pisahkan dengan mengangkat langit ke atas dan membiarkan bumi tetap ditempatnya berada dibawah lalu memisahkan keduanya dengan udara.

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Penyelesaian Persamaan *Laplace* Beserta Kondisi Batas dengan Pemisahan Variabel

Permasalahan gelombang harmonik melalui sebuah pemecah gelombang dapat diselesaikan dengan menurunkan persamaan-persamaan teori gelombang linier yang membutuhkan persamaan pengatur bersifat umum. Persamaan pengatur dalam hal ini adalah persamaan *Laplace* yang telah diturunkan pada Bab II yaitu

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (3.1)$$

pada domain  $-h < y < \eta(x, t)$  dengan kondisi batas kinematik dan dinamik

$$\eta_t - \phi_y = 0 \quad (3.2)$$

$$\phi_t + g\eta = 0 \quad (3.3)$$

pada permukaan fluida  $y = 0$ . Dan

$$\phi_y = 0 \quad (3.4)$$

kondisi batas kinematik pada dasar saluran  $y = -h$ .

Untuk menyelesaikan persamaan *Laplace* (3.1) beserta kondisi-kondisi batas (3.2), (3.3), dan (3.4) digunakan metode pemisahan variabel dengan memisalkan  $\phi(x, y, t)$  sebagai perkalian dari dua fungsi berikut:

$$\phi(x, y, t) = S(x, t)F(y) \quad (3.5)$$

Sebelum menentukan  $\phi$ , terlebih dahulu akan ditentukan fungsi  $S(x, t)$  dengan memisalkan permukaan fluida untuk dasar rata sebagai

$$\eta(x, t) = Ae^{-i(kx - \omega t)} \quad (3.6)$$

dengan menggunakan kondisi batas kinematik pada permukaan fluida (3.2), maka

$$\eta_t - \phi_y = 0$$

$$\eta_t - S(x, t)F'(y) = 0$$

pada  $y = 0$  sehingga

$$\eta_t - S(x, t)F'(0) = 0$$

$$\eta_t(x, t) = S(x, t)F'(0)$$

Kemudian substitusikan persamaan (3.6) maka

$$\frac{\partial}{\partial t} Ae^{-i(kx - \omega t)} = S(x, t)F'(0)$$

$$i\omega Ae^{-i(kx - \omega t)} = S(x, t)F'(0)$$

dan diperoleh

$$S(x, t) = \frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t) \quad (3.7)$$

Selanjutnya dari kondisi batas dinamik pada permukaan fluida (3.3) maka

$$\phi_t = -g\eta$$

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} F(y) = -g\eta(x, t)$$

pada  $y = 0$  sehingga

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} F(0) = -g\eta(x, t)$$

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = -\frac{g}{F(0)} \eta(x, t)$$

dan diperoleh

$$\begin{aligned}
 S(x, t) &= -\frac{g}{F(0)} \int A e^{-i(kx - \omega t)} dt \\
 &= -\frac{g}{F(0)} \left[ \frac{1}{i\omega} A e^{-i(kx - \omega t)} + C \right] \\
 &= -\frac{g}{F(0)} \left[ \frac{1}{i\omega} \eta(x, t) + C \right]
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sehingga dari persamaan (3.7) dan (3.8) diperoleh

$$\begin{aligned}
 S(x, t) &= S(x, t) \\
 \frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t) &= -\frac{g}{F(0)} \left[ \frac{1}{i\omega} \eta(x, t) + C \right]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\left( -\frac{F(0)}{g} \right) \left( \frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t) \right) = \left( \frac{1}{i\omega} \eta(x, t) + C \right)$$

maka

$$\begin{aligned}
 \left( -\frac{F(0)i\omega}{g F'(0)} \eta(x, t) \right) - \left( \frac{1}{i\omega} \eta(x, t) \right) &= C \\
 \left( \frac{-F(0)i^2\omega^2 - g F'(0)}{i\omega g F'(0)} \right) \eta(x, t) &= C
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Karena  $C$  dan  $\left( \frac{-F(0)i^2\omega^2 - g F'(0)}{i\omega g F'(0)} \right)$  merupakan suatu konstanta dan  $\eta(x, t)$

bergantung pada variabel  $x$  dan  $t$ , maka persamaan (3.10) hanya dapat dipenuhi

jika konstanta-konstanta tersebut sama dengan nol sehingga persamaan (3.9)

menjadi

$$\frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t) = -\frac{g}{i\omega F(0)} \eta(x, t)$$

dan

$$\left( \frac{i\omega}{F'(0)} + \frac{g}{i\omega F(0)} \right) \eta(x, t) = 0$$

Karena  $\eta(x, t) \neq 0$ , maka

$$\frac{i\omega}{F'(0)} + \frac{g}{i\omega F(0)} = 0$$

$$\frac{i\omega}{F'(0)} = -\frac{g}{i\omega F(0)}$$

dan

$$i^2 \omega^2 F(0) = -g F'(0)$$

$$-\omega^2 F(0) = -g F'(0)$$

diperoleh

$$F'(0) = \frac{F(0)\omega^2}{g}$$

Untuk  $F(0) = 1$  maka persamaan di atas menjadi

$$F'(0) = \frac{\omega^2}{g}$$

Jika  $F'(0)$  disubstitusikan kembali ke persamaan (3.7) diperoleh

$$S(x, t) = \frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t)$$

$$= \frac{i\omega g}{\omega^2} \eta(x, t)$$

$$= \frac{ig}{\omega} \eta(x, t)$$

(3.11)

Sehingga jika persamaan (3.11) disubstitusikan ke persamaan (3.5) menjadi

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) F(y) \quad (3.12)$$

Selanjutnya untuk mencari solusi  $F(y)$ , maka persamaan (3.12) disubstitusikan ke persamaan Laplace (3.1) sehingga

$$S_{xx}(x, t)F(y) + S(x, t)F''(y) = 0$$

$$\frac{ig}{\omega}\eta_{xx}(x, t)F(y) + \frac{ig}{\omega}\eta(x, t)F''(y) = 0$$

Dikalikan dengan  $\frac{\omega}{ig}$  maka

$$\eta_{xx}(x, t)F(y) + \eta(x, t)F''(y) = 0$$

$$-\eta_{xx}(x, t)F(y) = \eta(x, t)F''(y)$$

$$-\frac{\eta_{xx}(x, t)}{\eta(x, t)} = \frac{F''(y)}{F(y)}$$

Ruas kiri hanya mengandung fungsi yang tergantung hanya pada variabel  $(x, t)$  sedangkan ruas kanan mengandung fungsi yang tergantung hanya pada variabel  $y$ . Ini berarti ruas kanan maupun ruas kiri sama dengan suatu konstanta dan menghasilkan dua persamaan diferensial terpisah sebagai berikut:

$$\frac{F''(y)}{F(y)} = \lambda$$

$$F''(y) - \lambda F(y) = 0 \tag{3.13}$$

dan

$$-\frac{\eta_{xx}(x, t)}{\eta(x, t)} = \lambda$$

$$\eta_{xx}(x, t) + \lambda\eta(x, t) = 0 \tag{3.14}$$

Untuk mencari nilai  $\eta_{xx}(x, t)$  maka perhatikan persamaan (3.6) berikut

$$\eta(x, t) = Ae^{-i(kx - \omega t)}$$

$$\eta_x(x, t) = -ikAe^{-i(kx - \omega t)}$$

dan diperoleh

$$\eta_{xx}(x, t) = -k^2Ae^{-i(kx - \omega t)}$$

$$= -k^2\eta(x, t)$$

Sehingga jika nilai  $\eta_{xx}(x, t)$  tersebut disubstitusikan ke persamaan (3.14) maka

$$\eta_{xx}(x, t) + \lambda\eta(x, t) = 0$$

$$-k^2\eta(x, t) + \lambda\eta(x, t) = 0$$

$$\lambda\eta(x, t) = k^2\eta(x, t)$$

dan dikalikan dengan  $\frac{1}{\eta(x, t)}$  diperoleh

$$\lambda = k^2$$

Untuk mencari solusi  $F(y)$ , maka perhatikan persamaan (3.13) dan dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$F''(y) - \lambda F(y) = 0$$

$$F'' - 0F' - \lambda F = 0$$

$$m^2 - 0m - \lambda = 0 \text{ (persamaan karakteristik)}$$

$$m^2 = \lambda$$

$$m = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$m_1 = \sqrt{\lambda} \text{ dan } m_2 = -\sqrt{\lambda}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} F(y) &= Pe^{m_1 y} + Qe^{m_2 y} \\ &= Pe^{\sqrt{\lambda} y} + Qe^{-\sqrt{\lambda} y} \end{aligned}$$

Karena  $\lambda = k^2$ , maka solusi dari persamaan (3.13) yaitu

$$F(y) = Pe^{ky} + Qe^{-ky} \quad (3.15)$$

Jika digunakan  $F(0) = 1$ , maka

$$F(0) = Pe^{k \cdot 0} + Qe^{-k \cdot 0}$$

$$1 = P + Q$$

$$P = 1 - Q$$

dengan mensubstitusikan  $P$  tersebut ke persamaan (3.15) maka

$$F(y) = (1 - Q)e^{ky} + Qe^{-ky}$$

dan jika diturunkan terhadap  $y$  diperoleh

$$F'(y) = (1 - Q)ke^{ky} - Qke^{-ky}$$

Untuk  $F'(0) = \frac{\omega^2}{g}$ , maka

$$F'(0) = (1 - Q)ke^{k \cdot 0} - Qke^{-k \cdot 0}$$

$$\frac{\omega^2}{g} = (1 - Q)k - Qk$$

$$= k - Qk - Qk$$

$$= k - 2Qk$$

$$2Qk = k - \frac{\omega^2}{g}$$

dan diperoleh

$$Q = \frac{k}{2k} - \frac{\omega^2}{g2k}$$

atau dapat ditulis

$$Q = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{gk} \right) \quad (3.16)$$

dan dengan mensubstitusikan kembali  $Q$  tersebut diperoleh

$$P = 1 - Q$$

$$= 1 - \left( \frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{g2k} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{g2k}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{g2k}$$

atau dapat ditulis

$$P = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{gk} \right) \quad (3.17)$$

Jika  $Q$  pada persamaan (3.16) dan  $P$  pada persamaan (3.17) disubstitusikan ke persamaan (3.15) maka

$$F(y) = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{gk} \right) \right] e^{ky} + \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{gk} \right) \right] e^{-ky}$$

$$= \frac{1}{2} e^{ky} + \frac{1}{2} e^{-ky} + \frac{\omega^2}{2gk} e^{ky} - \frac{\omega^2}{2gk} e^{-ky}$$

$$= \left( \frac{e^{ky} + e^{-ky}}{2} \right) + \frac{\omega^2}{gk} \left( \frac{e^{ky} - e^{-ky}}{2} \right)$$

Sehingga solusi  $F(y)$  tersebut dapat ditulis menjadi

$$F(y) = \cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(ky) \quad (3.18)$$

Sehingga jika persamaan (3.18) disubstitusikan ke persamaan (3.12) menjadi

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[ \cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(ky) \right] \quad (3.19)$$

### 3.2 Menentukan Relasi Dispersi

Persamaan dispersi merupakan persamaan yang menyatakan hubungan antara  $\omega$  (frekuensi gelombang) dan  $k$  (bilangan gelombang) yang diperoleh dari kondisi batas kinematik  $\phi_y = 0$  pada dasar saluran  $y = -h$  sebagai berikut:

$$\phi_y(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[ k \sinh(ky) + k \frac{\omega^2}{gk} \cosh(ky) \right]$$

$$0 = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[ k \sinh(ky) + \frac{\omega^2}{g} \cosh(ky) \right]$$

dan

$$\frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[ k \sinh(-kh) + \frac{\omega^2}{g} \cosh(-kh) \right] = 0$$

$$-k \sinh(kh) + \frac{\omega^2}{g} \cosh(kh) = 0$$

$$\frac{\omega^2}{g} \cosh(kh) = k \sinh(kh)$$

$$\omega^2 \cosh(kh) = gk \sinh(kh)$$

$$\omega^2 = \frac{gk \sinh(kh)}{\cosh(kh)}$$

$$= gk \tanh(kh) \tag{3.20}$$

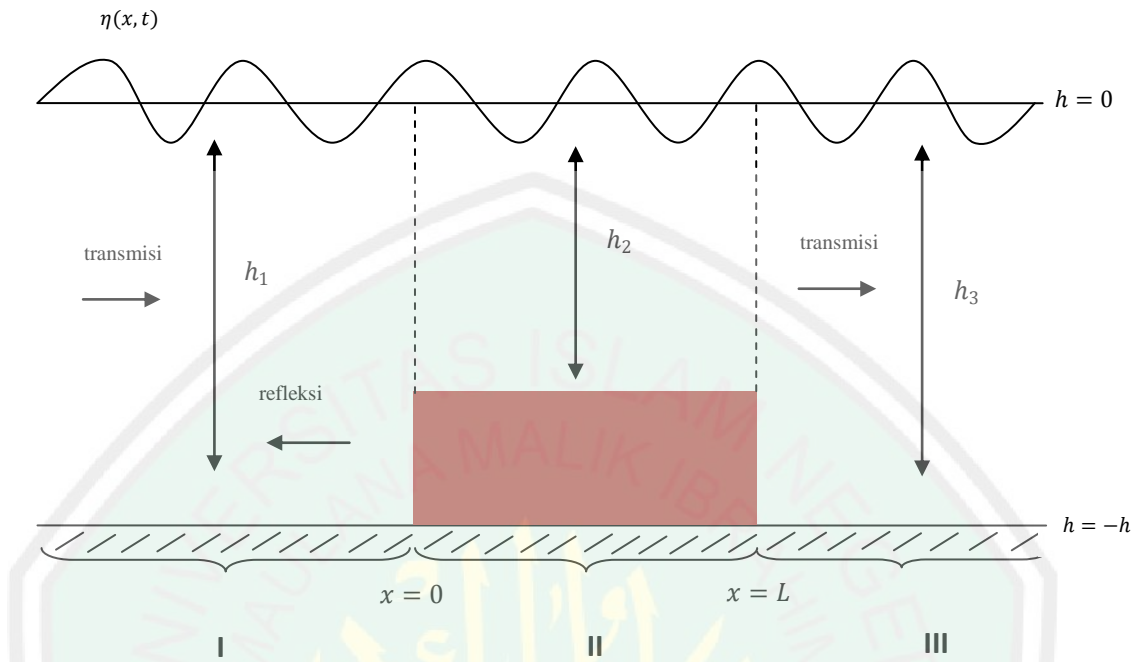
Persamaan (3.20) dapat ditulis

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)}$$

$$\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh) = \sinh(kh) \tag{3.21}$$

### 3.3 Model Gelombang Harmonik untuk Dasar Berundak

Untuk model gelombang harmonik dengan dasar berundak (melalui pemecah gelombang terendam) dibagi menjadi 3 daerah. Daerah I pada domain  $x < 0$ , Daerah II pada  $0 < x < L$ , dan Daerah III pada  $x > L$  dan dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.1 Perambatan Gelombang Melalui Pemecah Gelombang Terendam

Gelombang datang yang merambat dari kiri ke kanan seperti ditunjukkan oleh arah panah pada gambar di atas merupakan gelombang harmonik  $\eta(x, t) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$ . Pada saat akan melewati balok pemecah gelombang, maka akan ada gelombang yang diteruskan (transmisi) dan terjadi pula gelombang yang dipantulkan (refleksi) akibat adanya balok pemecah tersebut. Transmisi dan refleksi gelombang harmonik yang terjadi secara berturut-turut dapat dituliskan dalam persamaan  $\eta(x, t) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$  dan  $\eta(x, t) = Be^{-i(-kx-\omega t)}$ .

Maka keseluruhan gelombang harmonik yang merambat dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$\eta(x, t) = \begin{cases} Ae^{-i(k_1x-\omega t)} + Be^{-i(-k_1x-\omega t)} & x < 0 \\ Ce^{-i(k_2x-\omega t)} + De^{-i(-k_2x-\omega t)} & 0 < x < L \\ Ee^{-i(k_3x-\omega t)} & x > L \end{cases}$$

dimana  $A, C, E$  adalah amplitudo gelombang transmisi dan  $B, D$  amplitudo gelombang refleksi, sedangkan  $k_1, k_2, k_3$  adalah bilangan gelombang yang terkait dengan kedalaman saluran  $h_1, h_2, h_3$  dan  $\omega$  menyatakan frekuensi gelombang.

Karena nilai amplitudo  $A$  akan diberikan, maka akan ditentukan  $B, C, D$  dan  $E$  dengan pertimbangan bahwa fluida harus kontinu, terutama pada  $x = 0$  dan  $x = L$ . Sehingga kekontinuan permukaan fluida dapat dicari dengan

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta(x, t) \quad (3.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow L^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow L^+} \eta(x, t) \quad (3.23)$$

untuk mencari kekontinuan permukaan fluida pada  $x = 0$  maka perhatikan persamaan (3.22)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta(x, t)$$

Selanjutnya substitusikan fungsi  $\eta$  yang sudah diberikan pada daerah I ( $x < 0$ ) untuk permukaan fluida yang mendekati 0 dari kiri dan fungsi  $\eta$  pada daerah II ( $0 < x < L$ ) untuk permukaan fluida yang mendekati 0 dari kanan sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0} A e^{-i(k_1 x - \omega t)} + B e^{-i(-k_1 x - \omega t)} = \lim_{x \rightarrow 0} C e^{-i(k_2 x - \omega t)} + D e^{-i(-k_2 x - \omega t)}$$

$$A e^{i\omega t} + B e^{i\omega t} = C e^{i\omega t} + D e^{i\omega t}$$

dikalikan dengan  $\frac{1}{e^{i\omega t}}$  maka

$$A + B = C + D \quad (3.24)$$

Sedangkan untuk mencari kekontinuan permukaan fluida pada  $x = L$  maka perhatikan persamaan (3.23) berikut:

$$\lim_{x \rightarrow L^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow L^+} \eta(x, t)$$

Selanjutnya substitusikan fungsi  $\eta$  yang sudah diberikan pada daerah II ( $0 < x < L$ ) untuk permukaan fluida yang mendekati  $L$  dari kiri dan fungsi  $\eta$  pada daerah III ( $x > L$ ) untuk permukaan fluida yang mendekati  $L$  dari kanan sehingga

$$\lim_{x \rightarrow L^-} C e^{-i(k_2 x - \omega t)} + D e^{-i(-k_2 x - \omega t)} = \lim_{x \rightarrow L^+} E e^{-i(k_3 x - \omega t)}$$

$$C e^{-ik_2 L + i\omega t} + D e^{ik_2 L + i\omega t} = E e^{-ik_3 L + i\omega t}$$

$$C e^{-ik_2 L} e^{i\omega t} + D e^{ik_2 L} e^{i\omega t} = E e^{-ik_3 L} e^{i\omega t}$$

Dikalikan dengan  $\frac{1}{e^{i\omega t}}$  maka

$$C e^{-ik_2 L} + D e^{ik_2 L} = E e^{-ik_3 L} \quad (3.25)$$

Kondisi selanjutnya yang akan digunakan untuk menentukan amplitudo  $B, C, D$  dan  $E$  yaitu kekontinuan *flux* massa fluida ( $Q$ ) sebelum dan sesudah balok pemecah gelombang, yakni pada  $x = 0$  dan  $x = L$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} Q = \lim_{x \rightarrow 0^+} Q \quad (3.26)$$

$$\lim_{x \rightarrow L^-} Q = \lim_{x \rightarrow L^+} Q \quad (3.27)$$

dengan  $Q = \int_{-h}^0 \phi_x dy$ .

Oleh karena itu, untuk  $x < 0$  *flux* massa fluida ( $Q_1$ ) yaitu dengan menurunkan persamaan (3.19) terhadap  $x$ , maka

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta \left[ \cosh(k_1 y) + \frac{\omega^2}{gk_1} \sinh(k_1 y) \right]$$

$$\phi_x = \frac{ig}{\omega} \eta_x \left[ \cosh(k_1 y) + \frac{\omega^2}{gk_1} \sinh(k_1 y) \right]$$

Sehingga dengan mengintegrasikan fungsi  $\phi_x$  tersebut terhadap  $y$  diperoleh

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_{-h_1}^0 \phi_x dy \\
&= \frac{ig}{\omega} \eta_x \int_{-h_1}^0 \left[ \cosh(k_1 y) + \frac{\omega^2}{gk_1} \sinh(k_1 y) \right] dy \\
&= \frac{ig}{\omega} \eta_x \left[ \frac{1}{k_1} \sinh(k_1 y) + \frac{\omega^2}{gk_1^2} \cosh(k_1 y) \right]_{-h_1}^0 \\
&= \frac{ig}{\omega} \eta_x \left[ \left\{ \frac{1}{k_1} \sinh 0 + \frac{\omega^2}{gk_1^2} \cosh 0 \right\} - \left\{ -\frac{1}{k_1} \sinh(k_1 h_1) + \frac{\omega^2}{gk_1^2} \cosh(k_1 h_1) \right\} \right] \\
&= \frac{ig}{\omega} \eta_x \left[ \left\{ \frac{\omega^2}{gk_1^2} \right\} + \left\{ \frac{1}{k_1} \sinh(k_1 h_1) - \frac{\omega^2}{gk_1^2} \cosh(k_1 h_1) \right\} \right] \\
&= \frac{ig}{\omega k_1} \eta_x \left[ \left\{ \frac{\omega^2}{gk_1} \right\} + \left\{ \sinh(k_1 h_1) - \frac{\omega^2}{gk_1} \cosh(k_1 h_1) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.21) pada persamaan di atas maka diperoleh *flux* massa fluida pada  $x < 0$  yaitu

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{ig}{\omega k_1} \eta_x \left[ \left\{ \frac{\omega^2}{gk_1} \right\} + \left\{ \frac{\omega^2}{gk_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{\omega^2}{gk_1} \cosh(k_1 h_1) \right\} \right] \\
&= \frac{ig}{\omega k_1} \eta_x \left[ \frac{\omega^2}{gk_1} \right] \\
Q_1 &= \frac{i\omega}{k_1^2} \eta_x
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, maka akan diperoleh *flux* massa fluida berikut:

$$Q_2 = \frac{i\omega}{k_2^2} \eta_x \quad \text{untuk } 0 < x < L$$

$$Q_3 = \frac{i\omega}{k_3^2} \eta_x \quad \text{untuk } x > L$$

Sehingga untuk mencari kekontinuan *flux* massa fluida pada  $x = 0$  maka persamaan (3.26) menjadi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} Q = \lim_{x \rightarrow 0^+} Q$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Q_1 = \lim_{x \rightarrow 0} Q_2$$

dengan  $Q_1$  adalah *flux* massa fluida yang mendekati 0 dari kiri dan  $Q_2$  adalah *flux* massa fluida yang mendekati 0 dari kanan, maka

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{i\omega}{k_1^2} \eta_x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{i\omega}{k_2^2} \eta_x$$

kemudian substitusikan fungsi  $\eta$  yang diturunkan terhadap  $x$  atau  $\eta_x$  pada persamaan di atas, dengan fungsi  $\eta$  yang sudah diberikan pada daerah I dan pada daerah II sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{i\omega}{k_1^2} \right) (ik_1) [-Ae^{-i(k_1x-\omega t)} + Be^{-i(-k_1x-\omega t)}] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{i\omega}{k_2^2} \right) (ik_2) [-Ce^{-i(k_2x-\omega t)} + De^{-i(-k_2x-\omega t)}]$$

$$\left( \frac{-\omega}{k_1} \right) [-Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t}] = \left( \frac{-\omega}{k_2} \right) [-Ce^{i\omega t} + De^{i\omega t}]$$

dan dikalikan dengan  $\frac{1}{e^{i\omega t}}$  sehingga diperoleh

$$\frac{-\omega}{k_1} [-A + B] = \frac{-\omega}{k_2} [-C + D]$$

atau

$$(-A + B)k_2 = (-C + D)k_1 \quad (3.28)$$

Sedangkan untuk mencari kekontinuan *flux* massa fluida pada  $x = L$  maka persamaan (3.27) menjadi

$$\lim_{x \rightarrow L^-} Q = \lim_{x \rightarrow L^+} Q$$

$$\lim_{x \rightarrow L} Q_2 = \lim_{x \rightarrow L} Q_3$$

dengan  $Q_2$  adalah *flux* massa fluida yang mendekati  $L$  dari kiri dan  $Q_3$  adalah *flux* massa fluida yang mendekati  $L$  dari kanan, maka

$$\lim_{x \rightarrow L} \frac{i\omega}{k_2^2} \eta_x = \lim_{x \rightarrow L} \frac{i\omega}{k_3^2} \eta_x$$

kemudian substitusikan fungsi  $\eta$  yang diturunkan terhadap  $x$  atau  $\eta_x$  pada persamaan di atas, dengan fungsi  $\eta$  yang sudah diberikan pada daerah II dan pada daerah III sehingga

$$\lim_{x \rightarrow L} \left( \frac{i\omega}{k_2^2} \right) (ik_2) [-Ce^{-i(k_2x-\omega t)} + De^{-i(-k_2x-\omega t)}] = \lim_{x \rightarrow L} \left( \frac{i\omega}{k_3^2} \right) [-ik_3 Ee^{-i(k_3x-\omega t)}]$$

$$\lim_{x \rightarrow L} \left( \frac{-\omega}{k_2} \right) [-Ce^{-i(k_2x-\omega t)} + De^{-i(-k_2x-\omega t)}] = \lim_{x \rightarrow L} \left( \frac{-\omega}{k_3} \right) [-Ee^{-i(k_3x-\omega t)}]$$

$$\left( \frac{-\omega}{k_2} \right) [-Ce^{-i(k_2L-\omega t)} + De^{-i(-k_2L-\omega t)}] = \left( \frac{-\omega}{k_3} \right) [-Ee^{-i(k_3L-\omega t)}]$$

atau

$$\frac{\omega}{k_2} (Ce^{-ik_2L}e^{i\omega t} - De^{ik_2L}e^{i\omega t}) = \frac{\omega}{k_3} Ee^{-ik_3L}e^{i\omega t}$$

dan dikalikan dengan  $\frac{1}{e^{i\omega t}}$  sehingga diperoleh

$$\frac{\omega}{k_2} (Ce^{-ik_2L} - De^{ik_2L}) = \frac{\omega}{k_3} Ee^{-ik_3L}$$

atau

$$(Ce^{-ik_2L} - De^{ik_2L})k_3 = Ee^{-ik_3L}k_2 \quad (3.29)$$

Selanjutnya tulis ulang persamaan (3.24), (3.25), (3.28) dan (3.29) sebagai berikut:

$$A + B = C + D \quad (3.30)$$

$$Ce^{-ik_2L} + De^{ik_2L} = Ee^{-ik_3L} \quad (3.31)$$

$$(-A + B)k_2 = (-C + D)k_1 \quad (3.32)$$

$$(Ce^{-ik_2L} - De^{ik_2L})k_3 = Ee^{-ik_3L}k_2 \quad (3.33)$$

Karena nilai  $A$  nantinya akan diberikan maka selanjutnya akan dicari solusi  $B, C, D, E$  yang mewakili amplitudo gelombang dari keempat persamaan tersebut.

Dari persamaan (3.30) dapat ditulis menjadi

$$B = C + D - A$$

Substitusikan  $B$  pada persamaan (3.32), diperoleh

$$\begin{aligned} (-A + B)k_2 &= (-C + D)k_1 \\ -A + B &= \frac{(-C + D)k_1}{k_2} \\ B &= A + \frac{(-C + D)k_1}{k_2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} C + D - A &= A + \frac{(-C + D)k_1}{k_2} \\ C + \frac{Ck_1}{k_2} &= 2A - D + \frac{Dk_1}{k_2} \\ \left(\frac{k_1 + k_2}{k_2}\right)C &= \frac{2Ak_2 + (k_1 - k_2)D}{k_2} \\ C &= \frac{2Ak_2 + (k_1 - k_2)D}{k_2} \left(\frac{k_2}{k_1 + k_2}\right) \\ &= \frac{2Ak_2 + (k_1 - k_2)D}{k_1 + k_2} \\ &= \frac{2k_2}{k_1 + k_2}A + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}D \end{aligned} \quad (3.35)$$

Substitusikan persamaan (3.35) ke persamaan (3.31), maka

$$\begin{aligned} Ce^{-ik_2L} + De^{ik_2L} &= Ee^{-ik_3L} \\ \left(\frac{2k_2}{k_1 + k_2}A + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}D\right)e^{-ik_2L} + De^{ik_2L} &= Ee^{-ik_3L} \\ \frac{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L}}{k_1 + k_2}D + e^{ik_2L}D &= Ee^{-ik_3L} - \frac{2k_2e^{-ik_2L}}{k_1 + k_2}A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}}{k_1 + k_2} \right) D &= \frac{(k_1 + k_2)e^{-ik_3L}E - 2k_2e^{-ik_2L}A}{k_1 + k_2} \\ D &= \frac{(k_1 + k_2)e^{-ik_3L}E - 2k_2e^{-ik_2L}A}{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.35) dan persamaan (3.36) ke persamaan (3.33), yaitu

$$\begin{aligned} Ee^{-ik_3L}k_2 &= Ck_3e^{-ik_2L} - Dk_3e^{ik_2L} \\ &= \left( \frac{2k_2}{k_1 + k_2}A + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}D \right) k_3e^{-ik_2L} - Dk_3e^{ik_2L} \\ &= \left[ \frac{(k_1 - k_2)k_3e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)k_3e^{ik_2L}}{(k_1 + k_2)} \right] D + \frac{2k_2k_3e^{-ik_2L}}{k_1 + k_2}A \\ &= \left[ \frac{k_3[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]}{(k_1 + k_2)} \right] \left[ \frac{(k_1 + k_2)e^{-ik_3L}E - 2k_2e^{-ik_2L}A}{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}} \right] + \frac{2k_2k_3e^{-ik_2L}}{k_1 + k_2}A \\ Ee^{-ik_3L}k_2 - \left[ \frac{[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]k_3e^{-ik_3L}E}{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}} \right] &= \\ \left[ \frac{k_3[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]}{(k_1 + k_2)} \right] \left[ \frac{-2k_2e^{-ik_2L}A}{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}} \right] + \frac{2k_2k_3e^{-ik_2L}}{k_1 + k_2}A &= \\ \left[ \frac{Ee^{-ik_3L}k_2[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}] - [(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]Ee^{-ik_3L}k_3}{[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]} \right] &= \\ \left[ \frac{-2k_3k_2e^{-ik_2L}A[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]}{(k_1 + k_2)[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]} \right] + \frac{2k_2k_3e^{-ik_2L}}{k_1 + k_2}A &= \\ \left\{ \frac{k_2e^{-ik_3L}[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}] - k_3e^{-ik_3L}[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]}{[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]} \right\} E &= \\ \left[ \frac{-2k_3k_2e^{-ik_2L}A[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}] + 2k_3k_2e^{-ik_2L}A[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]}{(k_1 + k_2)[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]} \right] & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \left[ \frac{4k_2k_3e^{-ik_2L}e^{ik_2L}A}{(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}} \right] \left[ \frac{(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}}{k_2e^{-ik_3L}[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}]-k_3e^{-ik_3L}[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}-(k_1+k_2)e^{ik_2L}]} \right] \\
&= \left[ \frac{4k_2k_3e^{-ik_2L}e^{ik_2L}A}{k_2e^{-ik_3L}[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}]-[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}-(k_1+k_2)e^{ik_2L}]k_3e^{-ik_3L}} \right] \\
&= \left[ \frac{4k_2k_3A}{e^{-ik_3L}\{k_2[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}]-k_3[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}-(k_1+k_2)e^{ik_2L}]\}} \right] \\
&= \frac{4k_2k_3A}{e^{-L(i k_2+i k_3)}(k_1k_2-k_2^2)+e^{L(i k_2-i k_3)}(k_1k_2-k_2^2)+e^{-L(i k_2+i k_3)}(-k_1k_3-k_2k_3)+e^{L(i k_2-i k_3)}(k_1k_3+k_2k_3)} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.37) ke persamaan (3.36), maka

$$\begin{aligned}
D &= \frac{(k_1+k_2)e^{-ik_3L}}{(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}}E - \frac{2k_2e^{-ik_2L}}{(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}}A \\
&= A \left\{ \left[ \frac{(k_1+k_2)}{(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}} \right] \left[ \frac{4k_2k_3}{k_2[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}]-k_3[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}-(k_1+k_2)e^{ik_2L}]} \right] \right. \\
&\quad \left. - A \left[ \frac{2k_2e^{-ik_2L}}{(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}} \right] \right\} \quad (3.38)
\end{aligned}$$

dan substitusikan persamaan (3.38) ke persamaan (3.35), diperoleh

$$\begin{aligned}
C &= \frac{2k_2}{k_1+k_2}A + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}D \\
&= A \left( \frac{2k_2}{k_1+k_2} \right) \\
&\quad + A \left( \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \right) \left[ \frac{(k_1+k_2)}{(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}} \right] \left[ \frac{4k_2k_3}{k_2[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}]-k_3[(k_1-k_2)e^{-ik_2L}-(k_1+k_2)e^{ik_2L}]} \right] \\
&\quad - A \left( \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \right) \left[ \frac{2k_2e^{-ik_2L}}{(k_1-k_2)e^{-ik_2L}+(k_1+k_2)e^{ik_2L}} \right] \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Sehingga dengan pemberian fungsi  $\eta(x, t)$  untuk gelombang harmonik yang merambat melalui sebuah belok pemecah gelombang berikut:

$$\eta(x, t) = \begin{cases} Ae^{-i(k_1x-\omega t)} + Be^{-i(-k_1x-\omega t)} & x < 0 \\ Ce^{-i(k_2x-\omega t)} + De^{-i(-k_2x-\omega t)} & 0 < x < L \\ Ee^{-i(k_3x-\omega t)} & x > L \end{cases}$$

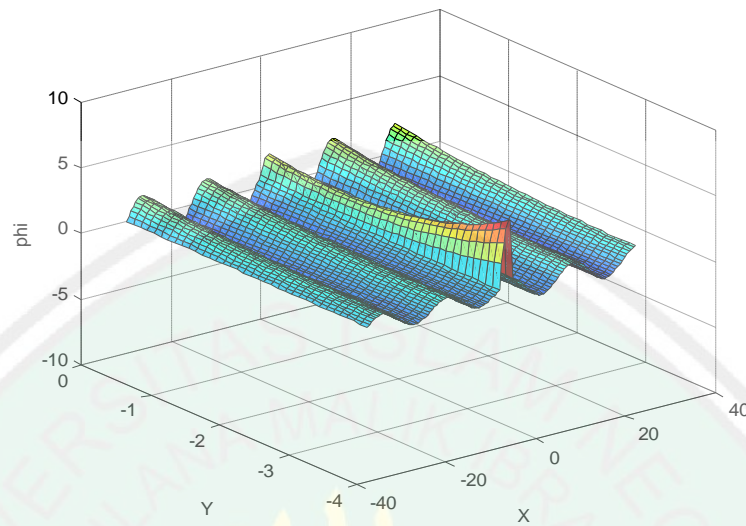
maka diperoleh persamaan (3.39) untuk amplitudo gelombang transmisi C, persamaan (3.38) untuk amplitudo gelombang refleksi D, persamaan (3.37) untuk amplitudo gelombang transmisi E, dan persamaan (3.34) untuk amplitudo gelombang refleksi B.

Jika diberikan nilai frekuensi gelombang  $\omega = 2$ , gravitasi  $g = 10$ , kedalaman pada daerah I ( $h_1$ ) = 3,5, kedalaman pada daerah II ( $h_2$ ) = 0,5, kedalaman pada daerah III ( $h_3$ ) = 3,5, maka dari persamaan dispersi (3.20) diperoleh  $k_1 = 0,44$ ,  $k_2 = 0,93$ , dan  $k_3 = 0,44$ . Selanjutnya diberikan nilai  $A = 0,5$ , pada  $t = 3$  dan  $x = -30$  sampai 30 serta lebar balok  $L = 2,3$  maka dengan mensubstitusikan parameter-parameter tersebut ke persamaan (3.34), (3.37), (3.38) dan (3.39) diperoleh nilai amplitudo  $B = 0,2550 - 0,1259i$ ,  $C = 0,6364 + 0,0701i$ ,  $D = 0,1185 - 0,1959i$ ,  $E = 0,2162 - 0,3499i$ .

Selanjutnya nilai  $B, C, D, E$  tersebut disubstitusikan kembali ke persamaan  $\eta(x, t)$  dan persamaan potensial (3.19) berikut:

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[ \cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(ky) \right]$$

sehingga dapat ditampilkan pada gambar (3.2).

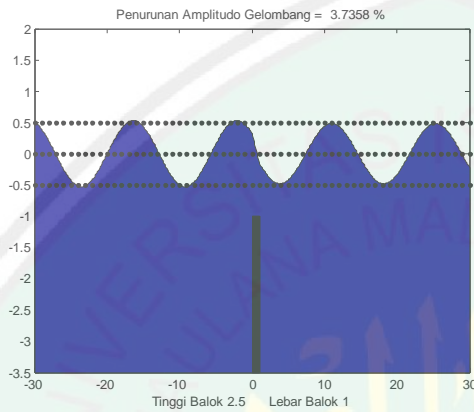
Gambar 3.2 Fungsi Potensial  $\phi$ 

### 3.4 Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan

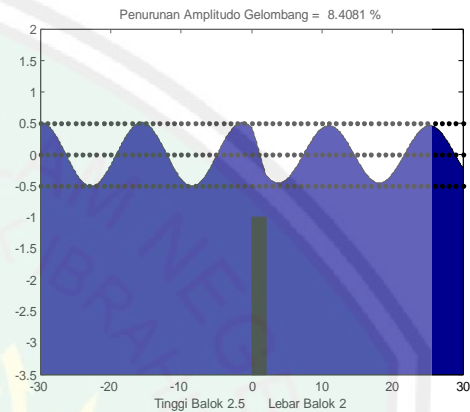
Selanjutnya akan dilakukan simulasi evolusi gelombang permukaan dari relasi dispersi pada persamaan (3.20) dan solusi pada persamaan (3.34), (3.37), (3.38), (3.39) yang disubstitusikan ke persamaan  $\eta(x, t)$  pada masing-masing daerah sebelum dan sesudah melewati balok pemecah gelombang. Dalam hal ini peneliti memodifikasi parameter yang ada untuk melihat pengaruh dari parameter-parameter tersebut terhadap fenomena yang terjadi.

Dengan memodifikasi lebar balok pemecah gelombang maka dapat diketahui seberapa besar pengaruhnya terhadap penurunan amplitudo gelombang setelah melewati balok tersebut. Dalam hal ini diberikan nilai amplitudo gelombang transmisi  $A = 0,5 \text{ m}$ , frekuensi gelombang  $\omega = 2$ , gravitasi =  $10 \text{ m/s}^2$ , dan kedalaman pada daerah I ( $h_1$ ) yang sama dengan kedalaman pada daerah III ( $h_3$ ) yaitu sebesar  $3,5 \text{ m}$  serta kedalaman pada daerah II ( $h_2$ ) sebesar

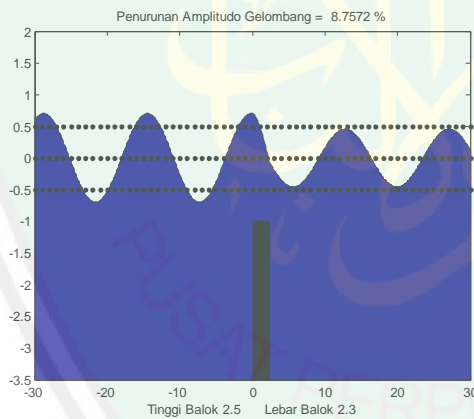
1 m yang artinya tinggi dari sebuah balok pemecah gelombang tersebut yaitu sama dengan 2,5 m, sehingga hasil simulasinya dapat dilihat dalam gambar 3.3 berikut:



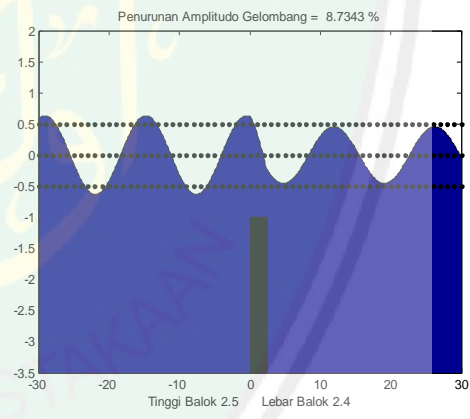
Gambar 3.3a



Gambar 3.3b



Gambar 3.3c



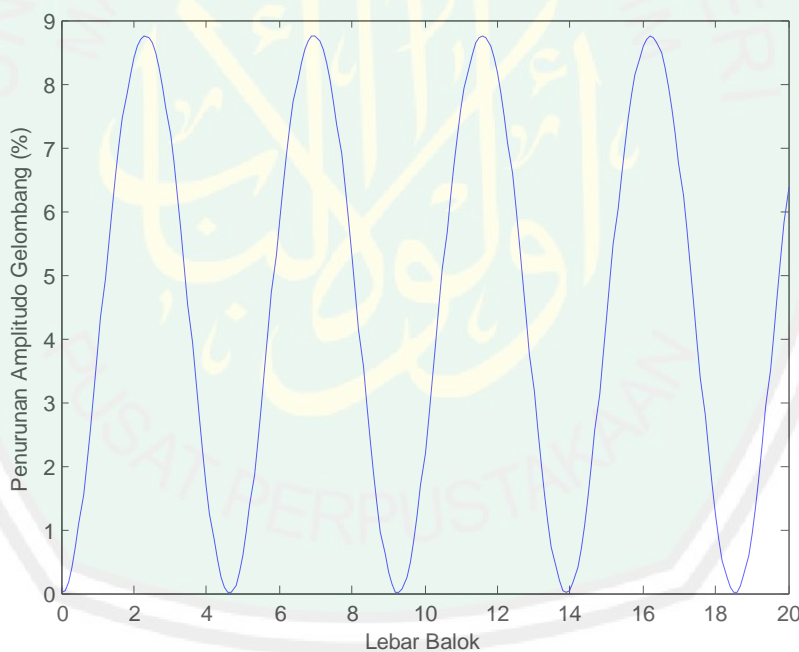
Gambar 3.3d

Gambar 3.3 Simulasi dengan Modifikasi Lebar Balok Pemecah Gelombang

Pada gambar 3.3a yakni dengan lebar balok sebesar 1 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 3,74 %. Pada gambar 3.3b dengan lebar balok sebesar 2 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 8,41 %. Sedangkan pada gambar 3.3c dengan lebar balok sebesar 2,3 m mampu

mereduksi amplitudo gelombang sebesar 8,76 % dan pada gambar 3.3d dengan lebar balok sebesar 2,4 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 8,73 %.

Untuk mengetahui pengaruh lebar balok terhadap penurunan amplitudo gelombang dilakukan pengujian dari relasi dispersi pada persamaan (3.20) serta solusi pada persamaan (3.34), (3.37), (3.38), dan (3.39). Dalam hal ini dilakukan pengujian pada beberapa lebar balok mulai 0,1 m sampai 20 m dengan selang sebesar 0,1 m sehingga hasilnya dapat dilihat pada gambar 3.4 berikut:



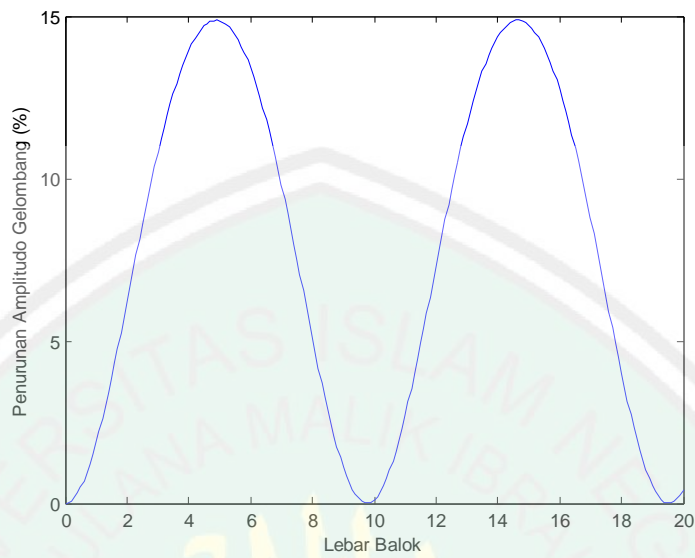
Gambar 3.4 Pengaruh Lebar Balok dengan  $\omega = 2$

Dari gambar 3.4 di atas dapat dilihat bahwa pengaruh lebar balok terhadap penurunan amplitudo gelombang terjadi secara periodik. Pada lebar balok 0,1 m sampai 2,3 m prosentase penurunan amplitudo gelombang terus

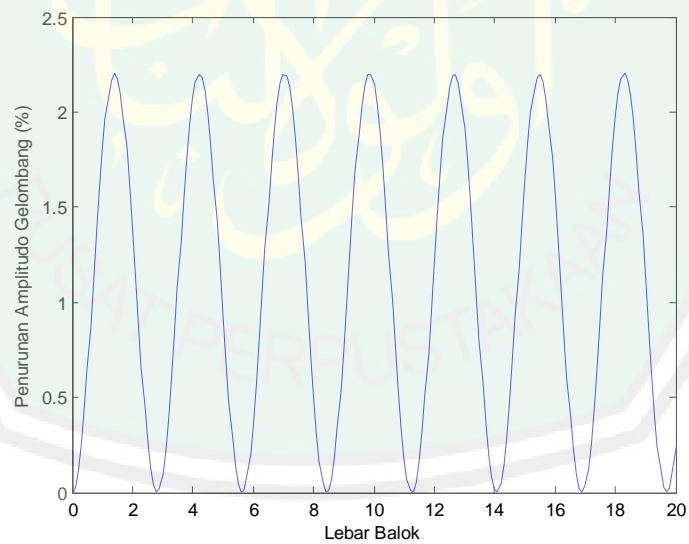
meningkat, sedangkan pada lebar balok 2,4 m sampai 4,6 m prosentase penurunan amplitudo gelombang menurun. Pada lebar balok 4,7 m sampai 7,0 m prosentase penurunan amplitudo gelombang terus meningkat, sedangkan pada lebar balok 7,1 m sampai 11 m prosentase penurunan amplitudo gelombang menurun. Dengan pengujian pada beberapa lebar balok mulai 0,1 m sampai 20 m tersebut diperoleh lebar balok yang menghasilkan prosentase penurunan amplitudo gelombang paling besar yaitu pada lebar balok 2,3 m; 7,0 m; 11,6 m; 16,2 m sebesar 8,75 %.

Karena untuk mendesain suatu pemecah gelombang yang dapat mereduksi amplitudo gelombang secara maksimal dibutuhkan biaya yang beragam, maka dipilih sebuah pemecah gelombang berupa balok berukuran minim tetapi mampu mereduksi amplitudo secara maksimal. Sehingga lebar optimal balok dengan  $\omega = 2$  adalah sebesar 2,3 m.

Sedangkan untuk mengetahui pengaruh lebar balok terhadap penurunan amplitudo gelombang dengan memodifikasi frekuensi gelombang yakni  $\omega = 1$  dan  $\omega = 3$  diberikan nilai amplitudo gelombang transmisi  $A = 0,5 m$ , gravitasi  $= 10 m/s^2$ , dan kedalaman pada daerah I ( $h_1$ ) yang sama dengan kedalaman pada daerah III ( $h_3$ ) yaitu sebesar 3,5 m serta kedalaman pada daerah II ( $h_2$ ) sebesar 1 m yang artinya tinggi dari sebuah balok pemecah gelombang tersebut yaitu sama dengan 2,5 m dilakukan pengujian pada beberapa lebar balok mulai 0,1 m sampai 20 m dengan selang sebesar 0,1 m sehingga hasilnya dapat dilihat pada gambar 3.5 dan gambar 3.6 berikut:



Gambar 3.5 Pengaruh Lebar Balok dengan  $\omega = 1$



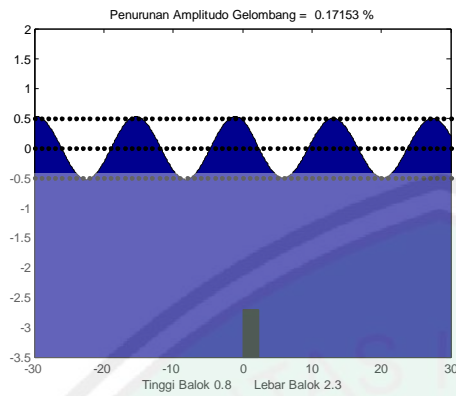
Gambar 3.6 Pengaruh Lebar Balok dengan  $\omega = 3$

Pada gambar 3.5 di atas dengan pemberian frekuensi gelombang  $\omega = 1$  diperoleh lebar balok yang menghasilkan prosentase penurunan amplitudo gelombang paling besar yaitu pada lebar balok 4,8 m dan 14,7 m sebesar

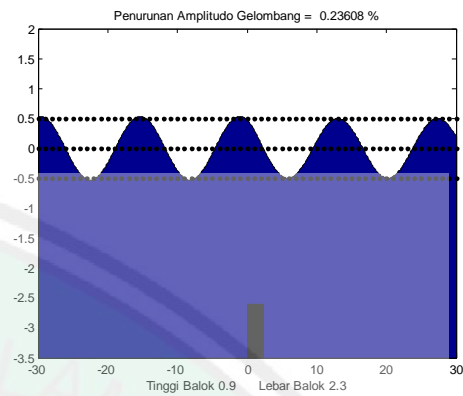
14,87 %. Sehingga dengan pemberian frekuensi gelombang  $\omega = 1$  diperoleh lebar optimal balok sebesar 4,8 m.

Sedangkan pada gambar 3.6 dengan pemberian frekuensi gelombang  $\omega = 3$  diperoleh lebar balok yang menghasilkan prosentase penurunan amplitudo gelombang paling besar yaitu pada lebar balok 1,4 m; 4,4 m; 7 m; 9,9 m; 12,6 m; 15,5 m dan 18,3 m sebesar 2,2 %. Maka dengan pemberian frekuensi gelombang  $\omega = 3$  diperoleh lebar optimal balok sebesar 1,4 m. Sehingga seiring dengan bertambahnya frekuensi gelombang ( $\omega$ ) yang diberikan, maka lebar optimal balok akan semakin berkurang.

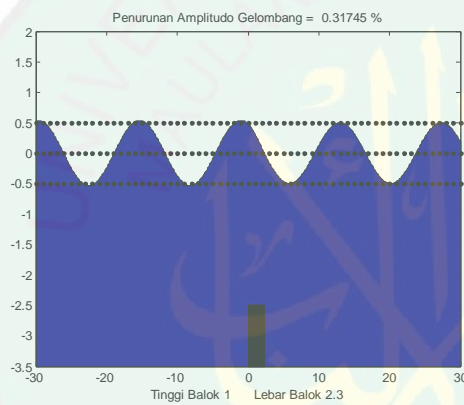
Selanjutnya akan dilakukan modifikasi tinggi balok pemecah gelombang sehingga dapat diketahui seberapa besar pengaruhnya terhadap penurunan amplitudo gelombang setelah melewati balok pemecah tersebut. Simulasi dilakukan berdasarkan relasi dispersi dan solusi pada persamaan (3.34), (3.37), (3.38), (3.39) yang disubstitusikan ke persamaan  $\eta(x, t)$  pada masing-masing daerah sebelum dan sesudah melewati balok pemecah gelombang. Dalam hal ini dipilih lebar optimal balok sebesar 2,3 m dan diberikan juga nilai amplitudo gelombang transmisi  $A = 0,5 m$ , frekuensi gelombang  $\omega = 2$ , gravitasi =  $10 m/s^2$ , serta kedalaman pada daerah I ( $h_1$ ) yang sama dengan kedalaman pada daerah III ( $h_3$ ) yaitu sebesar 3,5 m. Sehingga hasil simulasinya dapat dilihat dalam gambar 3.7 berikut:



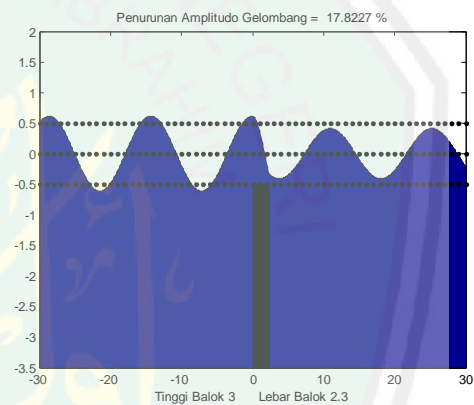
Gambar 3.7a



Gambar 3.7b



Gambar 3.7c



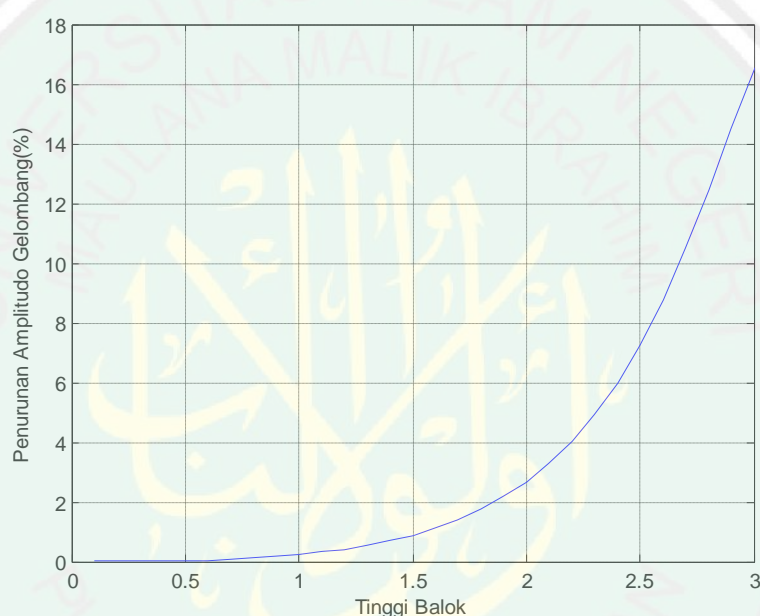
Gambar 3.7d

Gambar 3.7 Simulasi dengan Modifikasi Tinggi Balok Pemecah Gelombang

Pada gambar 3.7a yakni tinggi balok sebesar 0,8 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 0,17 %. Pada gambar 3.7b dengan tinggi balok sebesar 0,9 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 0,24 %. Sedangkan pada gambar 3.7c dengan tinggi balok sebesar 1 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 0,32 % dan pada gambar 3.7d dengan tinggi balok sebesar 3 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 17,82 %.

Karena pemecah gelombang berupa balok terendam, maka tinggi balok harus kurang dari tinggi permukaan gelombang. Sehingga untuk mengetahui

pengaruh tinggi balok terhadap penurunan amplitudo gelombang dilakukan pengujian dari relasi dispersi pada persamaan (3.20) serta solusi pada persamaan (3.34), (3.37), (3.38), dan (3.39). Dalam hal ini pengujian dilakukan pada beberapa tinggi balok mulai  $0,1\text{ m}$  sampai  $3\text{ m}$  dengan selang sebesar  $0,1\text{ m}$  sehingga hasilnya dapat dilihat pada gambar 3.8 berikut:



Gambar 3.8 Pengaruh Tinggi Balok

Dari gambar 3.8 di atas dapat dilihat bahwa prosentase penurunan amplitudo gelombang setelah melewati balok pemecah terus mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya tinggi balok pemecah gelombang. Pada tinggi balok pemecah gelombang sama dengan 0, artinya kedalaman pada daerah I, daerah II dan daerah III yaitu sama sebesar  $3,5\text{ m}$  maka tidak terjadi penurunan amplitudo gelombang. Untuk tinggi balok mulai  $0,1\text{ m}$  sampai  $3\text{ m}$  prosentase

penurunan amplitudo gelombang terus mengalami peningkatan hingga mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 17.82 %.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, maka dapat diperoleh kesimpulan berikut:

1. Solusi dari masalah evolusi gelombang harmonik yang melalui sebuah pemecah gelombang menggunakan metode pemisahan variabel yaitu berupa amplitudo gelombang

$$E = \frac{4k_2k_3A}{e^{-L(ik_2+ik_3)}(k_1k_2 - k_2^2) + e^{L(ik_2-ik_3)}(k_1k_2 - k_2^2) + e^{-L(ik_2+ik_3)}(-k_1k_3 - k_2k_3) + e^{L(ik_2-ik_3)}(k_1k_3 + k_2k_3)}$$

$$D = A \left\{ \left[ \frac{(k_1 + k_2)}{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}} \right] \left[ \frac{4k_2k_3}{k_2[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}] - k_3[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]} \right] \right\}$$

$$- A \left[ \frac{2k_2e^{-ik_2L}}{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}} \right]$$

$$C = A \left( \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \right)$$

$$+ A \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \left[ \frac{(k_1 + k_2)}{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}} \right] \left[ \frac{4k_2k_3}{k_2[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}] - k_3[(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} - (k_1 + k_2)e^{ik_2L}]} \right]$$

$$- A \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \left[ \frac{2k_2e^{-ik_2L}}{(k_1 - k_2)e^{-ik_2L} + (k_1 + k_2)e^{ik_2L}} \right]$$

$$B = A + \frac{(-C + D)k_1}{k_2}$$

2. Semakin besar frekuensi gelombang ( $\omega$ ) maka semakin kecil lebar optimal balok pemecah gelombang. Karena pemecah gelombang berupa balok terendam, maka tinggi balok harus kurang dari tinggi permukaan gelombang

sehingga semakin besar tinggi balok pemecah gelombang maka semakin besar pula penurunan amplitudo gelombang yang dihasilkan.

#### 4.2 Saran

Dalam skripsi ini penelitian difokuskan pada sebuah balok pemecah gelombang dengan teori gelombang linier. Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian mengenai evolusi gelombang yang melalui pemecah gelombang menggunakan teori gelombang nonlinier. Sehingga dapat diketahui pengaruh dari bentuk pemecah gelombang terhadap penurunan amplitudo gelombang.

## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qurthubi, S.I.. 2008. *Tafsir Al-Qurtubi*. Terjemahan Fatchurrohman, Ahmad Hotih, dan Dudi Rasyati. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Dysthe, K.B.. 2004. *Lecture Notes on Linear Wave Theory*. Water Waves and Oceanic Currents. 3-4.
- Hamzah, M.. 2008. *Pemodelan Perembesan Air Dalam Tanah*. Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Bandung.
- Hermansyah, H.. 2011. Pendekatan Matematis Pada Pembangkitan Gelombang Internal di Selat Makassar. *Tesis Tidak Diterbitkan*. Bogor: Sekolah Pascasarjana Institut Pertanian Bogor.
- Holthuijsen, L.. 2007. *Waves in Oceanic and Coastal Waters*. New York: Cambridge University Press.
- Intan, E.N.. 2012. <http://www.slideshare.net/erritaintan/gerak-harmonik-sederhana-12170758> (diakses pada tanggal 09 Oktober 2013).
- Nagle, R.K., Saff, E.B., & Snider, A.D.. 2012. *Fundamentals of Differential Equation and Boundary Value Problems*. New York: Addison Wesley.
- Olson, R.M.. 1993. *Dasar-Dasar Mekanika Fluida Teknik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Umum.
- Quraish, S.. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Tangerang: Lentera Hati.
- Ridwan, A., Azie, M.G., & Kosasih, J.S.. 2008. Studi Teoritik/Eksperimen Gelombang Permukaan Air dan Soliton pada Air Dangkal. *Kelompok Studi Mahasiswa 102 Fisikawan Muda Bandung*.
- Spiegel, M.R.. 1999. *Analisis Vektor dan Suatu Pengantar Analisis Tensor*. Jakarta: Erlangga.
- Strauss, W.. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Tsai, C.P., Chen, H.B., & Lee, F.C.. 2006. Wave Transformation Over Submerged Permeable Breakwater on Porous Bottom. *Ocean Eng*, Volume 33 Halaman 1623-1643.

Wiryanto, L.H.. 2011. Waves Propagation Passing Over a Submerged Porous Breakwater. *J Eng math*, Volume 70 Halaman 126-136.

Yahya, A.. 2012. <http://oeits.wordpress.com/2012/09/12/review-kuliah-hidrodinamika-1/> (diakses pada tanggal 11 November 2013).

Young, H.D. & Freedman, R.A.. 2003. *Fisika Universitas Edisi Kesepuluh Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. Canada: Wiley.



## LAMPIRAN-LAMPIRAN

### Lampiran 1

Mencari nilai dari bilangan gelombang ( $k$ )

```
clc, clear
syms k

w=2;
h1=3.5;
h2=1;
h3=3.5;
g=10;

y1=(w^2)-g*k*tanh(h1*k)
y2=(w^2)-g*k*tanh(h2*k)
y3=(w^2)-g*k*tanh(h3*k)
ka1=solve(y1)
ka2=solve(y2)
ka3=solve(y3)

k1=abs(ka1(1,1))
k2=abs(ka2(1,1))
k3=abs(ka3(1,1))
```

## Lampiran 2

### Simulasi evolusi gelombang permukaan

```
clc, clear
A=0.5;
w=2;
L=2.3;
h1=3.5;
h2=1 ;
h3=3.5;
g=10;
tinggibalok=h1-h2;

k1=0.4389;
k2=0.6778;
k3=0.4389;

M = [ -1 1 1 0; 0 exp(-i*k2*L) exp(i*k2*L) -exp(-
i*k3*L); k2 k1 -k1 0 ; 0 (w/k2)*exp(-i*k2*L) (-
w/k2)*exp(i*k2*L) (-w/k3)*exp(-i*k3*L) ]
b = [ 1*A; 0*A; k2*A; 0*A]
x = M\b


B=x(1,1)
C=x(2,1)
D=x(3,1)
E=x(4,1)

figure(1),clf
X=-30:0.1:30;
t=0:0.1: 10;
for p = 1:length(t)
    for j = 1:length(X)
        if X(j)<0
            y(j)=(A*exp(-i*(k1*X(j)-w*t(p)))+B*exp(-
i*(-k1*X(j)-w*t(p))));
        elseif X(j)>=0 && X(j)<=L
            y(j)=(C*exp(-i*(k2*X(j)-w*t(p)))+D*exp(-
i*(-k2*X(j)-w*t(p))));
        else
            y(j)=(E*exp(-i*(k3*X(j)-w*t(p))));
        end
    end
end
```

```

ting=abs(A)
ting2=abs(E)
penurunan=ting-ting2
persen=(penurunan/ting)*100

area(X,real(y),-3.5)
ylim([-3.5 2])
alpha(0.6)
hold on
xb=-30:1:60;
plot(xb,0,'k.', xb,A,'k.',xb,-A,'k.');
```



```

hold off

rectangle('Position',[0,-
3.5,L,tingibalok],'Curvature',[0.1,0.1],'LineWidth'
,1,'FaceColor','k')
xlabel(['Tinggi Balok',' ',num2str(tinggibalok),'
','Lebar Balok',' ',num2str(L)])
pause(0.1)
title(['Penurunan',' ',num2str(persen),' ','%'])
end
```

### Lampiran 3

Menentukan lebar optimal balok pemecah gelombang

```
clc, clear
A=0.5;
w=2;
L=0:0.1:20;
h1=3.5;
h2=1;
h3=3.5;
g=10;

k1=0.4389;
k2=0.6778;
k3=0.4389;

for s=1:length(L)
M = [ -1 1 1 0; 0 exp(-i*k2*L(s)) exp(i*k2*L(s)) -
exp(-i*k3*L(s)); k2 k1 -k1 0 ; 0 k3*exp(-i*k2*L(s))
-k3*exp(i*k2*L(s)) -k2*exp(-i*k3*L(s)) ]
b = [ 1*A; 0*A; k2*A; 0*A]
x = M\b
E(s)=x(4,1)

ting=abs(A)
ting2(s)=abs(E(s))
penurunan(s)=ting-ting2(s)
persen(s)=(penurunan(s)/ting)*100
end

plot(L,persen)
xlabel('Lebar Balok')
ylabel('Penurunan (%)')
```

## Lampiran 4

### Pengaruh Tinggi balok pemecah gelombang

```
clc,clear
syms k
A=0.5;
w=2;
L=2.3;
h1=3.5;
h2=3.5:-0.1:0.1;
h3=3.5;
g=10;
k1=0.4389;
k3=0.4389;

for m=1:length(h2)
y2=(w^2)-g*k*tanh(h2(m)*k)
ka2=solve(y2)
kaa=abs(ka2)
k2(m)=kaa(1,1)

M = [ -1 1 1 0; 0 exp(-i*k2(m)*L) exp(i*k2(m)*L) -
exp(-i*k3*L); k2(m) k1 -k1 0 ; 0 k3*exp(-i*k2(m)*L)
-k3*exp(i*k2(m)*L) -k2(m)*exp(-i*k3*L) ]
b = [ 1*A; 0*A; k2(m)*A; 0*A]
x = M\b
E(m) = x(4,1)

ting=abs(A)
ting2(m)=abs(E(m))
penurunan(m)=ting-ting2(m)
persen(m)=(penurunan(m)/ting)*100

end
plot(0.1:0.1:3.5,persen)
axis([0 3 0 18])
grid on
xlabel('Tinggi Balok')
ylabel('Penurunan (%)')
```

## Lampiran 5

Pembuktian

$$\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) = (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} - (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q}$$

dengan

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

$$\bar{q} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$$

maka

$$\begin{aligned} (\nabla \times \bar{q}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ &\quad - \mathbf{j} \left( u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \\ &\quad + \mathbf{k} \left( u \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \\ &= \mathbf{i} \left( v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ &\quad + \mathbf{j} \left( w \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad + \mathbf{k} \left( u \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \left( v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&\quad + j \left( w \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&\quad + k \left( u \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&= i \left( \frac{\partial}{\partial x} (uu + vv + ww) - \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u \right) \\
&\quad + j \left( \frac{\partial}{\partial y} (uu + vv + ww) - \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v \right) \\
&\quad + k \left( \frac{\partial}{\partial z} (uu + vv + ww) - \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w \right) \\
&= i \left( \frac{\partial}{\partial x} (\bar{q} \cdot \bar{q}) - (\bar{q} \cdot \nabla) u \right) + j \left( \frac{\partial}{\partial y} (\bar{q} \cdot \bar{q}) - (\bar{q} \cdot \nabla) v \right) \\
&\quad + k \left( \frac{\partial}{\partial z} (\bar{q} \cdot \bar{q}) - (\bar{q} \cdot \nabla) w \right) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial x} (\bar{q} \cdot \bar{q}) i - (\bar{q} \cdot \nabla) u i \right) + \left( \frac{\partial}{\partial y} (\bar{q} \cdot \bar{q}) j - (\bar{q} \cdot \nabla) v j \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial}{\partial z} (\bar{q} \cdot \bar{q}) k - (\bar{q} \cdot \nabla) w k \right) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial x} (\bar{q} \cdot \bar{q}) i + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{q} \cdot \bar{q}) j + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{q} \cdot \bar{q}) k \right) \\
&\quad - \left( (\bar{q} \cdot \nabla) u i + (\bar{q} \cdot \nabla) v j + (\bar{q} \cdot \nabla) w k \right) \\
&= (\bar{q} \cdot \bar{q}) \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) - (\bar{q} \cdot \nabla) (u i + v j + w k)
\end{aligned}$$

$$\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) = (\bar{q} \cdot \bar{q}) \nabla - (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$(\bar{q} \cdot \bar{q}) \nabla = \left( \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 \right) \nabla$$

$$\begin{aligned}
(\bar{q} \cdot \bar{q}) \nabla &= (\bar{q} \cdot \bar{q}) \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \\
&= (u i + v j + w k) \cdot (u i + v j + w k) \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \\
&= (u u + v v + w w) \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial x} i (u u + v v + w w) + \frac{\partial}{\partial y} j (u u + v v + w w) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} k (u u + v v + w w) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\partial}{\partial x} u u + \frac{\partial}{\partial x} v v + \frac{\partial}{\partial x} w w \right) i + \left( \frac{\partial}{\partial y} u u + \frac{\partial}{\partial y} v v + \frac{\partial}{\partial y} w w \right) j \\
&\quad + \left( \frac{\partial}{\partial z} u u + \frac{\partial}{\partial z} v v + \frac{\partial}{\partial z} w w \right) k \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( 2 \frac{\partial}{\partial x} u u + 2 \frac{\partial}{\partial x} v v + 2 \frac{\partial}{\partial x} w w \right) i \right. \\
&\quad + \left( 2 \frac{\partial}{\partial y} u u + 2 \frac{\partial}{\partial y} v v + 2 \frac{\partial}{\partial y} w w \right) j \\
&\quad \left. + \left( 2 \frac{\partial}{\partial z} u u + 2 \frac{\partial}{\partial z} v v + 2 \frac{\partial}{\partial z} w w \right) k \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial x} v^2 + \frac{\partial}{\partial x} w^2 \right) i + \left( \frac{\partial}{\partial y} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} v^2 + \frac{\partial}{\partial y} w^2 \right) j \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial z} u^2 + \frac{\partial}{\partial z} v^2 + \frac{\partial}{\partial z} w^2 \right) k \right] \\
&= \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \\
&= \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \nabla \\
&= \frac{1}{2} \left( \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)^2 \nabla \\
&= \left( \frac{1}{2} |\vec{q}|^2 \right) \nabla
\end{aligned}$$

sehingga

$$(\vec{q} \cdot \vec{q}) \nabla = \left( \frac{1}{2} |\vec{q}|^2 \right) \nabla$$



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Khafidhoh Nurul Aini  
NIM : 10610069  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Penerapan Metode Pemisahan Variabel pada Evolusi  
Gelombang Harmonik Melalui Sebuah Pemecah  
Gelombang  
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si  
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	31 Oktober 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	03 Desember 2013	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	03 Desember 2013	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	3.
4.	07 Januari 2014	Revisi Kajian Keagamaan	4.
5.	10 Januari 2014	Revisi Bab III	5.
6.	17 Januari 2014	ACC Bab I dan Bab II	6.
7.	08 Januari 2014	ACC Kajian Keagamaan	7.
8.	22 Januari 2014	ACC Bab III	8.
9.	29 Januari 2014	Konsultasi Bab IV	9.
10.	12 Maret 2014	ACC Bab IV	10.
11.	19 Maret 2014	Konsultasi Abstrak	11.
12.	01 April 2014	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	12.
13.	03 April 2014	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 07 April 2014  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
**NIP. 19751006 200312 1 001**