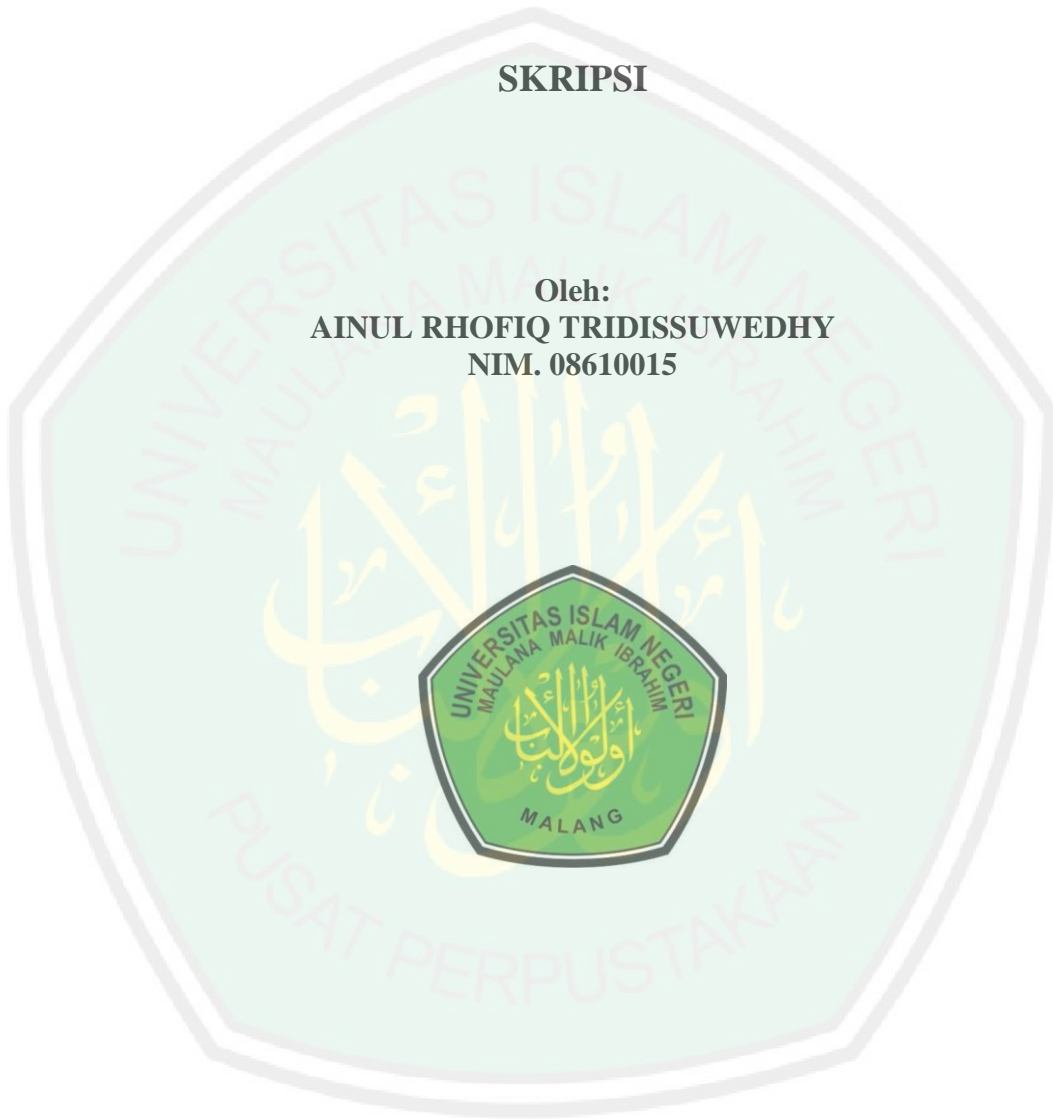


**BILANGAN PELANGI TERHUBUNG PADA GRAF  
YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**AINUL RHOFIQ TRIDISSUWEDHY**  
**NIM. 08610015**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**BILANGAN PELANGI TERHUBUNG PADA GRAF  
YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**AINUL RHOFIQ TRIDISSUWEDHY**  
**NIM. 08610015**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**BILANGAN PELANGI TERHUBUNG PADA GRAF  
YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**AINUL RHOFIQ TRIDISSUWEDHY**  
**NIM. 08610015**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal: 27 Mei 2013

Pembimbing I

Pembimbing II

Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

**BILANGAN PELANGI TERHUBUNG PADA GRAF  
YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**AINUL RHOFIQ TRIDISSUWEDHY**  
**NIM. 08610015**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 13 Juni 2013

Penguji Utama: Wahyu Henky Irawan, M.Pd  
NIP. 19710420 200003 1 003 .....

Ketua Penguji: Hairur Rahman, M.Si  
NIP. 19800429 200604 1 003 .....

Sekretaris Penguji: Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001 .....

Anggota Penguji: Dr. H. Ahmad Barizi, M.A  
NIP. 19731212 199803 1 001 .....

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP.19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ainul Rhofiq Tridissuwedhy

NIM : 0861005

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Mei 2013

Yang membuat pernyataan,

Ainul Rhofiq Tridissuwedhy

NIM. 08610015

## *MOTTO*

Ilmu & Bakti Kuberikan, Adil dan Makmur Kuperjuangkan  
Untukmu Satu Tanah Airku, Untukmu Satu Keyakinanku

Mungguh sajatine ananing dzat kang sanyata iku muhung  
ana anteping tekat kita, tandhane ora ana apa-apa, ananging  
kudu dadi sabarang sedya kita kang satuhu

# Halaman Persembahan

Skripsi ini penulis persembahkan kepada Ibu tersayang (Mariyati) dan Bapak terhebat (Sanusi) yang selalu memberikan doa dan restunya dalam segala hal, serta kasih sayang yang tak pernah habis. Kepada kakak-kakak terbaik (Nor Jumroti, Turfi'ah, Agus Setyo U, dan Jono) yang tak pernah berhenti dalam memberikan dukungannya.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

*Alhamdulillahirobbil 'alamin*, segala puji bagi Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam semoga tetap tercurah limpahkan kepada sang *revolutioner* Nabi Muhammad SAW yang membimbing umat manusia dari zaman kegelapan *jahiliyah* menuju zaman terang benderang *Islamiyah* yang penuh dengan rahmat dan kasih sayang Allah SWT. Semoga mendapatkan syafaatnya di hari akhir nanti. Amin.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus pembimbing.
4. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

5. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dosen Wali.
6. Seluruh dosen dan staf administrasi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Bapak Sanusi dan Emak Mariyati yang selalu berdo'a untuk kesuksesan anaknya, dan juga kehidupan yang telah diberikan. Serta kakak-kakak tercinta atas dukungannya selama ini.
8. Hadiratul Mufida dan Tahta Alfina yang telah menjadi saudara terbaik selama ini.
9. Sahabat-sahabat dalam keluarga PMII Rayon *Pencerahan* Galileo dan PMII Komisariat Sunan Ampel Malang yang senantiasa membantu dalam suka dan duka.
10. M. Yasin Arief, Mukhlas, Satrio, A. Huda F, M. Fauzan yang selalu menemani dalam penulisan skripsi selama ini.
11. Sahabat-sahabat Matematika angkatan 2008, Nuril Futikhatul A, Adila Mujtahidah, A. Rifqi Z, Dedik Iswahyudi, A. Rizki, Rosi A, Sofiatul I, Elva Rafita S, Dewi Kurniasih, Trisusanti, Fuad Adi, Aris A, M. Halik, dan semuanya yang belum disebut, terimakasih untuk semuanya.
12. Anis Fathona, Erwanto, M. Lutfi, Chamidatus Z, untuk bantuan, semangat dan dukungannya. Agus Syaifurrohim, M. Wildan, Izza Nasrulloh, Arief Nur Handika, Mufid Nurrahman, Barokat Anas, Sandi Yudha, Refki Rosyadi, terimakasih untuk ilmu yang diberikan.

13. Sahabat-sahabat dalam mencari jati diri dan berproses, Bayu Andri, Sigit Bayu, Darul Faruq, Abdur Rohim, Saiur Hasan, Choirudin, A. Wildan, Ainul Yakin, dan semua teman-teman yang belum disebut.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin.

*Wassalamu 'alaikum Wr. Wb.*

Malang, Juli 2013

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xv</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>xvi</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xvii</b>
<b>ملخص</b> .....	<b>xviii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	5
1.3 Tujuan .....	6
1.4 Batasan Masalah .....	6
1.5 Manfaat Penelitian .....	6
1.6 Metode Penelitian .....	7
1.7 Sistematika Penulisan .....	9
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Graf .....	10
2.2 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung .....	11
2.3 Jalan, Lintasan, Jejak, dan Sirkuit .....	12
2.4 Derajat Suatu Titik .....	14
2.5 Operasi pada Graf .....	16
2.5.1 Gabungan Graf ( <i>Union Graph</i> ) .....	16
2.5.2 Penjumlahan Graf ( <i>Joint Graph</i> ).....	16
2.6 Macam-macam Graf .....	17
2.6.1 Graf Komplit .....	17
2.6.2 Graf Sikel .....	18
2.6.3 Graf Bipartisi .....	18
2.6.4 Graf Roda .....	19
2.6.5 Graf Helm .....	20
2.6.6 Graf Helm Tertutup .....	20
2.6.7 Graf Gear .....	21
2.6.1 Graf Bunga .....	21
2.7 Pewarnaan pada Graf .....	21

2.7.1 Pewarnaan Titik ( <i>vertex colouring</i> ) .....	22
2.7.2 Pewarnaan Sisi ( <i>edge colouring</i> ) .....	23
2.8 Pelangi Terhubung ( <i>Rainbow Connection</i> ) .....	23
2.9 Relevansi Pelangi Terhubung ( <i>Rainbow Connection</i> ) pada Graf dalam Kajian Agama Islam .....	25
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Graf Sikel $C_n$ .....	30
3.2 Graf Roda $W_n$ .....	42
3.3 Graf Gear $G_n$ .....	51
3.4 Graf Helm $H_n$ .....	70
3.5 Graf Helm Tertutup $cH_n$ .....	82
3.6 Graf Bunga $Fl_n$ .....	100
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	115
4.2 Saran .....	116
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>118</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b>	Graf $G_1$ .....	11
<b>Gambar 2.2</b>	Graf $G$ .....	11
<b>Gambar 2.3</b>	Graf $G_2$ .....	12
<b>Gambar 2.4</b>	Lintasan Graf $G$ .....	13
<b>Gambar 2.5</b>	Sirkuit dan Jejak ( <i>Trail</i> ) Graf $G$ .....	13
<b>Gambar 2.6</b>	Graf dengan Derajat Titik .....	15
<b>Gambar 2.7</b>	Graf $K_1 \cup 2K_3 \cup K_{3,2}$ .....	16
<b>Gambar 2.8</b>	Penjumlahan Dua Graf .....	17
<b>Gambar 2.9</b>	Graf Komplit .....	17
<b>Gambar 2.10</b>	Graf Sikel .....	18
<b>Gambar 2.11</b>	Graf Bipartisi .....	19
<b>Gambar 2.12</b>	Graf Roda .....	19
<b>Gambar 2.13</b>	Graf Helm .....	20
<b>Gambar 2.14</b>	Graf Helm Tertutup .....	20
<b>Gambar 2.15</b>	Graf Gear .....	21
<b>Gambar 2.16</b>	Graf Bunga .....	21
<b>Gambar 2.17</b>	Perwarnaan Titik .....	23
<b>Gambar 2.18</b>	Pewarnaan Sisi .....	23
<b>Gambar 2.19</b>	Pelangi Terhubung ( <i>Rainbow Connection</i> ) .....	25
<b>Gambar 2.20</b>	Isra' .....	26
<b>Gambar 2.21</b>	Mi'raj .....	28
<b>Gambar 2.22</b>	Peristiwa Isra' Mi'raj .....	28
<b>Gambar 3.1</b>	Graf Sikel $C_3$ .....	31
<b>Gambar 3.2</b>	Graf Sikel $C_4$ .....	31
<b>Gambar 3.3</b>	Graf Sikel $C_5$ .....	32
<b>Gambar 3.4</b>	Graf Sikel $C_6$ .....	33
<b>Gambar 3.5</b>	Graf Sikel $C_7$ .....	34
<b>Gambar 3.6</b>	Graf Roda $W_3$ .....	42
<b>Gambar 3.7</b>	Graf Roda $W_4$ .....	43

<b>Gambar 3.8</b> Graf Roda $W_5$ .....	43
<b>Gambar 3.9</b> Graf Roda $W_6$ .....	45
<b>Gambar 3.10</b> Graf Roda $W_7$ .....	46
<b>Gambar 3.11</b> Graf Gear $G_3$ .....	51
<b>Gambar 3.12</b> Graf Gear $G_4$ .....	52
<b>Gambar 3.13</b> Graf Gear $G_5$ .....	54
<b>Gambar 3.14</b> Graf Gear $G_6$ .....	56
<b>Gambar 3.15</b> Graf Gear $G_7$ .....	58
<b>Gambar 3.16</b> Graf Helm $H_3$ .....	71
<b>Gambar 3.17</b> Graf Helm $H_4$ .....	72
<b>Gambar 3.18</b> Graf Helm $H_5$ .....	74
<b>Gambar 3.19</b> Graf Helm $H_6$ .....	75
<b>Gambar 3.20</b> Graf Helm $H_7$ .....	77
<b>Gambar 3.21</b> Graf Helm Tertutup $cH_3$ .....	82
<b>Gambar 3.22</b> Graf Helm Tertutup $cH_4$ .....	83
<b>Gambar 3.23</b> Graf Helm Tertutup $cH_5$ .....	85
<b>Gambar 3.24</b> Graf Helm Tertutup $cH_6$ .....	86
<b>Gambar 3.25</b> Graf Helm Tertutup $cH_7$ .....	88
<b>Gambar 3.26</b> Graf Bunga $Fl_3$ .....	100
<b>Gambar 3.27</b> Graf Bunga $Fl_4$ .....	101
<b>Gambar 3.28</b> Graf Bunga $Fl_5$ .....	102
<b>Gambar 3.29</b> Graf Bunga $Fl_6$ .....	104
<b>Gambar 3.30</b> Graf Bunga $Fl_7$ .....	105

### DAFTAR TABEL

<b>Tabel 3.1</b> Pola Bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada $C_3$ sampai $C_n$ .....	36
<b>Tabel 3.2</b> Pola Bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada $W_3$ sampai $W_n$ .....	47
<b>Tabel 3.3</b> Pola Bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada $G_1$ sampai $G_n$ .....	61
<b>Tabel 3.4</b> Pola Bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada $H_3$ sampai $H_n$ .....	79
<b>Tabel 3.5</b> Pola Bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada $cH_3$ sampai $cH_n$ .....	91
<b>Tabel 3.6</b> Pola Bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada $Fl_3$ sampai $Fl_n$ .....	107



## ABSTRAK

Tridissuwedhy, Ainul Rhofiq. 2013. **Bilangan Pelangi Terhubung pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel**. Skripsi. Program S1 Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : (1) Abdussakir, M.Pd

(2) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

**Kata Kunci** : *Rainbow edge-connection*, *Rainbow vertex-connection*, Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gear, Graf helm, Graf Helm Tertutup, Graf Bunga

Dalam teori graf konsep pewarnaan terus mengalami perkembangan, salah satunya adalah tentang *rainbow connection*. *Rainbow connection* dibagi menjadi 2 jenis, yang pertama adalah pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected*), sedangkan yang kedua adalah pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected*)

*Rainbow edge-connection* pada graf  $G$  yang terhubung ( $rc(G)$ ) yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf  $G$  menjadi pelangi sisi terhubung, sedangkan *Rainbow vertex-connection* pada graf  $G$  yang terhubung ( $rvc(G)$ ) merupakan bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf  $G$  menjadi pelangi titik terhubung. Pada penelitian ini akan dibahas tentang bilangan bilangan  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada sikel, graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf bunga

Berdasarkan penelitian diperoleh bahwa rumus umum untuk  $rc$  pada graf sikel ( $C_n$ ) adalah  $rc(C_n) = 1$  jika  $n = 3$  dan  $rc(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  untuk  $n \geq 4$ .  $rc$  pada graf roda ( $W_n$ ) adalah  $rc(W_n) = 1$  jika  $n = 3$ ,  $rc(W_n) = 2$  jika  $4 \leq n \leq 6$ , dan  $rc(W_n) = 3$  jika  $n \geq 7$ .  $rc$  pada graf gear  $G_n$  adalah  $rc(G_n) = n$  untuk  $n \geq 3$ .  $rc$  pada graf helm ( $H_n$ ) adalah  $rc(H_n) = rc(W_n) + n$  untuk  $n \geq 3$ .  $rc$  pada graf helm tertutup ( $cH_n$ ) adalah  $rc(cH_n) = 2$  jika  $n = 3$ ,  $rc(cH_n) = 3$  jika  $4 \leq n \leq 5$ , dan  $rc(cH_n) = 4$  jika  $n \geq 6$ . Dan  $rc$  pada graf bunga ( $Fl_n$ ) adalah  $rc(Fl_n) = 1$  jika  $n = 3$  dan  $rc(Fl_n) = 3$  untuk  $n \geq 4$ . Sedangkan  $rvc$  pada graf sikel ( $C_n$ ) adalah  $rvc(C_n) = 0$  jika  $n = 3$ ,  $rvc(C_n) = 1$  jika  $n = 4 \& 5$ ,  $rvc(C_n) = 3$  jika  $n = 9$ ,  $rvc(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$  jika  $n = 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13$ , atau 15, dan  $rvc(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  jika  $n \geq 16$  atau  $n = 14$ .  $rvc$  pada graf roda ( $W_n$ ) adalah  $rvc(W_n) = 0$  jika  $n = 3$ , dan  $rvc(W_n) = 1$  jika  $n \geq 4$ .  $rvc$  pada graf gear ( $G_n$ ) adalah  $rvc(G_n) = 2$  untuk  $n = 3$  dan  $rvc(G_n) = 3$  jika  $n \geq 4$ .  $rvc$  pada graf helm ( $H_n$ ) adalah  $rvc(H_n) = 2$  jika  $n = 3$ , dan  $rvc(H_n) = 3$  jika  $n \geq 4$ .  $rvc$  pada graf helm tertutup ( $cH_n$ ) adalah  $rvc(cH_n) = 1$  jika  $n = 3$ ,  $rvc(cH_n) = 2$  jika  $4 \leq n \leq 6$ ,  $rvc(cH_n) = 3$  jika  $7 \leq n \leq 10$ , dan  $rvc(cH_n) = 4$  jika  $n \geq 11$ . Dan  $rvc$  pada graf bunga ( $Fl_n$ ) adalah  $rvc(Fl_n) = 1$  untuk  $n \geq 3$ .

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan pada graf yang berkaitan dengan sikel. Maka dari itu dapat dikaji dengan jenis graf yang lain.

## ABSTRACT

Tridissuwedhy, Ainul Rhofiq. 2013. **The Number of Rainbow Connection on Cycle Related Graphs**. Thesis. S1 Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors : (1) Abdussakir, M.Pd  
(2) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

In the graph theory, concept of colouring immediately work out. It's one of rainbow connection. Rainbow connection is divided into two parts, the first is rainbow edge connection and the second is rainbow vertex connection

The rainbow edge-connection of a connected graph  $G$  ( $rc(G)$ ) is the smallest number of colors that are needed in order to make graph  $G$  rainbow edge connected, and then the rainbow vertex-connection of a connected graph  $G$  ( $rvc(G)$ ) is the smallest number of colors that are needed in order to make  $G$  rainbow vertex-connected. This research was analysis about number of  $rc(G)$  and  $rvc(G)$  from cycle graph, wheel graph, gear graph, helm graph, closed helm graph, and flower graph.

The result show that conclusion from this research are  $rc$  from cycle graph ( $C_n$ ) are  $rc(C_n) = 1$  if  $n = 3$  and  $rc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  if  $n \geq 4$ .  $rc$  from wheel graph ( $W_n$ ) are  $rc(W_n) = 1$  if  $n = 3$ ,  $rc(W_n) = 2$  if  $4 \leq n \leq 6$ , and  $rc(W_n) = 3$  if  $n \geq 7$ .  $rc$  from gear graph ( $G_n$ ) is  $rc(G_n) = n$  if  $n \geq 3$ .  $rc$  from helm graph ( $H_n$ ) is  $rc(H_n) = rc(W_n) + n$  if  $n \geq 3$ .  $rc$  from closed helm graph ( $cH_n$ ) are  $rc(cH_n) = 2$  if  $n = 3$ ,  $rc(cH_n) = 3$  if  $4 \leq n \leq 5$ , and  $rc(cH_n) = 4$  if  $n \geq 6$ . And  $rc$  from flower graph ( $Fl_n$ ) are  $rc(Fl_n) = 1$  if  $n = 3$  and  $rc(Fl_n) = 3$  if  $n \geq 4$ . And then  $rvc$  from cycle graph ( $C_n$ ) are  $rvc(C_n) = 0$  if  $n = 3$ ,  $rvc(C_n) = 1$  if  $n = 4$  &  $5$ ,  $rvc(C_n) = 3$  if  $n = 9$ ,  $rvc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$  if  $n = 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13$ , or  $15$ , and  $rvc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  if  $n \geq 16$  or  $n = 14$ .  $rvc$  from wheel graph ( $W_n$ ) are  $rvc(W_n) = 0$  if  $n = 3$ , and  $rvc(W_n) = 1$  if  $n \geq 4$ .  $rvc$  from gear graph ( $G_n$ ) are  $rvc(G_n) = 2$  if  $n = 3$  and  $rvc(G_n) = 3$  if  $n \geq 4$ .  $rvc$  from helm graph ( $H_n$ ) are  $rvc(H_n) = 2$  if  $n = 3$ , and  $rvc(H_n) = 3$  if  $n \geq 4$ .  $rvc$  from closed helm graph ( $cH_n$ ) are  $rvc(cH_n) = 1$  if  $n = 3$ ,  $rvc(cH_n) = 2$  if  $4 \leq n \leq 6$ ,  $rvc(cH_n) = 3$  if  $7 \leq n \leq 10$ , and  $rvc(cH_n) = 4$  if  $n \geq 11$ . and  $rvc$  from flower graph ( $Fl_n$ ) is  $rvc(Fl_n) = 1$  if  $n \geq 3$ .

This thesis just focuses on graph that related to cycle. So from that, it can be analyzed by another graph.

**Keywords** : Rainbow edge-connection, Rainbow vertex-connection, Cycle Graph, Wheel Graph, Gear Graph, Helm Graph, Closed Helm Graph, Flower Graph

## ملخص

تيري ديسويدي ,عين الرفيق . ٢٠١٣. أرقام متصل على رسم بياني متصل سيكيل من قوس قزح. طروحة S1 بحث الجا معى. شعبة الرياضيّة كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلاميّة الحكومية مالانج.

مشرف : ١. عبدالشاكرا ماجستير في التربيّة  
٢. دكتور الحجّ احمد بريس ماجستير في الفنّ

**الكلمات الرئيسية:** قوس قزح، قوس قزح اتصال الحافة-فيرتكس-اتصال، غراف، عجلات سيكيل غراف، غراف، خوذة العتاد غراف، مغطى الخوذة، عد غراف الزهور

في نظرية الرسم في نظرية الرسم البياني مفهوم التلوين يمر باستمرار التنمية، أحد حول اتصال قوس قزح. اتصال قوس قزح تنقسم إلى نوعين، الأول هو الجانب قوس قزح متصلة ، بينما الثاني قوس قزح نقاط متصلة.

هو أصغر عدد من الألوان اللازمة لجع  $G$  قوس قزح  $(rc(G))$  من الحافة اتصال على توصيل رسم بياني هو أصغر عدد من الألوان  $G$  قزح متصل الرسم البياني، في حين أن قوس قزح فيرتكس  $(rvc(G))$  اتصال على توصيل رسم بياني قزح متصل الرسم البياني، في حين أن قوس قزح فيرتكس اتصال على توصيل رسم بياني هذا البحث سوف تناقش حول في هذا البحث سوف تناقش حول  $G$  اللازمة لجعل متصل قوس قزح نقطة الرسم البياني الأرقام والأرقام على الشكل، رسم بياني عجلة القيادة، والعتاد رسم بياني، رسم بياني الخوذة، وخوذة الرسم البياني مغلقة، والرسم البياني الفائدة.

استناداً إلى البحوث التي اكتسبتها أن صيغة شائعة سيكيل غراف  $(C_n)$  هو  $rc(C_n) = 1$  إذا  $n = 3$  و  $rc(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  إلى  $n \geq 4$ . في عد العجلة  $(W_n)$  هو  $rc(W_n) = 1$  إذا  $n = 3$  و  $rc(W_n) = 2, 3$  إذا  $4 \leq n \leq 6$  و  $rc(W_n) = 3$  إذا  $n \geq 7$ . في العد والعتاد  $(G_n)$  هو  $rc(G_n) = n$  إذا  $n \geq 3$ . في عد الخوذة  $(H_n)$   $rc(H_n) = rc(W_n) + n$  إذا  $n \geq 3$ . على غراف خوذة مغلقة  $(cH_n)$   $rc(cH_n) = 2$  إذا  $n = 3$  كان  $rc(cH_n) = 3$  إذا  $4 \leq n \leq 5$  و  $rc(cH_n) = 4$  إذا  $n \geq 6$ . وفي العد للفائدة  $(Fl_n)$  هي  $rc(Fl_n) = 1$  إذا  $n = 3$  و  $rc(Fl_n) = 3$  إذا  $n \geq 4$ . بينما سيكيل غراف  $(C_n)$   $rvc(C_n) = 0$  إذا  $n = 3$ ،  $rvc(C_n) = 1$  إذا  $n = 4, 5$  و  $rvc(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ ،  $n = 9$  إذا  $n = 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15$  و  $rvc(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  إذا  $n = 14$  و  $n \geq 16$  في عد العجلة  $(W_n)$   $rvc(W_n) = 0$  إذا  $n = 3$  و  $rvc(W_n) = 1$  إذا  $n \geq 4$ . في العد والعتاد  $(G_n)$   $rvc(G_n) = 2$  إذا  $n = 3$  و  $rvc(G_n) = 3$  إذا كان  $n \geq 4$ . في عد الخوذة  $(H_n)$   $rvc(H_n) = 2$  إذا  $n = 3$ ، و  $rvc(H_n) = 3$  إذا  $n \geq 4$ . على غراف خوذة مغلقة  $(cH_n)$   $rvc(cH_n) = 1$  إذا كان  $n = 3$ ،  $rvc(cH_n) = 2$  إذا  $4 \leq n \leq 6$ ،  $rvc(cH_n) = 3$  إذا  $7 \leq n \leq 10$  و  $rvc(cH_n) = 4$  إذا  $n \geq 11$ . وفي حساب الفائدة بالنسبة  $(Fl_n)$   $rvc(Fl_n) = 1$  إذا  $n \geq 3$ .

في هذه الأطروحة، يركز المؤلف فقط على المواضيع ذات الصلة إلى غراف في سيكيل. حتى أنه يمكن دراسة مع هذا النوع من الرسم البياني.

## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Galileo Galilie pernah berkata bahwa, Tuhan menciptakan alam raya ini dengan angka (Muftie, 2004:1). Jadi dapat dikatakan bahwa angka mempunyai arti yang sangat penting di dunia ini. Matematika adalah suatu cabang ilmu yang di dalamnya banyak bergelut dengan angka-angka. Matematika juga merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Tetapi masih banyak yang menganggap matematika itu merupakan cabang ilmu yang sulit untuk dipelajari dan harus dihindari.

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdussakir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Ali Imran pada ayat 199 yang berbunyi:

... إِنَّ اللَّهَ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿١٩٩﴾

... *Sesungguhnya Allah Amat cepat perhitungannya.*” (QS. Ali Imran [3]:199)

Sejalan dengan pernyataan Galileo, pada dasarnya konsep matematika sudah ada di dalam alam semesta. Alam semesta menyimpan simbol-simbol pengetahuan yang apabila dikaji secara benar akan menghasilkan konsep-konsep

ilmu pengetahuan. Jadi kesimpulannya, semua ilmu pengetahuan adalah hasil penyimbolan atas apa yang ada di alam semesta ini. Allah SWT telah menciptakan alam semesta ini dengan ukuran-ukuran cermat dan persamaan yang rapi (Abdussakir, 2007:79-80)

Firman Allah dalam surat Al-Jin ayat 28 berbunyi:

لَيَعْلَمَ أَنْ قَدْ أَبْلَغُوا رَسُولَاتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

*supaya Dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya Rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu. (Al-Jin[72]:28)*

Dalam surat Maryam ayat 93-94 dijelaskan juga :

إِنْ كُلُّ مَنْ فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ إِلَّا آتَى الرَّحْمَنِ عَبْدًا ﴿١٩﴾ لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٢٠﴾

*tidak ada seorangpun di langit dan di bumi, kecuali akan datang kepada Tuhan yang Maha Pemurah selaku seorang hamba. Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti. (Maryam[19]:93-94)*

Dalam pandangan al-Qur'an, tidak ada peristiwa yang terjadi secara kebetulan. Semua terjadi dengan hitungan, baik dengan hukum-hukum alam yang telah dikenal manusia maupun yang belum. Bagi Muslim yang beriman, tidak ada bedanya apakah al-Qur'an diciptakan dengan hitungan atau tidak, mereka tetap percaya bahwa kitab yang mulia ini berasal dari Tuhan Yang Maha Esa. Pencipta alam semesta, yang mendidik dan memelihara manusia. Namun bagi sebagian ilmuwan, terutama yang Muslim, yang percaya bahwa adanya kodifikasi alam semesta, baik kitab suci, manusia maupun objek di langit, adalah suatu kepuasan

tersendiri jika dapat menemukan hubungan-hubungan tersebut. Al-Qur'an adalah salah satu mahakarya yang diturunkan dari langit, untuk pedoman umat manusia, berlaku hingga alam semesta runtuh. Ia menggambarkan masa lalu, sekarang dan masa depan dengan cara yang menakjubkan. Prof. Palmer seorang ahli kelautan di Amerika Serikat mengatakan "*Ilmuwan sebenarnya hanya menegaskan apa yang telah tertulis didalam al-Qur'an beberapa tahun yang lalu*" (Muftie, 2004:1).

Dalam ayat lain juga disebutkan:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢٥﴾

*Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan-Nya, dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (Q.S. Al-Furqaan:[25]: 2).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 1997:80).

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V$  yang

disebut sebagai sisi. Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$  (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Pewarnaan pada graf  $G$  adalah pemetaan warna-warna ke titik atau sisi dari  $G$  sedemikian hingga titik atau sisi yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Dikatakan bahwa  $G$  adalah berwarna  $n$  jika terdapat pewarnaan dari  $G$  yang menggunakan  $n$  warna. Pewarnaan dengan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai graf  $G$ , disebut bilangan kromatik dari  $G$ . Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (*region*).

Dalam teori graf, konsep pewarnaan terus mengalami perkembangan, salah satunya adalah tentang pelangi terhubung (*rainbow connection*). Pelangi terhubung dibagi menjadi 2 jenis, yang pertama adalah pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected*) yang didefinisikan sebagai pewarnaan sisi pada graf  $G$  jika setiap titik pada graf  $G$  dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda, sedangkan yang kedua adalah pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected*) yang didefinisikan sebagai pewarnaan titik pada graf  $G$  jika setiap titik pada graf  $G$  dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. Bilangan pelangi sisi terhubung pada graf terhubung disimbolkan oleh  $rc(G)$  yaitu bilangan warna terkecil pada sisi yang dibutuhkan untuk membuat  $G$  menjadi pelangi sisi yang terhubung. Sedangkan bilangan pelangi titik terhubung pada graf terhubung disimbolkan oleh  $rvc(G)$  yaitu bilangan warna terkecil pada titik yang dibutuhkan untuk membuat  $G$  menjadi pelangi titik terhubung (Krivelevich dan Yuster, 2010:1).

Dalam penelitian sebelumnya yang ditulis oleh Fuad Adi S. (2012) dalam skripsinya yang berjudul *Bilangan Rainbow connection dari Hasil Operasi Penjumlahan dan Perkalian Kartesius Dua Graf Bilangan Rainbow connection dari Hasil Operasi Penjumlahan dan Perkalian Kartesius Dua Graf*, telah dibahas tentang bilangan *rainbow connection*  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada graf komplit, graf bipartisi komplit, graf roda, graf kipas dan graf kipas ganda. Sehingga perlu dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai objek graf lainnya. Disini penulis akan mengkaji jenis graf lain, yaitu graf sikel, graf roda, graf gear, graf Helm, Graf helm tertutup, dan Graf bunga. Graf ini mempunyai hubungan satu sama lain, yaitu sama-sama mempunyai sikel, dan merupakan pengembangan dari graf sikel. Oleh karena itu, penulis akan mengkaji tentang bilangan pelangi terhubung dengan mengambil judul skripsi “Bilangan Pelangi Terhubung pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana pola pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)  $rc(G)$  dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)  $rvc(G)$  pada graf yang berkaitan dengan sikel?
2. Bagaimana bukti dari pola pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)  $rc(G)$  dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)  $rvc(G)$  pada graf yang berkaitan dengan sikel?

### 1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan penelitian ini yaitu:

1. Menjelaskan pola pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)  $rc(G)$  dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)  $rvc(G)$  pada graf yang berkaitan dengan siklus.
2. Menjelaskan bukti dari pola pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)  $rc(G)$  dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)  $rvc(G)$  pada graf yang berkaitan dengan siklus.

### 1.4 Batasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya membatasi penelitian pada pola  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada jenis graf siklus, graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf bunga.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Jurusan Matematika

Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa Jurusan Matematika.

2. Peneliti

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

### 3. Pengembangan ilmu pengetahuan

Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika tentang bilangan pelangi terhubung (*rainbow connection*) pada teori graf, dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

#### 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi serta objek masalah yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini. Dengan menggunakan metode ini diharapkan kemampuan analisis dan pemahaman tentang masalah yang diangkat dapat terasah.

Dalam penelitian ini penulis menggunakan beberapa langkah strategi. Hal ini dimaksudkan untuk mempermudah penulis dalam memperoleh hasil yang akurat. Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Merumuskan masalah yang akan dibahas
2. Mempelajari sumber-sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf bunga, serta pewarnaan graf dan pelangi terhubung (*rainbow connection*) pada graf.

3. Menganalisis permasalahan yang telah diperoleh dengan mendeskripsikan permasalahan. Selanjutnya mendapatkan pola dan teorema yang dibuktikan.

Langkah-langkah analisis:

- a. Menggambar graf-graf tersebut satu-persatu dengan order mulai dari 1 sampai 7 hingga didapatkan pola dari bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)  $rc(G)$  dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)  $rvc(G)$  sehingga dapat diperoleh pola tentang  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  terhadap graf-graf tersebut
  - b. Membuktikan teorema tentang bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)  $rc(G)$  dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)  $rvc(G)$  yang telah diperoleh dari pola di atas
  - c. Menganalisis bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)  $rc(G)$  dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)  $rvc(G)$  pada graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf bunga dengan menghubungkan teorema yang telah didapatkan pada langkah sebelumnya, sehingga diperoleh teorema secara umum.
  - d. Membuktikan teorema umum tersebut.
4. Merumuskan kesimpulan dari hasil analisis teorema yang telah dibuktikan.
  5. Menyusun laporan dari penelitian dalam bentuk tugas akhir.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan di sini terdiri dari empat bab dan masing-masing bab dibagi menjadi beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### Bab II Kajian Pustaka

Bab kedua menguraikan kajian tentang teori yang berkaitan dengan pembahasan, antara lain pengertian graf, macam-macam jenis graf, dan bilangan pelangi terhubung (*rainbow connection*). Kajian Agama Islam tentang pelangi terhubung (*rainbow connection*) dibahas juga dalam bab ini..

### Bab III Pembahasan

penulis mengkaji tentang pembahasan yang terdiri dari bagaimana menentukan teorema tentang bilangan pelangi terhubung (*rainbow connection*) pada graf yang berkaitan dengan siklus kemudian membuktikannya. Kemudian menentukan teorema umum atas graf yang berkaitan dengan siklus.

### BAB IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti yang lain.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Graf

Menurut catatan sejarah, awal munculnya konsep graf adalah pada tahun 1936 yaitu di Kota Königsberg (salah satu kota di Jerman). Di kota Königsberg tersebut terdapat sungai Pregal yang bercabang dan memisahkan beberapa blok/lokasi di kota tersebut, sehingga di sana dibangun tujuh jembatan sebagai penghubungnya (Saondi, 2003:1).

Awal permasalahannya adalah apakah mungkin melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing satu kali dan kembali ke tempat semula. Hingga akhirnya seorang matematikawan Swiss, Leonardo Euler merupakan orang pertama yang dapat memecahkan permasalahan tersebut dengan pembuktian yang sederhana. Inilah yang menjadi tonggak sejarah munculnya teori graf (Saondi, 2003:1).

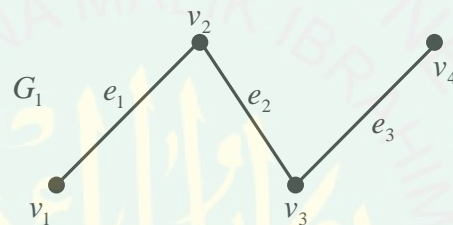
Teori graf merupakan salah satu bidang dalam disiplin ilmu matematika yang sampai sekarang masih terus dikaji karena memang tidak sedikit permasalahan yang dapat dipecahkan dengan menggunakan teori graf.

#### Definisi

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $G$  yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$ . Sedangkan banyaknya unsur di  $V$  disebut order dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$

dan banyaknya unsur di  $E$  disebut ukuran dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dibicarakan hanya graf  $G$ , maka order dan ukuran dari  $G$  tersebut cukup ditulis dengan  $p$  dan  $q$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Sebagai contoh misal  $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan  $E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$ . Maka  $G_1$  dapat digambarkan sebagai berikut :



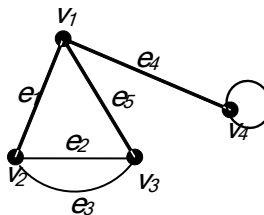
Gambar 2.1 graf  $G_1$

## 2.2 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

### Definisi

Sisi  $e = (u, v)$  dikatakan menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ . Jika  $e = (u, v)$  adalah sisi di graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  disebut terhubung langsung (*adjacent*),  $u$  dan  $e$  serta  $v$  dan  $e$  disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi  $e = (u, v)$  akan ditulis  $e = uv$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 2.2 graf  $G$

Dari gambar 2.2 pada graf  $G$ , sisi  $e_1, e_5$  dan  $e_4$  adalah terkait langsung (*incident*) dengan titik  $v_1$ . Sedangkan titik  $v_1$  dan  $v_4$  adalah terhubung langsung (*adjacent*) tetapi  $v_4$  dan  $v_2$  tidak.

### 2.3 Jalan, Lintasan, Jejak, dan Sirkuit

Misalkan  $G$  graf. Misalkan juga  $u$  dan  $v$  adalah titik di  $G$  (yang tidak harus berbeda). Jalan  $u$ - $v$  pada graf  $G$  adalah barisan berhingga yang berselang seling

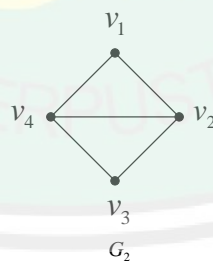
$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik dengan:

$$e_i = v_{i-1}, v_i \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

adalah sisi di  $G$ .  $v_0$  sebagai titik awal, dan  $v_n$  sebagai titik akhir, titik  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  adalah titik internal, dan  $n$  menyatakan panjang dari  $W$ . Jika  $v_0 \neq v_n$  maka  $W$  disebut jalan terbuka. Jika  $v_0 = v_n$  maka  $W$  disebut jalan tertutup (Abdussakir, dkk, 2009:49).

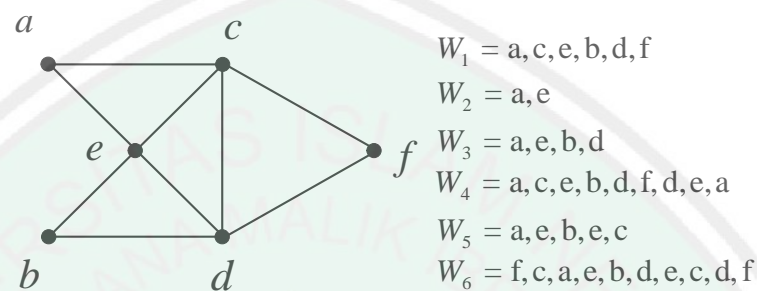
Perhatikan gambar graf berikut:



Gambar 2.3 Graf  $G_2$

Pada gambar graf  $G_2$  sebelah kiri, terlihat bahwa gambar tersebut hanya memuat satu sisi yang menghubungkan dua titik. Lintasan  $v_1, v_2, v_4, v_3$  merupakan lintasan dengan barisan sisi  $(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_3)$ .

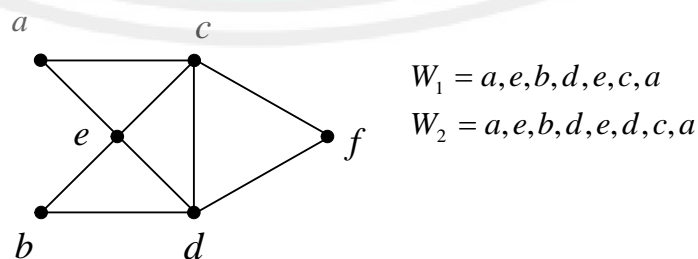
Jalan  $W$  yang semua sisinya berbeda disebut jejak (*trail*). Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan adalah trail, tetapi tidak semua trail adalah lintasan. Pada graf  $G$  berikut :



Gambar 2.4 Lintasan Graf  $G$

Jalan  $W_1 = a, c, e, b, d, f$  ;  $W_2 = a, e$  dan  $W_3 = a, e, b, d$  adalah lintasan di  $G$  karena semua titiknya berbeda. Sedangkan  $W_4 = a, c, e, b, d, f, d, e, a$  dan  $W_5 = a, e, b, e, c$  bukan merupakan lintasan karena ada titik yang sama (Abdussakir, 2009:51-52). Dan  $W_6 = f, c, a, e, b, d, e, c, d, f$  adalah jalan tertutup dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda.

Jalan tertutup  $W$  tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit. Dengan kata lain, sirkuit adalah jejak (*trail*) tertutup yang tak trivial. Perhatikan graf  $G$  berikut :



Gambar 2.5 Sirkuit dan Jejak (*trail*) Graf  $G$

Jalan  $W_1 = a, e, b, d, e, c, a$  adalah jalan tertutup, dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda. Jadi  $W_1$  adalah sirkuit dan  $W_2 = a, e, b, d, e, d, c, a$  adalah jalan tertutup dan bukan trail karena  $e, d$  dilalui lebih dari satu kali. Dengan demikian  $W_2$  bukan sirkuit.

Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Misalkan  $u$  dan  $v$  titik berbeda pada graf  $G$ , titik  $u$  dan  $v$  dikatakan terhubung jika terdapat lintasan  $u$  ke  $v$  di  $G$ .

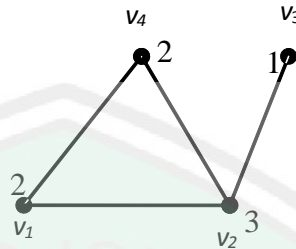
Chartrand dan Oellerman (1993:21) mendefinisikan suatu graf  $G$  terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik  $u$  dan  $v$  di  $G$  terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan apabila terdapat dua titik pada graf  $G$  yang tidak dihubungkan oleh suatu lintasan, maka graf  $G$  dinamakan graf tak terhubung (*disconnected*).

## 2.4 Derajat Suatu Titik

### Definisi

Derajat suatu titik  $v$  pada sebuah graf  $G$ , ditulis dengan  $deg(v)$ , adalah jumlah sisi yang terkait langsung (*incident*) pada  $v$ . Dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat  $v$  sebagai titik ujung. Titik  $v$  dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah  $deg(v)$  genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 2.6 Graf dengan derajat titik

### Teorema 1

Jika  $G$  graf  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  maka  $\sum_{i=1}^p \deg_G(v_i) = 2q$  (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

#### Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

#### Akibat 1.

Pada sebarang graf, banyaknya titik ganjil adalah genap.

#### Bukti:

Misalkan graf  $G$  dengan ukuran  $q$ . Maka ambil  $W$  yang memuat himpunan titik ganjil pada  $G$  serta  $U$  yang memuat himpunan titik genap di  $G$ .

Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in (G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena  $\sum_{v \in U} \deg_G v$  genap, maka  $\sum_{v \in W} \deg_G v$  juga -- genap. Sehingga  $|W|$  adalah genap.

## 2.5 Operasi Pada Graf

### 2.5.1 Gabungan Graf (*Union Graph*)

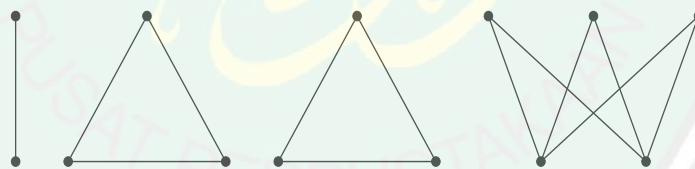
#### Definisi

Misal  $G_1$  dan  $G_2$  graf. *Union graph* atau graf gabungan dari  $G_1$  dan  $G_2$ , ditulis  $G = G_1 \cup G_2$  adalah graf dengan  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ . Jika graf  $G$  terdiri atas  $n$  kali graf  $H$ ,  $n \geq 2$ , maka ditulis  $G = nH$  (Purwanto, 1998:25).

#### Definisi 6

Penjumlahan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  yang dinotasikan  $G = G_1 + G_2$  mempunyai himpunan titik  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan sisi  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$  (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Berikut contoh operasi gabungan pada graf:



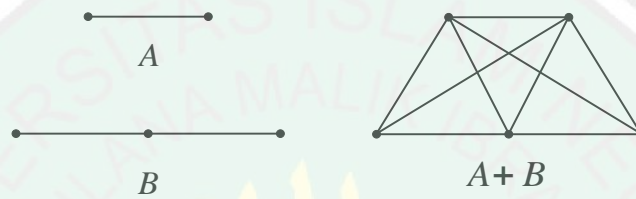
Gambar 2.7 Graf  $K_1 \cup 2K_3 \cup K_{3,2}$

### 2.5.2 Penjumlahan Graf (*Joint Graph*)

#### Definisi

Misal  $G_1$  dan  $G_2$  graf. *Joint graph* atau penjumlahan graf dari  $G_1$  dan  $G_2$ , ditulis  $G = G_1 + G_2$ , adalah graf dengan  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$  (Purwanto, 1998:26).

Berikut akan ditunjukkan penjumlahan graf  $P_3 + K_2$ , dengan  $P_3$  adalah graf lintasan (graf yang berbentuk garis yang terdiri dari 3 titik) seperti pada gambar di bawah (graf  $B$ ), dan  $K_2$  yaitu graf komplit (graf dengan dua titik yang berbeda yang saling terhubung langsung) seperti gambar di bawah (graf  $A$ ) (Chartrand dan Oellerman, 1993:29)



Gambar 2.8 Penjumlahan Dua Graf

## 2.6 Macam-Macam Graf

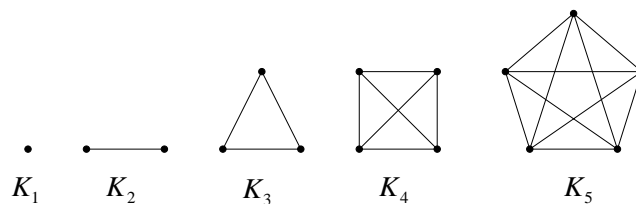
Graf memiliki jenis yang bermacam macam, tergantung dari sudut mana memandangnya. Berdasarkan titik, sisi, dan derajatnya, terdapat beberapa jenis graf sebagai berikut:

### 2.6.1 Graf Komplit

#### Definisi

Graf komplit adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan  $n$  titik dinotasikan dengan  $K_n$  (Wilson dan Watkins, 1989:36).

Berikut adalah gambar graf komplit mulai  $K_1$  sampai  $K_5$  :



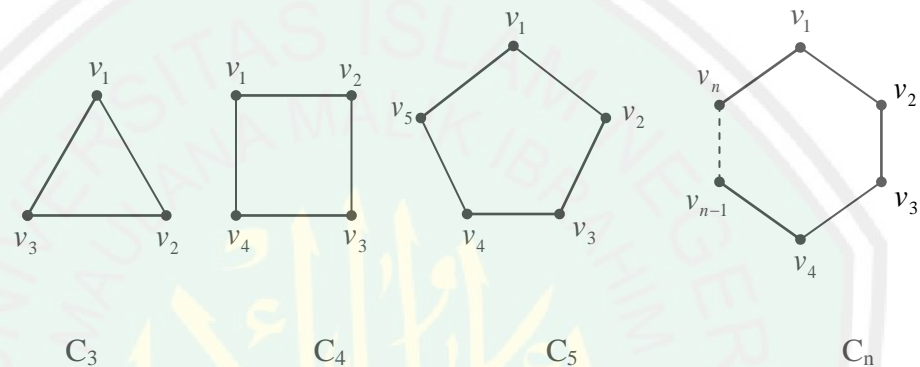
Gambar 2.9 Graf Komplit

## 2.6.2 Graf Sikel

### Definisi

Chartrand dan Lesniak (1986:28) mendefinisikan graf sikel  $C_n$  sebagai graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai  $n$  titik ( $n \geq 3$ ) dan  $n$  sisi.

Berikut adalah gambar graf sikel mulai dari  $C_3$  sampai  $C_6$  :



Gambar 2.10 Graf Sikel

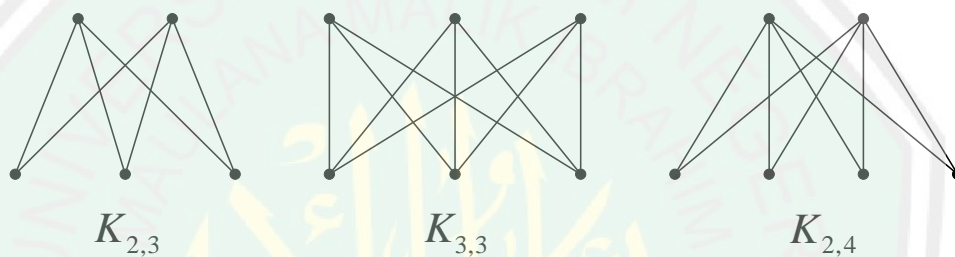
## 2.6.3 Graf Bipartisi

### Definisi

Graf  $G$  dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  sehingga masing-masing sisi pada graf  $G$  tersebut menghubungkan satu titik di  $V_1$  dengan satu titik di  $V_2$ . Jika  $G$  adalah graf bipartisi beraturan- $r$  dengan  $r \geq 1$ , maka  $|V_1| = |V_2|$ . Graf  $G$  dikatakan partisi- $n$  jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak  $n$  himpunan tak kosong  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sehingga masing-masing sisi pada graf  $G$  menghubungkan titik pada  $V_i$  dengan titik pada  $V_j$ , untuk  $i \neq j$ . Jika  $n = 3$ , maka graf partisi- $n$  disebut tripartisi (Abdussakir, dkk, 2009:21-22).

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi  $X$  dan  $Y$  sehingga masing-masing titik di  $X$  dihubungkan dengan masing-masing titik di  $Y$  oleh tepat satu sisi. Jika  $|X| = m$  dan  $|Y| = n$ , maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan  $K_{m,n}$  (Purwanto, 1998:22).

Berikut adalah contoh gambar graf bipartisi komplit :



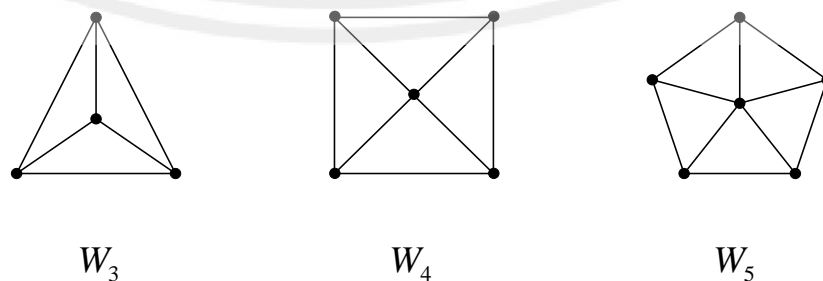
Gambar 2.11 Graf Bipartisi

#### 2.6.4 Graf Roda

##### Definisi

Graf roda adalah graf yang dibentuk dari operasi joint graf antara graf siklus ( $C_n$ ) dan graf komplit dengan satu titik ( $K_1$ ). Graf roda dinotasikan dengan  $W_n$  untuk  $n \geq 3$ .

Berikut ini adalah gambar dari graf roda :



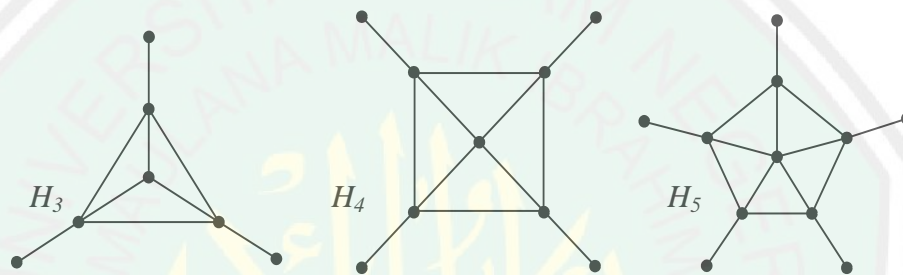
Gambar 2.12 Graf Roda

### 2.6.5 Graf Helm

#### Definisi

Graf Helm  $H_n$  adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di siklus (Gallian, 2007:7).

Berikut ini adalah gambar dari Graf Helm :



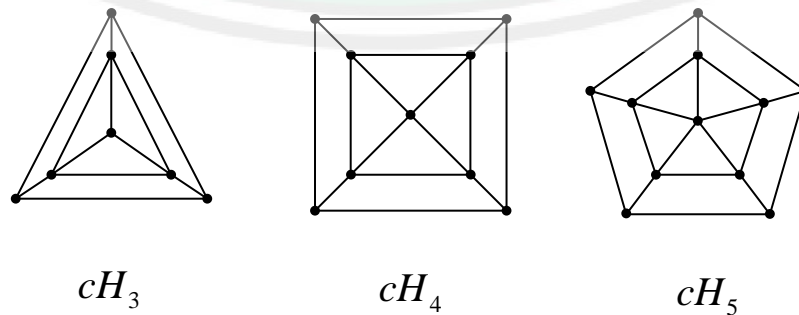
Gambar 2.13 Graf Helm

### 2.6.6 Graf Helm Tertutup

#### Definisi

Graf helm tertutup  $cH_n$  adalah graf yang diperoleh dari sebuah graf helm dengan menghubungkan setiap titik pada anting-anting untuk membentuk siklus (Gallian, 2007:7).

Berikut adalah contoh gambar graf helm tertutup:



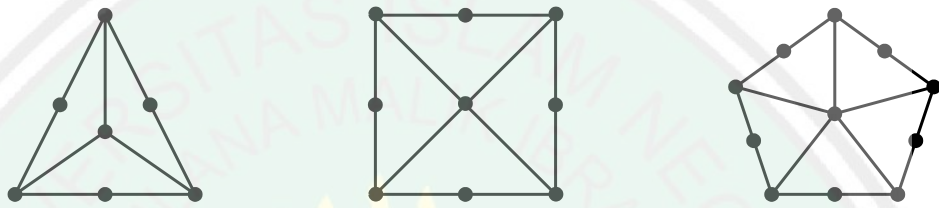
Gambar 2.14 Graf Helm Tertutup

### 2.6.7 Graf Gear

#### Definisi

Graf gear adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan tambahan satu titik di antara tiap-tiap pasangan titik pada siklus luar (Gallian, 2007:7).

Berikut adalah contoh gambar graf gear :



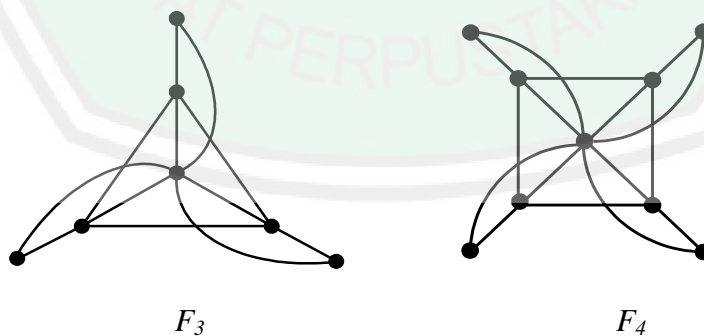
Gambar 2.15 Graf Gear

### 2.6.8 Graf Bunga

#### Definisi

Graf Bunga adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan tiap-tiap titik anting-anting ke titik pusat dari graf Helm (Gallian, 2007:7).

Berikut adalah contoh dari graf bunga :



Gambar 2.16 Graf Bunga

## 2.7 Pewarnaan pada Graf

Pewarnaan pada graf dibedakan menjadi tiga, pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan peta.

### 2.7.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Colouring*)

#### Definisi

Pewarnaan titik dari graf  $G$  adalah sebuah pemetaan warna-warna ke titik-titik dari  $G$  sedemikian hingga titik yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Graf  $G$  berwarna  $n$  jika terdapat sebuah pewarnaan dari  $G$  yang menggunakan  $n$  warna (Hasanah, 2007:20).

Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda.

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf  $G$ , dinyatakan dengan  $\chi(G)$ , adalah bilangan  $k$  terkecil sehingga  $G$  dapat diwarnai dengan  $k$  warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan  $1, 2, 3, \dots, k$ . Jelas bahwa  $\chi(G) \leq |V(G)|$  (Purwanto, 1998:7).

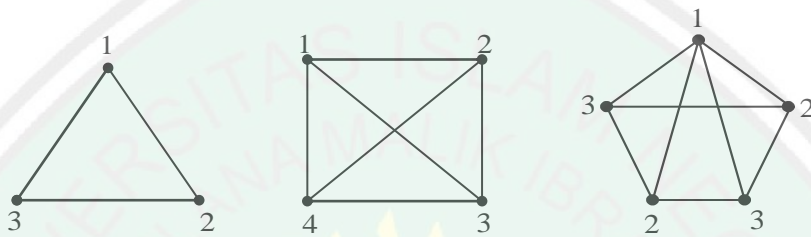
Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong  $N_n$  memiliki  $\chi(G) = 1$ . Karena semua titik tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf lengkap  $K_n$  memiliki  $\chi(G) = n$  sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan  $n$  warna (Hasanah, 2007: 20).

#### Contoh

Perhatikan gambar 2.17, untuk graf  $G_1$ , karena  $|V(G_1)| = 3$ , maka  $\chi(G_1) \leq$

3. Untuk  $G_2$ , karena  $|V(G_2)| = 4$ , maka  $\chi(G_2) \leq 4$ . Karena semua titik

pada  $G_1$  dan  $G_2$  saling terhubung langsung, akibatnya  $\chi(G_1) \geq 3$  dan  $\chi(G_2) \geq 4$ . Jadi,  $\chi(G_1) = 3$  dan  $\chi(G_2) = 4$ . Untuk graf  $G_3$ ,  $\chi(G_3) \leq 3$ , karena 3 warna untuk mewarnainya seperti pada gambar. Karena graf  $G_3$  memuat graf Komplit  $K_3$ , maka  $\chi(G_3) \geq 3$ , akibatnya  $\chi(G_3) = 3$ .



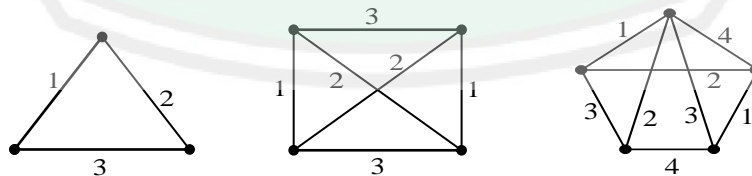
Gambar 2.17 Pewarnaan titik

### 2.7.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

#### Definisi

Suatu pewarnaan sisi- $k$  untuk graf  $G$  adalah suatu penggunaan sebagian atau semua  $k$  warna untuk mewarnai semua sisi di  $G$  sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika  $G$  mempunyai pewarnaan sisi- $k$ , maka dikatakan sisi-sisi di  $G$  diwarnai dengan  $k$  warna (Purwanto, 1998:80).

Contoh :



Gambar 2.18 Pewarnaan Sisi

### 2.8 Pelangi Terhubung (*Rainbow Connection*)

#### Definisi

Pewarnaan sisi pada graf  $G$  disebut pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected*) jika setiap titik pada graf  $G$  dihubungkan oleh lintasan yang

memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda. Pelangi terhubung (*Rainbow connection*) pada graf  $G$  yang terhubung (*connected graph*) disimbolkan oleh  $rc(G)$  yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf  $G$  menjadi pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected*) (Krivelevich dan Yuster, 2010:1).

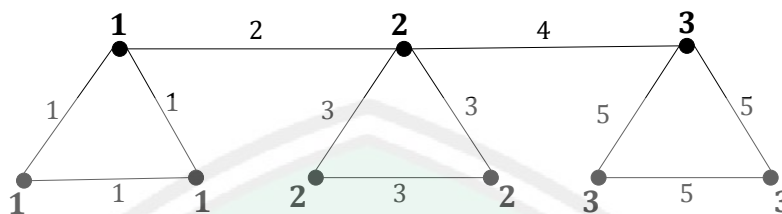
Lintasan pelangi (*rainbow path*) adalah lintasan antara dua titik sehingga tidak ada dua sisi pada lintasan tersebut yang memiliki warna yang sama. Jika lintasan pelangi tersebut ada di setiap antara dua titik maka pewarnaan tersebut dinamakan pewarnaan pelangi (*rainbow colouring*). Sedangkan bilangan minimum pada warna yang diinginkan dinamakan bilangan pelangi yang terhubung (*rainbow connection number  $rc(G)$* ) (Chandran, 2011:3).

### **Definisi**

Pewarnaan titik pada graf  $G$  adalah Pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected*) jika setiap titik pada graf  $G$  dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. *Rainbow vertex-connection* pada graf  $G$  yang terhubung (*connected graph*) disimbolkan oleh  $rvc(G)$  yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf  $G$  menjadi pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected*) (Krivelevich dan Yuster, 2010:2).

Misalkan graf  $G$  memiliki  $n$  titik, maka  $rc(G) \leq n - 1$ . Kemudian jika graf sikel  $C_n$  dengan  $n \geq 3$  maka  $rc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Sedangkan jika dihubungkan dengan  $diam(G)$ , maka  $rc(G) \geq diam(G)$  dan  $rvc(G) \geq diam(G) - 1$  (Krivelevich dan Yuster, 2010:1-2).

Contoh :



Gambar 2.19 Pelangi Terhubung (*Rainbow Connection*)

Gambar 2.19 merupakan contoh dari graf pelangi sisi terhubung dan pelangi titik terhubung dengan 5 warna sisi dan 3 warna titik. Pada gambar di atas mempunyai bilangan  $rc(G) = 5$  dan  $rvc(G) = 3$ .

## 2.9 Relevansi Pelangi Terhubung (*Rainbow Connection*) pada Graf dalam Kajian Agama Islam

Inti dari teori graf adalah titik dan sisi, dimana titik-titik itu bisa diasumsikan sebagai suatu cara untuk mencari sebuah solusi dalam menyelesaikan masalah. Jika dua titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan tertentu. Jika dua titik dalam suatu graf diasumsikan sebagai suatu kejadian dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka dapat diambil suatu pengertian bahwa ada dua kejadian yang mempunyai hubungan.

Dalam Islam dikenal peristiwa Isra' Mi'raj, Isra' merupakan perjalanan suci yang dilakukan oleh Nabi Muhammad SAW dari Masjidil Haram menuju Masjidil Aqsha, sedangkan Mi'raj adalah perjalanan suci Nabi Muhammad SAW dari Masjidil Aqsha menuju Sidrotul Muntaha (langit ke-7). Berdasarkan kisah

tersebut dapat kita masukkan dalam teori graf, karena dalam perjalanan Nabi dari Makkah sampai Sidrotul Muntaha ditemukan adanya titik (*vertex*) dan lintasan yang dilalui Nabi SAW dalam perjalanannya merupakan sisi atau garis (*edge*). Sehingga dapat kita katakan kisah isra' mi'raj masuk dalam teori graf.

Kejadian perjalanan Nabi saw dari Masjidil Haram menuju Masjidil Aqsha dijelaskan oleh Allah dalam surat Al-Israa' ayat 1 yang berbunyi :

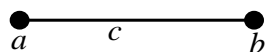
سُبْحٰنَ الَّذِيْٓ اَسْرٰى بِعَبْدِهٖٓ لَيْلًا مِّنَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ اِلَى الْمَسْجِدِ الْاَقْصَا الَّذِي بَرَكْنَا حَوْلَهُ لِنُرِيَهُٓ مِنْ اٰيٰتِنَا اِنَّهٗ هُوَ السَّمِيعُ الْبَصِيْرُ ﴿١﴾

*Maha suci Allah, yang telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang telah Kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya Dia adalah Maha mendengar lagi Maha mengetahui (Q.S. Al-Israa':[17]:1).*

Pada surat di atas, merupakan isyarat Nabi SAW untuk isra', kata isrâ secara harfiah selalu diterjemahkan dengan “perjalanan di malam hari”. Padahal, kata isrâ' itu sendiri, kalau dirujuk ke kata dasar Arabnya bisa bermakna “sebuah pencarian”. Kata sâriyah yang satu dasar kata dengan isrâ' berarti pencarian. Jadi isrâ' di sini bisa berarti “proses pencarian yang akan melepaskan diri seseorang dari kegelapan hidup”.

Peristiwa Isra' digambarkan sebagai berikut :

Keterangan:



- a. Masjidil Haram Makkah
- b. Masjidil Aqsha Palestina
- c. Peristiwa Isra'

Gambar 2.20 Isra'

Dari gambar 2.20 terlihat ada dua titik yang dihubungkan oleh satu sisi, kedua titik itu adalah Masjidil Haram dan Masjidil Aqsha, sedangkan sisi yang menghubungkan adalah peristiwa atau proses perjalanan Nabi saw yaitu Isra'.

Sedangkan kejadian perjalanan Nabi SAW dari Masjidil Aqsha menuju sidrotul Muntaha atau Mi'raj dijelaskan oleh Allah dalam surat Al-Najm ayat 13-18 yang berbunyi :

وَلَقَدْ رَآهُ نَزْلَةً أُخْرَىٰ ﴿١٣﴾ عِنْدَ سِدْرَةِ الْمُنْتَهَىٰ ﴿١٤﴾ عِنْدَهَا جَنَّةُ الْمَأْوَىٰ ﴿١٥﴾ إِذْ  
يَغْشَى السِّدْرَةَ مَا يَغْشَىٰ ﴿١٦﴾ مَا زَاغَ الْبَصَرُ وَمَا طَغَىٰ ﴿١٧﴾ لَقَدْ رَأَىٰ مِنْ آيَاتِ  
رَبِّهِ الْكُبْرَىٰ ﴿١٨﴾

*dan Sesungguhnya Muhammad telah melihat Jibril itu (dalam rupanya yang asli) pada waktu yang lain, (yaitu) di Sidratil Muntaha. Di dekatnya ada surga tempat tinggal, (Muhammad melihat Jibril) ketika Sidratil Muntaha diliputi oleh sesuatu yang meliputinya. Penglihatannya (Muhammad) tidak berpaling dari yang dilihatnya itu dan tidak (pula) melampauinya. Sesungguhnya Dia telah melihat sebahagian tanda-tanda (kekuasaan) Tuhannya yang paling besar (Q.S. Al-Najm:[53]:13-18).*

Ayat-ayat ini menjelaskan benar bahwa beliau telah sampai ke Sidratul Muntaha, yang lebih tinggi lagi dari langit. Bertemu di sana Jibril AS dalam keadaan yang asli, penglihatannya yang pertama ialah di Gua Hira'. Adapun di waktu-waktu yang lain, beliau tidak melihat Jibril AS menurut bentuk aslinya walaupun dia datang membawa wahyu.

Penggambaran peristiwa Mi'raj tersebut adalah sebagai berikut :



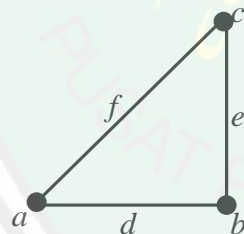
Keterangan:

- Sidratul Muntaha
- Masjidil Aqsha
- Peristiwa Mi'raj

Gambar 2.21 Peristiwa Mi'raj

Dari gambar 2.21 ada dua titik yang dihubungkan oleh satu sisi, kedua titik itu adalah Masjidil Aqsha dan Sidrotul Muntaha, sedangkan sisi yang menghubungkan adalah peristiwa atau proses perjalanan Nabi SAW yaitu Mi'raj.

Sedangkan peristiwa Isra' Mi'raj dapat digambarkan sebagai berikut :



Keterangan:

- Masjidil Haram
- Masjidil Aqsha
- Sidratul Muntaha
- Isra'
- Mi'raj
- Perjalanan Nabi SAW dari Sidratul

Muntaha Ke Masjidil Haram

Gambar 2.22 peristiwa Isra' Mi'raj

Dari gambar 2.22 dihasilkan suatu graf sikel yang mempunyai 3 titik dan 3 sisi. Ketiga titik itu adalah, titik pertama merupakan tempat awal Nabi SAW yaitu Masjidil Haram, titik kedua adalah Masjidil Aqsha, sedangkan titik ketiga adalah Sidrotul Muntaha. Sedangkan untuk sisi-sisinya adalah, sisi pertama yaitu

Isra' yang dimaknai sebagai perjalanan Nabi SAW dari Masjidil Haram menuju Masjidil Aqsha, sedangkan sisi kedua dimaknai sebagai Mi'raj yaitu perjalanan Nabi SAW dari Masjidil Aqsha menuju Sidrotul Muntaha, dan sisi yang terakhir adalah perjalanan Nabi SAW dari Sidrotul Muntaha kembali ke Masjidil Haram.

Dengan demikian pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) dapat diaplikasikan dalam ajaran Islam, seperti dalam peristiwa Isra' Mi'raj tersebut, dimana titik yang dilabelkan sebagai tempat kejadian dan sisi yang dilabelkan sebagai proses kejadian atau perjalanan Nabi SAW.



### BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dibahas mengenai bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf yang berkaitan dengan graf sikel. Yaitu antara lain graf sikel, graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf bunga.

Pewarnaan sisi pada graf  $G$  disebut pelangi sisi yang terhubung jika setiap dua titik pada graf  $G$  dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda. Bilangan pelangi sisi terhubung pada graf  $G$  yang terhubung disimbolkan oleh  $rc(G)$  yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf  $G$  menjadi pelangi sisi terhubung.

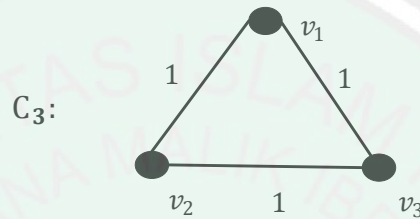
Pewarnaan titik pada graf  $G$  adalah pelangi titik yang terhubung jika setiap dua titik pada graf  $G$  dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. Bilangan pelangi titik terhubung pada graf  $G$  yang terhubung disimbolkan oleh  $rvc(G)$  yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf  $G$  menjadi pelangi titik terhubung.

#### 3.1 Graf Sikel

Graf sikel  $C_n$  adalah graf terhubung  $n$  titik yang setiap titiknya berderajat 2. Misal graf sikel  $C_n$  mempunyai himpunan titik  $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , maka graf tersebut mempunyai himpunan sisi  $E(C_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , dimana  $e_i = v_i, v_{i+1}$  untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ,  $e_n = v_1, v_n$ .

Bilangan pelangi sisi terhubung ( $rc(C_n)$ ) dan bilangan pelangi titik terhubung ( $rvc(C_n)$ ) pada graf sikel dapat ditentukan dengan menggambar pola

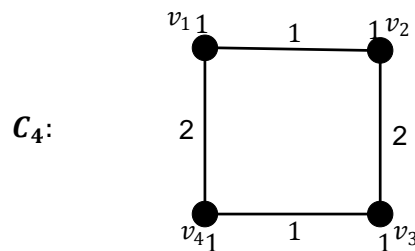
graf sikel  $C_3$ , graf  $C_4$ , graf  $C_5$ , graf  $C_6$ , dan graf  $C_7$ . Kemudian menggambar pola  $rc(C_n)$  dan  $rvc(C_n)$  pada graf sikel  $C_n$ . Dari pola tersebut selanjutnya dapat disimpulkan bilangan pelangi sisi terhubung dan pelangi titik terhubung pada graf sikel  $C_n$ .



Gambar 3.1 Graf sikel  $C_3$

Pada graf  $C_3$  terdapat 3 titik yaitu  $v_1$ ,  $v_2$ , dan  $v_3$ . Graf ini juga mempunyai 3 sisi yaitu sisi  $v_1 - v_2$ , sisi  $v_1 - v_3$ , dan sisi  $v_3 - v_2$ . Langkah pertama untuk mencari bilangan pelangi sisi terhubung adalah. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat  $v_2$  maka lintasan itu menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Karena dapat melewati langsung dari  $v_1$  ke  $v_3$  tanpa melewati  $v_2$ , maka sisi  $(v_1, v_3)$  diwarna 1, sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada sisi  $(v_1, v_2)$  dan sisi  $(v_2, v_3)$ . Sehingga terbukti bahwa  $rc(C_3) = 1$ .

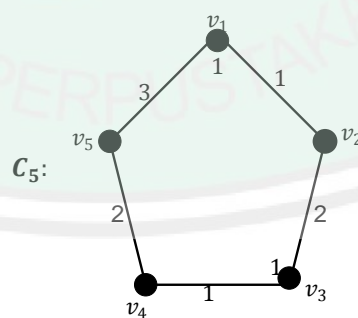
Sedangkan untuk bilangan pelangi titik terhubung, pada graf  $C_3$  semua titik terhubung langsung, sehingga tidak memiliki warna titik. Jadi  $rvc(C_3) = 0$ .



Gambar 3.2 Graf sikel  $C_4$

Pada graf  $C_4$  terdapat 4 titik dan juga 4 sisi. Misalkan sisi-sisi pada graf  $C_4$  adalah  $v_i, v_j \in V(C_4)$  dengan  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , lintasan ini dapat melalui  $v_2$  sehingga lintasannya menjadi  $v_1, v_2, v_3$  dengan jarak 2 sisi. Ketika melewati  $v_4$  lintasan ini juga memiliki jarak 2 sisi, yaitu  $v_1, v_4, v_3$ . Beri warna 1 pada sisi  $(v_1, v_2)$ , maka sisi  $(v_2, v_3)$  haruslah diwarnai 2. Ketika lewat  $v_4$  dengan cara yang sama akan didapatkan hasil yang sama. Sehingga untuk memperoleh bilangan pelangi sisi terhubung dibutuhkan minimal 2 warna berbeda. Jadi terbukti bahwa  $rc(C_4) = 2$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $C_4$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Misalnya ambil titik  $v_1$  diberi warna 1 dan  $v_2$  diberi warna 1, sehingga setiap lintasan  $v_1 - v_3$  akan melewati titik  $v_2$  dimana  $c(v_2) = 1$ , sedangkan setiap lintasan  $v_2 - v_3$  akan melewati titik  $v_1$  dimana  $c(v_1) = 1$ . Sehingga terbukti  $rv_c(C_4) = 1$ .

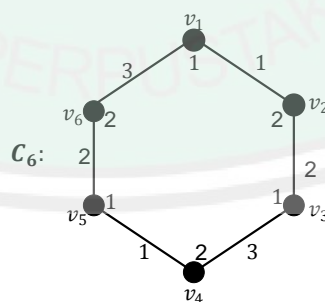


Gambar 3.3 Graf sikel  $C_5$

Pada graf  $C_5$  terdapat 5 titik dan juga 5 sisi. Misalkan sisi-sisi pada graf  $C_5$  adalah  $v_i, v_j \in V(C_5)$  dengan  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ , ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat  $v_2$  maka lintasan ini menjadi  $(v_1, v_2, v_3)$ , sedangkan bila melewati  $v_5$  dan  $v_4$

maka lintasan ini menjadi  $(v_1, v_5, v_4, v_3)$ . Ambil lintasan  $(v_1, v_2, v_3)$ , beri warna 1 pada sisi  $(v_1, v_2)$ , dan warna 2 pada sisi  $(v_2, v_3)$  ini akan membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $(v_1, v_2, v_3)$ . Sedangkan pada lintasan  $(v_1, v_5, v_4, v_3)$ , ketika sisi  $(v_4, v_3)$  diwarnai 1 dan  $(v_5, v_4)$  diwarnai 2 maka untuk membuat pelangi sisi terhubung haruslah sisi  $(v_1, v_5)$  diberi warna 3, karena sisi  $(v_1, v_2)$  sudah berwarna 1 dan sisi  $(v_5, v_4)$  berwarna 2. Sehingga diperlukan minimal 3 warna yang berbeda untuk membuat pelangi sisi terhubung pada graf  $C_5$ . Jadi terbukti bahwa  $rc(C_5) = 3$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $C_5$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Misalnya ambil titik  $v_1$  diberi warna 1 dan  $v_2$  diberi warna 1, sehingga setiap lintasan  $v_1 - v_3$  akan melewati titik  $v_2$  dimana  $c(v_2) = 1$ , sedangkan setiap lintasan  $v_2 - v_3$  akan melewati titik  $v_1$  dimana  $c(v_1) = 1$ . Sehingga terbukti  $rvc(C_5) = 1$ .

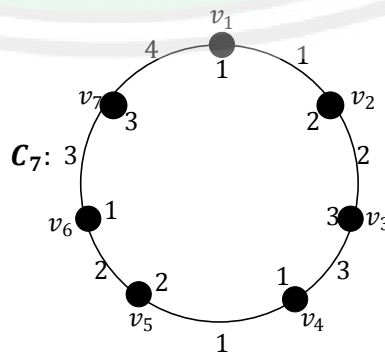


Gambar 3.4 Graf sikel  $C_6$

Pada graf  $C_6$  terdapat 6 titik dan juga 6 sisi. Misalkan sisi-sisi pada graf  $C_6$  adalah  $v_i, v_j \in V(C_6)$  dengan  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , melalui sisi manapun pada lintasan ini akan melewati 3 sisi. Misalnya pada lintasan

$(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , lintasan ini akan melewati sisi-sisi yaitu, sisi  $(v_1, v_2)$ , sisi  $(v_2, v_3)$ , dan sisi  $(v_3, v_4)$ . Sedangkan pada lintasan  $(v_1, v_6, v_5, v_4)$ , lintasan ini akan melewati sisi-sisi yaitu, sisi  $(v_1, v_6)$ , sisi  $(v_6, v_5)$ , dan sisi  $(v_5, v_4)$ . Maka untuk pelangi sisi terhubung minimal dibutuhkan 3 warna yang berbeda. Misalkan beri warna 1 pada sisi  $(v_1, v_2)$ , warna 2 pada sisi  $(v_2, v_3)$ , dan warna 3 pada sisi  $(v_3, v_4)$ , maka lintasan  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  merupakan lintasan pelangi. Dengan menggunakan cara yang sama lintasan  $(v_1, v_6, v_5, v_4)$  merupakan lintasan pelangi. Jadi terbukti bahwa  $rc(C_6) = 3$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $C_6$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan dua warna titik. Misalkan pewarnaan titik  $c$  dari  $C_6$  menggunakan 2 warna, dua titik yang berdekatan (misal  $v_1$  dan  $v_2$ ) mempunyai warna yang berbeda, ini akan membuat lintasan  $v_6$  ke  $v_3$  yang melalui titik  $v_1$  dan  $v_2$  menjadi lintasan pelangi. Sehingga untuk memperoleh bilangan pelangi titik terhubung dibutuhkan minimal 2 warna berbeda. Jadi terbukti bahwa  $rvc(C_6) = 2$ .



Gambar 3.5 Graf sikel  $C_7$

Pada graf  $C_7$  terdapat 7 titik dan juga 7 sisi. Misalkan sisi-sisi pada graf  $C_7$  adalah  $v_i, v_j \in V(C_7)$  dengan  $i, j = 1, 2, 3, \dots, 7$ . Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$  bila lewat titik  $v_7, v_6, v_5$  maka lintasannya menjadi  $(v_1, v_7, v_6, v_5, v_4)$ . Karena dapat melewati lintasan pendek yaitu lintasan  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , beri warna 1 pada sisi  $(v_1, v_2)$ , warna 2 pada sisi  $(v_2, v_3)$ , dan warna 3 pada sisi  $(v_3, v_4)$  ini akan membuat lintasan  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  menjadi pelangi sisi terhubung. Namun ketika lintasan  $(v_1, v_7, v_6, v_5, v_4)$  diberi warna dengan menggunakan cara yang sama misalnya sisi  $(v_5, v_4)$  diberi warna 1, sisi  $(v_6, v_5)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_7, v_6)$  diberi warna 3, maka sisi  $(v_1, v_7)$  tidak mungkin diberi warna 1 atau 2, karena ini mengakibatkan pada lintasan  $(v_7, v_1, v_2, v_3)$  tidak terdapat lintasan pelangi. Maka haruslah sisi  $(v_1, v_7)$  diberi warna 4 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Sehingga untuk memperoleh bilangan pelangi sisi terhubung dibutuhkan minimal 4 warna berbeda. Jadi terbukti bahwa  $rc(C_7) = 4$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $C_7$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan 3 warna titik. Misalnya pewarnaan titik  $c$  dari  $C_7$  menggunakan 2 warna, ini mengakibatkan ada dua titik yang berdekatan (misal  $v_1, v_2$ ) mempunyai warna yang sama. sehingga dua lintasan yaitu  $P_1 = (v_7, v_1, v_2, v_3)$  dan  $P_2 = (v_7, v_6, v_5, v_4, v_3)$  pada  $C_n$  bukanlah lintasan pelangi, dengan kata lain tidak ada lintasan pelangi diantara  $v_7$  dan  $v_3$ . Oleh karena itu dibutuhkan minimal 3 warna titik yang berbeda. Jadi terbukti  $rvc(C_7) = 3$ .

Tabel 3.1 Pola Bilangan  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada  $C_3$  sampai  $C_n$ 

No	Jenis Graf	$rc(G)$	$rvc(G)$
1	$C_3$	1	0
2	$C_4$	2	1
3	$C_5$	2	1
4	$C_6$	3	2
5	$C_7$	4	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$C_n$	1 jika $n = 3$ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ jika $n \geq 4$	0 jika $n = 3$ 1 jika $n = 4$ atau 5 3 jika $n = 9$ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ jika $n = 6,7,8,10,11,12,13$ , atau 15 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ jika $n \geq 16$ atau $n = 14$

Dari pola yang ditunjukkan oleh bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) di atas dapat diperoleh teorema sebagai berikut:

### Teorema 1

Graf sikel  $C_n$  dengan jumlah titik  $n \geq 3$ , maka bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) adalah:

$$rc(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 3 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) adalah:

$$rvc(C_n) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n = 3 \\ 1, & \text{jika } n = 4 \text{ atau } 5 \\ 3, & \text{jika } n = 9 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, & \text{jika } n = 6,7,8,10,11,12,13, \text{ atau } 15 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{jika } n \geq 16 \text{ atau } n = 14 \end{cases}$$

(Li dan Liu, 2011:3).

### Bukti

Graf Sikel  $C_n$  adalah graf terhubung  $n$  titik yang setiap titiknya berderajat

2. Misalkan  $C_n: v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1$  lalu untuk setiap  $i$  dengan  $1 \leq i \leq n$  kita berikan  $e_i = v_i v_{i+1}$ .

1. Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)

a.  $rc(C_n) = 1$  jika  $n = 3$

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat  $v_2$  maka lintasan itu menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Karena dapat melewati langsung dari  $v_1$  ke  $v_3$  tanpa melewati  $v_2$ , maka sisi  $(v_1, v_3)$  diwarna 1, sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada sisi  $(v_1, v_2)$  dan sisi  $(v_2, v_3)$ . Sehingga terbukti bahwa  $rc(C_3) = 1$ .

b.  $rc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  jika  $n \geq 4$

Anggap terdapat dua kasus, yaitu  $n$  genap dan  $n$  ganjil.

Untuk  $n$  genap, misalkan  $n = 2k$  dimana  $k \geq 2$ . Maka diameter graf sikel  $2k$  yaitu  $diam(C_{2k}) = k$ . Misalnya didefinisikan pewarnaan sisi  $c_0$  dari  $C_{2k}$  dengan  $c_0 = i$  untuk  $1 \leq i \leq k$  dan  $c_0 = i - k$  jika  $k + 1 \leq i \leq n$ , ini menunjukkan bahwa  $rc(C_{2k}) \leq k$  dan juga  $rc(C_{2k}) = k$ .

Untuk  $n$  ganjil, misalkan  $n = 2k + 1$  dimana  $k \geq 2$ . Misalkan definisi pertama pewarnaan sisi  $c_1$  dari  $C_n$  adalah  $c_1 = i$  untuk  $1 \leq i \leq k + 1$  dan  $c_1 = i - k - 1$  jika  $k + 2 \leq i \leq n$ . Ini menunjukkan  $rc(C_n) \leq k + 1$ .

Selanjutnya ambil asumsi kebalikannya, misalnya  $rc(C_n) = k$ , diberikan  $c$  merupakan pewarnaan pelangi sisi terhubung dari  $C_n$ , lalu  $u$  dan  $v$  merupakan titik yang bertolak belakang dari  $C_n$ . Lintasan  $u - v$  pada  $C_n$  merupakan lintasan pelangi, sedangkan lintasan  $u - v$  pada  $C_{2k+1}$  yang lain bukan lintasan pelangi karena mempunyai panjang  $k + 1$ . Misalnya pada sisi  $c(v_{k+1}v_{k+2}) = k$ .

Ambil titik  $v_1, v_{k+1}$ , dan  $v_{k+2}$ . Lintasan  $v_1$  ke  $v_{k+1}$  yang melewati titik  $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$  merupakan lintasan pelangi, misalnya lintasan ini diberi nama  $P$ . Lintasan  $v_1$  ke  $v_{k+2}$  yang melewati titik  $v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{k+2}$  juga merupakan lintasan pelangi, misalnya lintasan ini diberi nama  $Q$ . Lalu beberapa sisi dari  $P$  diberi warna  $k$  dan sisi pada  $Q$  juga diberi warna yang sama. Misalkan lintasan  $v_1$  ke  $v_{k+2}$  yang melewati titik  $v_2, v_3, \dots, v_{k+2}$  adalah lintasan pelangi, maka  $c(v_1v_2)$  berwarna  $k$ . Dengan menggunakan cara yang sama lintasan  $v_n$  ke  $v_{k+1}$  yang melewati titik  $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{k+1}$  merupakan lintasan pelangi, maka  $c(v_nv_1) = k$ . Jadi  $c(v_1v_2) = c(v_nv_1) = k$ . Secara tidak langsung tidak ada lintasan pelangi pada  $v_2$  ke  $v_n$ , sehingga haruslah  $k + 1$ .

Dari ulasan diatas sehingga terbukti bahwa  $rc(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .

## 2. Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)

Asumsikan bahwa  $C_n: v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}(= v_1)(n \geq 3)$ .

a.  $rvc(C_3) = 0$

Diasumsikan  $rvc(C_3) \neq 0$  atau  $rvc(C_3) > 0$

Ambil  $rvc(G) = x > 0$  dan  $u, v \in V(C_3)$  sehingga ada lintasan pelangi dari titik  $u$  ke titik  $v$ , dengan minimal bilangan warna sisi sebanyak  $x$ . Ini artinya lintasan dari titik  $u$  ke titik  $v$  melewati  $x$  titik misalkan titik  $w$ . Sehingga dapat dikatakan ada  $u, v \in V(C_3)$  yang tidak terhubung langsung. Ini jelas tidak sesuai dengan graf  $C_3$ , karena ketiga titik saling berhubungan. Sehingga pengasumsian salah. Jadi dapat disimpulkan bahwa  $rvc(C_3) = 0$ .

b.  $rvc(C_n) = 1$  untuk  $n = 4$  atau  $5$

Untuk membuktikan  $rvc(C_n) \leq 1$ , maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil  $rvc(C_n) = 1$ , misalkan ada fungsi pewarnaan  $c: V(C_n) \rightarrow \{1\}$  maka  $c(v_i) = 1$  dan  $c(v_{i+1}) = 1$ , sehingga setiap lintasan  $v_i - v_j$  akan melewati titik interior  $v_{i+1}$  dimana  $c(v_{i+1}) = 1$ , sedangkan setiap lintasan  $v_{i+1} - v_j$  akan melewati titik interior  $v_i$  dimana  $c(v_i) = 1$ . Dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti  $rvc(C_n) = 1$ .

c.  $rvc(C_9) = 3 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$

$rvc(C_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  untuk  $6 \leq n \leq 13$  atau  $n = 15$

Ambil contoh pada  $C_7$ , misalkan pewarnaan titik  $c$  dari  $C_7$  menggunakan 2 warna, dua titik yang berdekatan (misal  $v_1, v_2$ ) mempunyai warna yang sama. Namun dua lintasan yaitu  $P_1 =$

$(v_7, v_1, v_2, v_3)$  dan  $P_2 = (v_7, v_6, v_5, v_4, v_3)$  pada  $C_n$  bukanlah lintasan pelangi, dengan kata lain tidak ada lintasan pelangi diantara  $v_7$  dan  $v_3$ . Jadi  $c$  bukanlah pewarnaan pelangi titik. Oleh karena itu haruslah  $rvc(C_7) = 3$ .

misalkan dengan asumsi berbeda, bahwa  $C_n$  untuk  $n = 11, 13, 15$  mempunyai  $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right)$  pewarnaan pelangi titik  $c$ . lalu ketiga titik (misal  $v_1, v_i, v_j \in V(C_n), 1 < i < j \leq n$ ) mempunyai warna yang sama pada satu bagian titik, diantara titik-titik tersebut (misal  $v_1, v_i$ ) mempunyai jarak tidak lebih dari  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  dengan kata lain  $d_{C_n}(v_1, v_i) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ . Misalkan  $P = v_1, v_2, \dots, v_i$  adalah lintasan dari  $v_1$  menuju  $v_i$  dengan panjang  $d_{C_n}(v_1, v_i)$ . Karena  $c(v_1) = c(v_i)$ ,  $P = v_n, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}$  bukanlah lintasan pelangi. Jadi  $P_2 = C_n - P = v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}$  adalah lintasan pelangi dari  $v_n$  menuju  $v_{i+1}$ . Karena  $\ell(C_n - P) = n - (\ell(P) + 2) \geq n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  untuk  $n = 11, 13, 15$ ,  $C_n - P$  mempunyai paling sedikit  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  titik dalam. Sehingga  $C_n - P$  bukanlah lintasan pelangi. Oleh karena itu  $rvc(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  untuk  $n = 11, 13, 15$ .

d.  $rvc(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  jika  $n \geq 16$  atau  $n = 14$

Misalkan  $C_n: v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}(= v_1)$ . Didefinisikan pewarnaan titik  $c$  dari  $C_n$  adalah  $c(v_i) = i$  untuk  $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  dan  $c(v_i) = i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  jika

$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq i \leq n$ . Untuk sembarang dua titik  $u, v$  dari  $C_n$ , lintasan pada  $C_n$  dengan panjang  $dC_n(u, v)$  adalah lintasan pelangi. Sehingga akan didapatkan  $rvC(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  untuk  $n \geq 16$  atau  $n = 14$ .

Sekarang akan dibuktikan bahwa  $rvC(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  untuk  $n \geq 16$  atau  $n = 14$ . Misalkan diasumsikan terbalik, bahwa  $rvC(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ .

Lalu ada  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$  pewarnaan titik pelangi  $c_0$  pada  $C_n$ . Sesungguhnya, ada tiga titik (misal  $v_1, v_i, v_j, 1 \leq i \leq j \leq n$ ) pada  $C_n$  yang mempunyai warna yang sama. Dan satu titik diantara  $\{v_1, v_i, v_j\}$ , misal

$(v_1, v_i)$  memenuhi  $dC_n(v_1, v_i) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ . Selanjutnya diasumsikan bahwa

$P = v_1, v_2, \dots, v_i$  adalah lintasan dari  $C_n$  dengan panjang  $dC_n(v_1, v_i)$ .

Sekarang diberi contoh pada titik  $v_n$  dan  $v_{i+1}$ . Karena  $v_1$  dan  $v_i$

mempunyai warna yang sama, lintasan pelangi diantara  $v_n$  dan  $v_{i+1}$

pada  $C_n$  haruslah  $C_n - P$ . Karena  $\ell(C_n - P) = n - (\ell(P) + 2) \geq n -$

$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2$ , nomor titik dalam pada  $C_n - P$  adalah minimal  $n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 3$ .

untuk  $n \geq 16$  atau  $n = 14, n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 3 > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$  ini menunjukkan

bahwa  $C_n - P$  bukanlah lintasan pelangi. Oleh karena itu  $rvC(C_n) \geq$

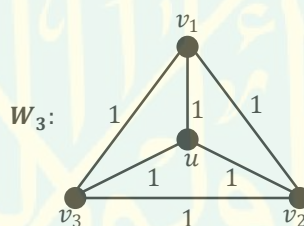
$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  untuk  $n \geq 16$  atau  $n = 14$ . Sehingga diperoleh  $rvC(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

untuk  $n \geq 16$  atau  $n = 14$ .

### 3.2 Graf Roda

Graf roda adalah graf yang berbentuk dari operasi penjumlahan antara graf siklus ( $C_n$ ) dan graf komplit dengan satu titik ( $K_n$ ). Graf roda dinotasikan dengan  $W_n$  dan  $n \geq 3$ .

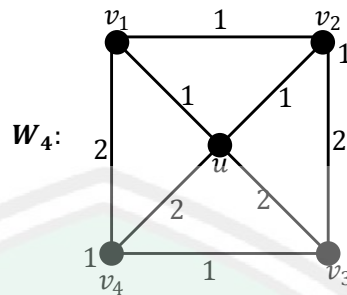
Bilangan pelangi sisi terhubung ( $rc$ ) dan bilangan pelangi titik terhubung ( $rvc$ ) pada graf roda dapat ditentukan dengan menentukan terlebih dahulu  $rc(W_n)$  dan  $rvc(W_n)$  pada graf  $W_3$ , graf  $W_4$ , graf  $W_5$ , graf  $W_6$ , graf  $W_7$  dan terakhir menggambar pola warna pada graf  $W_n$  agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung.



Gambar 3.6 Graf roda  $W_3$

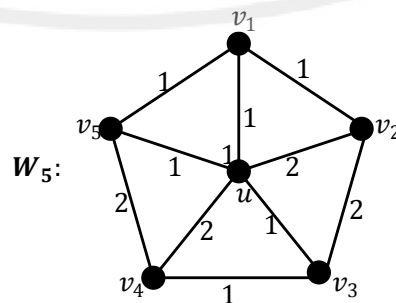
Graf  $W_3$  terdiri dari 4 titik dan 6 sisi. Setiap titik  $v$  pada graf  $W_3$  terhubung langsung dengan titik  $u$ . Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Namun karena lintasan dapat langsung terhubung dari  $v_1$  ke  $v_3$  tanpa melalui  $u$  atau  $v_2$ , maka sisi  $(v_1, v_3)$  diberi warna 1. sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3$  atau  $v_1, u, v_3$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada sisi  $(v_1, v_2)$ , sisi  $(v_2, v_3)$ , dan sisi  $(u, v)$ . Sehingga terbukti bahwa  $rc(W_3) = 1$ .

Sedangkan untuk bilangan pelangi titik terhubung, pada graf  $W_3$  semua titik terhubung langsung, sehingga tidak memiliki warna titik. Jadi  $rvc(W_3) = 0$ .

Gambar 3.7 Graf roda  $W_4$ 

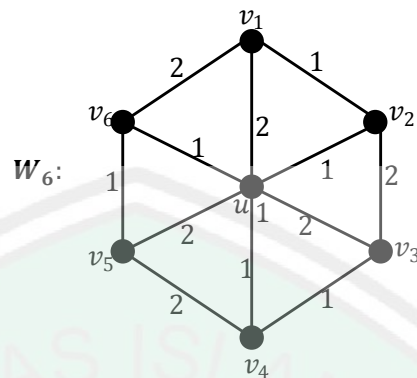
Graf  $W_4$  terdiri dari 5 titik dan 8 sisi. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Lintasan ini juga bisa melewati titik  $v_4$ , sehingga menjadi lintasan  $v_1, v_4, v_3$ . Dari ketiga lintasan yang tercipta dari lintasan  $v_1$  ke  $v_3$  ini sama-sama mempunyai panjang 2 sisi, sehingga dengan memberikan 2 warna warna yang berbeda pada masing-masing sisi pada lintasan akan terbentuk pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(W_4) = 2$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $v_i$  ke  $v_j$ , karena semua titik  $v$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_i, u, v_j$ . sehingga dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(W_4) = 1$ .

Gambar 3.8 Graf roda  $W_5$

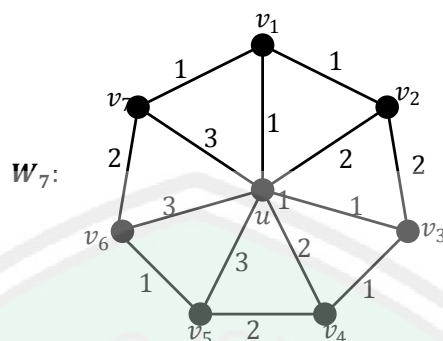
Graf  $W_5$  terdiri dari 6 titik dan 10 sisi. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Lintasan inipun dapat melewati titik  $v_5$  dan  $v_4$ , sehingga lintasan menjadi  $v_1, v_5, v_4, v_3$ . Pada lintasan  $v_1, u, v_3$  maupun  $v_1, v_2, v_3$ , sama-sama mempunyai panjang 2 sisi, sehingga misalnya salah satu yaitu lintasan  $v_1, v_2, v_3$  diberi warna masing-masing 1 untuk sisi  $(v_1, v_2)$  dan warna 2 untuk sisi  $(v_2, v_3)$ . Lalu pada lintasan  $v_5, v_4, v_3$  masing-masing sisi, sisi  $(v_5, v_4)$  diwarnai 2 dan sisi  $(v_4, v_3)$ , maka lintasan  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  merupakan lintasan pelangi. Ketika sisi  $(v_1, v_5)$  diberi warna 1, maka tidak ada lintasan pelangi pada lintasan  $v_5$  ke  $v_3$  yang melewati titik  $v_1$ . Namun lintasan  $v_5$  ke  $v_3$  dapat dibuat lintasan pelangi dengan melewati titik  $u$  yaitu ketika sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2 dan sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 1, ini sudah membuat  $v_5$  ke  $v_3$  ( $v_5, u, v_3$ ) menjadi lintasan pelangi dengan mengabaikan lintasan  $v_5, v_1, v_3$ . Sehingga dari uraian diatas minimal dibutuhkan 2 warna berbeda untuk membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(W_5) = 2$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $v_i$  ke  $v_j$ , karena semua titik  $v$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_i, u, v_j$ . sehingga dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(W_5) = 1$ .

Gambar 3.9 Graf roda  $W_6$ 

Graf  $W_6$  terdiri dari 7 titik dan 12 sisi. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Bila lewat titik  $v_6$  dan  $v_5$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_6, v_5, v_4$ . Namun karena dengan melewati titik  $u$  yang menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$  merupakan lintasan terpendek, maka sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2. Dengan menggunakan cara yang sama pada lintasan yang berhubungan dengan titik  $u$  akan terbentuk lintasan pelangi, dimana setiap lintasan yang melewati titik  $u$  merupakan lintasan terdekat dibandingkan menggunakan lintasan sikelnnya. Sedangkan untuk membuat lintasan pelangi pada sisi sikelnnya dengan memberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap, maka akan tercipta pelangi sisi terhubung secara keseluruhan. Jadi terbukti bahwa  $rc(W_6) = 2$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $v_i$  ke  $v_j$ , karena semua titik  $v$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_i, u, v_j$ . sehingga dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(W_6) = 1$ .

Gambar 3.10 Graf roda  $W_7$ 

Graf  $W_6$  terdiri dari 8 titik dan 14 sisi. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Bila lewat titik  $v_7, v_6$  dan  $v_5$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_7, v_6, v_5, v_4$ . Namun karena dengan melewati titik  $u$  yang menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$  merupakan lintasan terpendek, maka sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2. Lalu misalnya untuk lintasan sikel diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Sedangkan lintasan yang melewati titik  $u$ , sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 1 dengan  $i$  ganjil dan sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 2 dengan  $i$  genap, maka pada lintasan  $v_3$  ke  $v_7$ , lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  tidak terdapat lintasan pelangi. Sehingga haruslah lintasan sikel diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Lalu sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2, selanjutnya sisi  $(v_5, u)$  diberi warna 3. Ini akan membuat lintasan  $v_1$  ke  $v_4$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  menjadi lintasan pelangi. Pada sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 3 maka lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  merupakan lintasan pelangi. Lalu sisi  $(v_7, u)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 1 membuat lintasan  $v_3$  ke  $v_7$  menjadi

lintasan pelangi. Sehingga dibutuhkan minimal 3 warna yang berbeda untuk membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(W_7) = 3$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $v_i$  ke  $v_j$ , karena semua titik  $v$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_i, u, v_j$ . sehingga dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(W_7) = 1$ .

Tabel 3.2 Pola Bilangan  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada  $W_3$  sampai  $W_n$

No	Jenis Graf	$rc(G)$	$rvc(G)$
1	$W_3$	1	0
2	$W_4$	2	1
3	$W_5$	2	1
4	$W_6$	2	1
5	$W_7$	3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$W_n$	1, jika $n = 3$ 2, jika $4 \leq n \leq 6$ 3, jika $n \geq 7$	0, jika $n = 3$ 1, jika $n \geq 4$

Dari pola yang ditunjukkan oleh bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) di atas dapat diperoleh teorema sebagai berikut:

### Teorema 2

Graf  $G$  adalah graf roda  $W_n$  dengan  $n \in \mathbb{N}$ , maka bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

(Li dan Sun, 2012:8).

Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rvc(W_n) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n = 3 \\ 1, & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

**Bukti:**

Graf roda  $W_n$  dengan  $n \geq 3$  adalah graf yang terbentuk dari operasi penjumlahan antara graf siklus ( $C_n$ ) dan graf komplit dengan satu titik ( $K_1$ ).

Misalkan  $v_i \in V(C_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , maka  $v_{n+1} = v_1$ , dan  $u \in V(K_1)$ , serta untuk semua  $v_i$  terhubung langsung dengan  $u$ .

1. Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*)  $rc(W_n)$

a. Jika  $n = 3$ ,

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ .

Namun karena lintasan dapat langsung terhubung dari  $v_1$  ke  $v_3$  tanpa melalui  $u$  atau  $v_2$ , maka sisi  $(v_1, v_3)$  diberi warna 1. sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3$  atau  $v_1, u, v_3$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada sisi  $(v_1, v_2)$ , sisi  $(v_2, v_3)$ , dan sisi  $(u, v)$ . Sehingga terbukti bahwa  $rc(W_3) = 1$ .

b. Jika  $4 \leq n \leq 6$  maka  $rc(W_n) = 2$

Akan dibuktikan  $rc(W_n) \geq 2$  dan  $rc(W_n) \leq 2$ .

Graf  $W_n$  dengan  $4 \leq n \leq 6$  bukan merupakan graf komplit, karena  $\deg(v_i) = 3$  sedangkan jumlah titiknya  $5 \leq |W_n| \leq 7$ , sehingga  $rc(G) \geq 2$ . Kemudian untuk membuktikan  $rc(G) \leq 2$  maka akan

dibuktikan bahwa dengan 2 warna dapat membentuk  $W_n$  menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Fungsi pewarnaan sisi  $c: E(W_n) \rightarrow \{1,2\}$  yang didefinisikan oleh  $c(v_i, u) = 1$  jika  $i$  ganjil,  $c(v_i, u) = 2$  jika  $i$  genap,  $c(v_i, v_{i+1}) = 1$  jika  $i$  ganjil,  $c(v_i, v_{i+1}) = 2$  jika  $i$  genap. Setiap lintasan  $v_i - u$  atau  $u - v_i$  hanya terdapat satu warna sisi. Kemudian lintasan  $v_i - v_j$ , jika  $i$  genap dan  $v_i$  dan  $j$  ganjil pasti berbentuk lintasan pelangi 2 warna. Sedangkan untuk lintasan  $v_i - v_j$  dengan  $i$  dan  $j$  sama-sama genap atau  $i$  dan  $j$  sama-sama ganjil. Jika  $v_i - v_{i+2}$  maka membentuk lintasan pelangi yang sisi-sinya  $C_n$ . Tetapi jika lintasan  $v_i - v_{i+c}$ , dengan  $4 \leq c \leq n - 2$  maka  $c = 4$ , karena  $n = 6$  diperoleh  $4 \leq c \leq 6 - 2$ . Untuk  $i = 1$ , dengan lintasan  $v_1 - v_5$ , maka dapat dibentuk lintasan pelangi melewati titik  $v_6$ , sedangkan untuk  $i = 2$  dengan lintasan  $v_2 - v_6$ , maka dapat dibentuk lintasan pelangi melewati titik  $v_1$ , terbukti setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda, sehingga diperoleh  $rc(G) \leq 2$ . Jadi terbukti untuk  $4 \leq n \leq 6$  maka  $rc(G) = 2$ .

c. Jika  $n \geq 7$  maka  $rc(G) = 3$

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Bila lewat titik  $v_7, v_6$  dan  $v_5$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_7, v_6, v_5, v_4$ . Namun karena dengan melewati titik  $u$  yang menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$  merupakan lintasan terpendek, maka sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2. Lalu misalnya untuk

lintasan sikel diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Sedangkan lintasan yang melewati titik  $u$ , sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 1 dengan  $i$  ganjil dan sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 2 dengan  $i$  genap, maka pada lintasan  $v_3$  ke  $v_7$ , lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  tidak terdapat lintasan pelangi. Sehingga haruslah lintasan sikel diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Lalu sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2, selanjutnya sisi  $(v_5, u)$  diberi warna 3. Ini akan membuat lintasan  $v_1$  ke  $v_4$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  menjadi lintasan pelangi. Pada sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 3 maka lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  merupakan lintasan pelangi. Lalu sisi  $(v_7, u)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 1 membuat lintasan  $v_3$  ke  $v_7$  menjadi lintasan pelangi. Sehingga dibutuhkan minimal 3 warna yang berbeda untuk membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(W_7) = 3$ .

2. Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*)

Jika  $n \geq 4$  maka  $rvc(W_n) = 1$

Akan dibuktikan  $rvc(W_n) \geq 1$  dan  $rvc(W_n) \leq 1$ .

Diketahui  $diam(W_n) = 2$ , sehingga  $rvc(W_n) \geq 2 - 1 = 1$ .

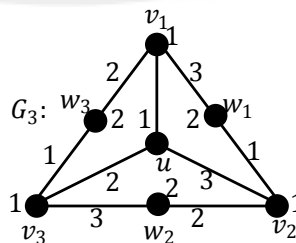
Untuk membuktikan  $rvc(W_n) \leq 1$ , maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil  $rvc(W_n) = 1$ , misalkan ada fungsi pewarnaan  $c: V(W_n) \rightarrow \{1\}$  maka:

$c(u) = 1$ , sehingga setiap lintasan  $v_i - v_j$  akan melewati titik interior  $u$  dimana  $c(u) = 1$ , sedangkan setiap lintasan  $v_i - u$  tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti  $rvc(W_n) \leq 1$ . Karena  $rvc(W_n) \geq 1$  dan  $rvc(W_n) \leq 1$ , maka  $rvc(W_n) = 1$ .

### 3.3 Garaf Gear

Graf gear  $G_n$  merupakan graf roda dengan tambahan satu titik di antara tiap-tiap pasangan titik pada siklus luar. Graf gear  $G_n$  memiliki  $2n$  titik pada siklus luarnya dan satu titik pada pusatnya sehingga banyaknya titik pada  $G_n$  adalah  $2n + 1$ . Graf gear  $G_n$  memuat graf roda  $W_n$  yang memiliki  $2n$  sisi ditambah  $n$  sisi yang terbentuk dari penambahan satu titik di antara tiap-tiap pasangan titik pada siklus luar sehingga banyaknya sisi pada  $G_n$  adalah  $3n$ .

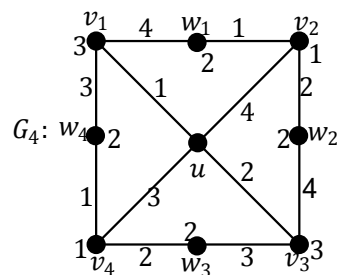
Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf roda dapat ditentukan dengan menentukan terlebih dahulu  $rc(G_n)$  dan  $rvc(G_n)$  pada graf  $G_3$ , graf  $W_4$ , graf  $W_5$ , graf  $W_6$ , dan graf  $W_7$  dan terakhir menggambar pola warna pada graf  $W_n$  agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung.



Gambar 3.11 Graf gear  $G_3$

Graf gear  $G_3$  terdiri dari 7 titik dan 9 sisi, itu diperoleh dari tambahan titik pada sisi-sisi luar graf  $G_3$ . Ambil lintasan  $v_3$  ke  $w_1$ , melalui lintasan manapun lintasan ini mempunyai panjang 3 sisi, sehingga dibutuhkan minimal dibutuhkan 3 warna yang berbeda. Misal beri warna lintasan  $v_3$  ke  $w_1$  yang melewati titik  $w_3$  dan  $v_1$  dengan, sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 1, sisi  $(w_3, v_1)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 3, maka dengan menggunakan cara yang sama dalam memberi warna pada lintasan  $w_1$  ke  $v_3$  yang melewati titik  $v_1$  dan  $w_2$ , sisi sikel akan mendapat pelangi sisi terhubung. Lalu untuk membuat pelangi sisi terhubung semuanya, sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 3, dan sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2, sehingga terbukti dengan 3 warna dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(G_3) = 3$ .

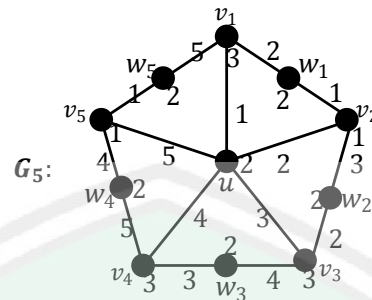
Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $G_3$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan dua warna titik. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_2$ , lewat lintasan manapun, lintasan ini akan melewati 2 titik. misal lewat titik  $w_1$  dan  $v_2$ , maka dengan memberi warna 1 pada titik  $w_1$  dan warna 2 pada titik  $v_2$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(G_3) = 2$ .



Gambar 3.12 Graf gear  $G_4$

Graf gear  $G_4$  terdiri dari 9 titik dan 12 sisi. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_3$ , lewat lintasan manapun, panjang lintasan ini adalah 4 sisi, sehingga dibutuhkan minimal 4 warna yang berbeda. Misal ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati  $v_2, w_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan itu menjadi  $w_1, v_2, w_2, v_3, w_3$ . Beri warna 1 pada sisi  $(w_1, v_2)$ , warna 2 pada sisi  $(v_2, w_2)$ , warna 4 pada sisi  $(w_2, v_3)$ , dan warna 3 pada sisi  $(v_3, w_3)$ , sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati  $v_2, w_2$  dan  $v_3$  menjadi lintasan pelangi. Dengan menggunakan cara yang sama pada lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati  $v_1, w_4$  dan  $v_4$ , maka sisi sikel menjadi lintasan pelangi. Lalu misalkan sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, maka akan terbentuk pelangi sisi terhubung pada graf gear  $G_4$ . Jadi terbukti bahwa  $rc(G_4) = 4$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $G_4$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan 3 warna titik. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_3$ , lewat lintasan manapun, lintasan ini akan melewati 3 titik. misal lewat titik  $v_2, w_2$  dan  $v_3$ , maka dengan memberi warna 1 pada titik  $v_2$  dan warna 2 pada titik  $w_2$  dan warna 3 pada titik  $v_3$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rv(G_4) = 3$ .

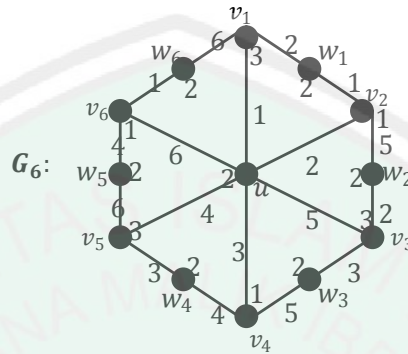
Gambar 3.13 Graf gear  $G_5$ 

Graf gear  $G_5$  terdiri dari 11 titik dan 15 sisi. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_3$ , lintasan ini mempunyai panjang minimal 4 sisi yaitu ketika lewat titik  $v_2$ , titik  $w_2$ , dan titik  $v_3$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, w_2, v_3, w_3$ . Selanjutnya melewati titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_3$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_3, w_3$ . Lalu melewati titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_3, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_3$ . Dan yang terakhir adalah melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_3$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_3, w_3$ . Sehingga dibutuhkan minimal 4 atau lebih warna yang berbeda. Asumsikan dengan 4 warna dapat membuat pelangi sisi terhubung. Misal lintasan  $w_1, v_2, u, v_3, w_3$  diberi warna 1-4 pada setiap sisi-sisinya, yaitu sisi  $(w_1, v_2)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4. Karena sisi  $(w_1, v_2)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, maka sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_2, w_3)$  diberi warna 2. Sehingga membuat lintasan  $w_1, v_2, u, v_3, w_3$  dan lintasan  $w_1, v_2, w_2, v_3, w_3$  menjadi lintasan pelangi sisi terhubung. Selanjutnya karena sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, maka sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_1, v_1, u, v_3, w_4$  menjadi

lintasan pelangi terhubung. Karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4 dan sisi  $(v_4, w_3)$  diberi warna 3 agar terbentuk lintasan pelangi pada lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_3$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, dan  $(u, v_4)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  haruslah diberi warna 1. Sehingga terdapat lintasan pelangi pada lintasan  $w_2$  ke  $w_4$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, dan  $(u, v_1)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_1, w_5)$  haruslah diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_2$  ke  $w_5$  menjadi lintasan pelangi. Lalu untuk membuat lintasan pelangi pada lintasan  $w_3$  ke  $w_5$  haruslah sisi  $(v_5, w_4)$  diberi warna 4 dan sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 2, karena sisi  $(v_4, w_3)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 1. Lalu pada lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , karena sisi  $(v_2, w_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_5, w_4)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_5, u)$  diberi warna 3. Sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Namun ini membuat lintasan  $v_3$  ke  $v_5$  bukan merupakan lintasan pelangi. Sehingga haruslah  $(v_5, u)$  diberi warna 5 agar menjadi lintasan pelangi. Jadi terbukti bahwa dengan menggunakan 5 warna berbeda membuat graf gear  $G_5$  menjadi pelangi sisi terhubung. Oleh karena itu  $rc(G_5) = 5$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $G_5$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan 3 warna titik. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_3$ , lintasan ini akan melewati 3 titik. misal lewat titik  $v_2, u$  dan  $v_3$ , maka dengan memberi warna 1

pada titik  $v_2$  dan warna 2 pada titik  $u$  dan warna 3 pada titik  $v_3$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(G_5) = 3$ .



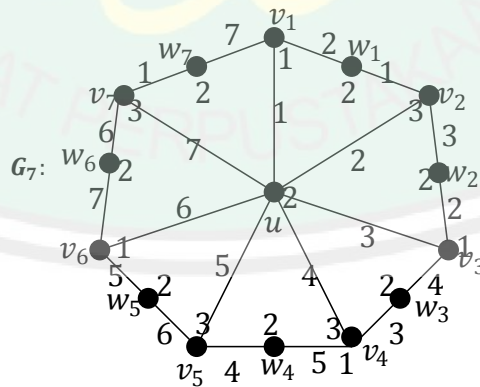
Gambar 3.14 Graf gear  $G_6$

Graf gear  $G_6$  terdiri dari 13 titik dan 18 sisi. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , lintasan ini mempunyai panjang minimal 4 sisi yaitu ketika lewat titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_5$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_5, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Dan yang terakhir melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_5$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_5, w_4$ . Asumsikan dengan 4 warna dapat membuat pelangi sisi terhubung. Misal lintasan  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$  diberi warna 1-4 pada setiap sisi-sisinya, yaitu sisi  $(w_1, v_2)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4. Karena sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4, maka sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga membuat lintasan  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$  dan lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  menjadi lintasan pelangi. Karena  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, maka sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 4 dan sisi  $(v_4, w_5)$  diberi warna 3 sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$

menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_3, w_4)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_1, w_6)$  diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  ( $w_3, v_4, u, v_1, w_6$ ) menjadi lintasan pelangi. Lalu karena sisi  $(v_3, w_4)$  diberi warna 2, sisi sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_1, w_6)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  ( $w_3, v_4, u, v_6, w_6$ ) menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_3, w_4)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3 dan sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  menjadi lintasan pelangi. Karena sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3,  $(u, v_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 1, namun ini membuat lintasan  $v_3$  ke  $w_1$  bukan merupakan lintasan pelangi. Sehingga 4 warna tidak dapat membuat lintasan pelangi. Selanjutnya misalnya dengan 6 warna akan dibuktikan dapat membuat lintasan pelangi. Beri warna 1 s/d 6 pada sisi  $(u, v_1)$  s/d sisi  $(u, v_6)$ . Karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 5, dan sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5, dan sisi  $(v_5, w_4)$  diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 5, dan sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 6, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 2, sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 6, dan sisi  $(v_6, w_5)$  diberi warna 5. Sehingga membuat

lintasan  $w_2$  ke  $w_5$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4, dan sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 6, maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, sisi  $(v_4, w_3)$  diberi warna 3, sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_1, w_6)$  diberi warna 6. Sehingga lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  menjadi lintasan pelangi. Dan ini juga membuat semua lintasan menjadi lintasan pelangi. Sehingga terbukti dengan 6 warna yang berbeda dapat membuat lintasan pelangi. Oleh karena itu  $rc(G_6) = 6$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $G_6$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan 3 warna titik. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , lintasan ini akan melewati 3 titik. misal lewat titik  $v_2, u$  dan  $v_3$ , maka dengan memberi warna 1 pada titik  $v_2$  dan warna 2 pada titik  $u$  dan warna 3 pada titik  $v_3$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(G_6) = 3$ .



Gambar 3.15 Graf gear  $G_7$

Graf gear  $G_7$  terdiri dari 15 titik dan 21 sisi. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , lintasan ini mempunyai panjang minimal 4 sisi yaitu ketika lewat titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$ . Lalu melewati titik

$v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_5$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_5, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Dan yang terakhir melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_5$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_5, w_4$ . Asumsikan dengan 4 warna dapat membuat pelangi sisi terhubung. Misal lintasan  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$  diberi warna 1-4 pada setiap sisi-sisinya, yaitu sisi  $(w_1, v_2)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4. Karena sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4, maka sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga membuat lintasan  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$  dan lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  menjadi lintasan pelangi. Karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, maka sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 4 dan sisi  $(v_4, w_5)$  diberi warna 3 sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 4, dan sisi  $(v_4, w_5)$  diberi warna 3, maka haruslah sisi  $(v_1, w_7)$  diberi warna 2 agar lintasan  $w_4$  ke  $w_7$  ( $w_4, v_5, u, v_1, w_7$ ) menjadi lintasan pelangi. Namun ini membuat sisi  $w_1$  ke  $w_7$  bukan merupakan lintasan pelangi. Sehingga 4 warna tidak dapat membuat lintasan pelangi. Selanjutnya misalkan dengan 7 warna akan dibuktikan dapat membuat lintasan pelangi. Beri warna 1 s/d 7 pada sisi  $(u, v_1)$  s/d sisi  $(u, v_7)$ . Karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 5, dan sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5, dan sisi  $(v_5, w_4)$  diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, sisi

$(u, v_3)$  diberi warna 3, sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 6, dan sisi  $(u, v_7)$  diberi warna 7, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 2, sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 7, dan sisi  $(v_7, w_6)$  diberi warna 7. Sehingga membuat lintasan  $w_2$  ke  $w_6$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_7)$  diberi warna 7, dan sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, sisi  $(v_4, w_3)$  diberi warna 3, sisi  $(v_7, w_7)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_1, w_7)$  diberi warna 7. Sehingga membuat lintasan  $w_3$  ke  $w_7$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 5, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 6, dan sisi  $(v_6, w_5)$  diberi warna 5. Sehingga membuat lintasan  $w_1$  ke  $w_5$  menjadi lintasan pelangi. Dari uraian diatas membuktikan bahwa dengan memberikan 7 warna yang berbeda terbukti bahwa apat membuat lintasan pelangi. Oleh karena itu  $rc(G_7) = 7$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $G_7$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan 3 warna titik. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , lintasan ini akan melewati 3 titik. misal lewat titik  $v_2, u$  dan  $v_3$ , maka dengan memberi warna 1 pada titik  $v_2$  dan warna 2 pada titik  $u$  dan warna 3 pada titik  $v_3$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(G_7) = 3$

Tabel 3.3 Pola Bilangan  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada  $G_1$  sampai  $G_n$ 

No	Jenis Graf	$rc(G)$	$rvc(G)$
1	$G_3$	3	2
2	$G_4$	4	3
3	$G_5$	5	3
4	$G_6$	6	3
5	$G_7$	7	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$G_n$	$n$	2 jika $n = 3$ 3 jika $n \geq 4$

Dari pola yang ditunjukkan oleh bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) di atas dapat diperoleh teorema sebagai berikut:

### Teorema 3

Graf  $G$  adalah graf gear  $G_n$  dengan  $n \in \mathbb{N}$ , maka bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rc(G_n) = n \text{ untuk } n \geq 3$$

Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rvc(G_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 3 \\ 3, & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

### Bukti :

Graf gear  $G_n$  merupakan graf roda  $W_n$  dengan tambahan satu titik di antara tiap-tiap pasangan titik pada sikel luar. Misalkan  $v \in V(G_n) = v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_n, w_n, v_{n+1} (= v_1)$  dan  $u \in V(G_n)$  serta semua  $v$  terhubung langsung dengan  $u$ .

1. Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G_n$

a. Jika  $n = 3$  maka  $rc(G_n) = 3$

Ambil lintasan  $v_3$  ke  $w_1$ , melalui lintasan manapun lintasan ini mempunyai panjang 3 sisi, sehingga dibutuhkan minimal dibutuhkan 3 warna yang berbeda. Misal beri warna lintasan  $v_3$  ke  $w_1$  yang melewati titik  $w_3$  dan  $v_1$  dengan, sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 1, sisi  $(w_3, v_1)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 3, maka dengan menggunakan cara yang sama dalam memberi warna pada lintasan  $w_1$  ke  $v_3$  yang melewati titik  $v_1$  dan  $w_2$ , sisi siklus akan mendapat pelangi sisi terhubung. Lalu untuk membuat pelangi sisi terhubung semuanya, sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 3, dan sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2, sehingga terbukti dengan 3 warna dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(G_3) = 3$ .

b. Jika  $n = 4$  maka  $rc(G_n) = 4$

Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_3$ , lewat lintasan manapun, panjang lintasan ini adalah 4 sisi, sehingga dibutuhkan minimal 4 warna yang berbeda. Misal ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati  $v_2, w_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan itu menjadi  $w_1, v_2, w_2, v_3, w_3$ . Beri warna 1 pada sisi  $(w_1, v_2)$ , warna 2 pada sisi  $(v_2, w_2)$ , warna 4 pada sisi  $(w_2, v_3)$ , dan warna 3 pada sisi  $(v_3, w_3)$ , sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati  $v_2, w_2$  dan  $v_3$  menjadi lintasan pelangi. Dengan menggunakan cara yang sama pada lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati  $v_1, w_4$  dan  $v_4$ , maka sisi siklus menjadi lintasan pelangi. Lalu misalkan sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi

$(u, v_2)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, maka akan terbentuk pelangi sisi terhubung pada graf gear  $G_4$ .

Jadi terbukti bahwa  $rc(G_4) = 4$ .

c. Jika  $n = 5$  maka  $rc(G_n) = 5$

Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_3$ , lintasan ini mempunyai panjang minimal 4 sisi yaitu ketika lewat titik  $v_2$ , titik  $w_2$ , dan titik  $v_3$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, w_2, v_3, w_3$ . Selanjutnya melewati titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_3$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_3, w_3$ . Lalu melewati titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_3, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_3$ . Dan yang terakhir adalah melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_3$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_3, w_3$ . Sehingga dibutuhkan minimal 4 atau lebih warna yang berbeda. Asumsikan dengan 4 warna dapat membuat pelangi sisi terhubung. Misal lintasan  $w_1, v_2, u, v_3, w_3$  diberi warna 1-4 pada setiap sisi-sisinya, yaitu sisi  $(w_1, v_2)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4. Karena sisi  $(w_1, v_2)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, maka sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_2, w_3)$  diberi warna 2. Sehingga membuat lintasan  $w_1, v_2, u, v_3, w_3$  dan lintasan  $w_1, v_2, w_2, v_3, w_3$  menjadi lintasan pelangi sisi terhubung. Selanjutnya karena sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, maka sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2.

Sehingga lintasan  $w_1, v_1, u, v_3, w_4$  menjadi lintasan pelangi terhubung. Karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4 dan sisi  $(v_4, w_3)$  diberi warna 3 agar terbentuk lintasan pelangi pada lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_3$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, dan  $(u, v_4)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  haruslah diberi warna 1. Sehingga terdapat lintasan pelangi pada lintasan  $w_2$  ke  $w_4$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, dan  $(u, v_1)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_1, w_5)$  haruslah diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_2$  ke  $w_5$  menjadi lintasan pelangi. Lalu untuk membuat lintasan pelangi pada lintasan  $w_3$  ke  $w_5$  haruslah sisi  $(v_5, w_4)$  diberi warna 4 dan sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 2, karena sisi  $(v_4, w_3)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 1. Lalu pada lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , karena sisi  $(v_2, w_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_5, w_4)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_5, u)$  diberi warna 3. Sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Namun ini membuat lintasan  $v_3$  ke  $v_5$  bukan merupakan lintasan pelangi. Sehingga haruslah  $(v_5, u)$  diberi warna 5 agar menjadi lintasan pelangi. Jadi terbukti bahwa dengan menggunakan 5 warna berbeda membuat graf gear  $G_5$  menjadi pelangi sisi terhubung. Oleh karena itu  $rc(G_5) = 5$ .

d. Jika  $n = 6$  maka  $rc(G_n) = 6$

Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , lintasan ini mempunyai panjang minimal 4 sisi yaitu ketika lewat titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_5$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_5, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Dan yang terakhir melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_5$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_5, w_4$ . Asumsikan dengan 4 warna dapat membuat pelangi sisi terhubung. Misal lintasan  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$  diberi warna 1-4 pada setiap sisi-sisinya, yaitu sisi  $(w_1, v_2)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4. Karena sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4, maka sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga membuat lintasan  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$  dan lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  menjadi lintasan pelangi. Karena  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, maka sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 4 dan sisi  $(v_4, w_5)$  diberi warna 3 sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_3, w_4)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_1, w_6)$  diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  ( $w_3, v_4, u, v_1, w_6$ ) menjadi lintasan pelangi. Lalu karena sisi  $(v_3, w_4)$  diberi warna 2, sisi sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna

3, dan sisi  $(v_1, w_6)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  ( $w_3, v_4, u, v_6, w_6$ ) menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_3, w_4)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3 dan sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  menjadi lintasan pelangi. Karena sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3,  $(u, v_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 4, maka haruslah sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 1, namun ini membuat lintasan  $v_3$  ke  $w_1$  bukan merupakan lintasan pelangi. Sehingga 4 warna tidak dapat membuat lintasan pelangi. Selanjutnya misalnya dengan 6 warna akan dibuktikan dapat membuat lintasan pelangi. Beri warna 1 s/d 6 pada sisi  $(u, v_1)$  s/d sisi  $(u, v_6)$ . Karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 5, dan sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5, dan sisi  $(v_5, w_4)$  diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 5, dan sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 6, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 2, sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 6, dan sisi  $(v_6, w_5)$  diberi warna 5. Sehingga membuat lintasan  $w_2$  ke  $w_5$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4,

dan sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 6, maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, sisi  $(v_4, w_3)$  diberi warna 3, sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_1, w_6)$  diberi warna 6. Sehingga lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  menjadi lintasan pelangi. Dan ini juga membuat semua lintasan menjadi lintasan pelangi. Sehingga terbukti dengan 6 warna yang berbeda dapat membuat lintasan pelangi. Oleh karena itu  $rc(G_6) = 6$ .

e. Jika  $n = 7$  maka  $rc(G_n) = 7$

Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , lintasan ini mempunyai panjang minimal 4 sisi yaitu ketika lewat titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_2$ , titik  $u$ , dan titik  $v_5$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_2, u, v_5, w_4$ . Lalu melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Dan yang terakhir melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_5$  yang membuat lintasan menjadi  $w_1, v_1, u, v_5, w_4$ . Asumsikan dengan 4 warna dapat membuat pelangi sisi terhubung. Misal lintasan  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$  diberi warna 1-4 pada setiap sisi-sisinya, yaitu sisi  $(w_1, v_2)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4. Karena sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4, maka sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga membuat lintasan  $w_1, v_2, u, v_4, w_4$  dan lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  menjadi lintasan pelangi. Karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 3, maka sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 4 dan sisi  $(v_4, w_5)$

diberi warna 3 sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 4, dan sisi  $(v_4, w_5)$  diberi warna 3, maka haruslah sisi  $(v_1, w_7)$  diberi warna 2 agar lintasan  $w_4$  ke  $w_7$  ( $w_4, v_5, u, v_1, w_7$ ) menjadi lintasan pelangi. Namun ini membuat sisi  $w_1$  ke  $w_7$  bukan merupakan lintasan pelangi. Sehingga 4 warna tidak dapat membuat lintasan pelangi. Selanjutnya misalkan dengan 7 warna akan dibuktikan dapat membuat lintasan pelangi. Beri warna 1 s/d 7 pada sisi  $(u, v_1)$  s/d sisi  $(u, v_7)$ . Karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 5, dan sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5, dan sisi  $(v_5, w_4)$  diberi warna 4. Sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, sisi  $(u, v_6)$  diberi warna 6, dan sisi  $(u, v_7)$  diberi warna 7, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, sisi  $(v_3, w_2)$  diberi warna 2, sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 7, dan sisi  $(v_7, w_6)$  diberi warna 7. Sehingga membuat lintasan  $w_2$  ke  $w_6$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 3, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_7)$  diberi warna 7, dan sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, sisi  $(v_4, w_3)$  diberi warna 3, sisi  $(v_7, w_7)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_1, w_7)$  diberi warna 7. Sehingga membuat lintasan  $w_3$  ke  $w_7$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna

4, sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 5, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_1)$  diberi warna 1, sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 6, dan sisi  $(v_6, w_5)$  diberi warna 5. Sehingga membuat lintasan  $w_1$  ke  $w_5$  menjadi lintasan pelangi. Dari uraian diatas membuktikan bahwa dengan memberikan 7 warna yang berbeda terbukti bahwa dapat membuat lintasan pelangi. Oleh karena itu  $rc(G_7) = 7$ .

Atau misalkan fungsi pewarnaan sisi  $c: E(G_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , didefinisikan oleh  $c(v_i, u) = 1, 2, \dots, n$  secara berputar. Kemudian  $c(v_i, w_i) = i + 1$  jika  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , dan  $c(v_i, w_i) = 1$  jika  $i = n$ . kemudian  $c(w_i, v_{i+1}) = (i + 1) - 1$  jika  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  dan  $c(w_i, v_{i+1}) = n$  jika  $i = n$ . Sehingga terbukti dengan  $n$  warna yang berbeda dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(G_n) = n$ .

2. Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $G_n$

a. Jika  $n = 3$  maka  $rvc(G_n) = 2$

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_2$ , lewat lintasan manapun, lintasan ini akan melewati 2 titik. misal lewat titik  $w_1$  dan  $v_2$ , maka dengan memberi warna 1 pada titik  $w_1$  dan warna 2 pada titik  $v_2$  akan membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(G_3) = 2$ .

b. Jika  $n \geq 4$  maka  $rvc(G_n) = 3$

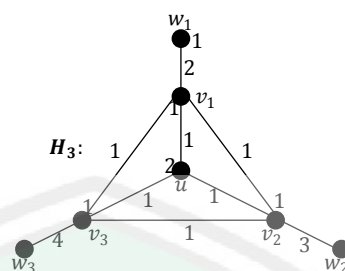
Untuk membuktikan  $rvc(G_n) = 3$ , maka akan dibuktikan bahwa dengan 3 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung,

artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil  $rvc(G_n) = 3$ , misalkan ada fungsi pewarnaan  $c: V(G_n) \rightarrow \{1,2,3\}$  maka:  $c(u) = 2$ ,  $c(v_i) = 1$  dengan  $i$  genap,  $c(v_i) = 3$  dengan  $i$  ganjil, dan  $c(w_i) = 2$ . Sehingga  $c$  dapat membuat pelangi titik terhubung, oleh karena itu terbukti bahwa  $rvc(G_n) = 3$ .

### 3.4 Graf Helm

Graf helm  $H_n$  adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik pada siklus luarnya. Graf helm  $H_n$  memuat graf roda  $W_n$  dengan  $n + 1$  titik ditambah  $n$  titik lagi yang diperoleh dari penambahan sisi anting-anting pada setiap titik pada siklus luar, sehingga banyaknya titik pada  $H_n$  adalah  $2n + 1$ . Graf helm  $H_n$  memuat graf roda  $W_n$  yang memiliki  $2n$  sisi ditambah  $n$  sisi yang terbentuk dari penambahan satu sisi anting-anting pada setiap titik pada siklus luar sehingga banyaknya sisi pada  $H_n$  adalah  $3n$ .

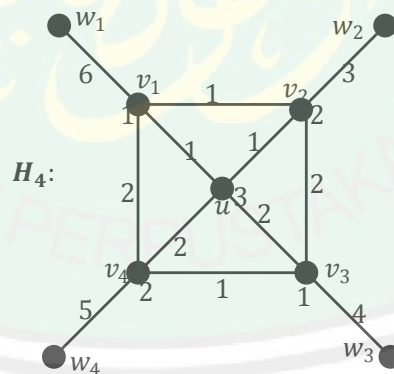
Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf Helm dapat ditentukan dengan menentukan terlebih dahulu  $rc(H_n)$  dan  $rvc(H_n)$  pada graf  $H_3, H_4, H_5, H_6$  dan  $H_7$  dan terakhir menggambar pola warna pada graf  $H_n$  agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung.

Gambar 3.16 Graf helm  $H_3$ 

Graf helm  $H_3$  mempunyai 9 sisi dan 7 titik. Graf helm  $H_3$  adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik pada siklus luarnya. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Namun karena lintasan dapat langsung terhubung dari  $v_1$  ke  $v_3$  tanpa melalui  $u$  atau  $v_2$ , maka sisi  $(v_1, v_3)$  diberi warna 1. sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3$  atau  $v_1, u, v_3$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada sisi  $(v_1, v_2)$ , sisi  $(v_2, v_3)$ , dan sisi  $(u, v)$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, maka sisi  $(v_1, w_1)$  haruslah diberi warna 1 agar terbentuk lintasan pelangi pada lintasan  $w_1$  ke  $v_2$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 1, maka untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_1$  ke  $w_2$  maka sisi  $(v_2, w_2)$  haruslah diberi warna 3. Lalu untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , karena sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3. Atau dengan cara lain, sisi-sisi dari graf helm  $H_3$  dapat dikelompokkan sebagai berikut (i) sisi graf roda  $W_3$ , dan (ii) sisi jari-jari. Awalnya beri warna sisi graf roda  $W_3$  sesuai dengan warna pada graf roda  $W_3$  yaitu 1. Yang kedua untuk sisi jari-jari agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung pada graf  $H_3$ , di mana setiap antara dua titik

terdapat lintasan dengan warna berbeda maka dibutuhkan minimal 3 warna sisi yang berbeda, sehingga  $rc(H_3) = 4$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $H_3$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan dua warna titik. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_2$ , bila lewat titik  $u$  dan titik  $v_2$  maka lintasan menjadi  $v_1, u, v_2, w_2$ . Karena dapat dilewati langsung dengan hanya melewati titik  $v_2$  tanpa melewati titik  $u$  yang membuat lintasan menjadi  $v_1, v_2, w_2$ , maka titik  $v_2$  diberi warna 1. Dengan cara yang sama digunakan pada lintasan  $v_1, v_3, w_3$  dan lintasan  $v_3, v_2, w_2$ . Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $H_3$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda maka titik  $u$  diberi warna 2. Jadi terbukti bahwa  $rvc(H_3) = 2$ .

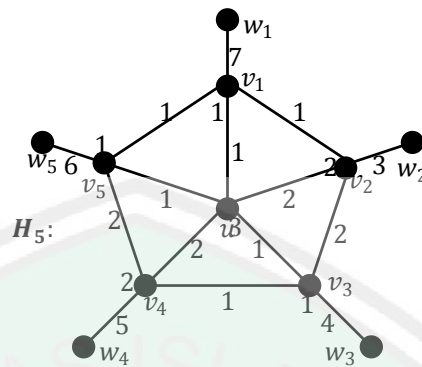


Gambar 3.17 Graf helm  $H_4$

Graf helm  $H_4$  mempunyai 12 sisi dan 9 titik. Graf helm  $H_4$  adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik pada siklus luarnya. Sisi-sisi dari graf helm  $H_4$  dapat dikelompokkan sebagai berikut (i) sisi graf roda  $W_4$ , dan (ii) sisi jari-jari. Awalnya warnai sisi graf roda  $W_4$  sesuai dengan pewarnaan pada graf roda  $W_4$ . Karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna

1, dan sisi  $(v_3, v_2)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3 sehingga terdapat lintasan pelangi pada lintasan  $w_2$  ke  $v_2$  dan lintasan  $w_2$  ke  $v_1$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , karena sisi  $(v_3, v_2)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1, maka untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4. Selanjutnya pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ , karena sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_2, v_4)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5 agar terbentuk pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ . Jadi untuk sisi anting baru, agar terbentuk pelangi sisi terhubung haruslah diberi warna sesuai dengan jumlah sisi tambahannya, sehingga ketika sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 6 maka akan terbentuk pelangi sisi terhubung pada graf helm  $H_4$ . Jadi terbukti bahwa  $rc(H_4) = 6$ .

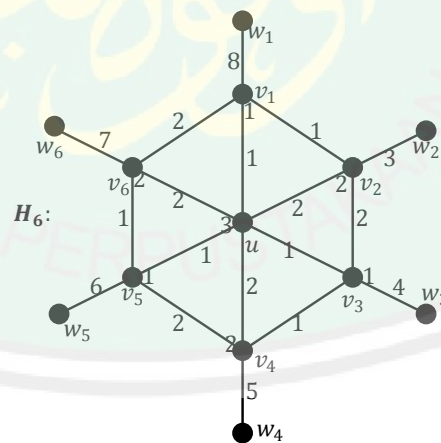
Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $H_4$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan tiga warna titik berbeda. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_2$  tanpa melewati titik  $u$ , lintasan ini melewati 2 titik yaitu titik  $v_1$  dan  $v_2$ , sehingga titik  $v_1$  diberi warna 1, dan titik  $v_2$  diberi warna 2. Dengan cara yang sama digunakan pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ . Kemudian agar dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, maka titik  $u$  diberi warna 3. Jadi terbukti bahwa  $rvc(H_4) = 3$ .

Gambar 3.18 Graf helm  $H_5$ 

Graf helm  $H_5$  mempunyai 15 sisi dan 11 titik. Graf helm  $H_5$  adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik pada siklus luarnya. Sisi-sisi dari graf helm  $H_5$  dapat dikelompokkan sebagai berikut (i) sisi graf roda  $W_5$ , dan (ii) sisi jari-jari. Awalnya warnai sisi graf roda  $W_5$  sesuai dengan pewarnaan pada graf roda  $W_5$ . Karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_3, v_2)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3 sehingga terdapat lintasan pelangi pada lintasan  $w_2$  ke  $v_3$  dan lintasan  $w_2$  ke  $v_1$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , karena sisi  $(v_3, v_2)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1, maka untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4. Selanjutnya pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ , karena sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_2, v_4)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5 agar terbentuk pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_4$  ke  $w_5$ , karena sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5, sisi  $(v_4, v_5)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_1, v_5)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 6 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Selanjutnya ambil lintasan  $w_5$  ke  $w_1$ , karena sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 6, sisi  $(v_5, v_1)$  diberi warna 1,

dan sisi sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 7 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Jadi untuk sisi anting baru, agar terbentuk pelangi sisi terhubung haruslah diberi warna sesuai dengan jumlah sisi tambahannya. Jadi terbukti bahwa  $rc(H_5) = 7$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $H_5$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan tiga warna titik berbeda. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_2$  tanpa melewati titik  $u$ , lintasan ini melewati 2 titik yaitu titik  $v_1$  dan  $v_2$ , sehingga titik  $v_1$  diberi warna 1, dan titik  $v_2$  diberi warna 2. Dengan cara yang sama digunakan pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ . Kemudian agar dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, maka titik  $u$  diberi warna 3. Jadi terbukti bahwa  $rvc(H_5) = 3$ .



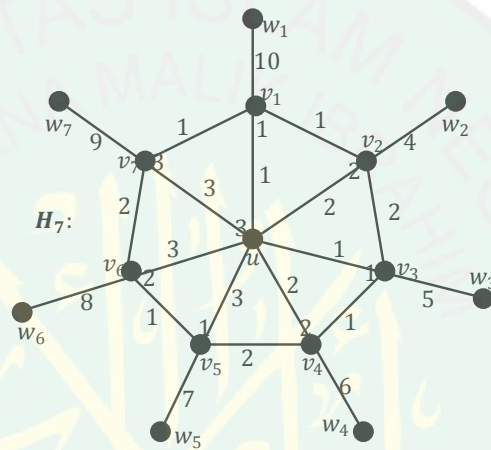
Gambar 3.19 Graf helm  $H_6$

Graf helm  $H_6$  mempunyai 18 sisi dan 13 titik. Graf helm  $H_6$  adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik pada siklus luarnya. Sisi-sisi dari graf helm  $H_6$  dapat dikelompokkan sebagai berikut (i) sisi graf roda  $W_6$ , dan (ii) sisi jari-jari. Awalnya warnai sisi graf roda

$W_6$  sesuai dengan pewarnaan pada graf roda  $W_6$ . Selanjutnya Karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_3, v_2)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3 sehingga terdapat lintasan pelangi pada lintasan  $w_2$  ke  $v_3$  dan lintasan  $w_2$  ke  $v_1$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , karena sisi  $(v_3, v_2)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1, maka untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4. Selanjutnya pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ , karena sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 4, sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_5, v_4)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5 agar terbentuk pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_4$  ke  $w_5$ , karena sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 5, sisi  $(v_4, v_5)$  diberi warna 2, dan sisi sisi  $(v_6, v_5)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 6 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Selanjutnya ambil lintasan  $w_5$  ke  $w_6$ , karena sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 6, sisi  $(v_5, v_6)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_1, v_6)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 7 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Selanjutnya ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_6$ , karena sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 7, sisi  $(v_1, v_6)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 8 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Jadi untuk sisi anting baru, agar terbentuk pelangi sisi terhubung haruslah diberi warna sesuai dengan jumlah sisi tambahannya. Jadi terbukti bahwa  $rc(H_6) = 8$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $H_6$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan tiga warna titik berbeda. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_2$  tanpa

melewati titik  $u$ , lintasan ini melewati 2 titik yaitu titik  $v_1$  dan  $v_2$ , sehingga titik  $v_1$  diberi warna 1, dan titik  $v_2$  diberi warna 2. Dengan cara yang sama digunakan pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ , lintasan  $w_4$  ke  $w_5$ , lintasan  $w_5$  ke  $w_6$  dan lintasan  $w_6$  ke  $w_1$ . Kemudian agar dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, maka titik  $u$  diberi warna 3. Jadi terbukti bahwa  $rvc(H_6) = 3$ .



Gambar 3.20 Graf helm  $H_7$

Graf helm  $H_7$  mempunyai 21 sisi dan 15 titik. Graf helm  $H_7$  adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik pada siklus luarnya. Sisi-sisi dari graf helm  $H_7$  dapat dikelompokkan sebagai berikut (i) sisi graf roda  $W_7$ , dan (ii) sisi jari-jari. Awalnya warnai sisi graf roda  $W_7$  sesuai dengan pewarnaan pada graf roda  $W_7$ . Selanjutnya Karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_3, v_2)$  diberi warna 2, dan sisi  $(u, v_7)$  diberi warna 3 maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 4 sehingga terdapat lintasan pelangi pada lintasan  $w_2$  ke  $v_3$ , pada lintasan  $w_2$  ke  $v_1$ , dan lintasan  $w_2$  ke  $v_7$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , karena sisi  $(v_3, v_2)$  diberi warna 2, sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 4, sisi  $(u, v_7)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1, maka untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , maka haruslah sisi

$(v_3, w_3)$  diberi warna 5. Selanjutnya pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ , karena sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 5, sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_5, v_4)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 6 agar terbentuk pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_4$  ke  $w_5$ , karena sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 6, sisi  $(v_4, v_5)$  diberi warna 2, dan sisi sisi  $(v_6, v_5)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 7 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Selanjutnya ambil lintasan  $w_5$  ke  $w_6$ , karena sisi  $(v_5, w_5)$  diberi warna 7, sisi  $(v_5, v_6)$  diberi warna 1, dan sisi sisi  $(v_7, v_6)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 8 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Selanjutnya ambil lintasan  $w_6$  ke  $w_7$ , karena sisi  $(v_6, w_6)$  diberi warna 8, sisi  $(v_7, v_6)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_1, v_7)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_7, w_7)$  diberi warna 9 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Selanjutnya ambil lintasan  $w_7$  ke  $w_1$ , karena sisi  $(v_7, w_7)$  diberi warna 9, sisi  $(v_1, v_7)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 10 agar terbentuk pelangi sisi terhubung. Jadi untuk sisi anting baru, agar terbentuk pelangi sisi terhubung haruslah diberi warna sesuai dengan jumlah sisi tambahannya. Jadi terbukti bahwa  $rc(H_7) = 10$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $H_7$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, dibutuhkan tiga warna titik berbeda. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_2$  tanpa melewati titik  $u$ , lintasan ini melewati 2 titik yaitu titik  $v_1$  dan  $v_2$ , sehingga titik  $v_1$  diberi warna 1, dan titik  $v_2$  diberi warna 2. Dengan cara yang sama digunakan pada lintasan  $w_3$  ke  $w_4$ , lintasan  $w_4$  ke  $w_5$ , lintasan  $w_5$  ke  $w_6$  dan lintasan  $w_6$  ke

$w_1$ . Kemudian agar dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, maka titik  $u$  diberi warna 3. Jadi terbukti bahwa  $rvc(H_7) = 3$ .

Tabel 3.4 Pola Bilangan  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada  $H_3$  sampai  $H_n$

No	Jenis Graf	$rc(G)$	$rvc(G)$
1	$H_3$	4	2
2	$H_4$	6	3
3	$H_5$	7	3
4	$H_6$	8	3
5	$H_7$	10	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$H_n$	$rc(W_n) + n$ untuk $n \geq 3$	2, jika $n = 3$ 3, jika $n \geq 4$

Dari pola yang ditunjukkan oleh bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) di atas dapat diperoleh teorema sebagai berikut:

#### Teorema 4

Graf  $G$  adalah graf gear  $H_n$  dengan  $n \in \mathbb{N}$ , maka bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rc(H_n) = rc(W_n) + n \text{ untuk } n \geq 3$$

Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $H_n$  adalah:

$$rvc(H_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 3 \\ 3, & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

#### Bukti:

Graf helm  $H_n$  diperoleh dari graf roda  $W_n$  dengan menambahkan sisi anting baru pada titik sikel luar graf roda, sehingga sisi-sisi anting baru itu

menyerupai pohon. Dengan demikian graf helm  $H_n$  mempunyai  $(2n + 1)$  titik dan  $(3n)$  sisi.

1. Bilangan pelangi sisi terhugung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$

a.  $rc(H_n) = rc(W_n) + n$  untuk  $n \geq 3$

$rc(H_n) = rc(W_n) + n$  untuk  $n \geq 3$ , graf ini dibagi menjadi 2 graf, yaitu graf roda dan sisi anting baru. Langkah pertama, warnai graf roda sesuai teorema 2. Sedangkan sisi anting baru, untuk memberikan warna pelangi sisi terhubung haruslah diberi warna yang berbeda sesuai dengan jumlah sisi tambahannya. Misalnya pada graf helm  $H_3$ . Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Namun karena lintasan dapat langsung terhubung dari  $v_1$  ke  $v_3$  tanpa melalui  $u$  atau  $v_2$ , maka sisi  $(v_1, v_3)$  diberi warna 1. sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3$  atau  $v_1, u, v_3$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada sisi  $(v_1, v_2)$ , sisi  $(v_2, v_3)$ , dan sisi  $(u, v)$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, maka sisi  $(v_1, w_1)$  haruslah diberi warna 1 agar terbentuk lintasan pelangi pada lintasan  $w_1$  ke  $v_2$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_1, w_1)$  diberi warna 1, maka untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_1$  ke  $w_2$  maka sisi  $(v_2, w_2)$  haruslah diberi warna 3. Lalu untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_2$  ke  $w_3$ , karena sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3. Atau dengan cara lain, sisi-sisi dari graf helm  $H_3$  dapat

dikelompokkan sebagai berikut (i) sisi graf roda  $W_3$ , dan (ii) sisi jari-jari. Awalnya beri warna sisi graf roda  $W_3$  sesuai dengan warna pada graf roda  $W_3$  yaitu 1. Yang kedua untuk sisi jari-jari agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung pada graf  $H_3$ , di mana setiap antara dua titik terdapat lintasan dengan warna berbeda maka dibutuhkan minimal 3 warna sisi yang berbeda. Jadi terbukti  $rc(H_n) = rc(W_n) + n$ .

2. Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $G$

a.  $rvc(H_n) = 3$  jika  $n = 3$

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_2$ , bila lewat titik  $u$  dan titik  $v_2$  maka lintasan menjadi  $v_1, u, v_2, w_2$ . Karena dapat dilewati langsung dengan hanya melewati titik  $v_2$  tanpa melewati titik  $u$  yang membuat lintasan menjadi  $v_1, v_2, w_2$ , maka titik  $v_2$  diberi warna 1. Dengan cara yang sama digunakan pada lintasan  $v_1, v_3, w_3$  dan lintasan  $v_3, v_2, w_2$ . Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $H_3$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda maka titik  $u$  diberi warna 2. Jadi terbukti bahwa  $rvc(H_3) = 2$ .

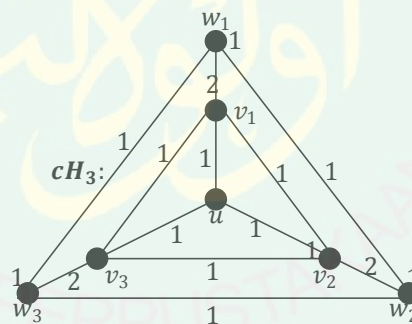
b.  $rvc(H_n) = 3$  jika  $n \geq 4$

Misalkan fungsi pewarnaan pelangi titik terhubung  $c: V(H_n) \rightarrow \{1,2,3\}$ , didefinisikan  $c(u) = 3$ ,  $c(v_i) = 1$  untuk  $i$  ganjil dan  $c(v_i) = 2$  untuk  $i$  genap, sehingga dengan tiga warna yang berbeda dapat membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(H_n) = 3$ .

### 3.5 Graf Helm Tertutup

Graf helm tertutup  $cH_n$  merupakan graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik pada anting-anting untuk membentuk sikel baru. Banyaknya titik pada  $cH_n$  sama dengan banyaknya titik pada  $H_n$  yaitu  $2n + 1$ , sedangkan banyaknya sisi pada  $cH_n$  akan bertambah  $n$  sisi sehingga banyaknya sisi pada  $cH_n$  adalah  $4n$ .

Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf Helm tertutup dapat ditentukan dengan menentukan terlebih dahulu  $rc(cH_n)$  dan  $rvc(cH_n)$  pada graf  $cH_3, cH_4, cH_5, cH_6$ , dan  $cH_7$  dan terakhir menggambar pola warna pada graf  $H_n$  agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung.

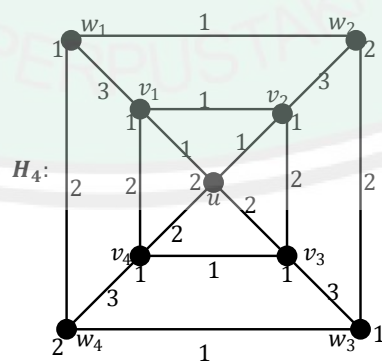


Gambar 3.21 Graf helm tertutup  $cH_3$

Graf helm  $cH_3$  mempunyai 12 sisi dan 7 titik. Graf helm tertutup  $cH_3$  merupakan graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik pada anting-anting untuk membentuk sikel baru. Graf ini memiliki 2 sikel yaitu  $C_3^1: v_1, v_2, v_3$  dan  $C_3^2: w_1, w_2, w_3$ . Yang mana titik  $v_i$  menghubungkan antara titik  $u$  ke titik  $w_i$ . Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_3$ , bila melewati titik  $u$  berarti juga melewati titik  $v_2$  maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_2, w_3$ . Karena dapat dilewati langsung

tanpa melalui titik  $u$ , yaitu hanya melalui titik  $v_2$  yang membuat lintasan menjadi  $v_1, v_2, w_3$ . Misalnya sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, maka sisi  $(v_2, w_3)$  warna 2, sehingga lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  merupakan pelangi sisi terhubung. Dengan cara yang sama diterapkan pada sisi-sisi yang lain maka akan terbentuk pelangi sisi terhubung dengan menggunakan 2 warna yang berbeda. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_3) = 2$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $cH_3$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Misalnya titik  $u$  diberi warna 1, sehingga setiap lintasan  $v_i$  ke  $v_j$  akan melewati titik  $u$  dimana titik  $u$  diberi warna 1. Sedangkan lintasan  $u$  ke  $v$  tidak ada titik interior karena terhubung langsung. walaupun lintasan  $u$  ke  $w$  melewati titik  $v$ , namun lintasan  $w_i$  ke  $w_j$  saling terhubung langsung. dengan demikian dengan 1 warna dapat membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(cH_3) = 1$ .

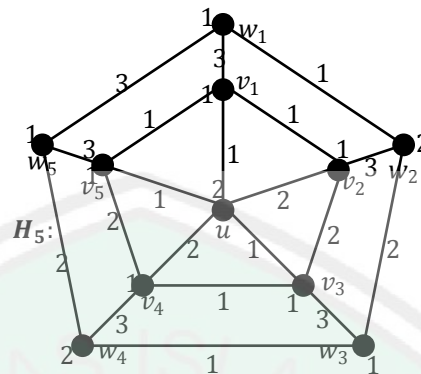


Gambar 3.22 Graf helm tertutup  $cH_4$

Graf helm  $cH_4$  mempunyai 16 sisi dan 9 titik. Graf helm tertutup  $cH_4$  merupakan graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik pada anting-anting untuk membentuk siklus baru. Graf ini memiliki 2 siklus yaitu

$C_4^1: v_1, v_2, v_3, v_4$  dan  $C_4^2: w_1, w_2, w_3, w_4$ . Yang mana titik  $v_i$  menghubungkan antara titik  $u$  ke titik  $w_i$ . Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  bila melewati titik  $u$  berarti melewati titik  $v_3$  maka lintasan menjadi  $v_1, u, v_3, w_3$ . Bila melewati titik  $v_2$  dan juga titik  $v_3$  maka lintasan menjadi  $v_1, v_2, v_3, w_3$ . Sehingga bisa dikatakan bahwa lintasan ini mempunyai panjang 3 sisi. Karena mempunyai panjang 3 sisi, maka misalnya sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_3, w_3)$  sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3, w_3$  menjadi lintasan pelangi. Dengan cara yang sama diterapkan pada sisi-sisi yang lain akan membuat pelangi sisi terhubung. Sehingga terbukti dengan menggunakan 3 warna berbeda dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_4) = 3$ .

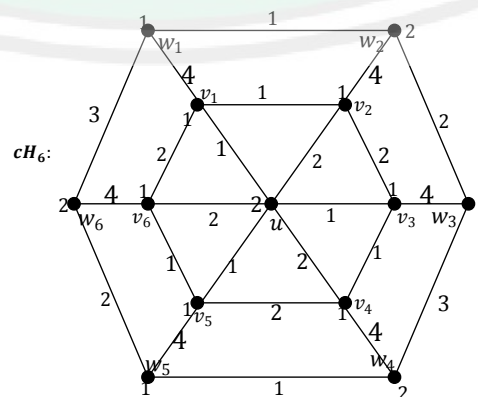
Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $cH_4$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan dua warna titik. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  yang melewati titik  $u$  dan titik  $v_3$ , misalnya titik  $u$  diberi warna 2, maka titik  $v_3$  diberi warna 1 sehingga terdapat pelangi titik terhubung pada lintasan  $v_1$  ke  $w_3$ . Selanjutnya ambil  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati titik  $w_2$ , misalnya titik  $w_2$  diberi warna 2, maka titik  $w_4$  haruslah diberi warna 2 ini akan membuat lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  menjadi lintasan pelangi. Sehingga terbukti dengan 2 warna yang berbeda dapat membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(cH_4) = 2$ .

Gambar 3.23 Graf helm tertutup  $cH_5$ 

Graf helm  $cH_5$  mempunyai 20 sisi dan 11 titik. Graf helm tertutup  $cH_5$  merupakan graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik pada anting-anting untuk membentuk siklus baru. Graf ini memiliki 2 siklus yaitu  $C_5^1: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  dan  $C_5^2: w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$ . Yang mana titik  $v_i$  menghubungkan antara titik  $u$  ke titik  $w_i$ . Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_4$  bila melewati titik  $u$  dan titik  $v_4$ , lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_4, w_4$ . Bila melewati titik  $v_5$  dan titik  $v_4$ , maka lintasan menjadi  $v_1, v_5, v_4, w_4$ . Lintasan ini bisa melewati titik lain, namun membuat lintasan menjadi lebih panjang. Sehingga bisa dikatakan lintasan ini mempunyai panjang minimal 3 sisi. Karena mempunyai panjang minimal 3 sisi, maka misalnya sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, ini akan membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $v_1, u, v_4, w_4$ . Karena sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $v_1, v_5, v_4, w_4$ , haruslah sisi  $(v_1, v_5)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_5, v_4)$  diberi warna 2. Selanjutnya karena sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, sisi  $(v_5, v_4)$  diberi warna 2, maka sisi  $(v_3, v_4)$  haruslah diberi warna 1, dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2 sehingga terdapat lintasan pelangi pada lintasan  $v_2, v_3, v_4, w_4$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1 dan sisi  $(v_2, v_3)$

diberi warna 2, maka sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3. Lalu karena sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1 sehingga lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  terdapat lintasan pelangi. Selanjutnya untuk membuat lintasan pelangi pada lintasan  $v_5$  ke  $w_2$ , sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3. Lalu untuk sisi sikel luar bisa diberi warna seperti pada teorema 1. Sehingga dengan 3 warna yang berbeda dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_5) = 3$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $cH_5$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan dua warna titik. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  yang melewati titik  $u$  dan titik  $v_3$ , misalnya titik  $u$  diberi warna 2, maka titik  $v_3$  diberi warna 1 sehingga terdapat pelangi titik terhubung pada lintasan  $v_1$  ke  $w_3$ . Selanjutnya ambil  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati titik  $w_2$ , misalnya titik  $w_2$  diberi warna 2, maka titik  $w_4$  haruslah diberi warna 2 ini akan membuat lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  menjadi lintasan pelangi. Sehingga terbukti dengan 2 warna yang berbeda dapat membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(cH_5) = 2$ .

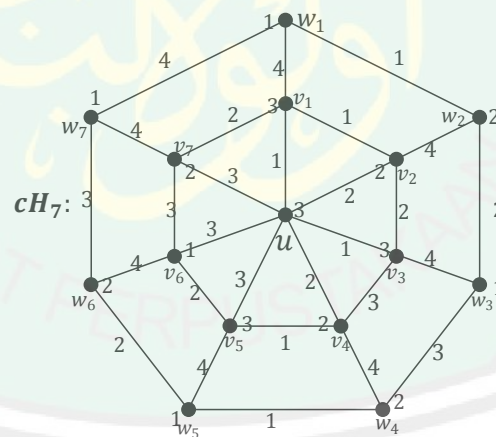


Gambar 3.24 Graf helm tertutup  $cH_6$

Graf helm  $cH_3$  mempunyai 24 sisi dan 13 titik. Graf ini memiliki 2 sikel yaitu  $C_6^1: v_1, v_2, \dots, v_6$  dan  $C_6^2: w_1, w_2, \dots, w_6$ . Awalnya ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  maka menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . karena dapat dilewati langsung melalui dua titik, yaitu titik  $w_2$  dan titik  $w_3$  menjadi lintasan  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , maka misalnya sisi  $(w_1, w_2)$  diberi warna 1, sisi  $(w_2, w_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(w_3, w_4)$  diberi warna 3. Dengan cara yang sama digunakan pada lintasan  $w_1, w_6, w_5, w_4$ . Sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan titik  $v_3$  maka lintasan menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Karena dapat dilewati langsung melalui titik  $u$  menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$ , maka misalnya sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_4, u)$  diberi warna 2. Dengan menggunakan cara yang sama pada lintasan yang berhubungan dengan titik  $u$  akan terbentuk lintasan pelangi, dimana setiap lintasan yang melewati titik  $u$  merupakan lintasan terdekat dibandingkan menggunakan lintasan sikelnya. Sedangkan untuk membuat lintasan pelangi pada sisi sikel dalam dengan memberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap, maka akan tercipta pelangi sisi terhubung. Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_4$  ( $v_1, u, v_4, w_4$ ). Karena sisi sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_4, u)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, namun ini membuat lintasan  $v_4$  ke  $w_2$  ( $v_4, w_4, w_3, w_2$ ) bukan lintasan pelangi karena mempunyai 2 sisi yang diberi warna 3, yaitu sisi  $(v_4, w_4)$  dan sisi  $(w_4, w_3)$ , jadi haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4. Dengan demikian dengan memberi warna 4 pada semua sisi  $(v_i, w_i)$  akan terbentuk pelangi sisi

terhubung. Sehingga dengan 4 warna yang berbeda dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_6) = 4$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $cH_6$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan dua warna titik. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  yang melewati titik  $u$  dan titik  $v_3$ , misalnya titik  $u$  diberi warna 2, maka titik  $v_3$  diberi warna 1 sehingga terdapat pelangi titik terhubung pada lintasan  $v_1$  ke  $w_3$ . Selanjutnya ambil  $w_1$  ke  $w_3$  yang melewati titik  $w_2$ , misalnya titik  $w_2$  diberi warna 2, maka titik  $w_4$  haruslah diberi warna 2 ini akan membuat lintasan  $w_1$  ke  $w_3$  menjadi lintasan pelangi. Sehingga terbukti dengan 2 warna yang berbeda dapat membuat pelangi titik terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rvc(cH_6) = 2$ .



Gambar 3.25 Graf helm tertutup  $cH_7$

Graf helm  $cH_3$  mempunyai 28 sisi dan 15 titik. Graf ini memiliki 2 siklus yaitu  $C_6^1: v_1, v_2, \dots, v_7$  dan  $C_6^2: w_1, w_2, \dots, w_7$ . Awalnya ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  maka menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . karena dapat dilewati langsung melalui dua titik, yaitu titik  $w_2$  dan titik  $w_3$  menjadi lintasan  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , maka misalnya sisi  $(w_1, w_2)$  diberi warna 1, sisi  $(w_2, w_3)$

diberi warna 2, dan sisi  $(w_3, w_4)$  diberi warna 3 sehingga terdapat lintasan pelangi. Selanjutnya lintasan  $w_2$  ke  $w_5$  yang melewati titik  $w_3$  dan titik  $w_4$ , karena sisi  $(w_2, w_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(w_3, w_4)$  diberi warna 3, maka haruslah sisi  $(w_4, w_5)$  diberi warna 1. Lalu lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  yang melewati titik  $w_4$  dan titik  $w_5$ , karena sisi  $(w_3, w_4)$  diberi warna 3 dan sisi  $(w_4, w_5)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(w_5, w_6)$  diberi warna 2. Selanjutnya pada lintasan  $w_4$  ke  $w_7$  yang melewati titik  $w_5$  dan titik  $w_6$ , karena sisi  $(w_4, w_5)$  diberi warna 1 dan sisi  $(w_5, w_6)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(w_6, w_7)$  diberi warna 3. Selanjutnya ketika sisi  $(w_1, w_7)$  diberi warna 1 atau 3 maka tidak ada lintasan pelangi pada lintasan  $w_2$  ke  $w_6$ . Sedangkan kalau diberi warna 2, lintasan  $w_3$  ke  $w_7$  juga bukan lintasan pelangi. Jadi haruslah sisi  $(w_1, w_7)$  diberi warna 4. Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan titik  $v_3$  maka lintasan menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Karena dapat dilewati langsung melalui titik  $u$  menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$ , maka misalnya sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_4, u)$  diberi warna 2. Lalu misalnya untuk lintasan sikel dalam diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Sedangkan lintasan yang melewati titik  $u$ , sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 1 dengan  $i$  ganjil dan sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 2 dengan  $i$  genap, maka pada lintasan  $v_3$  ke  $v_7$ , lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  tidak terdapat lintasan pelangi. Sehingga haruslah lintasan sikel dalam diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Lalu sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2, selanjutnya sisi  $(v_5, u)$  diberi warna 3. Ini akan membuat lintasan  $v_1$  ke  $v_4$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  menjadi lintasan pelangi. Pada sisi  $(v_2, u)$

diberi warna 2 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 3 maka lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  merupakan lintasan pelangi. Lalu sisi  $(v_7, u)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 1 membuat lintasan  $v_3$  ke  $v_7$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_4$  ( $v_1, u, v_4, w_4$ ). Karena sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_4, u)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, namun ini membuat lintasan  $v_4$  ke  $w_2$  ( $v_4, w_4, w_3, w_2$ ) bukan lintasan pelangi karena mempunyai 2 sisi yang diberi warna 3, yaitu sisi  $(v_4, w_4)$  dan sisi  $(w_4, w_3)$ , jadi haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4. Dengan demikian dengan memberi warna 4 pada semua sisi  $(v_i, w_i)$  akan terbentuk pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_7) = 4$ .

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf  $cH_6$  terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan tiga warna titik. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , maka haruslah titik  $v_2$  dan  $v_3$  memiliki warna yang berbeda. Misalkan titik  $v_2$  diberi warna 1 dan titik  $v_3$  diberi warna 2. Dengan cara yang sama titik  $v_6$  dan titik  $v_7$  harus memiliki warna yang berbeda, jika melihat lintasan pelangi yang menghubungkan titik  $v_1$  dan  $v_5$ . Jika titik  $v_6$  diberi warna 1 dan titik  $v_7$  diberi warna 2, tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_2$  dan  $v_6$ . Jika titik  $v_1$  diberi warna 2 juga tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_3$  dan  $v_7$ . Jika titik  $v_1$  diberi warna 1. Sekarang misalnya titik  $v_6$  diberi warna 2 dan titik  $v_7$  diberi warna 1, tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_2$  dan  $v_6$ . Jika titik  $v_1$  diberi warna 1. Demikian jika titik  $v_1$  diberi warna 2. Dengan alasan yang sama  $v_4$  dan  $v_5$  haruslah mempunyai warna yang berbeda. Tetapi tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_4$  dan  $v_7$  jika titik  $v_4$  diberi warna 1 dan

titik  $v_5$  diberi warna 2 dan tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_2$  dan  $v_5$  jika titik  $v_4$  diberi warna 2 dan titik  $v_5$  diberi warna 1. Jadi dibutuhkan minimal 3 warna yang berbeda. Misalkan sebagai berikut titik  $u$  diberi warna 3, titik  $w_i$  diberi warna 1 jika  $i$  adalah ganjil dan titik  $w_i$  diberi warna 2 jika  $i$  adalah genap. Lalu titik  $v_i$  diberi warna 3 jika  $i$  adalah ganjil dan titik  $v_i$  diberi warna 2 jika  $i$  adalah genap untuk  $1 \leq i \leq 5$ , titik  $v_6$  diberi warna 1 dan titik  $v_7$  diberi warna 2. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_7) = 3$ .

Tabel 3.5 Pola Bilangan  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada  $cH_3$  sampai  $cH_n$

No	Jenis Graf	$rc(G)$	$rvc(G)$
1	$cH_3$	2	1
2	$cH_4$	3	2
3	$cH_5$	3	2
4	$cH_6$	4	2
5	$cH_7$	4	3
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$cH_n$	2, jika $n = 3$ 3, jika $4 \leq n \leq 5$ 4, jika $n \geq 6$	1, jika $n = 3$ 2, jika $4 \leq n \leq 6$ 3, jika $7 \leq n \leq 10$ 4, jika $n \geq 11$

Dari pola yang ditunjukkan oleh bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) di atas dapat diperoleh teorema sebagai berikut:

**Teorema 5**

Graf  $G$  adalah graf gear  $cH_n$  dengan  $n \in \mathbb{N}$ , maka bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rc(cH_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 3 \\ 3, & \text{jika } 4 \leq n \leq 5 \\ 4, & \text{jika } n \geq 6 \end{cases}$$

Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $cH_n$  adalah:

$$rvc(cH_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } 7 \leq n \leq 10 \\ 4, & \text{jika } n \geq 11 \end{cases}$$

**Bukti:**

Graf ini memiliki 2 siklus yaitu  $C_n^1: v_1, v_2, \dots, v_n$  dan  $C_n^2: w_1, w_2, \dots, w_n$ , untuk  $1 \leq i \leq n$  yang mana titik  $v_i$  menghubungkan antara titik  $u$  ke titik  $w_i$ .

1. Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$

a.  $rc(cH_n) = 2$  jika  $n = 3$

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_3$ , bila melewati titik  $u$  berarti juga melewati titik  $v_2$  maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_2, w_3$ . Karena dapat dilewati langsung tanpa melalui titik  $u$ , yaitu hanya melalui titik  $v_2$  yang membuat lintasan menjadi  $v_1, v_2, w_3$ . Misalnya sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, maka sisi  $(v_2, w_3)$  warna 2, sehingga lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  merupakan pelangi sisi terhubung. Dengan cara yang sama diterapkan pada sisi-sisi yang lain maka akan terbentuk pelangi sisi terhubung dengan menggunakan 2 warna yang berbeda. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_3) = 2$ .

b.  $rc(cH_n) = 3$  jika  $n = 4$

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  bila melewati titik  $u$  berarti melewati titik  $v_3$  maka lintasan menjadi  $v_1, u, v_3, w_3$ . Bila melewati titik  $v_2$  dan juga

titik  $v_3$  maka lintasan menjadi  $v_1, v_2, v_3, w_3$ . Sehingga bisa dikatakan bahwa lintasan ini mempunyai panjang 3 sisi. Karena mempunyai panjang 3 sisi, maka misalnya sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_3, w_3)$  sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3, w_3$  menjadi lintasan pelangi. Dengan cara yang sama diterapkan pada sisi-sisi yang lain akan membuat pelangi sisi terhubung. Sehingga terbukti dengan menggunakan 3 warna berbeda dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_4) = 3$ .

c.  $rc(cH_n) = 3$  jika  $n = 5$

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_4$  bila melewati titik  $u$  dan titik  $v_4$ , lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_4, w_4$ . Bila melewati titik  $v_5$  dan titik  $v_4$ , maka lintasan menjadi  $v_1, v_5, v_4, w_4$ . Lintasan ini bisa melewati titik lain, namun membuat lintasan menjadi lebih panjang. Sehingga bisa dikatakan lintasan ini mempunyai panjang minimal 3 sisi. Karena mempunyai panjang minimal 3 sisi, maka misalnya sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_4)$  diberi warna 2, dan sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, ini akan membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $v_1, u, v_4, w_4$ . Karena sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, untuk membuat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $v_1, v_5, v_4, w_4$ , haruslah sisi  $(v_1, v_5)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_5, v_4)$  diberi warna 2. Selanjutnya karena sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, sisi  $(v_5, v_4)$  diberi warna 2, maka sisi  $(v_3, v_4)$  haruslah diberi warna 1, dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2 sehingga terdapat lintasan pelangi pada lintasan  $v_2, v_3, v_4, w_4$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_3, v_4)$  diberi warna 1

dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3. Lalu karena sisi  $(v_3, w_3)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1 sehingga lintasan  $v_1$  ke  $w_3$  terdapat lintasan pelangi. Selanjutnya untuk membuat lintasan pelangi pada lintasan  $v_5$  ke  $w_2$ , sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 1, sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3. Lalu untuk sisi sikel luar bisa diberi warna seperti pada teorema 1. Sehingga dengan 3 warna yang berbeda dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_5) = 3$ .

d.  $rc(cH_n) = 4$  jika  $n = 6$

Awalnya ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  maka menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . karena dapat dilewati langsung melalui dua titik, yaitu titik  $w_2$  dan titik  $w_3$  menjadi lintasan  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , maka misalnya sisi  $(w_1, w_2)$  diberi warna 1, sisi  $(w_2, w_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(w_3, w_4)$  diberi warna 3. Dengan cara yang sama digunakan pada lintasan  $w_1, w_6, w_5, w_4$ . Sehingga lintasan  $w_1$  ke  $w_4$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan titik  $v_3$  maka lintasan menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Karena dapat dilewati langsung melalui titik  $u$  menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$ , maka misalnya sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_4, u)$  diberi warna 2. Dengan menggunakan cara yang sama pada lintasan yang berhubungan dengan titik  $u$  akan terbentuk lintasan pelangi, dimana setiap lintasan yang melewati titik  $u$  merupakan lintasan

terdekat dibandingkan menggunakan lintasan sikelnya. Sedangkan untuk membuat lintasan pelangi pada sisi sikel dalam dengan memberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap, maka akan tercipta pelangi sisi terhubung. Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_4$   $(v_1, u, v_4, w_4)$ . Karena sisi sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_4, u)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, namun ini membuat lintasan  $v_4$  ke  $w_2$   $(v_4, w_4, w_3, w_2)$  bukan lintasan pelangi karena mempunyai 2 sisi yang diberi warna 3, yaitu sisi  $(v_4, w_4)$  dan sisi  $(w_4, w_3)$ , jadi haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4. Dengan demikian dengan memberi warna 4 pada semua sisi  $(v_i, w_i)$  akan terbentuk pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan 4 warna yang berbeda dapat membuat pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_6) = 4$ .

e.  $rc(cH_n) = 4$  jika  $n = 7$

Awalnya ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  maka menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . karena dapat dilewati langsung melalui dua titik, yaitu titik  $w_2$  dan titik  $w_3$  menjadi lintasan  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , maka misalnya sisi  $(w_1, w_2)$  diberi warna 1, sisi  $(w_2, w_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(w_3, w_4)$  diberi warna 3 sehingga terdapat lintasan pelangi. Selanjutnya lintasan  $w_2$  ke  $w_5$  yang melewati titik  $w_3$  dan titik  $w_4$ , karena sisi  $(w_2, w_3)$  diberi warna 2, dan sisi  $(w_3, w_4)$  diberi warna 3, maka haruslah sisi  $(w_4, w_5)$  diberi warna 1. Lalu lintasan  $w_3$  ke  $w_6$  yang melewati titik  $w_4$  dan titik  $w_5$ , karena sisi

$(w_3, w_4)$  diberi warna 3 dan sisi  $(w_4, w_5)$  diberi warna 1, maka haruslah sisi  $(w_5, w_6)$  diberi warna 2. Selanjutnya pada lintasan  $w_4$  ke  $w_7$  yang melewati titik  $w_5$  dan titik  $w_6$ , karena sisi  $(w_4, w_5)$  diberi warna 1 dan sisi  $(w_5, w_6)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(w_6, w_7)$  diberi warna 3. Selanjutnya ketika sisi  $(w_1, w_7)$  diberi warna 1 atau 3 maka tidak ada lintasan pelangi pada lintasan  $w_2$  ke  $w_6$ . Sedangkan kalau diberi warna 2, lintasan  $w_3$  ke  $w_7$  juga bukan lintasan pelangi. Jadi haruslah sisi  $(w_1, w_7)$  diberi warna 4. Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan titik  $v_3$  maka lintasan menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Karena dapat dilewati langsung melalui titik  $u$  menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$ , maka misalnya sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_4, u)$  diberi warna 2. Lalu misalnya untuk lintasan sikel dalam diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Sedangkan lintasan yang melewati titik  $u$ , sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 1 dengan  $i$  ganjil dan sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 2 dengan  $i$  genap, maka pada lintasan  $v_3$  ke  $v_7$ , lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  tidak terdapat lintasan pelangi. Sehingga haruslah lintasan sikel dalam diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Lalu sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2, selanjutnya sisi  $(v_5, u)$  diberi warna 3. Ini akan membuat lintasan  $v_1$  ke  $v_4$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  menjadi lintasan pelangi. Pada sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 3 maka lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  merupakan lintasan pelangi. Lalu sisi

$(v_7, u)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 1 membuat lintasan  $v_3$  ke  $v_7$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $w_4$   $(v_1, u, v_4, w_4)$ . Karena sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_4, u)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 3, namun ini membuat lintasan  $v_4$  ke  $w_2(v_4, w_4, w_3, w_2)$  bukan lintasan pelangi karena mempunyai 2 sisi yang diberi warna 3, yaitu sisi  $(v_4, w_4)$  dan sisi  $(w_4, w_3)$ , jadi haruslah sisi  $(v_4, w_4)$  diberi warna 4. Dengan demikian dengan memberi warna 4 pada semua sisi  $(v_i, w_i)$  akan terbentuk pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(cH_7) = 4$ .

Dari uraian diatas (a,b,c,d, dan e) terbukti bahwa bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rc(cH_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 3 \\ 3, & \text{jika } 4 \leq n \leq 5 \\ 4, & \text{jika } n \geq 6 \end{cases}$$

2. Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $G$

a.  $rvc(cH_n) = 1$  jika  $n = 3$

Untuk membuktikan  $rvc(cH_n) \leq 1$  maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil  $rvc(cH_n) = 1$ , misalkan ada fungsi pewarnaan  $c: V(cH_n) \rightarrow \{1\}$  maka:  $c(u) = 1$ , sehingga setiap lintasan  $v_i - v_j$  akan melewati titik interior  $u$  dimana  $c(u) = 1$ , sedangkan setiap lintasan  $v_i - u$  tidak ada titik interior karena terhubung langsung, walaupun pada lintasan  $w_i - u$  terdapat titik interior  $v_i$ , namun lintasan  $w_i - w_j$

saling terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti  $rvc(cH_n) \leq 1$ . Karena  $rvc(cH_n) \geq 1$  dan  $rvc(cH_n) \leq 1$ , maka  $rvc(cH_n) = 1$ .

b.  $rvc(cH_n) = 2$  jika  $4 \leq n \leq 6$

Berikan 2 warna  $c$  seperti berikut,  $c(u) = 2$ ,  $c(v_i) = 1$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,  $c(w_i) = 1$  jika  $i$  ganjil, dan  $c(w_i) = 2$  jika  $i$  genap. Sehingga  $c$  adalah pelangi titik terhubung. Oleh karena itu terbukti  $rvc(cH_n) = 2$  jika  $4 \leq n \leq 6$

c.  $rvc(cH_n) = 3$  jika  $7 \leq n \leq 10$

Akan ditunjukkan bahwa  $rvc(cH_7) \neq 2$ . Asumsikan bahwa  $rvc(cH_7) = 2$ . Misalkan  $c$  adalah pewarnaan titik pelangi pada  $cH_7$ . Perhatikan lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_1$  dan  $v_4$ . Karena  $rvc(cH_7) = 2$ , maka  $v_2$  dan  $v_3$  haruslah memiliki warna yang berbeda. Misalkan  $c(v_2) = 1$  dan  $c(v_3) = 2$ . Dengan cara yang sama maka  $v_6$  dan  $v_7$  harus memiliki warna yang berbeda jika melihat lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_1$  dan  $v_5$ . Jika  $c(v_6) = 1$  dan  $c(v_7) = 2$ , tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_2$  dan  $v_6$  jika  $c(v_1) = 2$  dan juga tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_3$  dan  $v_7$  jika  $c(v_1) = 1$ . Sekarang misalnya  $c(v_6) = 2$  dan  $c(v_7) = 1$ , tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_2$  dan  $v_6$  jika  $c(v_1) = 1$ . Demikian jika  $c(v_1) = 2$ . Dengan alasan yang sama  $v_4$  dan  $v_5$  haruslah mempunyai warna yang berbeda. Tetapi tidak ada lintasan

pelangi yang menghubungkan  $v_4$  dan  $v_7$  jika  $c(v_4) = 1$  dan  $c(v_5) = 2$  dan tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan  $v_2$  dan  $v_5$  jika  $c(v_4) = 2$  dan  $c(v_5) = 1$ . Sehingga haruslah  $rvc(cH_7) \geq 3$ .

Selanjutnya misalnya didefinisikan pewarnaan titik  $cH_7$  sebagai berikut,  $c(u) = 3$ ,  $c(w_i) = 1$  jika  $i$  adalah ganjil dan  $c(w_i) = 2$  jika  $i$  adalah genap.  $c(v_i) = 3$  jika  $i$  adalah ganjil dan  $c(v_i) = 2$  jika  $i$  adalah genap untuk  $1 \leq i \leq 5$ ,  $c(v_6) = 1$  dan  $c(v_7) = 2$ . Ini menunjukkan bahwa  $rc(cH_7) = 3$ .

d.  $rvc(cH_n) = 4$  jika  $n \geq 11$

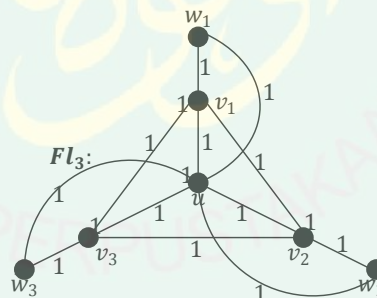
Misalkan, dengan 4 warna  $c$  kita dapat membuat pewarnaan titik pelangi.  $c(u) = 3$ ,  $c(v_i) = 1$  jika  $i$  adalah ganjil,  $c(v_i) = 2$  jika  $i$  adalah genap,  $c(w_i) = 4$ . Ini menunjukkan bahwa  $rvc(cH_n) \geq 4$ . Asumsikan bahwa  $rvc(cH_n) = 3$ . Sehingga  $c$  dapat membuat 3 warna pelangi dari  $rvc(cH_n)$ . Misalnya  $c(v_i) = 1$ . Lalu untuk setiap  $i$  dengan  $6 \leq i \leq n - 4$ ,  $w_1, v_1, u, v_i, w_i$  adalah satu-satunya lintasan  $w_1 - w_i$  dengan panjang 4 pada  $rvc(cH_n)$ , maka  $v_1, u, v_i$  haruslah mempunyai warna yang berbeda. Misalkan  $c(u) = 3$  dan  $c(v_i) = 2$ . Karena  $c(v_6) = 2$ , maka  $c(v_n) = 1$ . Selanjutnya  $c(v_5) = 2$ , sehingga  $c(v_{n-1}) = 1$ . Dengan cara yang sama  $c(v_{n-1}) = 1$ , maka  $c(v_4) = 2$ ;  $c(v_4) = 2$ , maka  $c(v_{n-2}) = 1$ ;  $c(v_{n-2}) = 1$ , maka  $c(v_3) = 2$ ;  $c(v_3) = 2$ , maka  $c(v_{n-3}) = 1$ ;  $c(v_{n-3}) = 1$ ,  $c(v_2) = 2$ . Dengan demikian tidak ada warna pelangi pada lintasan  $w_2 - w_7$ , sehingga

haruslah  $w_i = 4$ . Sehingga  $(cH_n) \geq 4$ . Karena  $rvc(cH_n) \geq 4$  dan  $rvc(cH_n) \leq 4$  maka terbukti  $rvc(cH_n) = 4$ , dengan  $n \geq 11$ .

### 3.6 Graf Bunga

Graf bunga  $Fl_n$  adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik anting-anting ke titik pusat graf helm. Banyaknya titik pada  $Fl_n$  dan  $H_n$  adalah sama yaitu  $2n + 1$ , sedangkan sisi pada  $Fl_n$  akan bertambah  $n$  sisi sehingga banyaknya sisi pada  $Fl_n$  adalah  $4n$ .

Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf bunga dapat ditentukan dengan menentukan terlebih dahulu  $rc(Fl_n)$  dan  $rvc(Fl_n)$  pada graf  $Fl_3$  s/d graf  $Fl_7$  dan terakhir menggambar pola warna pada graf  $Fl_n$  agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung.

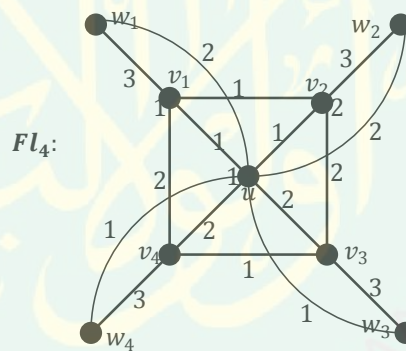


Gambar 3.26 Graf bunga  $Fl_3$

Graf bunga  $Fl_3$  mempunyai 12 sisi dan 7 titik. Ambil lintasan  $u$  ke  $w_1$ , bila melewati titik  $v_1$  maka lintasan menjadi  $u, v_1, w_1$ . Karena dapat dilewati langsung  $u$  ke  $w_2$  tanpa lewat titik  $v_1$ , maka sisi  $(u, w_1)$  diberi warna 1. Sehingga lintasan  $u, v_1, w_1$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada  $u$  ke  $w_2$  dan  $u$  ke  $w_2$ . Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi

$v_1, v_2, v_3$ . Namun karena lintasan dapat langsung terhubung dari  $v_1$  ke  $v_3$  tanpa melalui  $u$  atau  $v_2$ , maka sisi  $(v_1, v_3)$  diberi warna 1. sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3$  atau  $v_1, u, v_3$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada sisi  $(v_1, v_2)$ , sisi  $(v_2, v_3)$ , dan sisi  $(u, v)$ . Sehingga diperoleh bahwa  $rc(Fl_3) = 1$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ , karena semua titik  $w$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $w_i, u, w_j$ , sehingga lintasan lain dapat diabaikan. Maka dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Sehingga diperoleh bahwa  $rvc(Fl_3) = 1$ .

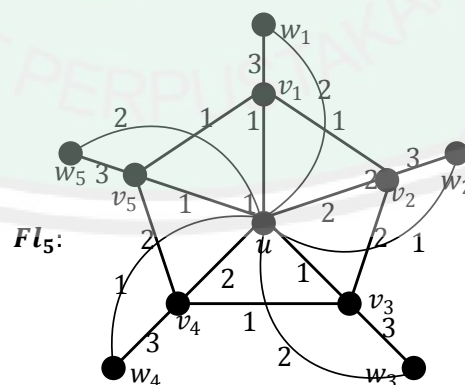


Gambar 3.27 Graf bunga  $Fl_4$

Graf bunga  $Fl_4$  mempunyai 16 sisi dan 9 titik. Ambil lintasan dari  $w_1$  ke  $w_3$ , bila melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_3$  lintasan ini menjadi  $w_1, v_1, u, v_3, w_3$ . Karena dapat dilewati langsung tanpa melewati titik  $v_1$  dan titik  $v_3$ , hanya melewati titik  $u$  lintasan ini menjadi  $w_1, u, w_3$ . Maka misalnya sisi  $(w_1, u)$  diberi warna 2 dan sisi  $(w_3, u)$  diberi warna 1. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada lintasan  $w_2, u, w_4$ . Sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_1, u, w_3$  dan lintasan  $w_2, u, w_4$ . Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ ,

maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Lintasan ini juga bisa melewati titik  $v_4$ , sehingga menjadi lintasan  $v_1, v_4, v_3$ . Misalnya sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, maka sisi  $(u, v_3)$  haruslah diberi warna 2, sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $v_1, u, v_3$ . Cara ini juga dapat diterapkan pada lintasan  $v_1, v_2, v_3$ , lintasan  $v_1, v_4, v_3$ , dan lintasan  $v_2, u, v_4$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, agar terdapat pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan memberikan warna 3 pada setiap sisi  $(v_i, w_i)$  maka akan terdapat pelangi sisi terhubung secara keseluruhan. Jadi terbukti bahwa  $rc(Fl_4) = 3$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ , karena semua titik  $w$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $w_i, u, w_j$ , sehingga lintasan lain dapat diabaikan. Maka dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Sehingga diperoleh bahwa  $rvc(Fl_4) = 1$ .

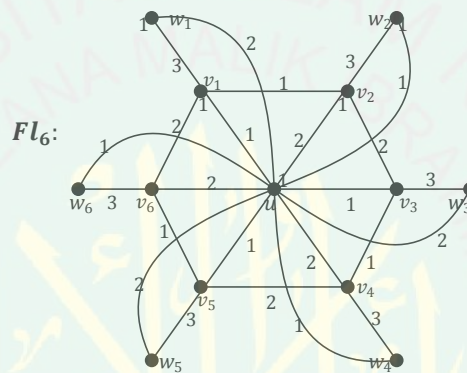


Gambar 3.28 Graf bunga  $Fl_5$

Graf bunga  $Fl_5$  mempunyai 20 sisi dan 11 titik. Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ ,

maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Lintasan inipun dapat melewati titik  $v_5$  dan  $v_4$ , sehingga lintasan menjadi  $v_1, v_5, v_4, v_3$ . Pada lintasan  $v_1, u, v_3$  maupun  $v_1, v_2, v_3$ , sama-sama mempunyai panjang 2 sisi, sehingga misalnya salah satu yaitu lintasan  $v_1, v_2, v_3$  diberi warna masing-masing 1 untuk sisi  $(v_1, v_2)$  dan warna 2 untuk sisi  $(v_2, v_3)$ . Lalu pada lintasan  $v_5, v_4, v_3$  masing-masing sisi, sisi  $(v_5, v_4)$  diwarna 2 dan sisi  $(v_4, v_3)$ , maka lintasan  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  merupakan lintasan pelangi. Ketika sisi  $(v_1, v_5)$  diberi warna 1, maka tidak ada lintasan pelangi pada lintasan  $v_5$  ke  $v_3$  yang melewati titik  $v_1$ . Namun lintasan  $v_5$  ke  $v_3$  dapat dibuat lintasan pelangi dengan melewati titik  $u$  yaitu ketika sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2 dan sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 1, ini sudah membuat  $v_5$  ke  $v_3$  ( $v_5, u, v_3$ ) menjadi lintasan pelangi dengan mengabaikan lintasan  $v_5, v_1, v_3$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila lewat titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  lintasan ini menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Karena dapat dilewati dengan hanya melewati titik  $u$  lintasannya menjadi  $w_1, u, w_4$ , maka sisi  $(u, w_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(u, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$  yang lainnya, sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, agar terdapat pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan memberikan warna 3 pada setiap sisi  $(v_i, w_i)$  maka akan terdapat pelangi sisi terhubung secara keseluruhan. Jadi terbukti bahwa  $rc(Fl_5) = 3$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ , karena semua titik  $w$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $w_i, u, w_j$ , sehingga lintasan lain dapat diabaikan. Maka dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Sehingga diperoleh bahwa  $rvc(Fl_5) = 1$ .

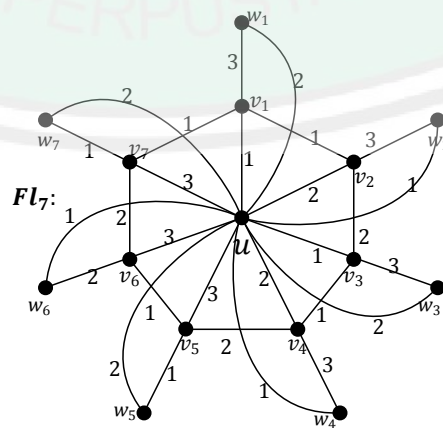


Gambar 3.29 Graf bunga  $Fl_6$

Graf bunga  $Fl_7$  mempunyai 24 sisi dan 13 titik. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila lewat titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  lintasan ini menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Karena dapat dilewati dengan hanya melewati titik  $u$  lintasannya menjadi  $w_1, u, w_4$ , maka sisi  $(u, w_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(u, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$  yang lainnya, sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ . Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Bila lewat titik  $v_6$  dan  $v_5$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_6, v_5, v_4$ . Namun karena dengan melewati titik  $u$  yang menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$  merupakan lintasan terpendek, maka sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2. Dengan menggunakan cara yang sama pada

lintasan yang berhubungan dengan titik  $u$  akan terbentuk lintasan pelangi, dimana setiap lintasan yang melewati titik  $u$  merupakan lintasan terdekat dibandingkan menggunakan lintasan sikelnya. Sedangkan untuk membuat lintasan pelangi pada sisi sikelnya dengan memberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap, maka akan tercipta pelangi sisi terhubung. Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, agar terdapat pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan memberikan warna 3 pada setiap sisi  $(v_i, w_i)$  maka akan terdapat pelangi sisi terhubung secara keseluruhan. Jadi terbukti bahwa  $rc(Fl_6) = 3$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ , karena semua titik  $w$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $w_i, u, w_j$ , sehingga lintasan lain dapat diabaikan. Maka dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Sehingga diperoleh bahwa  $rvc(Fl_6)1$ .



Gambar 3.30 Graf bunga  $Fl_7$

Graf bunga  $Fl_7$  mempunyai 28 sisi dan 15 titik. Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila lewat titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  lintasan ini menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Karena dapat dilewati dengan hanya melewati titik  $u$  lintasannya menjadi  $w_1, u, w_4$ , maka sisi  $(u, w_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(u, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$  yang lainnya, sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ . Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Bila lewat titik  $v_7, v_6$  dan  $v_5$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_7, v_6, v_5, v_4$ . Namun karena dengan melewati titik  $u$  yang menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$  merupakan lintasan terpendek, maka sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2. Lalu misalnya untuk lintasan sikel diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Sedangkan lintasan yang melewati titik  $u$ , sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 1 dengan  $i$  ganjil dan sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 2 dengan  $i$  genap, maka pada lintasan  $v_3$  ke  $v_7$ , lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  tidak terdapat lintasan pelangi. Sehingga haruslah lintasan sikel diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Lalu sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2, selanjutnya sisi  $(v_5, u)$  diberi warna 3. Ini akan membuat lintasan  $v_1$  ke  $v_4$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  menjadi lintasan pelangi. Pada sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 3 maka lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  merupakan lintasan pelangi. Lalu sisi  $(v_7, u)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 1 membuat lintasan  $v_3$  ke  $v_7$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna

2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, agar terdapat pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan memberikan warna 3 pada setiap sisi  $(v_i, w_i)$  maka akan terdapat pelangi sisi terhubung. Kecuali pada sisi  $(v_5, w_5)$  yang harus diberi warna 1, karena sisi  $(u, w_2)$  diberi warna 2 dan sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 3. Begitu juga dengan sisi  $(v_6, w_6)$  yang harus diberi warna 2, dan sisi  $(v_7, w_7)$  yang harus diberi warna 1. Sehingga terbukti dengan 3 warna yang berbeda diperoleh pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(Fl_7) = 3$ .

Sedangkan untuk pelangi titik terhubung. Ambil lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ , karena semua titik  $w$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $w_i, u, w_j$ , sehingga lintasan lain dapat diabaikan. Maka dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. Sehingga diperoleh bahwa  $rvc(Fl_7) = 1$ .

Tabel 3.6 Pola Bilangan  $rc(G)$  dan  $rvc(G)$  pada  $Fl_3$  sampai  $Fl_n$

No	Jenis Graf	$rc(G)$	$rvc(G)$
1	$Fl_3$	1	1
2	$Fl_4$	3	1
3	$Fl_5$	3	1
4	$Fl_6$	3	1
5	$Fl_7$	3	1
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$Fl_n$	1, jika $n = 3$ 3, jika $n \geq 4$	1

Dari beberapa kasus yang ditunjukkan oleh bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) dan bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) di atas maka dapat diperoleh teorema:

**Teorema 6**

Graf  $G$  adalah graf roda  $Fl_n$  dengan  $n \in \mathbb{N}$ , maka bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rc(Fl_n) = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 3 \\ 3 & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $G$  adalah:

$$rvc(Fl_n) = 1 \text{ untuk } n \geq 3$$

**Bukti :**

Graf bunga  $Fl_n$  didapat dari graf helm  $H_n$  dengan menggabung tiap-tiap titik puncak menuju titik pusat dari graf helm.

1. Bilangan pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connection*) pada graf  $G$

a.  $rc(Fl_n) = 1$  jika  $n = 3$

Ambil lintasan  $u$  ke  $w_1$ , bila melewati titik  $v_1$  maka lintasan menjadi  $u, v_1, w_1$ . Karena dapat dilewati langsung  $u$  ke  $w_2$  tanpa lewat titik  $v_1$ , maka sisi  $(u, w_1)$  diberi warna 1. Sehingga lintasan  $u, v_1, w_1$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada  $u$  ke  $w_2$  dan  $u$  ke  $w_3$ . Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Namun karena lintasan dapat langsung terhubung dari  $v_1$  ke  $v_3$  tanpa melalui  $u$  atau  $v_2$ , maka sisi  $(v_1, v_3)$  diberi warna 1. sehingga lintasan  $v_1, v_2, v_3$  atau  $v_1, u, v_3$  dapat diabaikan. Dengan cara

yang sama dapat diterapkan pada sisi  $(v_1, v_2)$ , sisi  $(v_2, v_3)$ , dan sisi  $(u, v)$ . Sehingga diperoleh bahwa  $rc(Fl_3) = 1$ .

b.  $rc(Fl_n) = 3$  jika  $n = 4$

Ambil lintasan dari  $w_1$  ke  $w_3$ , bila melewati titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_3$  lintasan ini menjadi  $w_1, v_1, u, v_3, w_3$ . Karena dapat dilewati langsung tanpa melewati titik  $v_1$  dan titik  $v_3$ , hanya melewati titik  $u$  lintasan ini menjadi  $w_1, u, w_3$ . Maka misalnya sisi  $(w_1, u)$  diberi warna 2 dan sisi  $(w_3, u)$  diberi warna 1. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada lintasan  $w_2, u, w_4$ . Sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_1, u, w_3$  dan lintasan  $w_2, u, w_4$ . Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Lintasan ini juga bisa melewati titik  $v_4$ , sehingga menjadi lintasan  $v_1, v_4, v_3$ . Misalnya sisi  $(u, v_1)$  diberi warna 1, maka sisi  $(u, v_3)$  haruslah diberi warna 2, sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $v_1, u, v_3$ . Cara ini juga dapat diterapkan pada lintasan  $v_1, v_2, v_3$ , lintasan  $v_1, v_4, v_3$ , dan lintasan  $v_2, u, v_4$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, agar terdapat pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan memberikan warna 3 pada setiap sisi  $(v_i, w_i)$  maka akan terdapat pelangi sisi terhubung secara keseluruhan. Jadi terbukti bahwa  $rc(Fl_4) = 3$ .

c.  $rc(Fl_n) = 3$  jika  $n = 5$

Ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_3$ , bila lewat titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, u, v_3$ . Sedangkan bila lewat  $v_2$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3$ . Lintasan inipun dapat melewati titik  $v_5$  dan  $v_4$ , sehingga lintasan menjadi  $v_1, v_5, v_4, v_3$ . Pada lintasan  $v_1, u, v_3$  maupun  $v_1, v_2, v_3$ , sama-sama mempunyai panjang 2 sisi, sehingga misalnya salah satu yaitu lintasan  $v_1, v_2, v_3$  diberi warna masing-masing 1 untuk sisi  $(v_1, v_2)$  dan warna 2 untuk sisi  $(v_2, v_3)$ . Lalu pada lintasan  $v_5, v_4, v_3$  masing-masing sisi, sisi  $(v_5, v_4)$  diwarna 2 dan sisi  $(v_4, v_3)$ , maka lintasan  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  merupakan lintasan pelangi. Ketika sisi  $(v_1, v_5)$  diberi warna 1, maka tidak ada lintasan pelangi pada lintasan  $v_5$  ke  $v_3$  yang melewati titik  $v_1$ . Namun lintasan  $v_5$  ke  $v_3$  dapat dibuat lintasan pelangi dengan melewati titik  $u$  yaitu ketika sisi  $(u, v_3)$  diberi warna 2 dan sisi  $(u, v_5)$  diberi warna 1, ini sudah membuat  $v_5$  ke  $v_3$  ( $v_5, u, v_3$ ) menjadi lintasan pelangi dengan mengabaikan lintasan  $v_5, v_1, v_3$ . Selanjutnya ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila lewat titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  lintasan ini menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Karena dapat dilewati dengan hanya melewati titik  $u$  lintasannya menjadi  $w_1, u, w_4$ , maka sisi  $(u, w_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(u, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$  yang lainnya, sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ . Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka

haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, agar terdapat pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan memberikan warna 3 pada setiap sisi  $(v_i, w_i)$  maka akan terdapat pelangi sisi terhubung secara keseluruhan. Jadi terbukti bahwa  $rc(Fl_5) = 3$ .

d.  $rc(Fl_n) = 3$  jika  $n = 6$

Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila lewat titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  lintasan ini menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Karena dapat dilewati dengan hanya melewati titik  $u$  lintasannya menjadi  $w_1, u, w_4$ , maka sisi  $(u, w_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(u, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$  yang lainnya, sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ . Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Bila lewat titik  $v_6$  dan  $v_5$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_6, v_5, v_4$ . Namun karena dengan melewati titik  $u$  yang menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$  merupakan lintasan terpendek, maka sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2. Dengan menggunakan cara yang sama pada lintasan yang berhubungan dengan titik  $u$  akan terbentuk lintasan pelangi, dimana setiap lintasan yang melewati titik  $u$  merupakan lintasan terdekat dibandingkan menggunakan lintasan sikelnya. Sedangkan untuk membuat lintasan pelangi pada sisi sikelnya dengan memberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap, maka akan tercipta pelangi sisi

terhubung. Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, agar terdapat pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan memberikan warna 3 pada setiap sisi  $(v_i, w_i)$  maka akan terdapat pelangi sisi terhubung secara keseluruhan. Jadi terbukti bahwa  $rc(Fl_6) = 3$ .

e.  $rc(Fl_n) = 3$  jika  $n = 7$

Ambil lintasan  $w_1$  ke  $w_4$ , bila lewat titik  $v_1$ , titik  $u$ , dan titik  $v_4$  lintasan ini menjadi  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$ . Karena dapat dilewati dengan hanya melewati titik  $u$  lintasannya menjadi  $w_1, u, w_4$ , maka sisi  $(u, w_4)$  diberi warna 1, dan sisi  $(u, w_1)$  diberi warna 2. Sehingga lintasan  $w_1, v_1, u, v_4, w_4$  dapat diabaikan. Dengan cara yang sama dapat diterapkan pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$  yang lainnya, sehingga terdapat pelangi sisi terhubung pada lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ . Selanjutnya ambil lintasan  $v_1$  ke  $v_4$ , bila melewati titik  $v_2$  dan  $v_3$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Bila lewat titik  $v_7, v_6$  dan  $v_5$ , maka lintasan ini menjadi  $v_1, v_7, v_6, v_5, v_4$ . Namun karena dengan melewati titik  $u$  yang menjadi lintasan  $v_1, u, v_4$  merupakan lintasan terpendek, maka sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2. Lalu misalnya untuk lintasan sikel diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Sedangkan lintasan yang melewati titik  $u$ , sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 1 dengan  $i$  ganjil dan sisi  $(u, v_i)$  diberi warna 2 dengan  $i$  genap, maka pada lintasan  $v_3$  ke  $v_7$ , lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  tidak terdapat lintasan pelangi.

Sehingga haruslah lintasan sikel diberi warna 1 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  ganjil, dan warna 2 pada sisi  $(v_i, v_{i+1})$  dengan  $i$  genap. Lalu sisi  $(v_1, u)$  diberi warna 1 dan sisi  $(u, v_4)$  diwarnai 2, selanjutnya sisi  $(v_5, u)$  diberi warna 3. Ini akan membuat lintasan  $v_1$  ke  $v_4$  dan lintasan  $v_1$  ke  $v_5$  menjadi lintasan pelangi. Pada sisi  $(v_2, u)$  diberi warna 2 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 3 maka lintasan  $v_2$  ke  $v_6$  merupakan lintasan pelangi. Lalu sisi  $(v_7, u)$  diberi warna 3 dan sisi  $(v_3, u)$  diberi warna 1 membuat lintasan  $v_3$  ke  $v_7$  menjadi lintasan pelangi. Selanjutnya karena sisi  $(v_1, v_2)$  diberi warna 1, dan sisi  $(v_2, v_3)$  diberi warna 2, maka haruslah sisi  $(v_2, w_2)$  diberi warna 3, agar terdapat pelangi sisi terhubung. Sehingga dengan memberikan warna 3 pada setiap sisi  $(v_i, w_i)$  maka akan terdapat pelangi sisi terhubung. Kecuali pada sisi  $(v_5, w_5)$  yang harus diberi warna 1, karena sisi  $(u, w_2)$  diberi warna 2 dan sisi  $(u, v_2)$  diberi warna 3. Begitu juga dengan sisi  $(v_6, w_6)$  yang harus diberi warna 2, dan sisi  $(v_7, w_7)$  yang harus diberi warna 1. Sehingga terbukti dengan 3 warna yang berbeda diperoleh pelangi sisi terhubung. Jadi terbukti bahwa  $rc(Fl_7) = 3$ .

Atau  $rc(Fl_n) = 3$  jika  $n \geq 4$ , misalkan fungsi pewarnaan sisi  $c: E(Fl_n) \rightarrow \{1,2,3\}$ , didefinisikan oleh  $c(v_i, u) = 1,2,3$  secara berputar. Jadi diperoleh sisi jari-jari adalah 1,2, atau 3. Kemudian sisi daun bunga yang memiliki lintasan  $v_i - w_i - u$  mempunyai warna,  $c(v_i - w_i - u) = \{1,2\}$  jika  $c(v_i, u) = 3$ ,  $c(v_i - w_i - u) = \{1,3\}$  jika  $c(v_i, u) = 2$ , dan  $c(v_i - w_i - u) = \{3,2\}$  jika  $c(v_i, u) = 1$ . Lalu untuk

sisi sikelnnya diberi warna sama dengan sisi jari-jari. Sehingga terbukti

$$rc(Fl_n) = 3.$$

2. Bilangan pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connection*) pada graf  $G$   
 $rvc(Fl_n) = 1$

Ambil lintasan  $w_i$  ke  $w_j$ , karena semua titik  $w$  berhubungan langsung dengan titik  $u$ , maka lintasan ini menjadi  $w_i, u, w_j$ , sehingga lintasan lain dapat diabaikan. Maka dengan memberi warna 1 pada titik  $u$  akan membuat pelangi titik terhubung. sehingga setiap lintasan  $v_i - v_j$  akan melewati titik interior  $u$  dimana titik  $u$  diberi warna 1, sedangkan setiap lintasan  $v_i - u$  tidak ada titik interior karena terhubung langsung. walaupun lintasan  $w_i - u$  melewati titik interior  $v_i$ , ada lintasan kedua dimana  $w_i - u$  tidak melewati titik interior. dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Sehingga terbukti bahwa  $rvc(Fl_n) = 1$ .

## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1. Rumusan umum untuk bilangan *rainbow edge-connection*  $rc(G)$  adalah:

a. Bilangan *rainvow edge-connection* pada Graf Sikel  $C_n$  :

$$rc(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 3 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

b. Bilangan *rainvow edge-connection* pada Graf Roda  $W_n$  :

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

c. Bilangan *rainvow edge-connection* pada Graf Gear  $G_n$  :

$$rc(G_n) = n \text{ untuk } n \geq 3$$

d. Bilangan *rainvow edge-connection* pada Graf Helm  $H_n$  :

$$rc(H_n) = rc(W_n) + n \text{ untuk } n \geq 3$$

e. Bilangan *rainvow edge-connection* pada Graf Helm Tertutup  $cH_n$  :

$$rc(cH_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 3 \\ 3, & \text{jika } 4 \leq n \leq 5 \\ 4, & \text{jika } n \geq 6 \end{cases}$$

f. Bilangan *rainvow edge-connection* pada Graf Bunga  $Fl_n$  :

$$rc(Fl_n) = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 3 \\ 3 & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

2. Rumusan umum untuk bilangan *rainbow vertex-connection*  $rvc(G)$  adalah:

a. Bilangan *rainvow edge-connection* pada Graf Sikel  $C_n$  :

$$rvc(C_n) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n = 3 \\ 1, & \text{jika } n = 4,5 \\ 3, & \text{jika } n = 9 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, & \text{jika } n = 6,7,8,10,11,12,13, \text{ atau } 15 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{jika } n \geq 16 \text{ atau } n = 14 \end{cases}$$

b. Bilangan *rainbow vertex-connection* dari Graf Roda  $W_n$ :

$$rvc(W_n) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n = 3 \\ 1, & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

c. Bilangan *rainbow vertex-connection* dari Graf Gear  $G_n$ :

$$rvc(G_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 3 \\ 3, & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

d. Bilangan *rainbow vertex-connection* dari Graf Helm  $H_n$ :

$$rvc(H_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3 \\ n + 1, & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

e. Bilangan *rainbow vertex-connection* dari Graf Helm Tertutup  $CH_n$ :

$$rvc(CH_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } 7 \leq n \leq 10 \\ 4, & \text{jika } n \geq 11 \end{cases}$$

f. Bilangan *rainbow vertex-connection* dari Graf Graf Bunga  $Fl_n$ :

$$rvc(Fl_n) = 1 \text{ untuk } n \geq 3$$

#### 4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah bilangan *rainbow connection* dan *rainbow vertex-connection* pada graf yang berkaitan dengan sikel, antara lain Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gear, Graf Helm,

Graf Helm Tertutup, dan Graf Bunga. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah bilangan *rainbow connection* dan *rainbow vertex-connection* pada graf yang lain, misalnya graf Kubus dan lain-lain.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Adi, F.S.. 2012. Bilangan Rainbow Connection dari Hasil Operasi Penjumlahan dan Perkalian Kartesius Dua Graf. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Malang: Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Alisah, E. dan Dharmawan, E.P.. 2006. *Filsafat Dunia Matematika*. Jakarta: Prestasi Pustaka Publisher.
- Ariwibowo, S.. 2012. Total k-Defisiensi Titik Graf Terhubung. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Malang: Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Bondy, J.A. and Murty, U.S.R.. 1976. *Graph Theory With Applications*. London: MacMillan Press.
- Caro, Y.. 2008. On rainbow connection, *Electronic Journal of Combinatorics*, Vol 15, 1-13.
- Chandran, L.S. 2010. *Rainbow Coloring of Graph*. Bangalore: Indian Institute of Science.
- Chartrand, G. and Lesniak, L.. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Gafur, A.. 2008. Pewarnaan Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Malang: Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Gallian. J.A.. 2007. A dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic journal combinatorics*, Vol 3, 1-7.
- Hasanah, S.. 2007. Aplikasi Pewarnaan Graf Terhadap Penjadwalan Kuliah di Jurusan Matematika UIN Malang. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Malang: Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Harary, F.. 1969. *Graph Theory*. Amerika: Addison-Wesley Publishing Company, inc.
- Krivelevich, M. dan Yuster, R.. 2010. *The Rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree*, School of Mathematics, Tel Aviv University.
- Li, X. and Sun, Y.. 2012. *Rainbow Connections of Graphs*. New York: Springer Science-Business Media.
- Li, X. and Liu, S.. 2011. *Of 2-Connected Graphs*. Tianjin. Nankai University.

- Muftie, A.. 2004 *Matematika Alam Semesta, Kodefikasi Bilangan Prima dalam Al-Qur'an*. Bandung: PT Kiblat Buku Utama.
- Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- Saondi, O.. 2003. *Teori Graf*. Kuningan: Rumah Buku Press.
- Shihab, Q.M.. 2004. *Tafsir al-Misbah Pesan Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.





**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345  
Fax. (0341)572533**

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ainul Rhofiq Tridissuwedhy  
NIM : 08610015  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Bilangan Pelangi Terhubung Pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel  
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd  
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Hal	TandaTangan
1.	14 September 2012	Konsultasi Proposal	1.
2.	26 September 2012	Konsultasi Agama	2.
3.	28 September 2012	Revisi Proposal	3.
4.	23 Oktober 2012	KonsultasiKeagamaan	4.
5.	24 Oktober 2012	KonsultasiKeagamaan	5.
6.	20 Maret 2013	Konsultasi BAB III	6.
7.	2 April 2013	Konsultasi BAB III & BAB IV	7
8.	4 April 2013	KonsultasiKeagamaan	8.
9.	11 April 2013	Revisi BAB III & BAB IV	9.
10.	28 Mei 2013	ACC BAB I s.d BAB IV	10.
11.	28 Mei 2013	ACC Keagamaan	11.

Malang, 28 Mei 2013

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001