MATRIKS ATAS ALJABAR *MAX-PLUS*

SKRIPSI

Oleh:
DESI AYU ANISIANTI
NIM. 08610004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MATRIKS ATAS ALJABAR *MAX-PLUS*

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
DESI AYU ANISIANTI
NIM. 08610004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MATRIKS ATAS ALJABAR *MAX-PLUS*

SKRIPSI

Oleh:
DESI AYU ANISIANTI
NIM. 08610004

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 12 Desember 2012

Pembimbing I	Pembimbing II
Evawati Alisah, M.Pd	**Fachrur Rozi, M.Si**
NIP. 19720604 199903 2 001	**NIP. 19800527 200801 1 012**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MASTRIKS ATAS ALJABAR *MAX-PLUS*

SKRIPSI

Oleh:
DESI AYU ANISIANTI
NIM. 08610004

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 16 januari 2013

Penguji Utama	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	.....
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	.....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	.....
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	.....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : DESI AYU ANISIANTI

NIM : 08610004

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Matriks Atas Aljabar *Max-Plus*

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 12 Desember 2012

Yang membuat pernyataan

Desi Ayu Anisianti

NIM. 08610004

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

Gunakanlah kesempatan hidup di dunia

dengan sebaik-baiknya

untuk memperoleh hidup yang abadi….

Selalu melangkah dengan pasti dan penuh hati-hati….

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan
kepada:

Kedua orang tua penulis, bapak tersayang Sabron Salam yang telah berkorban jiwa dan raganya serta tidak mengenal lelah hanya untuk penulis, dan ibunda tersayang Karni Yulias yang telah berkorban nyawanya demi penulis, sehingga penulis bisa seperti saat ini.

Adik penulis Fahril Rahmadaniar
serta mas Nanang Junaedi dan kak Agus Sutrisno.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu sehingga selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd dan Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Bapak tercinta (Sabron Salam) dan ibunda tercinta (Karni Yulias) yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Adik tercinta (Fahril Rahmadaniar) yang telah menjadikan hidup penulis lebih bermakna.
8. Kakanda Nanang Junaedi dan Agus Sutrisno yang selalu memberikan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini serta dukungan dan do'anya kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat *"Isnasib Collection"* dan teman senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika 2008, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil yang sudah diberikan pada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 12 Desember 2012
Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR ..... **viii**
DAFTAR ISI ..... **x**
ABSTRAK ..... **xii**
ABSTRACT ..... **xiii**
الملخص ..... **xiv**

BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Batasan Penelitian 5
1.4 Tujuan Masalah 5
1.5 Manfaat Penelitian 5
1.6 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN PUSTAKA **8**
2.1 Himpunan dan Operasi Biner 8
2.1.1 Himpunan 8
2.1.2 Operasi Biner 10
2.2 Matriks 13
2.2.1 Pengertian Matriks 13
2.2.2 Operasi Aritmetika Matriks 14
2.3 Grup 16

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4 Semi-Grup 20
2.5 Ring 22
2.6 Semi-Ring 27
2.7 Semi-Field. 32
2.8 Aljabar *Max-Plus*. 35
2.8.1 Pengertian Aljabar *Max-Plus* 35
2.8.2 Sifat-Sifat Aljabar *Max-Plus* 36
2.9 Inspirasi Kajian Aljabar dalam Al-qur'an. 41

BAB III PEMBAHASAN 43
3.1 Aljabar *Max-Plus* 43
3.2 Matriks atas Aljabar *Max-Plus* 44
3.2.1 Pengertian Matriks atas Aljabar *Max-Plus* 44
3.2.2 Pengoperasian Aljabar *Max-Plus* pada Matriks 44
3.2.3 Sifat-Sifat Matriks atas Aljabar *Max-Plus* 46
3.3 Inspirasi Kajian Aljabar *Max-Plus* dalam Al-Qur'an 66

BAB IV PENUTUP 69
4.1 Kesimpulan 69
4.2 Saran 70

DAFTAR PUSTAKA 71

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Anisianti, Desi Ayu. 2012. **Matriks atas Aljabar *Max-plus***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Evawati Alisah, M.Pd
II. Fachrur Rozi, M.Si

Kata Kunci: Semi-grup, Semi-ring, Aljabar *Max-plus*.

Aljabar *max-plus* $(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$ merupakan salah satu struktur aljabar yang semi-ring. Notasi $R_{max}^{n\times n}$ menyatakan himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen R, dimana R merupakan himpunan bilangan real. Operasi $\oplus$ menyatakan maksimal dan operasi $\otimes$ menyatakan penjumlahan, yang didefinisikan sebagai berikut:

$\forall A, B \in R_{max}^{n\times n}$

$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$

$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k}^{n} (A_{ik} \otimes B_{kj})$

$(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$ merupakan semi-ring dengan matriks netral (ε) yang entri-entrinya yaitu $-\infty$ dan matriks identitas $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, & jika\ i = j \\ \varepsilon, & jika\ i \neq j \end{cases}$, sehingga untuk $\forall A, B, C \in R_{max}^{n\times n}$ berlaku sifat-sifat:

i. $(R_{max}^{n\times n},\oplus)$ membentuk semi-grup komutatif idempoten dengan matriks netral (ε), karena memiliki sifat asosiatif, komutatif dan terdapat matriks (ε).
ii. $(R_{max}^{n\times n},\otimes)$ membentuk semi-grup, karena memiliki sifat asosiatif dan terdapat matriks identitas (E), serta memiliki matriks netral (ε) yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$.
iii. $(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$ membentuk semi-ring idempoten, karena berdasarkan i dan ii operasi $\oplus$ bersifat idempoten dan operasi $\otimes$ bersifat distributif terhadap operasi $\oplus$.

Maka disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk membahas tentang aljabar *max-plus* pada matrik berordo $m \times n$, aljabar *max-plus* pada fungsi skalar, pada masalah nilai eigen dan vektor eigen, aljabar *max-plus* pada grap dan aljabar *max-plus* dalam bentuk pemrograman agar lebih mudah menyelesaikannya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Anisianti, Desi Ayu. 2012. **Matrix on *Max-plus* Algebra**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: I. Evawati Alisah, M.Pd
II. Fachrur Rozi, M.Si

Keywords: Semi-group, Semi-ring, *Max-plus* Algebra.

An max-plus algebra $(R_{max}^{nxn}, \oplus, \otimes)$ is one of the algebraic structure of a semi-ring. Notation R_{max}^{nxn} states the set of all matrix of size n × n with entries element of R where R is the set of real numbers. Operation $\oplus$ states maximum and operation $\otimes$ states addition, which is defined as follows:

$$\forall A, B \in R_{max}^{n \times n}$$
$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$
$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k}^{n} (A_{ik} \otimes B_{kj})$$

$(R_{max}^{nxn}, \oplus, \otimes)$ is a semi-ring with neutral matrix (ε) whose entries are $-\infty$ and the identity matrix is $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, & jika\ i = j \\ \varepsilon, & jika\ i \neq j \end{cases}$, so that for $\forall A, B, C \in R_{max}^{nxn}$ applicable the properties:

i. $(R_{max}^{nxn}, \oplus)$ form a commutative idempotent semi-group with neutral matrix (ε), as has the nature of associative, commutative and there is a matrix of (ε).
ii. $(R_{max}^{nxn}, \otimes)$ form a semi-group, because the properties are associative and the identity matrix (E), and has a neutral matrix (ε) which is absorbing the operations $\otimes$.
iii. $(R_{max}^{nxn}, \oplus, \otimes)$ form a idempotent semi-ring, because based on i and ii are idempotent operations $\oplus$ and $\otimes$ is distributive operation on operation $\oplus$.

Then suggested to the next researchers to discuss *max-plus* algebra on matrix order $m \times n$. *Max-plus* algebra on scalar function, the problem eigen values and eigen vectors, *max-plus* algebra on graph, and *max-plus* algebra in the form of programming for easy finish.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

الملخص

أنيسيان تي، ديسي أيو. 2012. العكسية معمم العادية للمصفوفة على الجبر ماكس زائد. البحث العلمي. قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: 1. أيفاواتي أليساه ، الماجستير.

2 فخر الرازي ، الماجستير.

الكلمات الرئيسية :نصف المجموعة ، وشبه الدائري ، الجبر ماكس زائد.

والجبر ماكس زائد $(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$ هي واحدة من بنية جبرية من الشبه الحلقة. التدوين $R_{max}^{n\times n}$ تنص كل مجموعة من المصفوفات حجم $n\times n$ مع إدخالات عنصر R, حيث R هو مجموعة الأعداد الحقيقية. عملية $\oplus$ الدول الأقصى و عملية $\otimes$ الدول بالإضافة إلى ذلك, الذي يعرف على النحو التالي:

$$\forall A,B\in R_{max}^{nxn}$$

$$(A\oplus B)_{ij}=A_{ij}\oplus B_{ij}=\max_{n}(a_{ij},b_{ij})$$

$$(A\otimes B)_{ij}=\bigoplus_{k}(A_{ik}\otimes B_{kj})$$

$(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$ هو خاتم شبه محايدة مع مصفوفة (ε) الذي الإدخالات $-\infty$ و مصفوفة الهوية هي $(E)_{ij}=\begin{cases}0,\ jika\ i=j\\ \varepsilon,\ jika\ i\neq j\end{cases}$, بحيث إلى $\forall A,B,C\in R_{max}^{n\times n}$ تنطبق خصائص:

i. $(R_{max}^{n\times n},\oplus)$ تشكيل سمرنداشية تبادلي مع محايدة مصفوفة (ε) وكذلك طبيعة النقابي , تبادلي وهناك مصفوفة من (ε).

ii. $(R_{max}^{n\times n},\otimes)$ تشكيل سمرنداشية و خصائص أحادية, لأن الخصائص هي النقابي ومصفوفة الهوية (E), ويحتوي على مصفوفة محايدة (ε) التي تستوعب عمليات $\otimes$ و معكوس المصفوفة إلى عمليات $\otimes$.

iii. $(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$يشكل idempotent شبه الدائري، لأنه في ظل الأول والثاني هي عمليات idempotent $\oplus$ و$\otimes$ هو عملية التوزيع لعملية $\oplus$.

منتظمة.ثم اقترح للباحثين المقبل لمناقشة الجبر ماكس زائد على من المصفوفات حجم $m\times n$ مصفوفة، ماكس زائد الجبر على الدالات العددية، ومشكلة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، ماكس زائد الجبر والجبر لالعنب ماكس زائد في شكل لتسهيل البرمجة نهاية

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan berjalannya waktu, manusia selalu melakukan usaha untuk menjadi yang lebih baik secara kontinyu. Usaha untuk merumuskan konsep dan unsur dalam bidang ilmu dunia nyata. Seperti Agama Islam yang telah mengajarkan umatnya untuk bersungguh-sungguh menuntut ilmu, baik ilmu agama maupun ilmu pengetahuan. Seperti pada ayat Al-Qur'an yang memberikan semangat kepada kita untuk menuntut ilmu. Seperti yang dijelaskan pada Q.S. Al-Mujaadalah ayat 11:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

Artinya: *Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "berlapang-lapanglah dalam majelis", maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan "berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan.*

Janji Allah dalam ayat di atas tidak menyebutkan secara tegas bahwa Allah akan meninggikan derajat orang yang berilmu namun menegaskan bahwa mereka memiliki derajat-derajat yang lebih tinggi dari orang yang sekadar beriman. Kaum beriman di sini dibagi menjadi dua macam, yaitu orang yang hanya beriman dan beramal sholeh, dan orang yang beriman dan beramal sholeh serta memiliki pengetahuan dan ilmu.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan pengetahuan dan ilmu seseorang akan mudah menyelesaikan semua urusannya dengan tepat dan akan mengetahui segala sisi kesalahannya. Di sisi lain juga menunjukkan bahwa orang yang berilmu haruslah disertai rasa takut dan kagum kepada Allah, yang akan mendorong tumbuhnya rasa untuk mengamalkan ilmunya serta memanfaatkannya untuk kepentingan manusia. Ilmu yang dimaksud dalam ayat di atas bukan saja ilmu agama, tetapi ilmu apapun yang bermanfaat, termasuk matematika.

Matematika merupakan suatu ilmu yang berperan sebagi ilmu pengetahuan pelayan bagi ilmu pengetahuan yang lainnya. Matematika sebagai ilmu eksakta dapat digunakan untuk membantu memecahkan suatu masalah dengan rumus atau perhitungan dan dapat dijadikan sebagai alat untuk menyederhanakan penyajian, sehingga mudah untuk dipahami, dianalisis dan dipecahkan. Seperti yang telah dijelaskan oleh Abdul Aziz (2006), matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas akan lebih mudah dipahami. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah bidang aljabar, matematika terapan, logika, analisis, statistik, dan lain-lain.

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat digunakan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Sedangkan cabang dari ilmu aljabar itu sendiri antara lain aljabar abstrak dan aljabar linier (Majid, 2011).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, ring, field, dan modul. Struktur aljabar dengan satu operasi biner di antaranya grup, dan semi-grup. Sedangkan struktur aljabar dengan dua operasi biner di antaranya adalah ring dan field. Selain ring, juga terdapat struktur aljabar dengan dua operasi yaitu semi-ring. Pada dasarnya aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol (Majid, 2011).

Sedangkan aljabar linier adalah bidang matematika yang diantaranya mengkaji tentang vektor, pemetaan linier, dan matriks. Matriks didefinisikan sebagai suatu himpunan bilangan atau fungsi yang tersusun dalam baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku. Bilangan atau fungsi tersebut dinamakan entri atau elemen dari matriks. Matriks dilambangkan dengan huruf besar sedangkan entri dilambangkan dengan huruf kecil (Imrona, 2009:1).

Matriks dibagi menjadi beberapa jenis antara lain matriks bujur sangkar, matriks nul, matriks identitas, matriks simetri, dan lain-lain. Operasi dalam matriks jika penjumlahan maka syaratnya jumlah ordo antara kedua matriks harus sama, sedangkan untuk operasi perkalian banyak kolom pada matriks satu harus sama dengan banyak baris pada matriks lainnya (Imrona, 2009:4).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada penelitian sebelumnya yaitu penelitian Abdul Majid (2011) menunjukkan bahwa sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku pada himpunan semua bilangan, baik bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan real, maupun bilangan kompleks merupakan suatu kajian yang sering kita jumpai. Sedikit memberi perbedaan definisi operasi penjumlahan dan perkalian pada umumnya, maka dengan operasi dasar aljabar *max-plus* menggunakan pendefinisian sebagai berikut (Schutter, 1996: 35):

$$x \oplus y := \max(x, y)$$

$$x \otimes y := x + y$$

$(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-ring dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ disebut semi-ring, semi-ring R_{max} merupakan semi-ring komutatif dan semi-ring idempoten jika operasi $\oplus$ bersifat idempoten, dan semi-ring komutatif R_{max} merupakan semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\otimes$. Maka, terlihat bahwa $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-field idempoten. $\mathcal{R}_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$ disebut dengan aljabar *max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan R_{max}.

Berdasarkan uraian di atas, dan sebagai penelitian lanjutan dari penelitian sebelumnya, maka dalam penelitian ini dibahas secara khusus, tentang Matriks atas Aljabar *Max-Plus*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang dapat dirumuskan adalah bagaimana sifat-sifat aljabar *max-plus* dalam matriks?

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah membahas matriks yang berordo $n \times n$ yaitu matriks bujur sangkar, dan aljabar *max-plus* $(R_{max}^{n\times n}, \oplus, \otimes)$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan sifat aljabar *max-plus* dalam matriks.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis

   Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan matriks atas aljabar *max-plus*.

2. Lembaga

   Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian dan bahan perkuliahan khususnya tentang materi matriks atas aljabar *max-plus*.

3. Pembaca

   Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai matriks atas aljabar *max-plus*, dan diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian yang akan datang.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari dan memahami konsep operasi biner, semi-grup, semi-ring, matriks, dan aljabar *max-plus*.
2. Dimulai dari suatu himpunan tak kosong yang didefinisikan dengan matriks ordo $n \times n$, matriks $M_{n\times n}$ dikerjakan dengan sifat-sifat aljabar *max-plus*.
3. Sehingga matriks $M_{n\times n}$ terbukti memenuhi sifat alajabar *max-plus* yaitu $(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$ merupakan semi-ring idempoten.
4. Jadi dapat dikatakan matriks atas aljabar *max-plus*.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini perlu dibuat langkah-langkah yang sistematis guna memudahkan dalam memahami makna dari setiap bab yang ada. Secara umum penulisan penelitian ini terdiri dari empat bab:

1. Bab I Pendahuluan

   Bab ini membahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. Bab II Kajian Pustaka

   Bab ini berisikan teori-teori yang mendasari penulisan skripsi ini, atau lebih dikenal dengan kajian teori. Adapun teori-teori yang termuat didalamnya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

adalah himpunan dan operasi biner, matriks, grup, semi-grup, ring, semi-ring, semi-field, aljabar *max-plus*, dan inspirasi kajian aljabar dalam Al-Qur'an.

3. Bab III Pembahasan

   Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi aljabar *max-plus*, bukti-bukti sifat aljabar *max-plus* terhadap matriks, inspirasi kajian aljabar *max-plus* dalam Al-Qur'an.

4. Bab IV Penutup

   Bab ini berisi tentang kesimpulan dari materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan berisi saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan dan Operasi Biner

2.2.1 Himpunan

Istilah himpunan sering dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan-pembahasan mengenai aljabar abstrak. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 1

Himpunan adalah kumpulan obyek-obyek yang mempunyai sifat yang sama, obyek-obyek tersebut yang selanjutnya disebut sebagai anggota dari himpunan (Bhattacharya, 1990:3).

Obyek yang berada dalam himpunan merupakan anggota himpunan atau elemen atau unsur himpunan. Obyek tersebut dapat berupa benda konkret, seperti meja, kursi, dan lain-lain, atau dapat pula berupa benda abstrak seperti bilangan, fungsi dan yang sejenisnya.

Definisi 2

Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong dan disimbolkan dengan ∅ atau { } (Sukirman, 2005:1).

Istilah kosong mengacu pada himpunan yang tidak mengandung elemen atau himpunan dengan kardinal 0.

Himpunan {{ }} dapat juga ditulis {∅}, akan tetapi {∅} bukan himpunan kosong karena {∅} memuat satu elemen yaitu ∅.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

A adalah himpunn semua bilangan genap positif yang kurang dari 10

Maka $A = \{2, 4, 6, 8\}$

Contoh:

Misal

$B = \{x | x$ adalah akar $-$ akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 10 = 0\}$

Maka $|B| = 0$

Definisi 3

Himpunan A dikatakan himpunan bagian (subset) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan superset dari A (Munir, 2009:54).

Notasi himpunan bagian $A \subseteq B$

Contoh:

Ambil $A = \{1, 4, 6, 7, 9\}$, dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Maka $A \subseteq B$

Definisi 4

Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau B, yang dinotasikan $A \cup B = \{x | x \in A$ atau $x \in B\}$ (Munir, 2009:61).

Contoh:

Misal $A = \{2, 6, 7\}$ dan $B = \{1, 3, 8\}$

Maka $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Difinisi 5

Misalkan A dan B himpunan. Irisan A dan B, ditulis $A \cap B$, adalah himpunan yang memuat semua unsur di A dan B yang dinotasikan dengan $A \cap B = \{x | \ x \in A$ dan $x \in B\}$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:4).

Contoh:

Ambil $A = \{1,3,5,7,9\}$ dan $B = \{2,3,5,7\}$

Maka $A \cap B = \{3,5,7\}$

2.1.2 Operasi Biner

Definisi 6

Operasi atau komposisi * dalam sebuah himpunan tidak kosong G adalah biner jika dan hanya jika

$$a \in G, b \in G \text{ maka } a * b \in G, \forall a, b \in G.$$

Sifat di atas dari operasi di G dikatakan tertutup dan jika sifat ini memenuhi operasi * di G (Raisinghania dan Anggarwal, 1980: 27).

Misal $(a, b) \in S \times S$ maka bayangan dari pasangan terurut (a, b) di S dibawah pemetaan * ditulis $a * b$. Dengan kata lain operasi biner * memasangkan setiap a dan b dari himpunan S dengan suatu $a * b$ elemen dari himpunan S. Selanjutnya * dikatakan sebagai operasi biner pada S. Salah satu contoh operasi biner adalah penjumlahan, pengurangan, dan perkalian pada bilangan real R, sebab $a, b \in R$, maka $a + b \in R$, $a - b \in R$, $a \times b \in R$. Sedangkan pembagian bukan opeasi biner pada R karena pembagian dengan nol tak terdefinisi, tetapi pembagian adalah operasi biner pada $R - \{0\}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 7

Suatu operasi biner * pada suatu himpunan *S* dikatakan komutatif jika dan hanya jika untuk setiap *x*, *y* ∈ *S* , maka *x* * *y* = *y* * *x* (Whitelaw, 1995:63).

Contoh:

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z \right\}$, $\forall A, B \in M$, dan + adalah operasi biner terhadap *M*, berlaku *A* + *B* = *B* + *A*

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} o & p \\ q & r \end{bmatrix} \in M$

Sedemikian hingga

$$A + B = B + A$$

$$\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o & p \\ q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & p \\ q & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k+o & l+p \\ m+q & n+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o+k & p+l \\ q+m & r+n \end{bmatrix}$$

Definisi 8

Suatu operasi biner ∗ pada suatu himpunan *S* bersifat asosiatif jika dan hanya jika setiap *x*, *y*, *z* ∈ *S* berlaku (*x* ∗ *y*) ∗ *z* = *x* ∗ (*y* ∗ *z*) (Whitelaw, 1995:62).

Contoh:

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z \right\}$, $\forall A, B, C \in M$, dan + adalah operasi biner terhadap *M*, berlaku $(A + B) + \mathrm{C} = \mathrm{A} + (B + \mathrm{C})$

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix} \in M$

$\forall A, B, C \in M$ berlaku $(A + B) + \mathrm{C} = \mathrm{A} + (B + \mathrm{C})$

Sedemikian hingga

$$(A + B) + \mathrm{C} = \mathrm{A} + (B + \mathrm{C})$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left(\begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} d+r & e+s \\ f+t & g+u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r+j & s+k \\ t+l & u+m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d+r+j & e+s+k \\ f+t+g & t+u+m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+r+j & e+s+k \\ f+t+l & g+u+m \end{bmatrix}$$

Definisi 9

Jika ada $e \in S$ sedemikian hingga $\forall a \in S$ berlaku $a * e = e * a = a$ maka e disebut elemen identitas terhadap * (Sukirman, 2005:35).

Contoh:

Ambil $e = \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} \in Z, \forall M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z\right\}$, $\forall A \in M$, dan $+$ adalah operasi biner terhadap M, berlaku $(A + e) = (\mathrm{e} + \mathrm{A}) = \mathrm{A}$

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \in M$

Sedemikian hingga

$$(A + e) = (\mathrm{e} + \mathrm{A}) = A$$

$$\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m+I & n+I \\ o+I & p+I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+m & I+n \\ I+o & I+p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

Definisi 10

Jika $\forall a \in S, \exists b \in S$ sedemikian hingga $a * b = b * a = e$ maka b disebut invers dari a terhadap operasi *. Invers dari a ditulis a^{-1} (Sukirman, 2005:35).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

Terdapat $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z \right\}$

$\forall A = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \in M, \exists B = \begin{bmatrix} -m & -n \\ -o & -p \end{bmatrix} \in M$ dengan + adalah operasi biner terhadap M berlaku $A + B = B + A = e$,dan $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$

Sedemikian hingga

$$A + B = B + A = e$$

$$\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m & -n \\ -o & -p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & -n \\ -o & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m + (-m) & n + (-n) \\ o + (-o) & p + (-p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m + m & -n + n \\ -o + o & -p + p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Matriks

2.2.1 Pengertian Matriks

Definisi 11

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Sebagai contoh susunan matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \\ o & p \end{bmatrix}$ [4] $\begin{bmatrix} c & d & e \\ f & g & h \\ i & j & k \end{bmatrix}$

(Anton,1987:22)

Definisi 12

Ukuran matriks bermacam-macam besarnya. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut (Anton, 1987:22)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sebagai contoh $M_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, M_{2x3} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

Pada matriks M_{2x2} dijelaskan bahwa matriks yang memiliki baris 2 dan kolom 2, sedangkan pada matriks M_{2x3} dijelaskan bahwa matriks yang memiliki baris 2 dan kolom 3 (Imrona, 2009:1).

2.2.2 Operasi Aritmetika Matriks

Operasi aritmetika yang biasa dilakukan terhadap matriks adalah operasi penjumlahan dan perkalian dua buah matriks, serta perkalian matriks dengan skalar.

1. Penjumlahan Dua Matriks

   Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang ukurangnya sama. Maka jumlah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang berbeda tidak dapat ditambahkan (Anton, 1987:23)

   Contoh:

   Ambil $A, B \in M$ dengan

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in M$$

   Sedemikian hingga

   $$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 7 & 13 & -3 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Perkalian Dua Matriks

   Dua matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

Ambil $A, B \in M$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \in M$

Sedemikian hingga

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times 2) + (3 \times 3) & (1 \times 0) + (3 \times -2) & (1 \times -4) + (1 \times 6) \\ (2 \times 2) + (-1 \times 3) & (2 \times 0) + (-2 \times -2) & (2 \times -4) + (-1 \times 6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks dengan Skalar

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c (Anton, 1987:24)

Contoh:

Ambil sebarang $A \in M$ dengan $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ dan skalar $c = 3$

Sedemikian hingga

$$c \times A = 3 \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 5 \\ 3 \times -2 & 3 \times 1 \\ 3 \times 4 & 3 \times -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -6 & 3 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat Operasi Perkalian Matriks

1. Perkalian matriks tidak komutatif, yaitu $\forall A, B \in M$ berlaku $AB \neq BA$
2. Asosiatif, yaitu $\forall A, B, C \in M$ berlaku $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
3. Distributif, yaitu $\forall A, B, C \in M$ berlaku

$$A \times (B \times C) = (A \times B) + (A \times C)$$

$$(A \times B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4. Perkalian matriks dengan matriks identitas I tidak mengubah matriks, yaitu $\forall A \in M$ berlaku $A \times I = I \times A = A$

(Munir, 2005:102)

2.3 Grup

Salah satu struktur aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tersebut tidak dipenuhi maka bukan grup.

Definisi 13

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dan pada G didefinisikan operasi biner *. Sistem matematika $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma:

i. Untuk setiap $a, b, c \in G$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$ operasi * bersifat asosiatif di G

ii. G mempunyai unsur identitas terhadap operasi *

Misalkan e unsur di G sedemikian hingga $a * e = e * a$, $\forall a \in G$ maka e disebut unsur identitas.

iii. Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi *

Untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ yang disebut sebagai invers dari a, sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. e adalah unsur identitas (Raisinghania dan Anggarwal, 1980: 31).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z \right\}$, $\forall A, B, C \in M$, dan + adalah operasi biner terhadap *M*, memenuhi sifat-sifat grup!

Jawab

Ambil sebarang $A, B, C \in M$ dan + adalah operasi biner, $(M, +)$ adalah grup dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \in M$$

jika memenuhi

i. Biner terhadap operasi +

$\forall A,B \in M$, berlaku $A + B \in M$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{11} \\ a_{21} + b_{11} & a_{22} + b_{11} \end{bmatrix} \in M$$

Jadi, *M* biner terhadap operasi +

ii. Memiliki sifat asosiatif terhadap operasi +

$\forall A,B,C \in M$, berlaku $(A + B) + C = A + (B + C)$

Sedemikian hingga

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

Jadi, operasi + bersifat asosiatif di M

iii. Memiliki unsur identitas $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ terhadap operasi +

$\exists \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$, sehingga $A + e = e + A = A, \forall A \in M$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + a_{11} & 0 + a_{12} \\ 0 + a_{21} & 0 + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Jadi, identitas di M adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

iv. Memiliki invers terhadap operasi +

$\forall A \in M, \exists A^{-1} = (-A) \in M$, berlaku $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Dengan $A^{-1} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \in M$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedemikian hingga

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & a_{12} + (-a_{12}) \\ a_{21} + (-a_{21}) & a_{22} + (-a_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} + a_{11} & -a_{12} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{21} & -a_{22} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, invers dari *a* adalah $-a$

Dari (*i*), (*ii*), (*iii*) dan (*iv*) maka (*M*, +) adalah grup.

Definisi 14

Grup (*G*,*) dikatakan komutatif (abelian) jika untuk setiap unsur *a* dan *b* di *G* berlaku $a * b = b * a$ (Arifin, 2000: 36).

Contoh:

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z \right\}$, ambil sebarang $A, B \in M$, dan + adalah operasi biner terhadap *M*, dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M$ adalah grup komutatif

Sedemikian hingga

$$A + B = B + A$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix}$$

Jadi, (*M*, +) adalah grup komutatif.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4 Semi-Grup

Definisi 15

Misalkan *S* adalah himpunan tidak kosong, *S* dikatakan semi-grup jika pada *S* dikenai operasi biner * sedemikian hingga, untuk semua *a*, *b*, *c* ∈ *S* sehingga (*a* * *b*) * *c* = *a* * (*b* * *c*) (hukum asosiatif), yang dinotasikan dengan (*S*, *) adalah semi-grup (Kandasamy, 2002:7).

Contoh:

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z \right\}$ dengan + adalah operasi biner terhadap *M*,

selidiki apakah $(M, +)$ dengan

$A, B, C \in M, \forall A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \in M$ merupakan semi-grup.

Jawab

Ambil sebarang $A, B, C \in M$ dan + adalah operasi biner, $(M, +)$ adalah semi-grup, dengan

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \in M$ jika memenuhi sifat-sifat semi-grup:

i. Biner terhadap operasi +

$$\forall A, B \in M, \text{berlaku } A + B \in M$$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} \in M$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} \in M$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} a+h & b+i \\ c+j & d+k \end{bmatrix} \in M$$

Jadi, operasi + biner di *M*

ii. Memiliki sifat asosiatif terhadap operasi +

$\forall A, B, C \in M$, berlaku $(A + B) + C = A + (B + C)$

Sedemikian hingga

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+h & b+i \\ c+j & d+k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+h+m & b+i+n \\ c+j+o & d+k+p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h+m & i+n \\ j+o & k+p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+h+m & b+i+n \\ c+j+o & d+k+p \end{bmatrix}$$

Jadi, operasi + bersifat asosiatif di *M*

Definisi 16

Jika semi-grup (*S*, *) dikatakan semi-grup komutatif jika memenuhi $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in S$ (Kandasamy, 2002: 7).

Contoh:

$M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z\right\}$ dengan + adalah operasi biner terhadap *M*, selidiki apakah $(M, +)$, ambil sebarang $A, B \in M$, dengan

$A = \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \in M$ adalah semi-grup komutatif.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sudah dibuktikan bahwa (M, +) adalah semi-grup.

Memiliki sifat komutatif terhadap operasi +

$\forall A, B \in M$, berlaku $A + B = B + A$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u+q & v+r \\ w+s & x+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+u & r+v \\ s+w & t+x \end{bmatrix}$$

Jadi, operasi + memiliki sifat komutatif di M.

2.5 Ring

Suatu sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner dinamakan grup. Sistem matematika tersebut belumlah cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring.

Definisi 17

Suatu ring $(R,*,\circ)$ adalah sebuah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu * sebagai operasi pertama dan $\circ$ sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma berikut:

i. $(R,*)$ adalah grup abelian

a. R tertutup terhadap operasi *

$\forall x, y \in M$ berlaku $(x * y) \in M$

b. Operasi * bersifat asosiatif di R

$\forall x, y, z \in M$ berlaku $x * (y * z) = (x * y) * z$

$$x * (y * z) = (x * (y * z))$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= (x * y * z)$$

$$= ((x * y) * z)$$

$$= (x * y) * z$$

c. Memiliki elemen identitas $e = 0$ terhadap operasi * di *R*

$\forall x \in R$ berlaku $0 * x = x * 0 = x$

d. $\forall x \in R, \exists x^{-1} = (-x) \in R$, berlaku $x * (-x) = (-x) * x = e$

e. Operasi * bersifat komutatif di *R*

$\forall x,y \in R$ berlaku $x * y = y * x$

ii. Operasi ∘ bersifat distributif terhadap operasi * di *R* baik distributif kiri maupun kanan (Dummit dan Foote, 1991:225).

iii. Operasi ∘ bersifat asosiatif

$\forall x, y, z \in R$ berlaku $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:313)

Contoh:

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z \right\}$, $(M, +, \times)$ adalah ring

Ambil sebarang $x, y, z \in M$, dengan

$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in M$ memenuhi sifat-sifat ring.

Jawab

Ambil sebarang $x, y, z \in M$ dengan

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in M$$

i. $(M, +)$ adalah grup abelian karena

a) M tertutup terhadap operasi +

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\forall x, y \in M$ berlaku $(x + y) \in M$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M$$

$$\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in M$$

b) Operasi + bersifat asosiatif di M

$\forall x, y, z \in M$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{bmatrix}$$

c) e adalah elemen identitas terhadap operasi + di M

dengan $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sedemikian hingga

$\forall x \in M$ berlaku $x + e = e + x = x$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

d) $\forall x \in M, \exists x^{-1} = (-x) \in M$, berlaku $x + (-x) = (-x) + x = e$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(-\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \left(-\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Operasi + bersifat komutatif di M

$\forall x,y \in M$ berlaku $x + y = y + x$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

ii. Operasi × bersifat asosiatif di M

$\forall x, y, z \in M$ berlaku $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

Sedemikian hingga

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ae+bg)i + (af+bh)k & (ae+bg)j + (af+bh)l \\ (ce+dg)i + (cf+dh)k & (ce+dg)j + (cf+dh)l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(ei + fk) + b(gi + hk) & a(ej + fl) + b(gj + hl) \\ c(ei + fk) + d(gi + hk) & c(ej + fl) + d(gj + hl) \end{bmatrix}$$

iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap $+$

$\forall x, y, z \in M$ berlaku $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

Sedemikian hingga

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} ai + bk & aj + bl \\ ci + dk & bj + dl \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ai + bk) + (ei + fk) & (aj + bl) + (ej + fl) \\ (ci + dk) + (gi + hk) & (bj + dl) + (gj + hl) \end{bmatrix}$$

$\forall x, y, z \in M$ berlaku $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ai + bk & aj + bl \\ ci + dk & cj + dl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ae + bg) + (ai + bk) & (af + bh) + (aj + bl) \\ (ce + dg) + (ci + dk) & (cf + dh) + (cj + dl) \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.6 Semi-Ring

Definisi 18

Suatu semi-ring $(S, +, \times)$ adalah suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu + dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut:

i. $(S, +)$ adalah semi-grup komutatif dengan elemen netral $e = 0$, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku:

a. Asosiatif

$$\forall a, b, c \in S \text{ berlaku } (a + b) + c = a + (b + c)$$

b. Komutatif

$$\forall a, b, \in S \text{ berlaku } a + b = b + a$$

c. Mempunyai elemen netral e

$$\forall a, b, \in S \text{ berlaku } a + 0 = 0 + a = a$$

d. Idempoten

$$\forall a \in S \text{ berlaku } a + a = a$$

ii. $(S, \times)$ adalah semi-grup dengan elemen satuan 1, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku:

a. Asosiatif

$$\forall a, b, c \in S \text{ berlaku } (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

b. Mempunyai elemen identitas

$$\forall a \in S \text{ berlaku } a \times 1 = 1 \times a = a$$

c. Komutatif

$$\forall a, b \in S \text{ berlaku } (a \times b) = (b \times a)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d. Elemen netral $e = 0$ merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\times$, yaitu jika $a \in S$, berlaku:

$$\forall a \in S \text{ berlaku } a \times 0 = 0 \times a = 0$$

e. Operasi $\times$ distributif terhadap operasi $+$, yaitu $a, b, c \in S$, maka:

$$\forall a, b, c \in S \text{ berlaku } (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$\forall a, b, c \in S \text{ berlaku } a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

(Rudhito, 2004: 2).

Contoh:

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in Z \right\}$, dan operasi $+$ dan operasi $\times$ adalah operasi biner terhadap M. $(M, +, \times)$ adalah semi-ring. Ambil sebarang $x, y, z \in M$, dengan

$x = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \in M$ memenuhi sifat-sifat semi-ring dengan elemen netral $(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan elemen identitas $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. $(M, +)$ merupakan semi-grup komutatif dengan elemen netral 0

   i. $\forall x, y, z \in M$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$

   Sedemikian hingga

$$\left(\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q + a & r + b \\ s + c & t + d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q + a + m & r + b + n \\ s + c + o & t + d + p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a+m & b+n \\ c+o & d+p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q+a+m & r+b+n \\ s+c+o & t+d+p \end{bmatrix}$$

Jadi, operasi + bersifat asosiatif di *M*

ii. $\forall x, y \in M$ berlaku $x + y = y + x$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q+a & r+b \\ s+c & t+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+q & b+r \\ c+s & d+t \end{bmatrix}$$

Jadi, operasi + bersifat komutatif di *M*

iii. $\forall x, e \in M$ berlaku $x + e = e + x = x$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}$$

Jadi, operasi + memiliki elemen netral di *M*

iv. $\forall x \in M$ berlaku $x + x = x$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}$$

Jadi, operasi + bersifat idempoten di *M*

2. $(M, \times)$ merupakan semi-grup dengan elemen identitas $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

i. $\forall x, y, z \in M$ berlaku $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

Sedemikian hingga

$$\left(\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} qa+rc & qb+rd \\ sa+tc & sb+td \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (qa+rc)m+(qb+rd)o & (qa+rc)n+(qb+rd)p \\ (sa+tc)m+(sb+td)o & (sa+tc)n+(sb+td)p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} am+bo & an+bp \\ cm+do & cn+dp \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q(am+bo)+r(cm+do) & q(an+bp)+r(cn+dp) \\ s(am+bo)+t(cm+do) & s(an+bp)+t(cn+dp) \end{bmatrix}$$

Jadi, operasi $\times$ bersifat asosiatif di M

ii. $\forall x, y, z \in M$ berlaku $x \times I = x$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q+r & q+r \\ s+t & s+t \end{bmatrix}$$

Oleh karena dengan memasukkan entri himpunan matriks, maka $x \times I \neq x$ sehingga operasi $\times$ tidak memiliki identitas di M

iii. $\forall x, y \in M$ berlaku $(x \times y) = (y \times x)$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} qa+rc & qb+rd \\ sa+tc & sb+td \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aq+bs & ar+bt \\ cq+ds & cr+dt \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} qa+rc & qb+rd \\ sa+tc & sb+td \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} aq+bs & ar+bt \\ cq+ds & cr+dt \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Olek karena $\begin{bmatrix} qa+rc & qb+rd \\ sa+tc & sb+td \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} aq+bs & ar+bt \\ cq+ds & cr+dt \end{bmatrix}$ maka operasi $\times$ tidak komutatif di M sehingga $(x \times y) \neq (y \times x)$, akan tetapi jika $\forall x, y \in R$ dengan x, y adalah himpunan bilangan real, maka $(x \times y) = (y \times x)$ sehingga operasi $\times$ komutatif di M.

3. Elemen netral $(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bersifat menyerap terhadap operasi $\times$

$\forall x, (e) \in M$ berlaku $x \times (e) = (e) \times x = (e)$

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. $(M, +, \times)$ bersifat distributif

$\forall x, y, z \in M$ berlaku $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

Sedemikian hingga

$$\left(\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} q+a & r+b \\ s+c & t+d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} qm+ro & qn+rp \\ sm+to & sn+tp \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} am+bo & an+bp \\ cm+do & cn+dp \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (q+a)m+(r+b)o & (q+a)n+(r+b)p \\ (s+c)m+(t+d)o & (s+c)n+(t+d)p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (q+a)m+(r+b)o & (q+a)n+(r+b)p \\ (s+c)m+(t+d)o & (s+c)n+(t+d)p \end{bmatrix}$$

$\forall x, y, z \in M$ berlaku $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a+m & b+n \\ c+o & d+p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} qa+rc & qb+rd \\ sa+tc & sb+td \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qm+ro & qn+rp \\ sm+to & sn+tp \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q(a+m)+r(c+o) & q(b+n)+r(d+p) \\ s(a+m)+t(c+o) & s(b+n)+t(d+p) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q(a+m)+r(c+o) & q(b+n)+r(d+p) \\ s(a+m)+t(c+o) & s(b+n)+t(d+p) \end{bmatrix}$$

2.7 Semi-Field

Definisi 19

Sebuah semi-field $(S, +, \times)$ adalah himpunan yang dikenai dengan dua operasi + dan × sedemikian sehingga:

i. Operasi + asosiatif, komutatif dan memiliki elemen netral 0.

ii. Operasi × membentuk grup abelian dan memiliki elemen identitas 1.

iii. Memiliki sifat distributif × terhadap +.

Sehingga yang dimaksud semi-field adalah

i. Idempoten jika operasi pertama adalah idempoten, sehingga, jika $\forall a \in S,\ a + a = a$.

ii. Komutatif jika grupnya adalah komutatif.

(Baccelli, 2001: 101).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

R adalah himpunan semua bilangan real

$(R, +, \times)$ merupakan semi-field dengan elemen netral $e = 0$ dan elemen identitas 1, karena untuk setiap $x, y, z \in R$ dengan $x = a, y = b, z = b \in R$ berlaku:

1. $(R, +)$ merupakan semi-grup komutatif dengan elemen netral 0

   i. $\forall x, y, z \in R$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$

      Sedemikian hingga

      $$(a + b) + c = a + (b + c)$$

      $$a + b + c = a + b + c$$

      Jadi, operasi + bersifat asosiatif di R

   ii. $\forall x, y \in R$ berlaku $x + y = y + x$

      Sedemikian hingga

      $$a + b = b + a$$

      Jadi, operasi + bersifat komutatif di R

   iii. $\forall x, e \in R$ berlaku $x + 0 = 0 + x = x$

      Sedemikian hingga

      $$a + 0 = 0 + a = a$$

      Jadi, operasi + memiliki identitas di R

   iv. $\forall x \in R$ berlaku $x + x = x$

      Sedemikian hingga

      $$a + a = a$$

      Jadi, operasi + bersifat idempoten di R

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. $(R, \times)$ merupakan grup abelian dengan elemen identitas 1

   i. $\forall x, y, z \in R$ berlaku $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

   Sedemikian hingga

   $$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

   $$ab \times c = a \times bc$$

   $$abc = abc$$

   Jadi, operasi $\times$ bersifat asosiatif di R

   ii. $\forall x, y \in R$ berlaku $x \times y = y \times x$

   Sedemikian hingga

   $$(a \times b) = (b \times a)$$

   $$ab = ba$$

   Jadi, operasi $\times$ bersifat komutatif di R

   iii. $\forall x \in R$ berlaku $x \times 1 = 1 \times x = x$

   Sedemikian hingga

   $$a \times 1 = 1 \times a = a$$

   Jadi, operasi $\times$ memiliki identitas di R

   iv. $\exists x^{-1} \in R$, sedemikian hingga $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$

   Dengan $x^{-1} = -a$ maka berlaku

   $$a \times -a = -a \times a$$

   $$1 = 1$$

   Jadi, operasi $\times$ memiliki invers di R

3. Elemen netral $e = 0$ bersifat menyerap terhadap operasi $\times$

   $\forall x, e \in R$ berlaku $x \times 0 = 0 \times x = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedemikian hingga

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

4. $(R, +, \times)$ bersifat distributif $\times$ terhadap $+$

$\forall x, y \in R$ berlaku $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

Sedemikian hingga

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(a + b)c = (a + b)c$$

$\forall x, y \in R$ berlaku $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

Sedemikian hingga

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$a(b + c) = ab + bc$$

$$a(b + c) = a(b + c)$$

2.8 Aljabar *Max-Plus*

2.8.1 Pengertian Aljabar *Max-Plus*

Aljbar *max-plus* adalah himpunan $R \cup \{-\infty\}$, dengan R himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $\otimes$. Selanjutnya $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan $R_{\max}$ dan $\{-\infty\}$ dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$. Struktur aljabar dari $R_{\max}$ adalah semi-field, yaitu:

1. $(R \cup \{-\infty\}, \oplus)$ merupakan semi-grup komutatif dengan elemen netral $\{-\infty\}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. $(R \cup \{-\infty\}, \otimes)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0

3. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat distributif

4. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu

$$\forall a \in R_{\max}, -\infty \otimes a = a \otimes -\infty = -\infty$$ (Musthofa, 2011: 2)

2.8.2 Sifat-Sifat Aljabar Max-Plus

(R_{max},$\oplus$,$\otimes$) merupakan semi-ring dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$, karena untuk setiap $a, b, c \in R_{max}$ berlaku sifat-sifat berikut:

i. Asosiatif terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

Bukti

$$\forall x, y, z \in R_{max}$$

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus \max(y, z) \\ &= \max(x, \max(y, z)) \\ &= \max(x, y, z) \\ &= \max(\max(x, y), z) \\ &= \max(x, y) \oplus z \\ &= (x \oplus y) \oplus z \end{aligned}$$

Jadi, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

ii. Komutatif terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \oplus y = y \oplus x$$

Bukti

$$\forall x, y \in R_{max}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x \oplus y = \max\ (x, y)$$

$$= \max\ (y, x) \text{ ... sifat komutatif}$$

$$= y \oplus x$$

Jadi, $x \oplus y = y \oplus x$

iii. Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus$:

$$\forall x \in R_{max}:\ \ x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$$

Bukti

$\forall x \in R_{max}$

$x \oplus \varepsilon = \max(x, -\infty)$ ... sifat perluasan operasi untuk $-\infty$

$= x$

$\varepsilon \oplus x = \max(-\infty, x)$ ... sifat perluasan operasi untuk $-\infty$

$= x$

Jadi, $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$

iv. Idempoten terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x \in R_{max}:\ \ x \oplus x = x$$

Bukti

$\forall x \in R_{max}$

$$x \oplus x = \max(x, x)$$

$$= x$$

Jadi, $x \oplus x = x$

(R_{max}, $\oplus$) membentuk semi-grup komutatif dengan elemen identitas ε.

v. Asosiatif terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}:\ \ x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti

$\forall x, y, z \in R_{max}$

$$x \otimes (y \otimes z) = x + (y + z)$$

$$= (x + y) + z \text{ ... sifat asosiatif}$$

$$= (x \otimes y) \otimes z$$

Jadi, $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$

vi. Komutatif terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \; x \otimes y \; = y \otimes x$$

Bukti

$\forall x, y \in R_{max}$

$$x \otimes y \; = x + y$$

$$= y + x \text{ ... sifat komutatif}$$

$$= y \otimes x$$

Jadi, $x \otimes y \; = y \otimes x$

vii. Terdapat elemen identitas terhadap $\otimes$:

$$\forall x \in R_{max}: \; x \otimes e = e \otimes x = x$$

Bukti

$\forall x \in R_{max}$

$$x \otimes e = x + 0$$

$$= x$$

$$e \otimes x = 0 + x$$

$$= x$$

Jadi, $x \otimes e = e \otimes x = x$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

viii. Invers terhadap operasi $\otimes$:

$\forall x \in R_{max}$: $x \neq \varepsilon$ terdapat $y \in R_{max}$ sehingga $x \otimes y = e$

Bukti

$\forall x \in R_{max}$, $x \neq \varepsilon$

$x \otimes y = x + y = 0$

Sehingga $y = -x \in R_{max}$

Jadi, $x \otimes y = x + y = x + (-x) = 0 = e$

ix. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x \in R_{max}: \; x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

Bukti

$\forall x \in R_{max}$

$x \otimes \varepsilon = x + (-\infty)$ ... sifat perluasan operasi untuk $-\infty$

$= -\infty$

$= \varepsilon$

$\varepsilon \otimes x = (-\infty) + x$ ... sifat perluasan operasi untuk $-\infty$

$= -\infty$

$= \varepsilon$

Jadi, $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$

(R_{max}, $\otimes$) membentuk grup abelian dengan elemen identitas e, dan memiliki elemen netral ε yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$.

x. Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

$$\forall x, y, z \in R_{max}: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti

$\forall x, y, z \in R_{max}$

$$(x \oplus y) \otimes z = \max(x, y) + z$$

$$= \max(x + z, y + z) \text{ ... sifat distributif}$$

$$= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

Jadi, $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

dan

$\forall x, y, z \in R_{max}$

$$x \otimes (y \oplus z) = x + \max(y, z)$$

$$= \max(x + y, x + z) \text{ ... sifat distributif}$$

$$= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

Jadi, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

(R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) disebut semi-ring, semi-ring R_{max} merupakan semi-ring komutatif dan semi-ring idempoten jika operasi $\oplus$ bersifat idempoten, dan semi-ring komutatif R_{max} merupakan semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\otimes$. Maka, terlihat bahwa (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semi-field idempoten. $\mathcal{R}_{max}$ = (R_{max},$\oplus$,$\otimes$) disebut dengan aljabar *max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan R_{max} (Abdul Majid, 2011:62).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.9 Inspirasi Kajian Aljabar dalam Al-Qur'an

Allah berfirman dalam QS. An-Nisa' : 59 yang berbunyi

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ أَطِيعُواْ ٱللَّهَ وَأَطِيعُواْ ٱلرَّسُولَ وَأُوْلِي ٱلۡأَمۡرِ مِنكُمۡۖ فَإِن تَنَٰزَعۡتُمۡ فِي شَيۡءٖ فَرُدُّوهُ إِلَى ٱللَّهِ وَٱلرَّسُولِ إِن كُنتُمۡ تُؤۡمِنُونَ بِٱللَّهِ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِۚ ذَٰلِكَ خَيۡرٞ وَأَحۡسَنُ تَأۡوِيلًا ٥٩

"Hai orang-orang yang beriman, ta'atilah Allah dan ta'atilah Rasul (Nya), dan ulil amri di antara kamu. Kemudian jika kamu berlainan pendapat tentang sesuatu, maka kembalikanlah ia kepada Allah (Al Qur'an) dan Rasul (sunnahnya), jika kamu benar-benar beriman kepada Allah dan hari kemudian. Yang demikian itu lebih utama (bagimu) dan lebih baik akibatnya." (An Nisa' : 59)

Dalam penggalan ayat tersebut di atas menjelaskan tentang perlunya mentaati Allah, Rasul dan para pemimpin, selain itu juga apabila terjadi perbedaan pendapat dan tidak menemukan titik temu, maka jalan keluarnya dikembalikan atau bertawakal kepada-Nya, ini merupakan tanda orang yang beriman. Sehingga dengan adanya ayat tersebut, bisa menjadikan kita yakin jika semua masalah pasti ada jalan keluarnya seperti masalah dalam suatu kelompok manusia dalam suatu masyarakat ataupun dalam ilmu matematika khususnya aljabar. Masalah dalam masyarakat dijelaskan dalam QS. Ali-Imron : 104 yang berbunyi

وَلۡتَكُن مِّنكُمۡ أُمَّةٞ يَدۡعُونَ إِلَى ٱلۡخَيۡرِ وَيَأۡمُرُونَ بِٱلۡمَعۡرُوفِ وَيَنۡهَوۡنَ عَنِ ٱلۡمُنكَرِۚ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلۡمُفۡلِحُونَ ١٠٤

Dan hendaklah ada di antara kamu segolongan umat yang menyeru kepada kebajikan, menyuruh kepada yang ma'ruf dan mencegah dari yang munkar; merekalah orang-orang yang beruntung. (Ali-Imron:104)

Dari ayat di atas kita ketahui bahwa kehidupan manusia tidak bisa lepas dari cara berkelompok dan hidup bermasyarakat. Individu dalam suatu kelompok tersebut saling mempengaruhi individu yang lain. Ayat ini telah menjelaskan pesan akal

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dalam perintah-perintah dengan amar makruf dan nahi mungkar dan setiap muslim diwajibkan untuk menyerukan kebaikan dan mencegah kemungkaran. Amar makruf dan nahi mungkar dalam tahap ini merupakan fardhu ain yang setiap orang harus melaksanakan sebatas kemampuannya.

Dalam ilmu matematika juga terdapat banyak masalah yang bisa diselesaikan, salah satunya sifat dalam aljabar *max-plus*. Karena suatu himpunan tak kosong dalam aljabar *max-plus* yang dikenai dua operasi mempunyai beberapa unsur atau kelompok, maka setiap kelompok tersebut juga mempunyai keanekaragaman sifat. Sifat dari unsur yang dikenakan dalam aljabar *max-plus* saling mempengaruhi, karena unsur dari aljabar *max-plus* jika diterapkan dalam beberapa sifat akan menghasilkan suatu definisi yang berbeda. Selanjutnya akan dibahas dalam BAB III.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas aljabar *max-plus* yang entrinya matriks. Mulai dari definisi, teorema, menerapkan sifat-sifat aljabar *max-plus* terhadap matriks dan contohnya.

Meninjau kembali bahwa aljabar *max-plus* merupakan salah satu stuktur dalam aljabar yaitu semi-field idempoten R_{max} (himpunan bilangan real dengan operasi max dan plus) (Majid, 2011:62). Tujuannya adalah untuk menjelaskan sifat-sifat dari matriks atas aljabar *max-plus*, sehingga diketahui sifat matriks atas aljabar *max-plus*.

Pada pembahasan ini dibagi dalam 3 bagian utama. Bagian pertama akan mengulang definisi aljabar *max-plus*, bagian kedua akan membahas tentang sifat-sifat matriks atas aljabar *max-plus*, dan terakhir akan diinspirasikan kajian aljabar max-plus terhadap Al-qur'an.

3.1 Aljabar *Max-Plus*

Aljabar *max-plus* yang dinotasikan dengan $R_{max} = (R_{max,} \oplus, \otimes)$ merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu semi-field komutatif idempoten (Baccelli, 2001: 102). R_{max} merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R merupakan himpunan bilangan real, dengan $\varepsilon = -\infty$, sedangkan operasi $\oplus$ menyatakan maksimal dan $\otimes$ menyatakan penjumlahan normal bilangan real.

$$\forall a, b \in R_{max}, a \oplus b \coloneqq \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b \coloneqq a + b \text{ (Rudhito, 2008:2)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2 Matriks atas Aljabar *Max-Plus*

Pada bagian ini akan diuraikan beberapa matriks yang dilengkapi dengan dua operasi aljabar *max-plus* dan memberikan bukti atas sifat-sifat aljabar *max-plus*.

3.2.1 Pengertian Matriks atas Aljabar *Max-Plus*

Pada BAB II telah ditunjukkan bahwa aljabar *max-plus* $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-ring dengan R_{max} merupakan himpunan dimana R merupakan himpunan bilangan real, sedangkan operasi $\oplus$ menyatakan maksimal dan $\otimes$ menyatakan penjumlahan. Himpunan dalam aljabar *max-plus* bisa juga himpunan matriks $(R_{max}^{n\times n})$. $R_{max}^{n\times n}$ merupakan himpunan matriks $n \times n$ dengan operasi aljabar *max-plus* (Bacelli, 2001:108).

Himpunan matriks $n \times m$ untuk $n, m \in N$ pada R_{max} disimpulkan dengan $R_{max}^{n\times m}$. Nomor baris dalam sebuah matriks adalah n dan m adalah nomor kolom (Farlow, 2009:11).

Definisi 3.1

$(R_{max}^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ adalah Suatu himpunan matriks $n \times n$ yang dilengkapi dengan dua operasi yaitu $\oplus$ sebagai maksimum dan $\otimes$ sebagai penjumlahan.

3.2.2 Pengoperasian Aljabar *Max-plus* pada Matriks

Aljabar *max-plus* $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan suatu himpunan yang dilengkapi dengan dua operasi $\oplus$ sebagai maksimum dan $\otimes$ sebagai penjumlahan. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada aljabar *max-plus* dapat diperluas untuk operasi pada himpunan matriks.

Khususnya untuk $A, B \in R_{max}^{n\times n}$ dapat didefinisikan sebagai

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$

   Jika ada $a_{ij} \in A$ dan $b_{ij} \in B$, maka $a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$

   $$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

   $$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & \max(a_{12}, b_{12}) & \dots & \max(a_{1n}, b_{1n}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{22}, b_{22}) & \dots & \max(a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{n1}, b_{n1}) & \max(a_{n2}, b_{2n}) & \dots & \max(a_{nn}, b_{nn}) \end{bmatrix}$$

2. $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k}^{n} (A_{ik} \otimes B_{kj})$

   Jika ada $a_{ik} \in A$ dan $b_{kj} \in B$, maka

   $$(A \otimes B)_{ij} = [(a_{i1} \otimes b_{1j}) \oplus (a_{i2} \otimes b_{2j}) \oplus \dots \oplus (a_{in} \otimes b_{nj})]$$

   $$(A \otimes B)_{ij} = A_{ij} \otimes B_{ij}$$

   $$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

   $$= \max\left((a_{i1} + b_{1j}), (a_{i2} + b_{2j}), \dots, (a_{in} + b_{nj})\right)$$

   Contoh:

   $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \in R_{max}^{2\times 2}$, maka

   $$P \oplus Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus 2 & 4 \oplus -1 \\ 2 \oplus 1 & 3 \oplus 5 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} \max(1,2) & \max(4,-1) \\ \max(2,1) & \max(3,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$P \otimes Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+2) \oplus (4+1) & (1+-1) \oplus (4+5) \\ (2+2) \oplus (3+1) & (2+-1) \oplus (3+5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(3,5) & \max(0,9) \\ \max(4,4) & \max(1,8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya pada $(R_{max}^{n\times n})$, untuk matriks identitas dinotasikan dengan ε. Dan matriks nol dinotasikan dengan E, yaitu

$$(E)_{ij} = \begin{cases} 0, & jika\ i = j \\ \varepsilon, & jika\ i \neq j \end{cases}$$

Jadi

1. $(E \otimes A) = (A \otimes E) = A$, untuk setiap $A \in R_{max}^{n\times n}$
2. $(\varepsilon \oplus A) = (A \oplus \varepsilon) = A$, untuk setiap $A \in R_{max}^{n\times n}$

$$\text{Untuk } (E)_{ij} = \begin{bmatrix} 0_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & 0_{22} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & 0_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & 0 & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dan } (\varepsilon)_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \end{bmatrix}$$

3.2.3 Sifat-Sifat Matriks atas Aljabar *Max-Plus*

Pada bagian ini akan diperkenalkan aljabar *max-plus* yang entrinya bilangan real dalam bentuk matriks. Definisi dalam bentuk umum sifat-sifat aljabar *max-plus* sebagai berikut:

Teorema 3.1

Matriks ordo $n \times n$ $(R_{max}^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ memenuhi sifat-sifat aljabar *max-plus.*

Bukti

i. $(R_{max}^{n\times n}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif dengan elemen identitas ε

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a. Asosiatif terhadap operasi $\oplus$

$\forall A, B, C \in R_{max}^{n\times n}$ berlaku $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

Bukti

Ambil sebarang $A, B, C \in R_{max}^{n\times n}$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn} \in R$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } b_{11}, b_{12}, \dots, b_{nn} \in R$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } c_{11}, c_{12}, \dots, c_{nn} \in R$$

$$(A \oplus B) \oplus C = [(A \oplus B) \oplus C]_{ij}$$

$$= \left(A_{ij} \oplus B_{ij}\right) \oplus C_{ij}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$\oplus \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & \max(a_{12}, b_{12}) & \dots & \max(a_{1n}, b_{1n}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{22}, b_{22}) & \dots & \max(a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{n1}, b_{n1}) & \max(a_{n2}, b_{2n}) & \dots & \max(a_{nn}, b_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) \oplus c_{11} & \max(a_{12}, b_{12}) \oplus c_{12} & \dots & \max(a_{1n}, b_{1n}) \oplus c_{1n} \\ \max(a_{21}, b_{21}) \oplus c_{21} & \max(a_{22}, b_{22}) \oplus c_{22} & \dots & \max(a_{2n}, b_{2n}) \oplus c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{n1}, b_{n1}) \oplus c_{n1} & \max(a_{n2}, b_{2n}) \oplus c_{2n} & \dots & \max(a_{nn}, b_{nn}) \oplus c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\big((a_{11}, b_{11}), c_{11}\big) & \max\big((a_{12}, b_{12}), c_{12}\big) & \dots & \max\big((a_{1n}, b_{1n}), c_{1n}\big) \\ \max\big((a_{21}, b_{21}), c_{21}\big) & \max\big((a_{22}, b_{22}), c_{22}\big) & \dots & \max\big((a_{2n}, b_{2n}), c_{2n}\big) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\big((a_{n1}, b_{n1}), c_{n1}\big) & \max\big((a_{n2}, b_{n2}), c_{n2}\big) & \dots & \max\big((a_{nn}, b_{nn}), c_{nn}\big) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\big(a_{11}, (b_{11}, c_{11})\big) & \max\big(a_{12}, (b_{12}, c_{12})\big) & \dots & \max\big(a_{1n}, (b_{1n}, c_{1n})\big) \\ \max\big(a_{21}, (b_{21}, c_{21})\big) & \max\big(a_{22}, (b_{22}, c_{22})\big) & \dots & \max\big(a_{2n}, (b_{2n}, c_{2n})\big) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\big(a_{n1}, (b_{n1}, c_{n1})\big) & \max\big(a_{n2}, (b_{n2}, c_{n2})\big) & \dots & \max\big(a_{nn}, (b_{nn}, c_{nn})\big) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \oplus \max(b_{11}, c_{11}) & a_{12} \oplus \max(b_{12}, c_{12}) & \dots & a_{1n} \oplus \max(b_{1n}, c_{1n}) \\ a_{21} \oplus \max(b_{21}, c_{21}) & a_{22} \oplus \max(b_{22}, c_{22}) & \dots & a_{2n} \oplus \max(b_{2n}, c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \oplus \max(b_{n1}, c_{n1}) & a_{n2} \oplus \max(b_{n2}, c_{n2}) & \dots & a_{nn} \oplus \max(b_{2n}, c_{2n}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus$$

$$\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= A_{ij} \oplus \left(B_{ij} \oplus C_{ij}\right)$$

$$= [A \oplus (B \oplus C)]_{ij}$$

$$= A \oplus (B \oplus C)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

b. Komutatif terhadap operasi $\oplus$

$\forall A, B \in R_{max}^{n\times n}$ berlaku $A \oplus B = B \oplus A$

Bukti

Ambil sebarang $A, B \in R_{max}^{n\times n}$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn} \in R$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } b_{11}, b_{12}, \dots, b_{nn} \in R$$

$$A \oplus B = [A \oplus B]_{ij}$$

$$= A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & \max(a_{12}, b_{12}) & \dots & \max(a_{1n}, b_{1n}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{22}, b_{22}) & \dots & \max(a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{n1}, b_{n1}) & \max(a_{n2}, b_{2n}) & \dots & \max(a_{nn}, b_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(b_{11}, a_{11}) & \max(b_{12}, a_{12}) & \dots & \max(b_{1n}, a_{1n}) \\ \max(b_{21}, a_{21}) & \max(b_{22}, a_{22}) & \dots & \max(b_{2n}, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(b_{n1}, a_{n1}) & \max(b_{n2}, a_{2n}) & \dots & \max(b_{nn}, a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= B_{ij} \oplus A_{ij}$

$= [B \oplus A]_{ij}$

$= B \oplus A$

Jadi $A \oplus B = B \oplus A$.

c. Terdapat elemen netral $(\varepsilon)_{ij}$ terhadap operasi $\oplus$

$\forall A, (\varepsilon) \in R_{max}^{n\times n}$ berlaku $A \oplus (\varepsilon) = (\varepsilon) \oplus A = A$

(Mustofa,2001:1)

Bukti

Ambil sebarang $A \in R_{max}^{n\times n}$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn} \in R$$

$$(\varepsilon)_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{nn} \in R$$

$A \oplus (\varepsilon) = A_{ij} \oplus (\varepsilon)_{ij}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, \varepsilon_{11}) & \max(a_{12}, \varepsilon_{12}) & \dots & \max(a_{1n}, \varepsilon_{1n}) \\ \max(a_{21}, \varepsilon_{21}) & \max(a_{22}, \varepsilon_{22}) & \dots & \max(a_{2n}, \varepsilon_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{n1}, \varepsilon_{n1}) & \max(a_{n2}, \varepsilon_{2n}) & \dots & \max(a_{nn}, \varepsilon_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, -\infty) & \max(a_{12}, -\infty) & \dots & \max(a_{1n}, -\infty) \\ \max(a_{21}, -\infty) & \max(a_{22}, -\infty) & \dots & \max(a_{2n}, -\infty) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{n1}, -\infty) & \max(a_{n2}, -\infty) & \dots & \max(a_{nn}, -\infty) \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= A$$

$$(\varepsilon) \oplus A = (\varepsilon)_{ij} \oplus A_{ij}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(\varepsilon_{11}, a_{11}) & \max(\varepsilon_{12}, a_{12}) & \dots & \max(\varepsilon_{1n}, a_{1n}) \\ \max(\varepsilon_{21}, a_{21}) & \max(\varepsilon_{22}, a_{22}) & \dots & \max(a_{2n}, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(\varepsilon_{n1}, a_{n1}) & \max(\varepsilon_{2n}, a_{n2}) & \dots & \max(\varepsilon_{nn}, a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(-\infty, a_{11}) & \max(-\infty, a_{12}) & \dots & \max(-\infty, a_{1n}) \\ \max(-\infty, F_{21}) & \max(-\infty, a_{22}) & \dots & \max(-\infty, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(-\infty, a_{n1}) & \max(-\infty, a_{n2}) & \dots & \max(-\infty, a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= A$$

Jadi $A \oplus (\varepsilon) = (\varepsilon) \oplus A = A$.

d. Idempoten terhadap operasi$\oplus$

$\forall A \in R_{max}^{n \times n}$ berlaku $A \oplus A = A$

(Musthofa, 2011: 1).

Bukti

Ambil sebarang $A \in R_{max}^{n \times n}$

Dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn} \in R$$

$$A \oplus A = [A \oplus A]_{ij}$$

$$= A_{ij} \oplus A_{ij}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, a_{11}) & \max(a_{12}, a_{12}) & \dots & \max(a_{1n}, a_{1n}) \\ \max(a_{21}, a_{21}) & \max(a_{22}, a_{22}) & \dots & \max(a_{2n}, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{n1}, a_{n1}) & \max(a_{n2}, a_{n2}) & \dots & \max(a_{nn}, a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= A$$

Jadi $A \oplus A = A$.

Dapat dikatakan bahwa $R_{max}^{n \times n}$ dengan operasi $\oplus$ membentuk semi-grup komutatif (abelians) karena memiliki sifat asosiatif, dan komutatif terhadap operasi $\oplus$. Dengan matriks netral,

$$(\varepsilon) = \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix},$$

Sehingga $R_{max}^{n \times n}$ disebut juga dengan semi-grup komutatif dengan matriks netral $(\varepsilon)_{ij}$. Dan bisa juga disebut semi-grup idempoten, karena operasi $\oplus$ bersifat idempoten.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ii. Membentuk semi-grup dengan elemen identitas $e = 0$ dan mempunyai elemen netral $\varepsilon = -\infty$ yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$

a. Asosiatif terhadap operasi $\otimes$

$\forall A, B, C \in R_{max}^{n\times n}$ berlaku $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

(Baccelli, 2001: 107).

Bukti

Ambil sebarang $A, B, C \in R_{max}^{n\times n}$

$$(A \otimes B) \otimes C = [(A \otimes B) \otimes C]_{ij}$$

$$= \left(\bigoplus_{l=1}^{n} [A \otimes B]_{il} \right) \otimes C_{lj}$$

$$= \bigoplus_{l=1}^{n} \left(\left(\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kl} \right) \otimes C_{lj} \right)$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{l=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kl} \otimes C_{lj}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{l=1}^{n} A_{ik} \otimes \left(B_{kl} \otimes C_{lj} \right)$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{l=1}^{n} A_{ik} \otimes [B \otimes C]_{kj}$$

$$= [A \otimes (B \otimes C)]_{ij}$$

$$= A \otimes (B \otimes C)$$

Jadi $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

b. Komutatif terhadap operasi$\otimes$

$\forall A, B \in R_{max}^{n\times n}$ berlaku $A \otimes B = B \otimes A$

Bukti

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ambil sebarang $A, B \in R_{max}^{n\times n}$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn} \in R$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } b_{11}, b_{12}, \dots, b_{nn} \in R$$

$$A \otimes B = [A \otimes B]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_{ik} \otimes B_{kj} = \max\big((a_{i1} + b_{1j}), (a_{i2} + b_{2j}), \dots, (a_{in} + b_{nj})\big),$$

Jika misalkan operasi $\otimes$ bersifat komutatif, maka

$A_{ik} \otimes B_{kj} = B_{kj} \otimes A_{ik}$, tetapi

$A_{ik} \otimes B_{kj} \neq B_{kj} \otimes A_{ik}$, karena

$[A \otimes B]_{ij} \neq B_{kj} \otimes A_{ik}$

Jadi $A \otimes B \neq B \otimes A$.

c. Terdapat elemen identitas $(E)_{ij}$ terhadap operasi $\otimes$ dengan $e = 0$ jika $i = j$ dan $\varepsilon = -\infty$ jika $i \neq j$

$\forall A, E \in R_{max}^{n\times n}$ berlaku $A \otimes E = E \otimes A$

(Baccelli, 2001: 107).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti

$\forall A, E \in R_{max}^{n\times n}$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn} \in R$$

$$(E)_{ij} = \begin{bmatrix} 0_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & 0_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & 0_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } 0_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, 0_{nn} \in R$$

$$A \otimes E = [A \otimes E]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes (E)_{kj}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & 0_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & 0_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + 0_{11}) & (a_{12} + 0_{22}) & \dots & (a_{1n} + 0_{nn}) \\ (a_{21} + 0_{11}) & (a_{22} + 0_{22}) & \dots & (a_{2n} + 0_{nn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} + 0_{11}) & (a_{n2} + 0_{22}) & \dots & (a_{nn} + 0_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= A$$

$$E \otimes A = [E \times A]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} (E)_{ik} \otimes A_{kj}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} 0_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & 0_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & 0_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0_{11} + a_{11}) & (0_{22} + a_{12}) & \dots & (0_{nn} + a_{1n}) \\ (0_{11} + a_{21}) & (0_{22} + a_{22}) & \dots & (0_{nn} + a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (0_{11} + a_{n1}) & (0_{22} + a_{n2}) & \dots & (0_{nn} + a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= A$$

Jadi $A \otimes E = E \otimes A$

d. Elemen netral $(\varepsilon)_{ij}$ bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$

$\forall A, (\varepsilon) \in R_{max}^{n \times n}$ berlaku $A \otimes (\varepsilon) = (\varepsilon) \otimes A = (\varepsilon)$

(Baccelli, 2001: 107).

Bukti

Ambil sebarang $A \in R_{max}^{n \times n}$, dan pilih $(\varepsilon)_{ij} \in R_{max}^{n \times n}$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn} \in R$$

$$(\varepsilon)_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix}, \text{untuk } \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{nn} \in R$$

$$A \otimes (\varepsilon) = [A \otimes \varepsilon]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes (\varepsilon)_{kj}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \end{bmatrix}$$

$$[a \times \varepsilon]_{ij} = \bigoplus_{k}^{n} [(a_{i1} \otimes -\infty) \oplus (a_{i2} \otimes -\infty) \oplus \dots \oplus (a_{in} \otimes -\infty)]$$

$$= \max\big((a_{i1} + -\infty), (a_{i2} + -\infty), \dots, (a_{in} + -\infty)\big)$$

$$= \max\big((-\infty), (-\infty), \dots, (-\infty)\big)$$

$$= -\infty$$

Maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \end{bmatrix} = (\varepsilon)$$

$$(\varepsilon) \otimes A = [\varepsilon \otimes A]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} (\varepsilon)_{kj} \otimes A_{ik}$$

$$= \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon \otimes a]_{ij} = \bigoplus_{k}^{n} [(-\infty \otimes a_{1j}) \oplus (-\infty \otimes a_{2j}) \oplus \dots \oplus (-\infty \otimes a_{nj})]$$

$$= \max\big((-\infty + a_{1j}), (-\infty + a_{2j}), \dots, (-\infty + a_{nj})\big)$$

$$= \max\big((-\infty), (-\infty), \dots, (-\infty)\big)$$

$$= -\infty$$

Maka diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \end{bmatrix} = (\varepsilon)$$

Jadi $A \otimes (\varepsilon) = (\varepsilon) \otimes A = (\varepsilon)$

R_{max}^{nxn} dengan operasi $\otimes$ $(R_{max}^{nxn}, \otimes)$ merupakan semi-grup dengan elemen identitas $(E)_{ij}$, karena $(R_{max}^{nxn}, \otimes)$ memiliki sifat asosiatif, terdapat elemen identitas, dan mempunyai elemen netral yang menyerap terhadap operasi $\otimes$, dan $(R_{max}^{nxn}, \otimes)$ tidak bersifat komutatif.

iii. Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$

a. Distributif kanan

$\forall A, B, C \in R_{max}^{n \times n}$ berlaku $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$

(Baccelli, 2001: 107).

Bukti

Ambil sebarang $A, B, C \in R_{max}^{n \times n}$

$$A \otimes (B \oplus C) = [A \otimes (B \oplus C)]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes [B \oplus C]_{kj}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes (B_{kj} \oplus C_{kj})$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left((A_{ik} \otimes B_{kj}) \oplus (A_{ik} \otimes C_{kj}) \right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \left(\bigoplus_{k=1}^{n} (A_{ik} \otimes B_{kj}) \right)$$

$$\oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} (A_{ik} \otimes C_{kj}) \right)$$

$$= [A \otimes B]_{ij} \oplus [A \otimes C]_{ij}$$

$$= (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

Jadi $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$

b. Distributif kiri

$$\forall A, B, C \in R_{max}^{n \times n} \rightarrow (A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

(Baccelli, 2001: 107).

Bukti

$\forall A, B, C \in R_{max}^{n \times n}$

$$(A \oplus B) \otimes C = [(A \oplus B) \otimes C]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} [A \oplus B]_{ik} \otimes C_{kj}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} (A_{ik} \oplus B_{ik}) \otimes C_{kj}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left((A_{ik} \otimes C_{kj}) \oplus (B_{ik} \otimes C_{kj}) \right)$$

$$= \left(\bigoplus_{k=1}^{n} (A_{ik} \otimes C_{kj}) \right)$$

$$\oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} (B_{ik} \otimes C_{kj}) \right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= [A \otimes C]_{ij} \oplus [B \otimes C]_{ij}$$

$$= (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

Jadi $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, maka $(R_{max}^{nxn}, \oplus, \otimes)$ disebut semi-ring, karena $(R_{max}^{nxn}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif idempoten dengan elemen netral (ε), mempunyai sifat asosiatif, komutatif dan idempoten, $(R_{max}^{nxn}, \otimes)$ juga membentuk semi-grup yang bersifat asosiatif, mempunyai elemen identitas (E) dan elemen netral yang bensifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, akan tetapi tidak komutatif pada operasi $\otimes$, dan $(R_{max}^{nxn}, \oplus, \otimes)$ mempunyai sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$.

Contoh:

Suatu matriks ordo 2×2 $(R_{max}^{2\times2}, \oplus, \otimes)$ memenuhi sifat-sifat aljabar max-plus. Yaitu $\forall A, B, C \in R_{max}^{2\times2}$ dengan

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \in R_{max}^{2\times2}$ berlaku:

i. $(R_{max}^{n\times n}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif dengan elemen identitas ε

a. Asosiatif terhadap operasi $\oplus$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right) \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \oplus -2 & 1 \oplus 7 \\ 2 \oplus 1 & 1 \oplus -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 \oplus 1 & 7 \oplus 2 \\ 1 \oplus -2 & -3 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \oplus 1 & 7 \oplus 2 \\ 2 \oplus -2 & 1 \oplus 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus 1 & 1 \oplus 7 \\ 2 \oplus 1 & 1 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right) \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

b. Komutatif terhadap operasi $\oplus$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \oplus -2 & 1 \oplus 7 \\ 2 \oplus 1 & 1 \oplus -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \oplus 1 & 7 \oplus 1 \\ 1 \oplus 2 & -3 \oplus 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

c. Terdapat elemen netral $(\varepsilon)_{ij}$ terhadap operasi $\oplus$

Dengan $(\varepsilon)_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix} \in R_{max}^{2\times 2}$,

$$A \oplus (\varepsilon) = (\varepsilon) \oplus A = A$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \max(1,\varepsilon_{11}) & \max(1,\varepsilon_{12}) \\ \max(2,\varepsilon_{21}) & \max(1,\varepsilon_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(\varepsilon_{11},1) & \max(\varepsilon_{12},1) \\ \max(\varepsilon_{21},2) & \max(\varepsilon_{22},1) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \max(1,-\infty) & \max(1,-\infty) \\ \max(2,-\infty) & \max(1,-\infty) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(-\infty,1) & \max(-\infty,1) \\ \max(-\infty,2) & \max(-\infty,1) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

d. Idempoten terhadap operasi $\oplus$

$$B \oplus B = B$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(-2,-2) & \max(7,7) \\ \max(1,1) & \max(-3,-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Jadi $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

ii. Membentuk semi-grup dengan elemen identitas $e = 0$ dan mempunyai elemen netral $\varepsilon = -\infty$ yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$

a. Asosiatif terhadap operasi $\otimes$

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \oplus 5 & 0 \oplus 10 \\ 2 \oplus -5 & 3 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \oplus 2 & 8 \oplus -2 \\ 0 \oplus 2 & 9 \oplus -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 \oplus 3 & 11 \oplus 4 \\ 7 \oplus 3 & 12 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \oplus 6 & 4 \oplus 11 \\ 3 \oplus 7 & 4 \oplus 12 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

b. Komutatif terhadap operasi $\otimes$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{(1+(-2)), (1+1)\} & \max\{(1+7), (2+(-3))\} \\ \max\{(-2+(-2)), (3+1)\} & \max\{(-2+7), (3+(-3))\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{(-2+1), (7+(-2))\} & \max\{(-2+2), (7+3)\} \\ \max\{(1+1), (-3+(-2))\} & \max\{(1+2), (-3+3)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c. Terdapat elemen identitas $(E)_{ij}$ dengan $e = 0$ jika $i = j$ dan $\varepsilon = -\infty$ jika $i \neq j$ terhadap operasi $\otimes$

Dengan $(E)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \in R_{max}^{2\times 2}$

$$A \otimes (E)_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2+0) \oplus (1+(-\infty)) & (2+(-\infty)) \oplus (1+0) \\ (3+0) \oplus (1+(-\infty)) & (3+(-\infty)) \oplus (1+0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,-\infty) & \max(-\infty,1) \\ \max(3,-\infty) & \max(-\infty,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

$$(E)_{ij} \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0+2) \oplus (-\infty+3) & (0+1) \oplus (-\infty+1) \\ (-\infty+2) \oplus (0+3) & (-\infty+1) \oplus (0+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,-\infty) & \max(1,-\infty) \\ \max(-\infty,3) & \max(-\infty,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

Jadi $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

d. Elemen netral $(\varepsilon)_{ij}$ bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$

Dengan $(\varepsilon)_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix} \in R_{max}^{2\times 2}$

$$A \otimes (\varepsilon) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} \max\big((2+(-\infty)),(1+(-\infty))\big) & \max\big((2+(-\infty)),(1+(-\infty))\big) \\ \max\big((3+(-\infty)),(1+(-\infty))\big) & \max\big((3+(-\infty)),(1+(-\infty))\big) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(-\infty,-\infty) & \max(-\infty,-\infty) \\ \max(-\infty,-\infty) & \max(-\infty,-\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

$$(\varepsilon) \otimes A = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\big(((-\infty)+2),((-\infty)+3)\big) & \max\big(((-\infty)+1),((-\infty)+1)\big) \\ \max\big(((-\infty)+2),((-\infty)+3)\big) & \max\big(((-\infty)+1),((-\infty)+1)\big) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(-\infty,-\infty) & \max(-\infty,-\infty) \\ \max(-\infty,-\infty) & \max(-\infty,-\infty) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

Jadi $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

iii. Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$

a. Distributif kanan

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -1 \oplus 2 & 8 \oplus -2 \\ 0 \oplus 2 & 9 \oplus -2 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 2 \oplus -1 & 3 \oplus 4 \\ 3 \oplus -1 & 4 \oplus 4 \end{bmatrix} \right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \oplus 2 & 8 \oplus 4 \\ 3 \oplus 2 & 9 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\oplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

b. Distributif kiri

$$(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\oplus \left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \oplus -1 & 3 \oplus 4 \\ 3 \oplus -1 & 4 \oplus 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 \oplus 5 & 0 \oplus 10 \\ 2 \oplus -5 & 3 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \oplus 5 & 3 \oplus 10 \\ 3 \oplus -1 & 4 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{bmatrix}\right)\otimes\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\right)$$
$$\oplus\left(\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\right)$$

3.3 Inspirasi Kajian Aljabar *Max-plus* dalam Al-qur'an

Secara umum konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-qur'an, salah satunya mengenai matematika. Ilmu matematika yang dimaksud antara lain bidang statistik, logika, pemodelan, teori graf, alajabar, dan lain-lain.

Kajian mengenai aljabar, khususnya aljabar *max-plus* yang menjelaskan bahwa suatu himpunan yang dilengkapi dengan dua operasi dan mempunyai beberapa sifat akan memberikan suatu definisi. Seperti aljabar *max-plus* jika unsur himpunannya adalah bilangan bulat maka aljabar *max-plus* R_{max} bisa dikatakan sebagai semi-field idempoten yang memenuhi beberapa sifat antara lain membentuk semi-grup komutatif idempoten dengan elemen identitas å pada operasi $\oplus$, membentuk grup abelian dengan elemen identitas *e* dan mempunyai elemen netral å yang bersifat menyerap pada operasi $\otimes$, dan mempunyai sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap $\oplus$. Akan tetapi, jika unsur himpunan dari aljabar *max-plus* tersebut merupakan matriks maka aljabar *max-plus* R_{max}^{nxn} dikatakan sebagai semi-ring idempoten yang memenuhi beberapa sifat antara lain membentuk semi-grup komutatif idempoten dengan elemen identitas å pada operasi $\oplus$, membentuk semi-grup dengan elemen identitas *e* dan mempunyai elemen netral å yang bersifat menyerap pada operasi $\otimes$, dan mempunyai sifat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

distributif operasi $\otimes$ terhadap $\oplus$. Perbedaan pada kedua unsur tersebut adalah jika unsurnya bilangan bulat maka pada operasi $\otimes$ membentuk grup abelian, sedangkan jika unsurnya matriks maka akan membentuk semi-grup. Perbedaan sifat dari kedua unsur tersebut akan memberikan definisi yang berbeda pula. Berbicara tentang penbedaan sifat dan definisi oleh suatu unsur juga disebutkan dalam Al-qur'an surat Ali-Imron : 104

وَلْتَكُن مِّنكُمْ أُمَّةٌ يَدْعُونَ إِلَى ٱلْخَيْرِ وَيَأْمُرُونَ بِٱلْمَعْرُوفِ وَيَنْهَوْنَ عَنِ ٱلْمُنكَرِ ۚ وَأُو۟لَٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُفْلِحُونَ ﴿١٠٤﴾

Dan hendaklah ada di antara kamu segolongan umat yang menyeru kepada kebajikan, menyuruh kepada yang ma'ruf dan mencegah dari yang munkar; merekalah orang-orang yang beruntung. (Ali-Imron:104)

Ayat di atas memberikan penjelasan bahwa segerombolan umat dikatakan sebagai himpunan yang di dalamnya terdapat unsur-unsur, unsur dari segerombolan umat itu adalah manusia atau individu dalam suatu masyarakat yang mana manusia diwajibkan untuk menyeru dalam kebaikan beramal ma'ruf nahi munkar, kewajiban tersebut merupakan suatu syarat agar manusia tersebut mempunyai sebuah definisi yaitu menjadi manusia yang beruntung. Untuk mencapai masyarakat yang beramal ma'ruf nahi munkar, maka harus ada manusia yang bergerak dalam bidang dakwah yang selalu memberikan peringatan kepada orang-orang yang berbuat dosa. Tahapan dalam amal ma'ruf nahi munkar yang dimaksud adalah menunjukkan rasa tidak suka kepada orang yang berbuat dosa, jika dengan menunjukkan rasa tidak suka tersebut orang yang berbuat dosa tidak memahami bahwa yang dilakukan salah, maka dengan diingatkan dengan perkataan, jika dengan perkataan masih tidak mengerti, maka orang yang beramal

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ma'ruf nahi munkar berhak mengingatkan dengan tindakan kekerasan. Akan tetapi, mengingatkan untuk berbuat baik saja tidak cukup tanpa dibarengi dengan menghilangkan sifat-sifat buruk. Mereka yang memenuhi syarat-syarat perjuangan dalam tahapan itulah orang-orang yang sukses dan beruntung. Begitu juga dalam unsur dari suatu himpunan aljabar *max-plus*, unsur tersebut diberikan beberapa sifat yang memenuhi beberapa cara, yang mana sifat tersebut bisa memberikan suatu definisi yaitu aljabar *max-plus* (R_{max}) merupakan semi-field idempoten dan aljabar *max-plus* ($R_{max}^{n\times n}$) merupakan semi-ring idempoten.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan penjelasan pada pembahasan dapat disimpulkan bahwa $(R_{max}^{nxn},\oplus,\otimes)$ merupakan semi-ring idempoten. Dimana R_{max}^{nxn} merupakan himpunan semua matriks persegi dengan entri-entrinya elemen $R_{\max}$. Untuk setiap $A, B, C \in R_{max}^{nxn}$ berlaku sifat-sifat berikut:

i. Asosiatif terhadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$:

$$\forall A, B, C \in R_{max}^{nxn} \rightarrow (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$\forall A, B, C \in R_{max}^{nxn} \rightarrow (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

ii. Komutatif terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall A, B \in R_{max}^{nxn} \rightarrow A \oplus B = B \oplus A$$

iii. Terdapat elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan bersifat menyerap $\otimes$:

$$\forall A, (\varepsilon) \in R_{max}^{nxn} \rightarrow A \oplus (\varepsilon) = (\varepsilon) \oplus A = A$$

$$\forall A, (\varepsilon) \in R_{max}^{nxn} \rightarrow A \otimes (\varepsilon) = (\varepsilon) \otimes A = (\varepsilon)$$

iv. Terdapat elemen identitas terhadap operasi$\otimes$:

$$\forall A, E \in R_{max}^{nxn} \rightarrow A \otimes E = E \otimes A$$

$$(E)_{ij} = \begin{cases} 0, & jikai = j \\ \varepsilon, & jikai \neq j \end{cases}$$

v. Idempoten terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall A \in R_{max}^{nxn} \rightarrow A \oplus A = A$$

vi. Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$

$$\forall A, B, C \in R_{max}^{n\times n} \rightarrow A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\forall A, B, C \in R_{max}^{n\times n} \rightarrow (A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, maka $(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$ disebut semi-ring, karena $(R_{max}^{n\times n},\oplus)$ membentuk semi-grup komutatif idempoten dengan elemen netral (ε), mempunyai sifat asosiatif, komutatif dan idempoten, $(R_{max}^{n\times n},\otimes)$ juga membentuk semi-grup yang bersifat asosiatif, mempunyai elemen identitas (E) dan elemen netral yang bensifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, akan tetapi tidak komutatif pada operasi $\otimes$, dan $(R_{max}^{n\times n},\oplus,\otimes)$ mempunyai sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$.

4.2. Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan sifat aljabar *max-plus* yang himpunannya berupa bilangan real berbentuk matriks berordo $n \times n$. Maka disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk membahas tentang aljabar *max-plus* pada matriks berukuran $m \times n$, aljabar *max-plus* pada fungsi skalar, pada masalah nilai eigen dan vektor eigen, aljabar *max-plus* pada graph dan aljabar *max-plus* dalam bentuk pemrograman agar lebih mudah menyelesaikannya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier Elementer*. Bandung: Erlangga

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Ayres jr, frank.PhD. 1984. *Matriks.* Bandung: Erlangga

Baccelli, Francois., dkk. 2001. *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems.* Paris: INDRIA.

Bhattacharya, P, B, dkk. 1990. *Basic Abstract Algebra*. New York: Cambridge University Press

Farlow, Kasie G. 2009. *Max-plus Algebra*. Virginia: Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

Imrona, Mahmud Drs M.T. 2009. *Aljabar Linier Dasar*. Jakarta: Erlangga

Kandasamy, W. B. Vasantha. 2002. *Smarandache Semiring, Semifield, and Semivector spaces.* Rehoboth: American Research Press.

Majid, abdul. 2011. Aljabar Max-Plus Dan Sifat-Sifatnya. *Tugas Akhir*. Tidak diterbitkan. Malang. UIN Maulana Malik Ibrahim

Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika

Musthofa. 2011. Invers Tergeneralisasi Matriks Atas Aljabar Maxplus. *Jurnal*. Tidak diterbitkan: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.

Raisinghania, M, D dan Anggarwal, R, S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar

Rudhito, M. Andy. 2004. *Semimodul atas Aljabar Max-Plus.* Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Rudhito M. Andy, Wahyuni Sri, Suparwanto Ari dan Susilo F, Matriks Aljabar Max-Plus Interval. *Prosiding seminar nasional mahasiswa S3 Matematika*, pp.23-32, UGM Mei 2008

Schutter, B. De. 1996. Max-Algebraic System Theory for Discrete Event System, *PhD thesis Departement of Enginering Katholieke Unoversiteit Leuven*, Leuven

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Whitelaw, T, A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. New York: Blackle Academic & Professional.

http://cahpemalang.wordpress.com/pesantren-virtual/raktualisasi-amar-maruf-nahi-munkar/ diunduh tanggal 13 Desember 2012

http://users6.nofeehost.com/alquranonline/Alquran_Tafsir.asp?pageno=6&SuratKe=3 diunduh pada tanggal 14 Desember 2012

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Desi Ayu Anisianti
NIM : 08610004
Fakultas : Sains danTeknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Matriks Atas Aljabar *Max-plus*
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No.	Tanggal	Materi	Ttd. Pembimbing	
1.	04 April 2012	Konsultasi BAB I	1.	
2.	09 April 2012	Konsultasi BAB I, II	2.	
3.	28 Mei 2012	Konsultasi BAB I, II	3.	
4.	06 Juni 2012	Konsultasi Agama BAB I, II		4.
5.	16 Juni 2012	Konsultasi Agama BAB I, II		5.
6.	18 September 2012	Konsultasi BAB I, II, III	6.	
7.	19 September 2012	Konsultasi Agama BAB III		7.
8.	24 September 2012	Konsultasi BAB III	8.	
9.	25 September 2012	Konsultasi Agama BAB III		9.
10.	02 Oktober 2012	Konsultasi BAB III, IV	10.	
11.	05 Oktober 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV	11.	
12.	22 Oktober 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV	12.	
13.	23 Oktober 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV	13.	
14.	24 Oktober 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV		14.

Malang, 12 desember 2012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 1975 1006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG