

**PERBANDINGAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY LINGUISTIK DAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY MULTINOMIAL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MUKHLIS ZULFA**  
NIM. 08610008



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**PERBANDINGAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY LINGUISTIK DAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY MULTINOMIAL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MUKHLIS ZULFA**  
**NIM. 08610008**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**PERBANDINGAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY LINGUISTIK DAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY MULTINOMIAL**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**MUKHLIS ZULFA**  
**NIM. 08610008**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**PERBANDINGAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY LINGUISTIK DAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY MULTINOMIAL**

**SKRIPSI**

**Oleh:  
MUKHLIS ZULFA  
NIM. 08610008**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal: 27 September 2012

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Fachrur Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012

Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERBANDINGAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY LINGUISTIK DAN  
GRAFIK PENGENDALI FUZZY MULTINOMIAL**

**SKRIPSI**

**Oleh:  
MUKHLIS ZULFA  
NIM. 08610008**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 07 November 2012

Penguji Utama : Dr. Sri Harini, M.Si  
NIP. 19731014 200112 2 002 .....

Ketua Penguji : Drs. H. Turmudi, M.Si  
NIP. 19571005 196203 1 006 .....

Sekretaris Penguji : Fachrur Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012 .....

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002 .....

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : MUKHLIS ZULFA

NIM : 08610008

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 September 2012  
Yang membuat pernyataan,

MUKHLIS ZULFA  
NIM. 08610008

## MOTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Tidak ada kekayaan yang melebihi akal, dan tidak  
ada kemelaratan yang melebihi kebodohan



## PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar,  
Karya tulis ini peneliti persembahkan kepada:*

*Bapak (Muhadi) dan Ibunda (Siti Asiyah) tercinta  
yang tak pernah lelah untuk mencurahkan kasih sayangnya kepada peneliti,  
dan iringan do'anya yang selalu menyertai langkah.*

*Kakak (M. Asbahul Ulum S.Psi) dan  
adik (M. Aziz Fahrudin) tercinta  
yang selalu memberi motivasi peneliti untuk tetap semangat melangkah ke depan.*



## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

*Alhamdulillah* rabbil'alam, segala puji syukur peneliti haturkan kepada Allah SWT, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, taufik, serta hidayah-Nya kepada peneliti, sehingga peneliti dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam peneliti sampaikan kepada nabi agung Muhammad SAW yang memberikan jalan yang lurus dan diridhoi-Nya.

Selanjutnya, peneliti ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membimbing dan memberikan motivasi kepada peneliti. Ucapan terima kasih ini peneliti sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Fachrur Rozi, M.Si dan Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman yang berharga.

5. Segenap sivitas akademika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen Jurusan Matematika, yang tidak pernah lelah untuk mendidik, mengajarkan, dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada peneliti.
6. Ayahanda Muhadi dan ibunda Siti Asiyah tercinta yang telah mendoakan dan memberi motivasi tiada henti serta telah memberikan kesempatan kepada peneliti untuk menuntut ilmu di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terima kasih.
7. Kakak M. Asbahul 'Ulum dan adik M. Aziz Fahrudin serta segenap keluarga yang telah memberikan dukungan, do'a, dan motivasi bagi peneliti.
8. Bapak M. Sakir dan ibu Susilawati, mas Afif Anshori, Ahmad Haikal Zamzami, dan Ahmad Nizar Fatahillah, beserta keluarga yang senantiasa memberi dukungan dan do'a, serta Fajar Luthfi Anwari yang tiada henti memberikan motivasi dan juga kepercayaan kepada peneliti untuk melangkah ke depan dengan penuh keyakinan dan percaya diri.
9. H. Isroqunnajah, M.Ag, selaku Mudirul Ma'had Sunan Ampel Al-'Ali, dan seluruh pengasuh Ma'had Sunan Ampel Al-'Ali, terima kasih atas do'anya serta terima kasih telah memberikan kesempatan peneliti mengemban ilmu di Ma'had Sunan Ampel Al-'Ali (MSAA).
10. Sahabat-sahabat seperjuangan di Ma'had Sunan Ampel Al-'Ali, seluruh murobbi/ah, musyrif/ah, serta mahasantri khususnya musyrifah dan mahasantri Mabna Khodijah Al-Kubro terima kasih atas dukungannya. Juga teman-teman kamar 49 USA (2009/2010), kamar 33 USA (2010/2011), dan

kamar 33 Khodijah Al-Kubro (2011/2012) (Evi Muzaiyidah, Muthi'atun Nasihah, Nurul Badriyah, Siti Mutholi'ah, Umdatul Musyaroh) yang selalu memberikan motivasi. Juga seluruh Gus dan Ning di Haiah Tahfidzil Qur'an, serta rekan-rekan di Pondok Putri Ayu.

11. Sahabat-sahabat seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika 2008 yang tidak dapat peneliti sebutkan satu persatu, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
12. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa moril maupun materiil.

Peneliti berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada pembaca khususnya bagi peneliti secara pribadi. *Amin Ya Rabbal'alamin.*

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, 27 September 2012

Peneliti

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b>	
<b>MOTO</b>	
<b>PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiv
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xv
<b>ABSTRAK</b> .....	xvi
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>المخلص</b> .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang Masalah .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	8
1.3 Tujuan Penelitian .....	8
1.4 Batasan Masalah .....	8
1.5 Manfaat Penelitian .....	9
1.6 Metode Penelitian .....	9
1.7 Sistematika Penulisan .....	10
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b> .....	12
2.1 Probabilitas dan Distribusi Probabilitas .....	12
2.2 Ekspektasi .....	13
2.3 Variansi .....	16
2.4 Kovarian .....	18
2.5 Distribusi Binomial .....	20
2.6 Distribusi Multinomial .....	23
2.7 Pengendalian Kualitas Secara Statistik .....	26
2.8 Grafik Pengendali Shewhart .....	29
2.9 Grafik Pengendali Kualitas untuk Data Variabel .....	34
2.10 Grafik Pengendali Kualitas untuk Data Atribut .....	37
2.11 Grafik Pengendali Proporsi Ketidaksesuaian .....	38
2.12 Logika Fuzzy .....	40
2.13 Variabel Linguistik .....	41
2.14 Grafik Pengendali Fuzzy .....	43
2.15 Pengendalian Kualitas dengan Fuzzy Menurut Pandangan Al-Qur'an .....	44

<b>BAB III PEMBAHASAN .....</b>	<b>47</b>
3.1 Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik Secara Teori.....	49
3.2 Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial Secara Teori.....	55
3.3 Perbandingan Secara Teoritis Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial.....	60
3.4 Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dengan Aplikasi Data.....	63
3.4.1. Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik.....	65
3.4.2. Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial.....	69
3.5 Hasil Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dengan Aplikasi Data.....	73
 <b>BAB IV PENUTUP .....</b>	 <b>76</b>
4.1 Kesimpulan.....	76
4.2 Saran.....	76
 <b>DAFTAR PUSTAKA</b>	
<b>LAMPIRAN</b>	

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik Pengendali untuk Proses Tidak Terkendali .....	32
Gambar 2.2 Grafik Pengendali untuk Proses Terkendali.....	32
Gambar 3.1 Ilustrasi Definisi $X_{hj}$ .....	47
Gambar 3.2 Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik .....	69
Gambar 3.3 Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial.....	72



## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Data Produksi Kertas, dengan 20 Pengamatan dan 40 Sampel.....	64
Tabel 3.2 Data Produksi Kertas, dengan 20 Pengamatan dan 40 Sampel.....	65
Tabel 3.3 Batas-batas Kendali Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik pada Data Produksi Kertas .....	68
Tabel 3.4 Data Produksi Kertas, dengan 20 Pengamatan dan 40 Sampel.....	70
Tabel 3.5 Batas-batas Kendali Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial pada Data Produksi Kertas .....	72
Tabel 3.6 Hasil Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dengan Aplikasi Data .....	74

## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

$X_{hj}$	: Hasil produksi sampel ke- $h$ pengamatan ke- $j$
$k_{ij}$	: Banyaknya unit sampel kategori ke- $i$ pada pengamatan ke- $j$
$r_i$	: Nilai representatif / derajat keanggotaan kategori ke- $i$
$M_j$	: Statistik sampel Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik
$\tilde{L}_j$	: Statistik sampel Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial
$SD_j$	: Standar deviasi sampel pada pengamatan ke- $j$
$MSD$	: Rata-rata standar deviasi dari $m$ pengamatan
$p_i$	: Probabilitas ketidaksesuaian kategori ke- $i$
$\hat{p}_{ij}$	: Penaksir tak bias $p_i$ , dengan $j = 1, 2, \dots, m$
$\bar{\hat{p}}_i$	: Rata-rata penaksir untuk $\hat{p}_{ij}$ dari $m$ pengamatan



## ABSTRAK

Zulfa, Mukhlis. 2012. **Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si  
(II) Abdul Aziz, M.Si

**Kata kunci:** Pengendalian kualitas, Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik, Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial, nilai representatif.

Grafik Pengendali Statistik merupakan teknik membuat grafik statistik yang nilainya diukur berdasarkan hasil plot karakteristik kualitas tertentu. Karakteristik kualitas suatu produk tertentu dapat direpresentasikan dengan nilai numerik dan ada pula yang tidak dapat direpresentasikan dengan nilai numerik, sehingga digunakan grafik pengendali atribut, grafik ini banyak digunakan untuk mengendalikan proses yang berkarakteristik atribut dua kategori. Sedangkan untuk mengendalikan proses yang berkarakteristik atribut dengan banyak atribut lebih besar sama dengan dua kategori, menggunakan Grafik Pengendali Fuzzy, diantaranya Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik yaitu menggunakan variabel linguistik yang tidak lain adalah sebuah himpunan fuzzy yang memiliki fungsi keanggotaan tertentu, dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial untuk memantau suatu proses multinomial. Statistik sampel yang digunakan untuk mengukur karakteristik kualitas Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik adalah  $M_j$ , sedangkan statistik sampel yang digunakan untuk mengukur karakteristik kualitas Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial adalah  $L_j$ . Pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik untuk menaksir standar deviasi dari statistik adalah grafik pengendali variabel untuk target, dinyatakan dengan  $\sigma_M$  dan pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial untuk menaksir standar deviasi dari statistik didasarkan pada distribusi multinomial, dinyatakan dengan  $\sigma_L$ . Pada kasus ini, dengan 20 pengamatan dan 40 sampel, hasil pengontrolan kualitas untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial lebih sensitif dalam mendeteksi titik *out of control* dibandingkan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik, karena pada Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial setiap pengamatan memiliki nilai batas kendali yang lebih sempit, selain itu Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial juga mendeteksi titik *out of control* lebih banyak dibandingkan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik.

## ABSTRACT

Zulfa, Mukhlis. 2012. **Comparison of Fuzzy Linguistic Control Charts and Fuzzy Multinomial Control Charts**. Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Supervisor: (I) Fachrur Rozi, M.Si

(II) Abdul Aziz, M.Si

Statistics control charts are the statistical technique to create statistical charts that value is measured based on the plot of a certain quality characteristics. Characteristics of the quality of a particular product can be represented by a numerical value and some can not be represented by a numerical value, so be used attribute control chart, this charts are widely used to control a process characterized by the attributes of the two categories. As for the control process that characteristic attribute with many attributes greater equal to two categories, using Fuzzy Control Charts, them Fuzzy Linguistics Charts Control that is using linguistic variables is nothing but a fuzzy set that has a certain membership function, and Fuzzy Multinomial Control Charts for monitoring a multinomial process. Sample statistic used to measure the quality characteristics Fuzzy Linguistic Control Charts are  $M_j$ , while Sample statistic used to measure the quality characteristics Fuzzy Multinomial Control Charts are  $L_j$ . The approach used Fuzzy Linguistic Control Charts for estimating the standard deviation of the statistics is control chart for the target variable, given by  $\sigma_M$  and the approach used Fuzzy Multinomial Control Charts for estimating the standard deviation of the statistics are based on multinomial distribution, given by  $\sigma_L$ . In this case, with 20 observations and 40 samples, the results of quality control for the Fuzzy Multinomial Charts Control more sensitive in detecting a point out of control compared Fuzzy Linguistic Control Charts, because for the Fuzzy Multinomial Control Charts every observation has a value that is more narrow border control, than Charts Control Fuzzy Multinomial it also detects a point out of control more than the Charts Control Fuzzy Linguistics.

**Keywords:** Quality control, Fuzzy Linguistic Control Charts, Fuzzy Multinomial Control Charts, the representative value.

## الملخص

زلفي، مخلص. ٢٠١٢ م. مقارنة بين رسوم بيانية فزّي لغويستيك و رسوم بيانية فزّي مولتينوميال. البحث الجامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.  
المشرف: (١) فخر الرازي الماجستير  
(٢) عبد العزيز الماجستير

**الكلمة الرئيسية:** مراقبة الجودة، رسوم بيانية فزّي لغويستيك، رسوم بيانية فزّي مولتينوميال، قيمة العضوية

الرسوم البيانية لمراقبة الإحصائية هي تقنيات خلق الرسم البياني التي يتم قياس قيمة تستند خصائص نوعية معينة. يمكن تمثيل خصائص نوعية منتج معين من قيمة رقمية و يمكن أن لا يمثل بعض القيم العددية، ذلك باستخدام الرسم البياني السمة، و هذا الرسوم تستخدم على نطاق واسع للسيطرة على عملية التي تتميز سمات يعزو كثير من فنتين. بل لمراقبة علي عملية العديد من السمات المميزة لأكثر من فنتين باستخدام الرسوم البيانية المتغيرة فزّي، هم رسوم بيانية فزّي لغويستيك باستخدام المتغيرات اللغوية التي ليست سوى مجموعة من فزّي لديها عضوية معينة، و رسوم بيانية فزّي مولتينوميال لمراقبة عملية متعدد الحدود. إحصائية العينة المستخدمة لقياس خصائص جودة رسوم بيانية لفزّي لغويستيك رمزا  $M_j$ ، و إحصائية العينة التي تقيس خصائص الجودة لرسوم بيانية لفزّي مولتينوميال رمزا  $L_j$ . المنهج المستخدم هو الرسوم البيانية فزّي لغويستيك لتقدير الانحراف المعياري من الإحصائية يعنى الرسوم البيانية المتغيرة لالهدف رمزا  $\sigma_M$ ، في حين أن المنهج المستخدم هو الرسوم البيانية فزّي مولتينوميال لتقدير الانحراف المعياري من الإحصائية استنادا إلى توزيع متعدد الحدود رمزا  $\sigma_L$ . في هذه الحالة، مع 20 الملاحظات وعينات 40، نتائج مراقبة الجودة لرسوم بيانية لفزّي مولتينوميال أكثر حساسية في الكشف عن نقطة خرجت عن نطاق السيطرة بالمقارنة لرسوم بيانية فزّي لغويستيك، في رسوم بيانية لفزّي مولتينوميال لكل ملاحظة له قيمة حدود السيطرة أضيق، إلى جانب رسوم بيانية لفزّي مولتينوميال يكشف أيضا نقطة خرجت عن نطاق السيطرة أكثر من رسوم بيانية فزّي لغويستيك.

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

#### **1.1 Latar Belakang Masalah**

Statistika merupakan salah satu cabang pengetahuan yang paling banyak mendapatkan perhatian dan dipelajari oleh ilmuwan dari hampir semua bidang ilmu pengetahuan, baik ilmu sosial, sains dan lain-lain, terutama peneliti yang dalam penelitiannya banyak menggunakan statistika sebagai dasar analisis maupun perancangannya. Dapat dikatakan bahwa statistika mempunyai sumbangan yang penting dan besar terhadap kemajuan berbagai bidang ilmu pengetahuan.

Montgomery (1990) menyebutkan bahwa statistika merupakan seni pengambilan keputusan tentang suatu proses atau populasi berdasarkan pada suatu analisis informasi yang terkandung di dalam suatu sampel dari populasi itu. Metode statistika memainkan peranan penting dalam jaminan kualitas. Metode statistika memberikan cara-cara pokok dalam pengambilan sampel produk, pengujian serta evaluasinya, dan informasi di dalam data itu digunakan untuk mengendalikan dan meningkatkan proses produksi.

Statistika adalah pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan atau penganalisisan data dan penarikan kesimpulan berdasarkan kumpulan data dan penganalisisan yang dilakukan. Agar dapat dengan mudah menganalisis data untuk mendapatkan informasi yang dibutuhkan, seorang peneliti dapat menyajikan data dalam statistik di antaranya dengan cara menampilkan data dalam bentuk tabel, maupun diagram atau grafik.

Adapun pembahasan diagram atau grafik pada penelitian ini adalah mengenai grafik pengendali kualitas statistik. Grafik pengendali kualitas statistik adalah metode pengendalian kualitas produk/jasa agar sesuai dengan spesifikasi yang telah ditetapkan dengan menggunakan konsep statistik.

Kualitas atau mutu merupakan karakter utama pada produk atau dalam suatu perusahaan agar tetap bertahan. Ada berbagai cara untuk mempertahankan kualitas, salah satunya adalah dengan menggunakan Pengendalian Kualitas Statistik (*Statistical Quality Control*). Berbicara mengenai kualitas atau mutu, sebagaimana telah tersirat pada makna ayat dalam al-Qur'an surat az-Zumar ayat 23 berikut:

اللَّهُ نَزَّلَ أَحْسَنَ الْحَدِيثِ كِتَابًا مُتَشَابِهًا مَثَانِيَ تَقْشَعِرُّ مِنْهُ جُلُودُ الَّذِينَ يَخْشَوْنَ رَبَّهُمْ ثُمَّ تَلِينُ جُلُودُهُمْ وَقُلُوبُهُمْ إِلَىٰ ذِكْرِ اللَّهِ ۚ ذَٰلِكَ هُدَىٰ اللَّهِ يَهْدِي بِهِ ۖ مَنْ يَشَاءُ ۚ وَمَنْ يُضَلِّ اللَّهُ فَمَا لَهُ مِنْ هَادٍ ۖ ﴿٢٣﴾

*Artinya: "Allah telah menurunkan perkataan yang paling baik (yaitu) Al Quran, yang serupa (mutu ayat-ayatnya) lagi berulang-ulang, gemetar karenanya kulit orang-orang yang takut kepada Tuhannya, kemudian menjadi tenang kulit dan hati mereka di waktu mengingat Allah. Itulah petunjuk Allah, dengan kitab itu Dia menunjuki siapa yang dikehendakinya. Dan barangsiapa yang disesatkan Allah, niscaya tak ada baginya seorang pemimpinpun."*

Pada ayat di atas, beberapa ayat yang serupa mutunya dalam al-Qur'an disebutkan berulang-ulang, maksud dari berulang-ulang di sini ialah hukum-hukum, pelajaran, dan kisah-kisah itu diulang-ulang menyebutnya dalam al-Qur'an supaya lebih kuat pengaruhnya dan lebih meresap.

Sebagaimana pada paragraf sebelumnya, bahwa salah satu cara untuk mempertahankan kualitas atau mutu adalah dengan pengendalian. Berikut salah satu ayat al-Qur'an yang melandasi pemahaman serta seruan terhadap pentingnya pengendalian serta pengawasan dalam menjalankan aktivitas di muka bumi ini antara lain dalam surat al-Maidah ayat 8 sebagai berikut:

يَأَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا كُونُوا قَوَّامِينَ لِلَّهِ شُهَدَاءَ بِالْقِسْطِ ۗ وَلَا يَجْرِمَنَّكُمْ شَنَاٰنُ قَوْمٍ عَلَىٰ ءَلَّا تَعْدِلُوا ۗ اَعْدِلُوا هُوَ اَقْرَبُ لِلتَّقْوَىٰ ۗ وَاتَّقُوا اللَّهَ ۗ اِنَّ اللَّهَ خَبِيْرٌۢ بِمَا تَعْمَلُوْنَ ﴿٨﴾

*Artinya: "Hai orang-orang yang beriman hendaklah kamu menjadi orang-orang yang selalu menegakkan (kebenaran) karena Allah, menjadi saksi dengan adil, dan janganlah sekali-kali kebencianmu terhadap suatu kaum, mendorong kamu untuk berlaku tidak adil. Berlaku adillah, karena adil itu lebih dekat kepada takwa. dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan."*

Ayat tersebut diserukan kepada manusia agar dalam seluruh aktivitasnya, hendaknya menjadi orang yang selalu berpedoman pada jalan Allah SWT, manusia wajib selalu menegakkan kebenaran karena Allah SWT. Untuk membuktikan bahwa yang dilakukan telah benar dan sesuai dengan ajaran Allah SWT serta aturan yang ada, maka harus dilakukan pemeriksaan oleh orang yang mengerti tentang aktivitas tersebut. Semua ini dilakukan semata-mata agar manusia menjadi orang yang beriman. Dalam konteks produksi, suatu kualitas atau mutu suatu produk agar dapat dikatakan sesuai spesifikasi maka perlu dilakukan suatu pengendalian agar produk tersebut bisa terkendali dari ketidaksesuaian.

Menurut Grant dan Leavenworth (1993), salah satu alat terpenting dalam *Statistical Quality Control* (SQC) adalah Grafik Pengendali Shewhart (*Shewhart Control Chart*), dinamakan demikian karena teknik ini pertama kali dikenalkan dan dikembangkan oleh Dr. Walter A. Shewhart pada tahun 1920-an sewaktu ia bekerja pada *Bell Telephone Laboratories*.

Pengendali Kualitas Statistik dapat juga digunakan untuk menaksir parameter suatu proses produksi dan menentukan kemampuan proses, dan dapat juga memberi informasi yang berguna dalam meningkatkan proses itu. Grafik pengendali dapat diklasifikasikan ke dalam dua tipe umum, yaitu grafik pengendali untuk data variabel dan grafik pengendali untuk data atribut. Apabila karakteristik kualitas dapat diukur dan dinyatakan dalam bilangan, biasanya menggunakan grafik pengendali variabel, dan jika karakteristik kualitas tidak diukur dengan skala kuantitatif biasanya menggunakan grafik pengendali atribut (sifat).

Grafik pengendali ini berguna dalam membantu mendeteksi kesalahan-kesalahan khusus yang terjadi selama proses produksi. Kesalahan-kesalahan khusus tersebut dapat ditunjukkan dengan adanya titik-titik yang keluar dari batas-batas yang sudah ditentukan.

Misalkan  $w$  merupakan sampel statistik yang mengukur beberapa karakteristik kualitas dan menganggap bahwa rata-rata dari  $w$  adalah  $\mu_w$  serta standar deviasi dari  $w$  adalah  $\sigma_w$ . Kemudian pada batas-batas kendali, yaitu *UCL* (*Upper Control Limit*) adalah batas kendali atas, *CL* (*Center Line*) adalah garis

tengah, dan *LCL* (*Lower Control Limit*) adalah batas kendali bawah, dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$UCL = \mu_w + k\sigma_w \qquad CL = \mu_w \qquad LCL = \mu_w - k\sigma_w$$

dimana  $k$  merupakan “jarak” batas kendali dari garis tengah, dinyatakan dalam satuan standar deviasi (Amirzadeh, dkk. 2008).

Firman Allah SWT dalam surat al-Maidah ayat 87:

يٰۤاَيُّهَا الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا لَا تَحْرَمُوْا طَيِّبٰتِ مَاۤ اَحَلَّ اللّٰهُ لَكُمْ وَلَا تَعْتَدُوْا ۗ اِنَّ اللّٰهَ لَا يُحِبُّ  
 الْمُعْتَدِيْنَ ﴿٨٧﴾

*Artinya: “Hai orang-orang yang beriman, janganlah kamu haramkan apa-apa yang baik yang telah Allah halalkan bagi kamu, dan janganlah kamu melampaui batas. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang melampaui batas.”*

Dari ayat di atas dapat ditelaah, bahwasanya Allah SWT tidak menyukai orang-orang yang melampaui batas. Batas di sini, ada batas atas dan juga batas bawah. Melampaui batas berarti keluar dari batas atas maupun batas bawah yaitu keluar dari aturan-aturan yang telah ditentukan, yang terbaik adalah yang sesuai aturan atau sesuai spesifikasi yang telah ditentukan yaitu berada di sekitar garis tengah.

Grafik Pengendali Statistik merupakan teknik membuat grafik statistik yang nilainya diukur berdasarkan hasil plot karakteristik kualitas tertentu. Grafik pengendali digunakan untuk mengetahui apakah proses berada dalam kendali secara statistik atau tidak (Montgomery, 1990:125).

Karakteristik kualitas suatu produk tertentu dapat direpresentasikan dengan nilai numerik dan ada pula yang tidak dapat direpresentasikan dengan nilai numerik. Misal karakteristik kualitas seperti penampilan, kelembutan, dan warna,



tidak dapat diwakili dengan nilai numerik, sehingga digunakan grafik pengendali atribut, umumnya Grafik Pengendali  $p$ . Grafik Pengendali  $p$  menurut Montgomery (1990) merupakan grafik pengendali atribut yang berhubungan dengan bagian produk tak sesuai atau cacat yang diproduksi oleh suatu proses produksi, atau dinamakan juga dengan grafik pengendali untuk bagian ketidaksesuaian. Grafik ini banyak digunakan untuk mengendalikan proses yang berkarakteristik atribut dengan banyak atribut dua kategori.

Pada dasarnya Grafik Pengendali  $p$  menggunakan proporsi yaitu banyaknya sampel yang tak sesuai (tidak memenuhi syarat) dibagi dengan banyaknya sampel, mungkin tidak tepat digunakan pada beberapa keadaan, seperti data jumlah ketidaksesuaian yang tersedia adalah “mendekati 4”, “di antara 5 sampai 8” atau “sekitar 6”. Sehingga, tidak bisa secara langsung dikelompokkan ke dalam suatu kelompok atau himpunan tertentu, maka perlu digunakan analisis pengontrolan dengan teori himpunan dan logika fuzzy (Hidayat, 2006).

Jika dalam pengontrolan/pengendalian kualitas untuk data atribut terdapat klasifikasi seperti “kerusakan ringan, sedang, dan berat”, dan “kecepatan berkendara pelan, sedang, dan cepat”, maka dalam pengendalian kualitas tersebut digunakan pendekatan fuzzy untuk menyelesaikan permasalahan yang lebih kompleks. Grafik Pengendali Fuzzy sangat sesuai digunakan untuk observasi yang menghasilkan data (informasi) yang tidak pasti, kurang jelas dan berdasarkan subjektivitas (persepsi) seseorang. Teori fuzzy juga digunakan sebagai dasar untuk menginterpretasi derajat kesesuaian produk. Sementara ini yang peneliti

ketahui mengenai grafik pengendali fuzzy ada dua, yaitu Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial.

Pada penelitian sebelumnya, Hidayat (2006) membahas pengendalian proses produksi yang berkarakteristik atribut dengan banyak atribut lebih dari dua kategori, yaitu menggunakan Grafik Pengendali Variabel Fuzzy Linguistik, yang pada dasarnya Grafik Pengendali Variabel Fuzzy Linguistik menggunakan variabel linguistik yang tidak lain adalah sebuah himpunan fuzzy yang memiliki fungsi keanggotaan tertentu, dan pada penelitian Amirzadeh dkk., mengenalkan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial untuk memantau suatu proses multinomial. Batas kendali pada Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial diperoleh dengan menggunakan distribusi multinomial dan derajat keanggotaan yang ditetapkan pada kategori yang berbeda.

Grafik Pengendali Variabel Linguistik digunakan untuk mengendalikan proses yang berkarakteristik atribut, dengan banyak atribut lebih besar sama dengan dua kategori. Pada suatu item dapat ditetapkan suatu variabel linguistik tertentu untuk menggambarkan kondisi dari item tersebut, misalnya *reject*, jelek, cukup, baik, dan sempurna. Kumpulan teori fuzzy dapat memenuhi proses model dimana observasi yang tidak pasti, samar-samar/kurang jelas dan atau berdasarkan subjektivitas persepsi seseorang. Hal ini akan bisa dipenuhi jika digunakan Grafik Pengendali Fuzzy, karena grafik pengendali fuzzy ini bisa digunakan untuk data yang memuat unsur ketidakpastian.

Secara harfiah, fuzzy diartikan kabur atau samar-samar. Dalam himpunan fuzzy memuat unsur-unsur keanggotaan yang tidak bisa dinyatakan

secara tegas benar atau salah. Dalam himpunan fuzzy dikenal derajat keanggotaan yang memiliki rentang nilai antara 0 (nol) hingga 1 (satu), seberapa besar suatu nilai dapat bernilai benar atau salah tergantung pada derajat keanggotaan yang dimilikinya, berbeda dengan himpunan *crisp* (tegas) yang hanya memiliki nilai keanggotaan 1 (ya) atau 0 (tidak).

Dalam kajian ini, pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik untuk menaksir standar deviasi dari statistik adalah grafik pengendali variabel untuk target, sedangkan pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial untuk menaksir standar deviasi dari statistik didasarkan pada distribusi multinomial.

Sebagaimana uraian di atas, peneliti termotivasi untuk mengkaji dan membandingkan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dengan judul “*Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial*”.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimana analisis perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial?”

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Dari rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui hasil analisis perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial.

#### **1.4 Batasan Masalah**

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah, serta tujuan dari penelitian, agar penelitian ini sesuai dengan tujuan yang dimaksud dan agar pembahasan tidak meluas, serta tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka sangat perlu peneliti memberikan batasan masalah, yaitu analisis perbandingan secara teori dan aplikasi batas kendali grafik pengendali fuzzy pada penelitian ini hanya untuk ukuran sampel yang sama.

#### **1.5 Manfaat Penelitian**

Sebagaimana yang telah dikemukakan dalam latar belakang dan rumusan masalah, serta tujuan penelitian, maka penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi peneliti dan pembaca dalam kaitannya dengan pengembangan ilmu statistik dan dapat memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperdalam dan memperkaya wawasan mengenai pengontrolan atau pengendalian kualitas proses statistik dan stabilitas proses.

Penelitian ini juga dapat dijadikan sebagai referensi bagi pembaca mengenai Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial, serta perbedaan dari kedua grafik pengendali fuzzy tersebut.

#### **1.6 Metode Penelitian**

Penelitian ini menggunakan penelitian kepustakaan (*library research*) yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi terkait pembahasan dalam penulisan penelitian ini, seperti buku, jurnal, serta dokumen catatan.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Analisis Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik
  - a. Mendefinisikan statistik yang akan dikontrol
  - b. Menentukan nilai ekspektasi yang akan digunakan untuk *center line*
  - c. Menentukan nilai batas pengendali fuzzy linguistik
2. Analisis Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial
  - a. Mendefinisikan statistik yang akan dikontrol
  - b. Menentukan nilai ekspektasi yang akan digunakan untuk *center line*
  - c. Menentukan nilai batas kendali fuzzy multinomial
3. Membandingkan hasil pengendalian kualitas antara Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial
  - a. Membandingkan secara teori Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial
    - i. Menaksir  $\mu$  untuk Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan menaksir  $\mu$  untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial
    - ii. Menaksir  $\sigma$  untuk Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan menaksir  $\sigma$  untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial
    - iii. Menentukan batas kendali untuk Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial
  - b. Membandingkan secara aplikasi dari hasil Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan dari hasil Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial
4. Membuat kesimpulan

### 1.7 Sistematika Penulisan

Peneliti menyusun sistematika penulisan sebagai berikut agar dalam pembahasan penelitian ini tersusun secara sistematis:

- BAB I : Pendahuluan, berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB II : Kajian pustaka, kajian yang berisi teori-teori pendukung tentang Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial serta Pengendalian Kualitas dengan Fuzzy menurut pandangan Al-qur'an.
- BAB III : Pembahasan, berupa hasil penelitian yang menganalisis perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial.
- BAB IV : Penutup, berisi kesimpulan dan saran yang berkaitan dengan penulisan kajian ini.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Probabilitas dan Distribusi Probabilitas

Teori probabilitas atau yang sering disebut dengan teori kemungkinan merupakan konsep dasar dari ilmu statistik. Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai suatu kejadian maupun pernyataan yang mengandung suatu ketidakpastian, kejadian tersebut mungkin terjadi dan mungkin juga tidak terjadi. Misalnya kemungkinan seorang siswa lulus dari Ujian Akhir Nasional, kemungkinan seorang atlet memenangkan pertandingan, dan lain-lain. Peristiwa tersebut mempunyai tingkat kemungkinan yang berbeda-beda, ada yang tingkat kemungkinan terjadinya besar dan ada yang tingkat kemungkinan terjadinya kecil. Harini dan Kusumawati (2007) menyebutkan bahwa ada dua macam pendekatan dalam menginterpretasikan probabilitas, yaitu pendekatan probabilitas secara klasik dan pendekatan probabilitas dengan konsep frekuensi relatif.

Misal kita ambil kejadian  $A$  dalam himpunan kemungkinan hasil suatu percobaan  $S$ . Jika kejadian  $A$  mempunyai unsur  $n_A$  dan himpunan kemungkinan hasil suatu percobaan dengan unsur sebanyak  $n$  (ada  $n_A$  pada  $A$  dan  $n$  pengamatan pada  $S$ ). Maka:

**Definisi 1.** (Harini dan Kusumawati, 2007:61)

Probabilitas terjadinya  $A$  ditulis dengan  $P(A)$  adalah nisbah antara banyak unsur/pengamatan pada  $A$  dengan banyak unsur hasil yang mungkin (unsur dalam  $S$ ) dari suatu percobaan.

$$P(A) = \frac{nA}{n} \quad (2.1)$$

dimana:  $nA$  = banyaknya/frekuensi kejadian  $A$

$n$  = banyaknya percobaan yang dilakukan (banyaknya pengamatan atau total frekuensi)

**Definisi 2.** (Walpole dan Myers, 1995:54)

Fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi probabilitas peubah acak diskrit  $X$  bila untuk setiap kemungkinan hasil  $x$ , berlaku:

1.  $f(x) \geq 0$
2.  $\sum_x f(x) = 1$
3.  $P(X = x) = f(x)$

**Definisi 3.** (Walpole dan Myers, 1995:60)

Fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi probabilitas peubah acak kontinu  $X$ , yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan riil  $R$  bila berlaku:

1.  $f(x) \geq 0$ , untuk semua  $x \in R$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
3.  $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$

## 2.2 Ekspektasi

**Definisi 4.** (Walpole dan Myers, 1995:94)

Misalkan  $X$  suatu peubah acak dengan distribusi probabilitas  $f(x)$ . Nilai harapan atau rata-rata  $X$  adalah



$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$$

bila  $X$  diskrit, dan

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

bila  $X$  kontinu.

$E(X)$  disebut ekspektasi matematika dari  $X$ , disebut pula sebagai nilai mean (*mean value*) dari  $X$ . Simbol  $E(X)$  sering pula disajikan sebagai  $\mu_x$  atau  $\mu$ .

Misalkan jika dua buah mata uang dilempar sebanyak 16 kali, misalkan  $X$  adalah jumlah muka yang muncul, maka  $X$  dapat bernilai 0, 1, dan 2. Misalkan eksperimen tadi menghasilkan kejadian dengan frekuensi sebagai berikut: tanpa muka sebanyak 4 kali, muncul 1 muka sebanyak 7 kali, dan muncul 2 muka sebanyak 5 kali. Maka rata-rata muncul muka dari setiap pelemparan adalah:

$$\frac{(0)(4) + (1)(7) + (2)(5)}{16} = 1.06$$

Kalau mata uang tersebut rata (*fair*) antara muka dan belakang, maka probabilitas dari  $P(X=0) = \frac{1}{4}$ ,  $P(X=1) = \frac{1}{2}$ , dan  $P(X=2) = \frac{1}{4}$ , sehingga rataan

dari  $X$  adalah:

$$\mu = E(X) = (0)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

Artinya, jika seseorang melempar dua mata uang terus-menerus maka rata-rata akan mendapatkan 1 muka pada setiap pelemparan.

Rata-rata hitung atau nilai tengah (*mean*), dengan lambang  $\mu$  (sebagaimana definisi di atas) untuk populasi dan  $\bar{x}$  untuk sampel merupakan ukuran pemusatan. Rata-rata hitung untuk sampel dibedakan menjadi dua, yaitu rata-rata hitung data yang tidak berkelompok yaitu jumlah seluruh nilai pengamatan (data) dibagi dengan banyaknya data ( $n$ ) dan rata-rata hitung data berkelompok atau data yang telah disederhanakan dalam bentuk tabel frekuensi. (Turmudzi dan Harini, 2008:79)

**Definisi 5.** (Turmudzi dan Harini, 2008:79)

Misalkan  $x$  suatu peubah acak dengan nilai pengamatan  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , maka rata  $\bar{x}$  adalah

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2.2)$$

atau

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.3)$$

bila data tidak berkelompok, dan

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} \quad (2.4)$$

atau

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \quad (2.5)$$

bila data berkelompok, perhitungannya menggunakan faktor penimbang, yaitu frekuensi tiap-tiap kelas.

### 2.3 Variansi

Ukuran penyebaran yang memegang peranan penting dalam setiap pengujian statistik parametrik adalah ragam atau variansi yang diberi simbol  $\sigma^2$  untuk populasi berukuran besar (tak terbatas) dan  $s^2$  untuk sampel atau populasi yang terbatas.

**Definisi 6.** (Walpole dan Myers, 1995:104)

Misalkan  $X$  peubah acak dengan distribusi probabilitas  $f(x)$  dan rata-rata  $\mu$ , maka untuk variansi  $X$  adalah:

$$\sigma^2 = E\left((X - \mu)^2\right) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

bila  $X$  diskrit, dan

$$\sigma^2 = E\left((X - \mu)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

bila  $X$  kontinu. Akar positif variansi,  $\sigma$ , disebut simpangan baku  $X$ .

**Teorema 1.** (Walpole dan Myers, 1995:105)

Misalkan  $X$  peubah acak dengan distribusi probabilitas  $f(x)$  dan rata-rata  $\mu$ .

Variansi peubah acak  $X$  adalah

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

**Bukti:**

Untuk kasus diskrit

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\left((X - \mu)^2\right) && \text{(definisi 6)} \\ &= \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) \\
&= \sum_x (x^2) f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x) \\
&= \sum_x (x^2) f(x) - 2\mu \mu + \mu^2 \cdot 1 && \text{(definisi 4 dan 2)} \\
&= \sum_x (x^2) f(x) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \sum_x (x^2) f(x) - \mu^2 && \text{(definisi 4)} \\
&= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}$$

Untuk kasus kontinu

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E((X - \mu)^2) && \text{(definisi 6)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2) f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx && \text{(definisi 4 dan 3)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2) f(x) - 2\mu \mu + \mu^2 \cdot 1 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2) f(x) - 2\mu^2 + \mu^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2) f(x) - \mu^2 dx
\end{aligned}$$

$$= E(X^2) - \mu^2 \quad (\text{definisi 4})$$

Variansi  $s^2$  untuk sampel dibedakan menjadi dua, yaitu untuk data yang tidak berkelompok dan untuk data berkelompok.

**Definisi 7.** (Harini dan Kusumawati, 2007:43)

Misalkan  $x$  suatu peubah acak dengan nilai pengamatan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan rata-rata  $\bar{x}$ . Variansi peubah acak  $x$  adalah

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.6)$$

bila data tidak berkelompok, dan

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.7)$$

bila data berkelompok, perhitungannya menggunakan faktor penimbang, yaitu frekuensi tiap-tiap kelas.

## 2.4 Kovarian

**Definisi 8.** (Walpole dan Myers, 1995:108)

Misalkan  $X$  dan  $Y$  peubah acak dengan distribusi probabilitas gabungan  $f(x,y)$ .

Kovariansi  $X$  dan  $Y$  adalah

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y)$$

bila  $X$  dan  $Y$  diskrit, dan

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy$$

bila  $X$  dan  $Y$  kontinu.

**Teorema 2.** (Walpole dan Myers, 1995:109)

Kovariansi dua peubah acak  $X$  dan  $Y$  dengan rata-rata, masing-masing,  $\mu_X$  dan  $\mu_Y$  diberikan oleh

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

**Bukti:**

Untuk kasus diskrit

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) && \text{(definisi 8)} \\ &= \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y (xy - \mu_X y - \mu_Y x - \mu_X \mu_Y) f(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y xyf(x, y) - \mu_X \sum_x \sum_y yf(x, y) - \mu_Y \sum_x \sum_y xf(x, y) + \mu_X \mu_Y \sum_x \sum_y f(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y xyf(x, y) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y && \text{(definisi 4 dan 2)} \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y && \text{(definisi 4)} \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

Untuk kasus kontinu

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) && \text{(definisi 8)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy - \mu_X y - \mu_Y x - \mu_X \mu_Y) f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) - \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) - \mu_Y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) + \mu_X \mu_Y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y \quad (\text{definisi 4 dan 3}) \\
&= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y \quad (\text{definisi 4}) \\
&= E(XY) - \mu_X \mu_Y
\end{aligned}$$

## 2.5 Distribusi Binomial

Distribusi Binomial sebenarnya dikembangkan dari suatu proses yang disebut proses Bernoulli, yaitu proses sampling yang urutan percobaan atau observasinya merupakan kejadian independen, probabilitas munculnya gejala yang diharapkan disebut probabilitas “sukses” dan “gagal”. Probabilitas sukses dilambangkan dengan ‘ $p$ ’ dan probabilitas gagal dilambangkan ‘ $1 - p$ ’.

**Definisi 9.** (Dudewicz dan Mishra, 1995:93)

Suatu peubah acak  $X$  yang mempunyai distribusi Bernoulli jika (untuk suatu  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ ).

$$P(X = x) = f_X(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & \text{bila } x = 0 \text{ atau } 1 \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

**Teorema 3.** (Dudewicz dan Mishra, 1995:259)

Bila  $X$  berdistribusi Bernoulli maka  $E(X) = p$  dan  $\text{var}(X) = p(1-p)$

**Bukti:**

$$E(X) = \sum_x xf(x) \quad (\text{definisi 4})$$

$$= 0 \cdot p^0 (1-p)^{1-0} + 1 \cdot p^1 (1-p)^{1-1} \quad (\text{definisi 9})$$

$$= 0 \cdot 1 \cdot (1-p)^1 + 1 \cdot p \cdot (1-p)^0$$

$$= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) \quad (\text{definisi 4})$$

$$= (0)^2 \cdot p^0 (1-p)^{1-0} + (1)^2 \cdot p^1 (1-p)^{1-1} \quad (\text{definisi 9})$$

$$= (0)^2 \cdot p^0 (1-p)^1 + (1)^2 \cdot p^1 (1-p)^0$$

$$= (0)^2 \cdot (1-p) + (1)^2 \cdot p = p$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (\text{teorema 1})$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1-p)$$

**Definisi 10.** (Adiningsih, 2009:56)

Bila eksperimen acak memungkinkan timbulnya 2 *outcome* yang bersifat *mutually exclusive* dan *collectively exhaustive*, “sukses” dan “gagal”,  $p$  adalah probabilitas sukses terjadi dalam satu percobaan. Bila dilakukan  $n$  kali percobaan independen, distribusi jumlah sukses  $x$  terjadi disebut sebagai Distribusi Binomial dengan fungsi probabilitas:

$$f_x(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

dimana:

$x$  = banyaknya sukses yang terjadi dalam  $n$  kali percobaan ;  $x = 1, 2, \dots, n$



$p$  = probabilitas sukses

$n$  = banyaknya percobaan

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$  disebut  $n$  faktorial

**Teorema 4.** (Walpole dan Myers, 1995:134)

Distribusi Binomial  $B(X; n, p)$  mempunyai rata-rata  $\mu = np$  dan variansi

$$\sigma^2 = np(1-p).$$

**Bukti:**

Misalkan hasil pada usaha ke- $j$  dinyatakan oleh peubah acak Bernoulli  $I_j$  yang mendapat nilai 0 atau 1, masing-masing dengan peluang  $1-p$  dan  $p$ . Peubah Bernoulli  $I_j$  dengan nilai seperti ini disebut peubah petunjuk. Jadi, banyaknya sukses dalam suatu percobaan Binomial dapat dituliskan sebagai jumlah  $n$  peubah petunjuk bebas, sehingga

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

diperoleh rata-rata distribusi Binomial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n) \\ &= p + p + \dots + p && \text{(teorema 3)} \\ &= np \end{aligned}$$

dan diperoleh variansi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \dots + \sigma_{I_n}^2 \\ &= p(1-p) + p(1-p) + \dots + p(1-p) && \text{(teorema 3)} \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

## 2.6 Distribusi Multinomial

Jika pada distribusi binomial digunakan untuk sejumlah sukses dari  $n$  percobaan yang independen, dimana seluruh hasil (*outcomes*) dikategorikan ke dalam dua kelompok (sukses dan gagal). Maka distribusi multinomial digunakan untuk penentuan probabilitas hasil yang dikategorikan ke dalam lebih dari dua kelompok.

Percobaan binomial menjadi percobaan multinomial bila tiap usaha dapat memberikan lebih dari dua hasil yang mungkin. Umumnya, bila suatu usaha dapat menghasilkan  $k$  hasil yang mungkin  $E_1, E_2, \dots, E_k$  dengan peluang  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , maka distribusi multinomial akan memberikan probabilitas bahwa  $E_1$  terjadi sebanyak  $x_1$  kali, probabilitas  $E_2$  terjadi  $x_2$  kali, sampai probabilitas  $E_k$  terjadi  $x_k$  kali dalam  $n$  usaha bebas dengan  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ .

**Definisi 11.** (Walpole dan Myers, 1995:136)

Bila dari suatu percobaan diperoleh  $k$  macam hasil  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , dengan probabilitas  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , maka distribusi probabilitas dari suatu variabel acak  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , yang menyatakan banyak terjadinya  $E_1, E_2, \dots, E_k$  dalam  $n$  kali percobaan adalah:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k; n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

dengan

$$\sum_{i=1}^k x_i = n \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

**Teorema 5.** (Walpole dan Myers, 1995:136)

Nilai harapan atau ekspektasi dan variansi untuk distribusi multinomial adalah

$$E(X_i) = np_i \text{ dan } \text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i); \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, k$$

**Bukti:**

$$E(X_i) = \sum_{x=1}^n x \cdot P(X_i = x) \quad (\text{definisi 3})$$

$$= \sum_{x=1}^n x \cdot \binom{n}{x} p_i^x (1 - p_i)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p_i^x (1 - p_i)^{n-x} \quad (\text{definisi 10})$$

$$= \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{x \cdot (x-1)! (n-x)!} p_i \cdot p_i^{x-1} (1 - p_i)^{n-x}$$

$$= np_i \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)! (n-x)!} p_i^{x-1} (1 - p_i)^{n-x}$$

misalkan  $m = n - 1$  dan  $s = x - 1$ , maka persamaan di atas menjadi:

$$E(X_i) = np_i \sum_{s=0}^m \frac{m!}{s!(m-s)!} p_i^s (1 - p_i)^{m-s}$$

Berdasarkan definisi 1, yaitu:

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p_i^x (1 - p_i)^{n-x} = (p_i + (1 - p_i))^n = 1^n = 1$$

sehingga,

$$\sum_{s=0}^m \frac{m!}{s!(m-s)!} p_i^s (1 - p_i)^{m-s} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{maka, } E(X_i) &= np_i \sum_{s=0}^m \frac{m!}{s!(m-s)!} p_i^s (1-p_i)^{m-s} \\ &= np_i \cdot 1 = np_i \end{aligned}$$

dan variansi untuk distribusi multinomial adalah

$$\text{Var}(X_i) = np_i(1-p_i)$$

**Bukti:**

$$\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2$$

Dalam mencari  $\text{Var}(X_i)$ , kita harus mengetahui nilai ekspektasi dari  $X_i^2$ :

$$E(X_i^2) = \sum_{x=1}^n x^2 P(X_i = x) \quad (\text{definisi 2})$$

$$= \sum_{x=1}^n x^2 \cdot \binom{n}{x} p_i^x (1-p_i)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^n x^2 \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p_i^x (1-p_i)^{n-x} \quad (\text{definisi 10})$$

$$= \sum_{x=1}^n x^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{x \cdot (x-1)! (n-x)!} p_i \cdot p_i^{x-1} (1-p_i)^{n-x}$$

$$= np_i \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{(n-1)!}{(x-1)! (n-x)!} p_i^{x-1} (1-p_i)^{n-x}$$

misalkan  $m = n - 1$  dan  $s = x - 1$ , maka persamaan di atas menjadi:

$$E(X_i^2) = np_i \sum_{s=0}^m (s+1) \frac{m!}{s!(m-s)!} p_i^s (1-p_i)^{m-s} = np_i \sum_{s=0}^m (s+1) \binom{m}{s} p_i^s (1-p_i)^{m-s}$$

$$= np_i \left( \sum_{s=0}^m s \cdot \binom{m}{s} p_i^s (1-p_i)^{m-s} + \sum_{s=0}^m 1 \cdot \binom{m}{s} p_i^s (1-p_i)^{m-s} \right)$$

$$= np_i(mp_i + 1)$$

$$= np_i((n-1)p_i + 1) = np_i(np_i - p_i + 1)$$

Sehingga didapatkan  $\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2$

$$= np_i(np_i - p_i + 1) - (np_i)^2$$

$$= (np_i)^2 - np_i^2 + np_i - (np_i)^2$$

$$= np_i - np_i^2$$

$$= np_i(1 - p_i)$$

## 2.7 Pengendalian Kualitas Secara Statistik

Dalam dunia industri, mutu atau kualitas barang yang dihasilkan merupakan faktor yang sangat penting. Barang yang dihasilkan ditentukan kualitasnya berdasarkan pengukuran atau penilaian karakteristik-karakteristik tertentu. Hasil pengukuran yang dipakai untuk penentuan kualitas barang, harganya berubah-ubah dari produk yang satu ke produk lainnya meskipun kondisi proses produksi dapat diusahakan sama. Dengan demikian timbullah variasi kualitas.

Menurut Sudjana (2005), ditinjau dari statistika, ada dua macam variasi kualitas, yaitu:

- a. Bersifat *probabilistik*, yaitu variasi yang terjadi karena secara kebetulan dan tidak dapat dielakkan.
- b. Bersifat *eratik*, yaitu variasi yang terjadi tidak menentu dikarenakan timbulnya penyebab tak wajar.

Suatu proses dengan variasi kualitas yang bersifat *probabilistik* dan memenuhi spesifikasi tertentu, dikatakan bahwa proses berjalan dalam kendali. Dalam hal ini, proses dibiarkan terus berlangsung. Namun, jika terjadi proses dengan variasi kualitas yang bersifat eratik, maka proses dikatakan di luar kendali dan harus ditemukan penyebabnya kemudian dihilangkan. Dengan kata lain, proses yang keluar dari kendali harus dihentikan dan diperbaiki supaya terjadi proses dalam kendali. Untuk dapat melakukan hal ini, maka perlu diadakan pengendalian kualitas.

Tujuan dari pengendalian kualitas adalah menyidik dengan cepat sebab-sebab terduga atau pergeseran proses sedemikian hingga penyelidikan terhadap proses itu dan tindakan pembetulan dapat dilakukan sebelum terlalu banyak produk yang tidak sesuai dengan standar produk yang diinginkan. Tujuan akhir dari pengendalian kualitas adalah menyingkirkan variabilitas dalam proses (Montgomery, 1990:120). Variabilitas yang dimaksud adalah variabilitas antar sampel (misalnya rata-rata atau nilai tengah) dan variabilitas dalam sampel (misalnya *range* atau standar deviasi). Apabila diambil sampel dari populasi yang sama, variasi statistik akan terjadi dari sampel ke sampel dan variasi *range* dapat dihitung, bentuk ini merupakan dasar dari batas yang dihitung pada grafik pengendali (*control chart*).

Dalam mendeteksi keragaman dalam proses diperlukan ketelitian yang tinggi dalam bekerja, agar dalam penyingkiran keragaman semakin cepat dilakukan, sehingga dalam perbaikan proses produksi untuk menghasilkan hasil produksi yang baik akan semakin cepat pula dilakukan. Di dalam al-Qur'an

dijelaskan tentang pekerjaan yang baik untuk mengurangi atau menghilangkan kesalahan-kesalahan yang dilakukan. Sebagaimana firman Allah dalam surat an Nisaa' ayat 146:

إِلَّا الَّذِينَ تَابُوا وَأَصْلَحُوا وَاعْتَصَمُوا بِاللَّهِ وَأَخْلَصُوا دِينَهُمْ لِلَّهِ فَأُولَٰئِكَ مَعَ  
 الْمُؤْمِنِينَ ۖ وَسَوْفَ يُؤْتِي اللَّهُ الْمُؤْمِنِينَ أَجْرًا عَظِيمًا

*Artinya: "Kecuali orang-orang yang taubat dan mengadakan perbaikan dan berpegang teguh pada (agama) Allah dan tulus ikhlas (mengerjakan) agama mereka karena Allah. Maka mereka itu adalah bersama-sama orang yang beriman dan kelak Allah akan memberikan kepada orang-orang yang beriman pahala yang besar."*

Maksud dari mengadakan perbaikan yaitu berbuat pekerjaan-pekerjaan yang baik untuk menghilangkan akibat-akibat yang jelek dan kesalahan-kesalahan yang dilakukan. Sebagaimana tujuan dari pengendalian kualitas yang telah dipaparkan pada paragraf sebelumnya, yaitu menyidik kesalahan dengan cepat dan melakukan tindakan pembetulan sebelum terlalu banyak produk yang tidak sesuai dengan standar produk yang diinginkan.

Abu Ja'far dalam ath-Thabari (2008) berkata, bahwasanya hal ini merupakan pengecualian dari Allah SWT, yaitu pengecualian kepada orang-orang yang bertaubat (dengan menyesali dan meninggalkan kemunafikan mereka) jika mereka mengadakan perbaikan, dan secara tulus ikhlas melaksanakan ajaran agama karena Allah, membersihkan diri dari menyembah patung dan berhala, serta membenarkan Rasul-Nya. Namun bila mereka terus-menerus berada dalam kemunafikan hingga hari akhir, maka mereka akan memperoleh balasannya, kemudian dimasukkan ke dalam tempat mereka, yaitu neraka Jahanam.

Ath-Thabari (2008) menjelaskan maksud dari makna “dan mengadakan perbaikan” adalah memperbaiki amal perbuatan mereka dengan melakukan perintah-perintah Allah dan meninggalkan larangan-larangan-Nya, serta menghindari perbuatan maksiat kepada-Nya. Hal tersebut dapat dikaitkan dengan perbaikan proses produksi perusahaan yang kurang baik untuk mencapai hasil produksi yang lebih baik.

## 2.8 Grafik Pengendali Shewhart

Dikatakan Grafik Pengendali Shewhart karena grafik pengendali (*control chart*) ini pertama kali diperkenalkan oleh Dr. Walter Andrew Shewhart dari *Bell Telephone Laboratories*, Amerika Serikat pada tahun 1924 dengan maksud untuk menghilangkan variasi tidak normal melalui pemisahan variasi yang disebabkan oleh penyebab khusus (*special-causes variation*) dari variasi yang disebabkan oleh penyebab umum (*common-causes variation*). Pada dasarnya semua proses menampilkan variasi, namun manajemen harus mampu mengendalikan proses dengan cara menghilangkan variasi penyebab khusus dari proses itu, sehingga variasi yang melekat pada proses hanya disebabkan oleh variasi penyebab umum. Grafik pengendali merupakan alat ampuh dalam mengendalikan proses, asalkan penggunaannya dipahami secara benar (Gaspersz, 1998:107).

Menurut Gaspersz (1998), pada dasarnya grafik pengendali dipergunakan untuk:

- a. Mencapai suatu keadaan terkendali secara statistik



- b. Memantau proses terus-menerus sepanjang waktu agar proses tetap stabil secara statistik dan hanya mengandung variasi penyebab-umum
- c. Menentukan kemampuan proses (*proses capability*). Setelah proses berada dalam pengendalian statistik, batas-batas dari variasi proses dapat ditentukan.

Pada prinsipnya setiap grafik pengendali mempunyai:

1. Garis tengah (*Center Line*), yang biasanya dinotasikan *CL*.
2. Sepasang batas kendali (*Control Limits*), dimana satu batas kendali ditempatkan dibawah garis tengah yang dikenal sebagai batas kendali atas (*Upper Control Limit*), biasanya dinotasikan sebagai *UCL*, dan satu lagi ditempatkan di bawah garis tengah yang dikenal dengan batas kendali bawah (*Lower Control Limits*), biasanya dinotasikan sebagai *LCL*.
3. Tebaran nilai-nilai karakteristik kualitas yang menggambarkan keadaan dari proses. Jika semua nilai yang ditebarkan (diplot) pada grafik itu berada di dalam batas-batas kendali tanpa memperlihatkan kecenderungan tertentu, maka proses yang berlangsung dianggap berada dalam kendali atau terkendali secara statistik. Namun jika nilai-nilai yang diplotkan pada grafik itu jatuh atau berada diluar batas-batas kendali atau memperlihatkan kecendrungan tertentu atau memiliki bentuk yang aneh, maka proses yang berlangsung dianggap berada diluar kendali proses yang ada.

Batas-batas kendali ini dipilih sedemikian hingga apabila proses terkendali, hampir semua titik-titik sampel akan jatuh di antara kedua garis itu. Selama titik-titik terletak di dalam batas-batas kendali, proses dianggap dalam keadaan terkendali, dan tidak perlu tindakan apapun. Tetapi satu titik yang terletak

di luar batas kendali diinterpretasikan sebagai fakta bahwa proses tak terkendali dan diperlukan tindakan penyelidikan dan perbaikan (Montgomery, 1990:121).

Dalam sebagian besar grafik pengendali, batas kendali dihitung dengan menggunakan rumus umum sebagai berikut:

$$UCL = \text{nilai rata-rata} + 3 \times \text{simpangan baku}$$

$$LCL = \text{nilai rata-rata} - 3 \times \text{simpangan baku}$$

Di sini simpangan baku adalah variasi yang disebabkan oleh penyebab umum (*common cause variation*). Grafik pengendali yang memiliki batas-batas kendali seperti ini disebut sebagai "Grafik Pengendali 3 sigma".

Jika  $w$  suatu statistik yang mengukur suatu karakteristik kualitas, dan jika rata-rata  $w$  adalah  $\mu_w$  dan variansi  $w$  adalah  $\sigma_w^2$  maka model umum Grafik Pengendali Shewhart adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_w + k \sigma_w \\ CL &= \mu_w \\ LCL &= \mu_w - k \sigma_w \end{aligned} \quad (2.8)$$

dimana:

$UCL$  = *Upper Control Limit* (batas kendali atas)

$CL$  = *Center Line* (garis tengah)

$LCL$  = *Lower Control Limit* (batas kendali bawah)

$w$  = statistik sampel yang digunakan sebagai ukuran karakteristik kualitas proses produksi

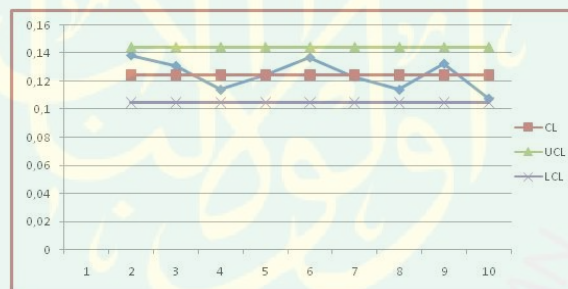
$k$  = jarak batas kendali dari garis tengah yang dinyatakan dalam unit simpangan baku

$\sigma_w$  = simpangan baku dari  $w$

$\mu_w$  = rata-rata dari  $w$  (Montgomery, 1990:144 ).

Berikut contoh grafik pengendali dengan proses terkendali dan tidak terkendali.

Gambar 2.1 Grafik Pengendali untuk Proses Tidak Terkendali



Gambar 2.2 Grafik Pengendali untuk Proses Terkendali

Gambar 2.1 menunjukkan grafik pengendali untuk proses dalam keadaan tidak terkendali karena terdapat data *out of control* atau nilai-nilai karakteristik kualitas berada di luar batas-batas kendali (yang dilingkari merupakan nilai-nilai karakteristik kualitas yang berada di atas batas kendali atas, dan di bawah batas kendali bawah). Dengan demikian apabila nilai-nilai yang diplotkan jatuh di luar batas kendali atau menunjukkan kecenderungan tertentu, maka boleh menyatakan bahwa proses tersebut berada di luar pengendali statistik, atau kita juga boleh menyatakan bahwa terdapat variasi yang disebabkan oleh penyebab khusus

(*special-causes variation*) sehingga menyebabkan proses berada dalam keadaan tidak terkendali. Agar dapat mengendalikan proses, kita perlu menghilangkan penyebab khusus itu. Gambar 2.2 menunjukkan grafik pengendali untuk proses dalam keadaan terkendali atau *in control* dan maka kita menyatakan bahwa proses berada dalam pengendali statistik. Grafik pengendali yang terkendali dicirikan oleh semua nilai karakteristik kualitas yang diplotkan terdapat di dalam batas-batas kendali (di antara batas kendali atas, dan batas kendali bawah).

Pengelompokan jenis-jenis grafik pengendali tergantung pada tipe datanya. Gaspersz (1998) menjelaskan bahwa dalam konteks pengendalian proses statistikal dikenal dua jenis data, yaitu:

1. Data Variabel (*Variables Data*)

Data variabel merupakan data kuantitatif yang diukur untuk keperluan analisis. Contoh dari data variabel karakteristik kualitas adalah diameter pipa, ketebalan produk kayu lapis, berat semen dalam kantong, banyaknya ukuran kertas dalam setiap rim, atau yang berupa ukuran.

2. Data Atribut (*Attributes Data*)

Data atribut adalah data kualitatif yang dapat dihitung untuk pencatatan dan analisis. Contoh dari data atribut karakteristik kualitas adalah ketiadaan label pada kemasan produk, banyaknya jenis cacat pada produk, dan lain-lain.

Berdasarkan kedua tipe data tersebut, maka jenis-jenis grafik pengendali terbagi atas grafik pengendali untuk data variabel dan grafik pengendali untuk data atribut. Beberapa grafik pengendali untuk data variabel adalah Grafik Pengendali  $\bar{X}$  dan  $R$  dan Grafik Pengendali  $\bar{X}$  dan  $S$ . Sedangkan grafik pengendali untuk data

atribut adalah Grafik Pengendali  $p$ , Grafik Pengendali  $np$ , Grafik Pengendali  $c$ , dan Grafik Pengendali  $u$ .

## 2.9 Grafik Pengendali Kualitas untuk Data Variabel

Pengendalian kualitas proses statistik untuk data variabel sering disebut sebagai metode *control chart* untuk data variabel. Metode ini digunakan untuk menggambarkan variasi atau penyimpangan yang terjadi pada kecenderungan memusat dan penyebaran observasi. Beberapa grafik pengendali untuk data variabel adalah Grafik Pengendali  $\bar{X}$  (rata-rata) dan  $R$  (*Range*) dimana grafik tersebut digunakan untuk memantau proses yang mempunyai karakteristik berdimensi kontinu, sehingga Grafik Pengendali  $\bar{X}$  dan  $R$  sering disebut sebagai grafik pengendali untuk data variabel, dan Grafik Pengendali  $\bar{X}$  dan  $S$  (standar deviasi) digunakan untuk mengukur tingkat keakurasian yang diukur dengan menggunakan rumus standar deviasi. Penggunaan Grafik Pengendali  $S$  digunakan bersama dengan Grafik Pengendali  $\bar{X}$  (Ariani, 2004:87-95).

Misalkan karakteristik kualitas berdistribusi normal dengan mean  $\mu$  dan standar deviasi  $\sigma$  keduanya diketahui. Jika  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sampel berukuran  $n$ , maka rata-rata sampel adalah sebagai berikut

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2.9)$$

diketahui bahwa  $\bar{x}$  berdistribusi normal dengan mean  $\mu$  dan standar deviasi

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , probabilitasnya adalah  $1 - \alpha$  bahwa setiap mean sampel akan di antara

batas-batas kendali:

$$\mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.10)$$

dan

$$\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.11)$$

Dengan demikian, jika mean  $\mu$  dan standar deviasi  $\sigma$  keduanya diketahui, persamaan (2.10) dan (2.11) dapat digunakan sebagai batas pengendali atas dan batas pengendali bawah pada grafik pengendali mean sampel, dengan menggantikan  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  menjadi 3, sehingga digunakan batas  $3\sigma$ .

$$\mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.12)$$

dan

$$\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.13)$$

(Montgomery, 1990:206-207)

Sebagaimana dalam Grafik Pengendali Shewhart (2.8) dan persamaan (2.12) dan (2.13), misalnya kuantitas  $3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = A$  merupakan suatu konstan yang tergantung pada  $n$ . Maka, parameter grafik  $\bar{x}$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$UCL = \mu + A\sigma$$

$$CL = \mu \quad (2.14)$$

$$LCL = \mu - A\sigma$$

Jika mean  $\mu$  dan standar deviasi  $\sigma$  keduanya tidak diketahui, maka harus ditaksir. Misalkan tersedia  $m$  pengamatan, masing-masing memuat  $n$  sampel, dan

misalkan  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  adalah rata-rata tiap sampel. Maka penaksir terbaik untuk rata-rata proses  $\mu$  adalah mean keseluruhan, yaitu

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (2.15)$$

atau bisa dituliskan,  $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j$  dimana  $j = 1, 2, \dots, m$ .  $\bar{x}$  digunakan sebagai garis tengah (*center line*) grafik  $\bar{x}$  (Montgomery, 1990:207).

Selanjutnya, jika  $\sigma^2$  merupakan variansi distribusi probabilitas yang tidak diketahui, maka penaksir tak bias untuk  $\sigma^2$  adalah variansi sampel

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.16)$$

Tetapi, standar deviasi sampel  $S$  bukan penaksir tak bias untuk  $\sigma$ . Jika distribusi yang melandasinya normal, sebenarnya  $S$  menaksir  $c_4\sigma$ , dengan  $c_4$  suatu konstan yang tergantung pada ukuran sampel  $n$ .

Misalkan tersedia  $m$  pengamatan, masing-masing berukuran  $n$ , dan misalkan  $S_i$  adalah standar deviasi sampel ke- $i$ . Maka rata-rata  $m$  standar deviasi adalah

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \quad (2.17)$$

Karena statistik  $\frac{\bar{S}}{c_4}$  adalah penaksir tak bias untuk  $\sigma$ , maka parameter grafik  $\bar{x}$

dari persamaan (2.14) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$UCL = \bar{x} + \frac{3\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}$$

$$CL = \bar{x} \quad (2.18)$$

$$LCL = \bar{x} - \frac{3\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} \quad (\text{Montgomery, 1990:235-237}).$$

## 2.10 Grafik Pengendali Kualitas untuk Data Atribut

Banyak karakteristik kualitas tidak dapat dengan mudah dinyatakan secara numerik. Dalam hal seperti ini, biasanya tiap benda yang diperiksa kita klasifikasi sebagai sesuai dengan spesifikasi pada karakteristik kualitas itu atau tidak sesuai dengan spesifikasi. Istilah “cacat” dan “tidak cacat” kadang digunakan untuk mengidentifikasi kedua klasifikasi produk ini. Akhir-akhir ini, istilah “sesuai” dan “tidak sesuai” menjadi populer. Karakteristik kualitas seperti ini dinamakan sifat (*attribute*) (Montgomery, 1990:142).

Pengendalian kualitas proses statistik untuk data atribut sering disebut sebagai metode *control chart* untuk data atribut. Beberapa grafik pengendali untuk data atribut adalah Grafik Pengendali  $p$ , Grafik Pengendali  $np$ , Grafik Pengendali  $c$ , dan Grafik Pengendali  $u$ . Menurut Ariani (2004) ada dua kelompok besar grafik pengendali kualitas proses statistik untuk data atribut, yaitu berdasarkan distribusi Binomial dan berdasarkan distribusi Poisson, yang berdasarkan distribusi Binomial merupakan kelompok pengendali untuk unit-unit ketidaksesuaian, yaitu  $p$ -chart menunjukkan proporsi ketidaksesuaian dalam sampel atau sub kelompok, proporsi ditunjukkan dengan bagian atau persen dan  $np$ -chart menunjukkan banyaknya ketidaksesuaian, yang berdasarkan distribusi Poisson terdapat  $c$ -chart



menunjukkan banyaknya ketidaksesuaian dalam unit yang diinspeksi dan *u-chart* digunakan untuk bagian ketidaksesuaian setiap unit, dapat juga digunakan pada situasi dimana ukuran sampel bervariasi.

### 2.11 Grafik Pengendali Proporsi Ketidaksesuaian

Grafik Pengendali *p* didefinisikan sebagai perbandingan banyak produk yang tidak sesuai dalam suatu populasi dengan banyak produk keseluruhan dalam populasi itu. Grafik Pengendali *p* digunakan untuk mengendalikan proporsi dari item-item yang tidak memenuhi syarat spesifikasi yang ditetapkan yang berarti dikategorikan cacat. Ukuran sampel pada Grafik Pengendali *p* bisa berupa konstan ataupun bervariasi.

Asas statistik yang melandasi grafik pengendali untuk proporsi ketidaksesuaian (*p-chart*) didasarkan atas distribusi Binomial. Misalkan proses produksi bekerja dalam keadaan stabil, sehingga peluang suatu unit yang diproduksi berturut-turut adalah *independent*. Maka tiap unit yang diproduksi merupakan realisasi suatu peubah acak Bernoulli dengan parameter *p*. Apabila sampel acak dengan *n* unit produk dipilih, dan *D* adalah banyak unit produk ketidaksesuaian maka *D* berdistribusi Binomial dengan parameter *n* dan *p*, yakni

$$P(x, n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n \quad (2.19)$$

dengan rata-rata dan variansi dari peubah acak *D* masing-masing adalah *np* dan *np(1-p)*.

Proporsi ketidaksesuaian sampel didefinisikan sebagai perbandingan banyak unit ketidaksesuaian *D* dalam sampel dengan ukuran sampel *n*, yakni:

$$p = \frac{D}{n} \quad (2.20)$$

Distribusi variabel acak  $p$  dapat diperoleh dari distribusi Binomial. Selanjutnya rata-rata dan variansi  $p$  masing-masing adalah

$$\mu = p \quad (2.21)$$

dan

$$\sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (2.22)$$

Andaikan  $p$  merupakan proporsi ketidaksesuaian dalam proses produksi diketahui. Maka garis tengah dan batas kendali grafik pengendali dari proporsi ketidaksesuaian adalah

$$\begin{aligned} UCL &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ CL &= p \\ LCL &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Pada praktiknya grafik ini terdiri dari pengambilan sampel-sampel dengan  $n$  unit berturut-turut, menghitung proporsi ketidaksesuaian dengan  $p$ , dan menggambarkan statistik  $p$  pada grafik. Selama  $p$  tetap di dalam batas kendali dan deretan titik-titik yang tergambar tidak menunjukkan pola sistematis atau tidak acak, dapat disimpulkan bahwa proses tersebut terkendali pada tingkat  $p$ . Jika satu titik terletak di luar batas kendali, atau jika diamati pola tidak acak dalam titik-titik tergambar itu, maka disimpulkan bahwa proporsi ketidaksesuaian proses itu telah bergeser ke tingkat yang baru atau proses dalam keadaan tidak terkendali.

Dalam Montgomery (1990:143-145), apabila proporsi ketidaksesuaian  $p$  tidak diketahui, maka  $p$  harus ditaksir dari data observasi. Prosedur yang biasa adalah memilih  $m$  pengamatan (subgrup) pendahuluan, masing-masing berukuran  $n$ . Sebagai aturan umum,  $m$  biasanya dipilih antara 20 sampai 25 subgrup. Maka jika ada  $D_k$  unit sampel ketidaksesuaian dalam pengamatan ke- $k$ , kita hitung proporsi ketidaksesuaian dalam pengamatan ke- $k$  itu sebagai

$$p_k = \frac{D_k}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.24)$$

dan rata-rata proporsi ketidaksesuaian dari seluruh pengamatan tersebut adalah

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{mn} = \frac{\sum_{j=1}^m p_j}{m}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.25)$$

Statistik  $\bar{p}$  ini nantinya digunakan untuk menaksir proporsi ketidaksesuaian  $p$  yang tidak diketahui. Sehingga garis tengah dan batas kendali grafik pengendali untuk proporsi ketidaksesuaian untuk  $p$  tidak diketahui dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ CL &= \bar{p} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

## 2.12 Logika Fuzzy

Logika Fuzzy merupakan suatu logika yang memiliki nilai kekaburan atau kesamaran antara benar dan salah. Dalam teori logika fuzzy suatu nilai bisa

bernilai benar dan salah secara bersama, namun berapa besar keberadaan dan kesalahan suatu nilai tergantung pada bobot keanggotaan yang dimilikinya.

Secara umum *fuzzy logic* adalah metodologi berhitung dengan variabel bahasa (*linguistic variable*), sebagai pengganti berhitung dengan bilangan. Dengan *fuzzy logic*, sistem kepakaran manusia bisa diimplementasikan ke dalam bahasa mesin. Logika fuzzy memungkinkan nilai keanggotaan antara 0 dan 1, tingkat keabuan dan juga hitam dan putih, dan dalam bentuk linguistik, konsep tidak pasti seperti “sedikit”, “lumayan”, dan “sangat”. Misalkan besaran kecepatan laju kendaraan yang diekspresikan dengan “pelan”, “agak cepat”, “cepat”, dan “sangat cepat”. Dan logika fuzzy menunjukkan sejauh mana suatu nilai itu benar dan sejauh mana suatu nilai itu salah. Tidak seperti logika tegas (*crisp logic*) yang hanya mempunyai dua kemungkinan yaitu merupakan suatu anggota himpunan atau tidak. Derajat keanggotaan 0 (nol) artinya nilai bukan merupakan anggota himpunan dan 1 (satu) berarti nilai tersebut adalah anggota himpunan.

Teori himpunan logika fuzzy dikembangkan oleh Prof. Lofti Zadeh dari Universitas California, Berkeley pada 1965. Zadeh berpendapat bahwa logika benar dan salah dalam logika konvensional tidak dapat mengatasi masalah gradasi yang berada pada dunia nyata. Untuk mengatasi masalah gradasi yang tidak terhingga tersebut, Zadeh mengembangkan sebuah himpunan *fuzzy*. Tidak seperti logika boolean, logika *fuzzy* mempunyai nilai yang kontinu. Samar dinyatakan dalam derajat dari suatu keanggotaan dan derajat dari kebenaran.

Oleh sebab itu sesuatu dapat dikatakan sebagian benar dan sebagian salah pada waktu yang sama (Kusumadewi dan Purnomo, 2004).

### 2.13 Variabel Linguistik

Variabel linguistik berbeda dengan variabel numerik, variabel linguistik merupakan variabel yang bernilai kata/kalimat, bukan angka. Sebagai alasan, mengapa menggunakan kata/kalimat daripada angka karena peranan bahasa kurang spesifik dibandingkan angka, namun informasi yang disampaikan lebih informatif. Variabel linguistik merupakan konsep penting dalam logika fuzzy dan memegang peranan penting dalam beberapa aplikasi.

Contoh, jika “kecepatan” adalah variabel linguistik, maka nilai linguistik untuk variabel kecepatan adalah, misalnya “lambat”, “sedang”, “cepat”. Hal ini sesuai dengan kebiasaan manusia sehari-hari dalam menilai sesuatu, misalnya : “Ia mengendarai mobil dengan cepat”, tanpa memberikan nilai berapa kecepatannya. Contoh lain dalam mengkriterikan usia (muda, separuh baya, tua), suhu (dingin, sedang, panas), kecepatan (lambat, pelan, cepat), kinerja (baik, biasa-biasa saja, kurang baik), kelembaban, dll.

Kusumadewi dan Purnomo (2004) menyebutkan bahwa variabel linguistik adalah variabel peubah yang menggunakan kata-kata dalam sebagian nilainya. Variabel bahasa secara umum ditulis dalam bentuk  $(X, T(x), U, g, m)$  dimana  $X$  adalah nama variabel, seperti “suhu hari ini”, adalah nilai bahasa seperti “lambat”, “cepat”, “panas”, “dingin”, dan sebagainya,  $U$  adalah nilai sebenarnya (nilai *crisp*) untuk  $X$ ,  $g$  adalah sintaktis (tata bahasa), dan  $m$  adalah aturan semantik yang menghubungkan nilai bahasa pada  $T$  dengan himpunan fuzzy pada

X. Misalnya “X adalah lambat” dan sebagainya. Pada kenyataannya manusia sering menggunakan lebih dari satu kata untuk mewakili variabel misalnya “sangat cepat”, “tidak lambat”, “agak cepat”, dan sebagainya. Kata-kata “sangat”, “tidak”, “agak”, disebut dengan istilah *hedges*.

#### 2.14 Grafik Pengendali Fuzzy

Grafik pengendali merupakan alat untuk menggambarkan secara tepat apa yang dimaksud dengan pengendalian statistik dan banyak digunakan alat bantu untuk memantau dan memeriksa proses produksi. Kekuatan grafik pengendali terletak pada kemampuannya untuk mendeteksi pergeseran proses dan untuk mengidentifikasi kondisi ketidaknormalan suatu proses produksi. Teori grafik pengendali statistik menunjukkan semua data diketahui dengan tepat.

Gulbay (2006) (dalam Sugihartanti, 2012) menyebutkan bahwa jika kualitas suatu produk berhubungan dengan karakteristik yang tidak dapat direpresentasikan dalam bentuk numerik, seperti karakteristik untuk penampilan, warna, kelembutan, dll., maka grafik pengendali untuk atribut yang digunakan. Sedangkan untuk grafik pengendali dengan data samar-samar maka menggunakan himpunan fuzzy sebagai nilai nyata interpretasi dari ketidakpastian dan ketidakjelasan. Kontribusi utama dari teori himpunan fuzzy adalah kemampuan untuk merepresentasikan data yang samar-samar. Logika fuzzy menawarkan basis yang sistematis dalam menghadapi situasi yang samar-samar/ tidak jelas atau tidak didefinisikan dengan baik.

Sebagaimana kondisi tersebut, maka Grafik Pengendali Fuzzy sangat sesuai digunakan untuk observasi yang menghasilkan data (informasi) yang tidak

pasti, kurang jelas dan berdasarkan subjektivitas (persepsi) seseorang. Teori fuzzy juga digunakan sebagai dasar untuk menginterpretasi derajat kesesuaian produk. Grafik pengendali fuzzy ada dua, yaitu Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial.

Menurut Hidayat (2006), Grafik Pengendali Variabel Fuzzy Linguistik merupakan grafik kendali fuzzy yang digunakan untuk membahas pengendalian proses produksi yang berkarakteristik atribut dengan banyak atribut lebih dari dua kategori, yang pada dasarnya Grafik Pengendali Variabel Fuzzy Linguistik ini menggunakan variabel linguistik yang tidak lain adalah sebuah himpunan fuzzy yang memiliki fungsi keanggotaan tertentu, dan menurut Amirzadeh, dkk. (2008), Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial merupakan grafik kendali fuzzy yang digunakan untuk memantau suatu proses multinomial, dimana batas kendali pada Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial ini diperoleh dengan menggunakan distribusi multinomial dan derajat keanggotaan yang ditetapkan pada kategori yang berbeda.

### 2.15 Pengendalian Kualitas dengan Fuzzy Menurut Pandangan Al-Qur'an

Dalam al-Qur'an surat Ali Imran ayat 7-8 Allah SWT berfirman:

هُوَ الَّذِي أَنْزَلَ عَلَيْكَ الْكِتَابَ مِنْهُ آيَاتٌ مُحْكَمَاتٌ هُنَّ أُمُّ الْكِتَابِ وَأُخْرُ  
 مُتَشَبِهَاتٌ فَأَمَّا الَّذِينَ فِي قُلُوبِهِمْ زَيْغٌ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَبَهَ مِنْهُ ابْتِغَاءَ الْفِتْنَةِ  
 وَابْتِغَاءَ تَأْوِيلِهِ ۗ وَمَا يَعْلَمُ تَأْوِيلَهُ إِلَّا اللَّهُ ۗ وَالرَّاسِخُونَ فِي الْعِلْمِ يَقُولُونَ ءَأَمَّنَّا

بِهِ كُلُّ مَن عِنْدَ رَبِّنَا وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّا أُولُو الْأَلْبَابِ ﴿٧٧﴾ رَبَّنَا لَا تَجْعَلْ قُلُوبَنَا بَعْدَ إِذْ  
 هَدَيْتَنَا وَهَبْ لَنَا مِن لَّدُنكَ رَحْمَةً إِنَّكَ أَنْتَ الْوَهَّابُ ﴿٧٨﴾

*Artinya: Dia-lah yang menurunkan al-Kitab (al-Quran) kepada kamu. di antara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamaat, itulah pokok-pokok isi al-Qur'an dan yang lain (ayat-ayat) mutasyaabihaat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong kepada kesesatan, maka mereka mengikuti sebahagian ayat-ayat yang mutasyaabihaat daripadanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya, padahal tidak ada yang mengetahui ta'wilnya melainkan Allah. dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata: "Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyaabihaat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami." dan tidak dapat mengambil pelajaran (daripadanya) melainkan orang-orang yang berakal. (mereka berdoa): "Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau jadikan hati Kami condong kepada kesesatan sesudah Engkau beri petunjuk kepada Kami, dan karuniakanlah kepada Kami rahmat dari sisi Engkau; karena sesungguhnya Engkau-lah Maha pemberi (karunia)".*

Ayat di atas menjelaskan bahwa dalam al-Qur'an terdapat ayat-ayat yang jelas pengertiannya (*muhkamat*) yaitu ayat-ayat yang terang dan tegas maksudnya, dapat dipahami dengan mudah seperti dalam arti "Itulah pokok-pokok isi al-Qur'an" ada juga ayat-ayat yang mengandung banyak arti dan tidak dapat ditentukan arti mana yang dimaksud kecuali sudah dikaji secara mendalam dan hanya Allah saja yang tahu maksudnya (*mutasybihat*) (Shihab, 2005). Termasuk dalam pengertian ayat-ayat *mutasyabihat* yaitu ayat-ayat yang mengandung beberapa pengertian dan tidak dapat ditentukan arti mana yang dimaksud kecuali sesudah diselidiki secara mendalam, atau ayat-ayat yang pengertiannya hanya Allah yang mengetahui seperti ayat-ayat yang berhubungan dengan yang ghaib-ghaib misalnya ayat-ayat yang mengenai hari kiamat, surga, neraka dan lain-lain. Seperti dalam arti "Padahal tidak ada yang mengetahui



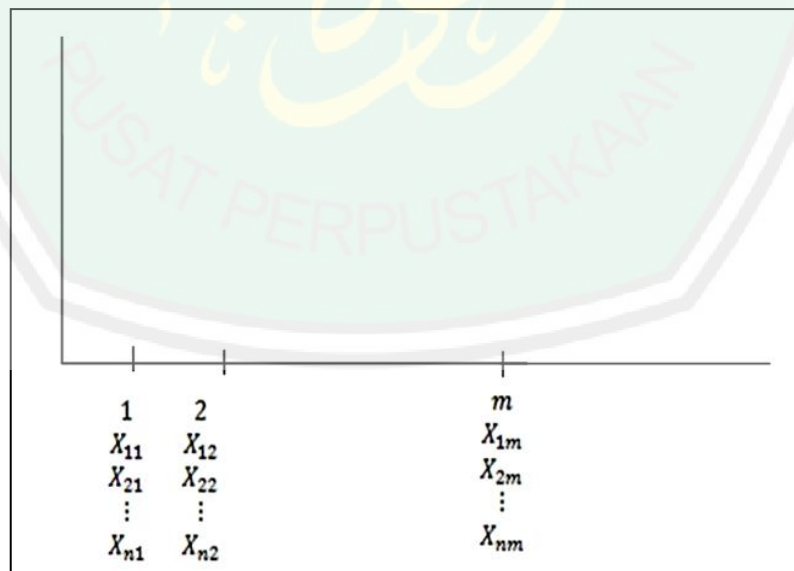
ta'wilnya melainkan Allah". Sebagaimana dalam teori himpunan fuzzy yang menyebutkan adanya derajat keanggotaan yang terletak antara  $(0,1)$ , dimana fuzzy di sini diartikan samar-samar atau ketidakpastian, dalam al-Qur'an menyebutkan ayat *mutasyabihat* yaitu ayat yang samar-samar, yang mengandung banyak arti dan masih perlu dikaji dan dipelajari secara mendalam, bagitu juga dengan grafik pengendali yang menggunakan teori himpunan fuzzy yang didasarkan pada variabel linguistik dimana masing-masing variabel linguistik adalah sebuah himpunan fuzzy yang memiliki derajat keanggotaan tertentu di antara nilai 0 dan 1 (misal 0; 0,25; 0,5 ; 0,75 ;1) dan mengandung banyak kemungkinan hasil, misalkan *reject*, jelek, cukup, baik, dan sempurna.

### BAB III

### PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis akan membahas perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial. Sebelum membandingkan kedua grafik pengendali fuzzy tersebut, penulis akan memaparkan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial secara teori.

Misal pada sebuah produk dapat ditetapkan sebuah variabel linguistik tertentu untuk menggambarkan kondisi dari produk tersebut, seperti *reject*, jelek, cukup, baik, atau sempurna. Misalkan dalam suatu produksi diambil sebanyak  $m$  pengamatan, dimana setiap pengamatan ke- $j$  dengan  $j = 1, 2, \dots, m$  memiliki ukuran sampel sebanyak  $n$ , yang diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Ilustrasi Definisi  $X_{hj}$

$X_{hj}$  merupakan hasil produksi sampel ke- $h$  pengamatan ke- $j$  dengan  $h = 1, 2, \dots, n$  dan  $j = 1, 2, \dots, m$ . Selanjutnya,  $X_{hj}$  akan diklasifikasikan ke dalam  $l$

kategori yang memiliki nilai representatif  $r_i$  dengan  $0 \leq r_i \leq 1$  untuk  $i = 1, 2, \dots, l$ . Misalkan kategori tersebut adalah *reject*, jelek, cukup, baik, atau sempurna, sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$X_{hj} = \begin{cases} r_1, \text{ jika karakteristik kualitas dikategorikan } \textit{reject} \\ r_2, \text{ jika karakteristik kualitas dikategorikan jelek} \\ r_3, \text{ jika karakteristik kualitas dikategorikan cukup} \\ r_4, \text{ jika karakteristik kualitas dikategorikan baik} \\ r_5, \text{ jika karakteristik kualitas dikategorikan sempurna} \end{cases}$$

Jika dalam suatu pengamatan menghasilkan kualitas *reject* maka diberi nilai representatif 1, jika pengamatan tersebut menghasilkan kualitas jelek maka diberi nilai representatif 0,75, jika pengamatan menghasilkan kualitas cukup maka diberi nilai representatif 0,5, jika pengamatan menghasilkan kualitas baik maka diberi nilai representatif 0,25, dan jika pengamatan menghasilkan kualitas sempurna maka diberi nilai representatif 0.

Setelah hasil produksi sampel ke- $h$  pengamatan ke- $j$  ( $X_{hj}$ ) terklasifikasikan, selanjutnya pandang setiap pengamatan ke- $j$ , dari  $n$  sampel, didefinisikan  $k_{ij}$  adalah banyaknya unit sampel kategori ke- $i$  pada pengamatan ke- $j$  dimana  $i = 1, 2, \dots, l$  dan  $j = 1, 2, \dots, m$ , sehingga  $k_{1j} + k_{2j} + \dots + k_{lj} = n$ . Dengan demikian,  $k_{ij}$  memenuhi beberapa kemungkinan hasil atau beberapa karakteristik kualitas yang dapat dikategorikan di antaranya yaitu *reject*, jelek, cukup, baik, dan sempurna.

### 3.1 Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik secara Teori

Berdasarkan ilustrasi dan beberapa definisi pada awal pembahasan di atas, dalam subbab ini penulis akan mengkaji Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik. Hidayat (2006) menyebutkan bahwa Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik merupakan grafik pengendali yang menggunakan variabel linguistik, yang juga dapat digunakan untuk mengendalikan proses yang berkarakteristik atribut dengan karakteristik atributnya lebih dari dua kategori. Pada dasarnya grafik pengendali variabel linguistik menggunakan variabel linguistik yang tiada lain adalah sebuah himpunan fuzzy yang memiliki fungsi keanggotaan tertentu, khususnya himpunan fuzzy diskrit.

Pada Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik ini, statistik sampel yang digunakan untuk mengukur karakteristik kualitas Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik disimbolkan dengan  $M_j$ , yaitu rata-rata  $n$  sampel berdasarkan nilai representatif  $r_i$  pada tiap pengamatan ke- $j$ .  $M_j$  didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 M_j &= \frac{k_{1j}r_1 + k_{2j}r_2 + \dots + k_{lj}r_l}{n} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^l k_{ij}r_i}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l k_{ij}r_i, \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana:

$M_j$  = rata-rata sampel pada pengamatan ke- $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$

$l$  = banyaknya kategori (kelas) ketidaksesuaian / kecacatan

$r_i$  = nilai representatif /derajat keanggotaan kategori ke- $i$  ,  $i = 1, 2, \dots, l$

$k_{ij}$  = banyaknya unit sampel kategori ke- $i$  pada pengamatan ke- $j$

Selanjutnya akan dibangun Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik berdasarkan Grafik Pengendali Shewhart dengan nilai parameter rata-rata  $\mu$  dan variansi  $\sigma$  diketahui, maka didapatkan:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_w + k \sigma_w \\ CL &= \mu_w \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$LCL = \mu_w - k \sigma_w \quad (\text{Montgomery, 1990:144})$$

dimana  $w$  merupakan statistik sampel yang mengukur karakteristik kualitas, yang mana pada penelitian ini didefinisikan dengan  $M_j$ , dan  $k$  adalah jarak pada batas pengendali dari garis tengah dalam satuan standar deviasi. Adapun nilai  $k$  diperoleh berdasarkan luas di bawah kurva distribusi Normal. Dalam hal ini, penulis mengambil  $k = 3$  untuk memenuhi standar internasional yang sesuai dengan  $\mu \pm 3\sigma$  atau ekuivalen dengan tingkat signifikansi 0,00135 yang berarti data berada pada selang kepercayaan 99,73%, artinya dari 10.000 data, diharapkan maksimal 27 data boleh keluar di atas  $UCL$  maupun di bawah  $LCL$ . Sehingga dari persamaan (3.2) dapat diperoleh suatu model baru yaitu:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_M + 3\sigma_M \\ CL &= \mu_M \\ LCL &= \mu_M - 3\sigma_M \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dalam praktek, seringkali parameter  $\mu_M$  dan  $\sigma_M$  keduanya tidak diketahui, sehingga  $\mu_M$  dan  $\sigma_M$  harus ditaksir dari data pengamatan. Penaksir tak

bias untuk rata-rata proses,  $\mu_M$  adalah rata-rata dari keseluruhan data pengamatan, yaitu

$$\bar{M} = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_m}{m} \quad (3.4)$$

dengan  $M_j ; j = 1, 2, \dots, m$  didefinisikan sebagaimana persamaan (3.1).

Hidayat (2006) menyebutkan bahwasanya Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik mengikuti grafik pengendali variabel untuk target maka  $\mu_M$  ditaksir oleh  $\bar{M}$ , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_m}{m} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m M_j}{m} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \left( \frac{k_{ij} r_i}{n} \right)}{m} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l (k_{ij} r_i)}{m} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l k_{ij} r_i \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l k_{ij} r_i \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m k_{ij} r_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pada penelitian ini, penulis menunjukkan bahwa  $\bar{M}$  penaksir tak bias  $\mu_M$ . Jika diberikan  $E(M_j) = \mu_M$  ;  $\forall j = 1, 2, \dots, m$ , maka:

$$\begin{aligned}
 E(\bar{M}) &= E\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m M_j\right) \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m E(M_j) \\
 &= \frac{1}{m} \cdot m \cdot \mu_M \\
 &= \mu_M
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

terbukti bahwa  $E(\bar{M}) = \mu_M$ . Jadi  $\bar{M}$  akan digunakan sebagai garis tengah (*center line*) Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik.

Selanjutnya menaksir parameter  $\sigma_M$  yang tidak diketahui. Menurut Montgomery (1990), jika  $\sigma^2$  merupakan variansi yang tidak diketahui dari sebuah distribusi probabilitas, maka penaksir tak bias untuk  $\sigma^2$  adalah variansi sampel

$$SD_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^l k_{ij} (r_i - M_j)^2}{n-1} \tag{3.7}$$

dimana:

$SD_j^2$  = variansi sampel pada pengamatan ke- $j$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$

$k_{ij}$  = banyaknya unit ketidaksesuaian sampel kategori ke- $i$  pengamatan ke- $j$

$r_i$  = nilai representatif/ derajat keanggotaan kategori ke- $i$  ;  $i = 1, 2, \dots, l$

$M_j$  = rata-rata sampel pada pengamatan ke- $j$  ;  $j = 1, 2, \dots, m$

$n$  = banyak data sampel per pengamatan

Namun demikian, menurut Montgomery (1990) standar deviasi sampel

$$SD_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^l k_{ij} (r_i - M_j)^2}{n-1}}$$
 bukan penaksir tak bias untuk  $\sigma$ , tetapi penaksir tak bias

untuk  $\sigma$  adalah  $\sigma = \frac{SD_j}{c_4}$ , dimana  $c_4$  merupakan konstanta. Maka dari itu, dengan

$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  diperoleh taksiran parameter  $\sigma_M$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sigma_M &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{SD_j}{c_4 \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{c_4} \frac{SD_j}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

dimana:

$SD_j$  = standar deviasi sampel pada pengamatan ke- $j$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$

$c_4$  = konstanta

$n$  = banyak data sampel per pengamatan

Penulis akan menunjukkan bahwa,  $\sigma_M = \frac{SD_j}{c_4 \sqrt{n}}$  dengan  $\forall j = 1, 2, \dots, m$

adalah penaksir tak bias untuk  $\sigma_M$ ,



$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{SD_j}{c_4\sqrt{n}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} E\left(\frac{SD_j}{c_4}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
 &= \sigma_M
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

terbukti bahwa  $E\left(\frac{SD_j}{c_4\sqrt{n}}\right) = \sigma_M$ .

Karena pada penelitian ini terdapat  $m$  pengamatan, maka untuk menaksir  $\sigma_M$  digunakan rata-rata standar deviasi dari  $m$  pengamatan, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$MSD = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m SD_j \tag{3.10}$$

dimana:

$MSD$  = *Mean Standard Deviation* merupakan rata-rata standar deviasi dari  $m$  pengamatan

$SD_j$  = Standar deviasi pengamatan ke-  $j$  untuk  $j = 1, 2, \dots, m$

Sehingga diperoleh penaksir  $\sigma_M$  adalah:

$$\sigma_M = \frac{MSD}{c_4\sqrt{n}} \tag{3.11}$$

Kemudian, karena  $\mu_M$  telah ditaksir sebagaimana persamaan (3.5) dan  $\sigma_M$  ditaksir sebagaimana persamaan (3.11), maka diperoleh parameter batas pengendali untuk Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{M} + 3 \frac{MSD}{c_4 \sqrt{n}} \\ CL &= \bar{M} \\ LCL &= \bar{M} - 3 \frac{MSD}{c_4 \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.2 Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial Secara Teori

Selanjutnya, pada subbab ini penulis mengkaji Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial. Amirzadeh, dkk. (2008) memperkenalkan suatu pendekatan baru untuk membangun suatu grafik pengendali proses multinomial, yaitu Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial. Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial ini merupakan grafik pengendali yang digunakan untuk memantau suatu proses multinomial, dimana batas pengendali pada grafik fuzzy ini diperoleh dengan menggunakan distribusi multinomial dan derajat keanggotaan yang ditetapkan pada kategori yang berbeda.

Jika pada Grafik Pengendali  $p$  setiap item diklasifikasikan dalam dua kategori yaitu “sesuai” dan “tidak sesuai” sehubungan dengan karakteristik kualitas, maka pada Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial penulis dapat mengklasifikasikan setiap item dalam lebih dari dua kategori, misalnya “*reject*”, “jelek”, “cukup”, “baik”, dan “sempurna”.

Dari beberapa definisi di atas, pada penelitian ini, statistik sampel yang mengukur karakteristik kualitas Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial disimbolkan dengan  $L_j$ , yaitu rata-rata  $n$  sampel berdasarkan nilai representatif  $r_i$  pada tiap pengamatan ke- $j$ .  $L_j$  didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L_j &= \frac{k_{1j} + k_{2j} + \dots + k_{lj}}{n} r_i \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^l k_{ij}}{n} r_i \\
 &= \sum_{i=1}^l \frac{k_{ij}}{n} r_i
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

dimana:

$L_j$  = rata-rata sampel pada pengamatan ke- $j$  dengan  $j = 1, 2, \dots, m$

$l$  = banyaknya kategori (kelas) cacat

$r_i$  = nilai representatif / derajat keanggotaan ke- $i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, l$

$k_{ij}$  = banyaknya unit sampel kategori ke- $i$  pada pengamatan ke- $j$

Selanjutnya akan dibangun Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial, dimana pada penelitian ini, statistik sampel yang mengukur karakteristik kualitas didefinisikan oleh  $L_j$ , sehingga didapat:

$$UCL = \mu_L + 3\sigma_L$$

$$CL = \mu_L \tag{3.14}$$

$$LCL = \mu_L - 3\sigma_L$$

Sebagaimana dijelaskan Amirzadeh, dkk. (2008) bahwasanya batas kendali Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial diperoleh dengan menggunakan distribusi multinomial. Distribusi multinomial berlaku ketika kita memiliki suatu pengamatan acak dengan  $n$  kemungkinan hasil, setiap kejadian dengan suatu probabilitas, misalkan suatu probabilitas ketidaksesuaian disini dinotasikan dengan  $p_i$  dengan  $0 \leq p_i \leq 1$ , maka dapat dikatakan bahwa  $(k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{lj})$  berdistribusi multinomial dengan parameter  $n$  dan  $p_1, p_2, \dots, p_l$ . Selanjutnya, secara garis besar diketahui bahwa setiap  $k_{ij}$  dengan  $i = 1, 2, \dots, l$  dan  $j = 1, 2, \dots, m$  berdistribusi binomial dengan parameter  $n$  dan  $p_i$ , sehingga  $\mu_i = E(k_{ij}) = np_i$  dan  $\sigma_i^2 = Var(k_{ij}) = np_i(1 - p_i)$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Pada persamaan (3.14) parameter  $\mu_L$  dan  $\sigma_L$  keduanya tidak diketahui karena memuat parameter  $p_i$  yang tidak diketahui, sehingga  $\mu_L$  dan  $\sigma_L$  harus ditaksir dari data pengamatan. Amirzadeh, dkk. (2008) menyebutkan bahwasanya penaksir tak bias untuk rata-rata proses  $\mu_L$  adalah  $L_j$ , dengan  $E(L_j)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(L_j) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i}{n}\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^l \frac{k_{ij}}{n} r_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^l E\left(\frac{k_{ij}}{n}\right) r_i \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^l p_i r_i \quad \text{untuk } j = 1, 2, \dots, m \quad (3.15)$$

Selanjutnya menaksir parameter  $\sigma_L$  yang tidak diketahui. Menurut Amirzadeh,

dkk. (2008) parameter  $\sigma_L$  ditaksir oleh  $\sqrt{\text{Var}(L)}$ , dengan definisi  $L_j$  pada

persamaan (3.13), akan ditunjukkan  $\text{Var}(L_j)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Var}(L_j) &= E\left(L_j - E(L_j)\right)^2 \\ &= E\left(L_j - E\left(\frac{\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i}{n}\right)\right)^2 \\ &= E\left(L_j^2 - 2E\left(\frac{\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i}{n}\right)L_j + E\left(\frac{\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i}{n}\right)^2\right) \\ &= E(L_j^2) - 2\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right) + \frac{1}{n^2}\left(E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)^2 - 2\frac{1}{n^2}\left(E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)\right)^2 + \frac{1}{n^2}\left(E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\left(E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)^2 - \left(E\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\text{Var}\left(\sum_{i=1}^l k_{ij} r_i\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\text{Var}(k_{1j}r_1 + k_{2j}r_2 + \dots + k_{lj}r_l)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^l r_i^2 \text{Var}(k_{ij}) - 2 \sum_{i=1}^l \sum_{h=1}^l r_i r_h \text{Cov}(k_{ij}, k_{hj}) \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^l r_i^2 n p_i (1 - n p_i) - 2 \sum_{i=1}^l \sum_{h=1}^l r_i r_h (n p_i p_h) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^l r_i^2 p_i (1 - p_i) - 2 \sum_{i=1}^l \sum_{h=1}^l r_i r_h (p_i p_h) \right) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Dalam praktek  $p_i$  sering tidak diketahui, maka perlu ditaksir, salah satu penaksir tak bias untuk  $p_i$  adalah  $\hat{p}_{ij} = \frac{k_{ij}}{n}$ , yaitu proporsi banyaknya ketidaksesuaian produk dalam suatu kategori ke- $i$  pada pengamatan ke- $j$  dengan banyaknya data sampel per pengamatan, dimana  $i = 1, 2, \dots, l$  dan  $j = 1, 2, \dots, m$ . Kemudian karena data terdiri dari  $m$  pengamatan, maka rata-rata penaksir untuk  $p_i$  adalah  $\bar{\hat{p}}_i$  yaitu rata-rata proporsi ketidaksesuaian produk kategori ke- $i$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\bar{\hat{p}}_i &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{p}_{ij} \\
&= \frac{1}{m} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m k_{ij}}{n} \\
&= \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m k_{ij} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Sehingga dari penaksiran  $\mu_L$  pada persamaan (3.13) dan penaksiran  $\sigma_L$  pada persamaan (3.16) parameter batas-batas pengendali untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 UCL &= E[L] + k\sqrt{\text{Var}(L)} \\
 CL &= E[L] \\
 LCL &= E[L] - k\sqrt{\text{Var}(L)}
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Karena pada  $E[L]$  dan  $\sqrt{\text{Var}(L)}$  memuat parameter  $p_i$  yang tidak diketahui, maka  $p_i$  harus ditaksir. Salah satu penaksir tak bias untuk  $p_i$  adalah  $p_{ij}$ , dan karena data terdiri dari  $m$  pengamatan, maka rata-rata penaksir untuk  $p_{ij}$  adalah  $\bar{p}_i$ .

### 3.3 Perbandingan Secara Teoritis Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial

Dari analisis secara teori Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial pada subbab di atas, didapatkan beberapa perbandingan dari Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial, diantaranya:

1. Statistik sampel yang digunakan untuk mengukur karakteristik kualitas Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik adalah  $M_j$ , yaitu rata-rata  $n$  sampel berdasarkan nilai representatif  $r_i$  pada tiap pengamatan ke- $j$ .  $M_j$  didefinisikan dengan  $M_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l k_{ij} r_i$ , dimana  $k_{ij}$  adalah banyaknya sampel kategori ke- $i$  pada pengamatan ke- $j$  untuk  $i = 1, 2, \dots, l$  dan  $j = 1, 2, \dots, m$ . Sedangkan statistik sampel yang digunakan untuk mengukur karakteristik

kualitas Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial adalah  $L_j$ , yaitu rata-rata nilai representatif  $r_i$  dari  $n$  sampel dalam setiap pengamatan ke- $j$  dan  $L_j$

didefinisikan dengan  $L_j = \sum_{i=1}^l \frac{k_{ij}}{n} r_i$ .

Dari penjelasan di atas dapat kita ketahui bahwa statistik sampel yang digunakan untuk mengukur karakteristik kualitas Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial adalah: untuk

$M_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l k_{ij} r_i$  berdasar nilai  $\frac{k_{ij} r_i}{n}$  dan untuk  $L_j = \sum_{i=1}^l \frac{k_{ij}}{n} r_i$  berdasar proporsi

$\frac{k_{ij}}{n} r_i$ . Sehingga dapat disimpulkan bahwa statistik sampel yang digunakan

untuk mengukur karakteristik kualitas Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial adalah sama.

2. Pendekatan parameter  $\mu$  untuk Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik adalah  $\mu_M$  yang ditaksir oleh  $\bar{M}$ , yaitu rata-rata dari keseluruhan data pengamatan, yang didefinisikan dengan:

$$\mu_M = \bar{M} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m M_j = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m k_{ij} r_i$$

Sedangkan pendekatan parameter  $\mu$  untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial adalah  $\mu_L$  yang ditaksir oleh  $E(L)$ , yaitu ekspektasi dari

keseluruhan data pengamatan, yang didefinisikan  $E(L) = \sum_{i=1}^l p_i r_i$ , dimana  $p_i$

ditaksir dengan  $p_i = \frac{k_{ij}}{n}$ .



Dari pernyataan di atas, dapat disimpulkan bahwa pendekatan parameter  $\mu$  untuk menentukan garis tengah (*center line*) Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial adalah sama.

3. Pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik untuk menaksir standar deviasi dari statistik adalah grafik pengendali variabel untuk target, sedangkan pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial untuk menaksir standar deviasi dari statistik didasarkan pada distribusi multinomial.
4. Pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik untuk menaksir standar deviasi dari statistik adalah  $\sigma_M$  dengan  $\sigma_M = \frac{SD_j}{c_4\sqrt{n}}$ , karena terdapat  $m$  pengamatan maka  $\sigma_M = \frac{MSD}{c_4\sqrt{n}}$ , yaitu rata-rata standar deviasi dari  $m$  pengamatan dan  $c_4$  adalah konstanta. Sedangkan pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial untuk menaksir standar deviasi dari statistik adalah  $\sigma_L$  yang ditaksir oleh  $\sqrt{Var(L)}$ , yaitu akar variansi dari statistik sampel  $L_j$  dengan

$$Var(L) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^l r_i^2 p_i (1-p_i) - 2 \sum_{i=1}^l \sum_{h=1}^l r_i r_h (p_i p_j) \right).$$

5. Pada Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial, karena  $E[L]$  dan  $\sqrt{Var(L)}$  memuat parameter  $p_i$  yang tidak diketahui, maka  $p_i$  harus ditaksir. Salah

satu penaksir tak bias untuk  $p_i$  adalah  $p_{ij}$ , dan karena data terdiri dari  $m$  pengamatan, maka rata-rata penaksir untuk  $p_i$  adalah  $\bar{p}_i$ .

6. Setelah mengetahui parameter  $\mu$  dan parameter  $\sigma$  untuk masing-masing Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial, sehingga dapat ditentukan batas kendali untuk Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik adalah:

$$UCL = \bar{M} + 3 \frac{MSD}{c_4 \sqrt{n}}$$

$$CL = \bar{M}$$

$$LCL = \bar{M} - 3 \frac{MSD}{c_4 \sqrt{n}}$$

dan batas kendali untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial adalah:

$$UCL = E[L] + k \sqrt{Var(L)}$$

$$CL = E[L]$$

$$LCL = E[L] - k \sqrt{Var(L)}$$

### 3.4 Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dengan Aplikasi Data

Berikut diberikan data suatu proses produksi kertas. Pada data produksi kertas berikut, terdapat beberapa kemungkinan penilaian, di antaranya sebagai berikut:

1. “*Reject*” atau “produk yang ditolak” jika kertas tidak baik
2. “Kualitas jelek” jika kertas baik tetapi memiliki beberapa cacat

3. “Kualitas cukup” jika kertas baik dan tidak memiliki cacat, tetapi memiliki kelemahan estetika
4. “Kualitas baik” jika kertas baik dan tidak memiliki cacat, tetapi hanya memiliki beberapa kelemahan estetika
5. “Kualitas sempurna” jika kertas baik dan tidak memiliki cacat atau kelemahan estetika apapun.

Pemantauan produksi, menggunakan teknik kontrol pengambilan sampel ditujukan untuk mengoreksi kecenderungan yang kurang baik dan di luar batas pengendali. Untuk melakukan ini, lima klasifikasi yang tercantum di atas bisa memiliki derajat keanggotaan yang berbeda.

Tabel 3.1 Data Produksi Kertas, dengan 20 Pengamatan dan 40 Sampel

Sampel	Size	reject	jelek	cukup	baik	sempurna
1	40	12	5	10	11	2
2	40	21	7	4	8	0
3	40	6	8	6	12	8
4	40	12	4	7	8	9
5	40	1	7	6	6	20
6	40	12	5	3	6	14
7	40	11	2	5	15	7
8	40	10	3	6	8	13
9	40	25	7	4	2	2
10	40	13	5	4	3	15
11	40	15	4	7	9	5
12	40	9	4	7	10	10
13	40	8	2	10	12	8
14	40	0	0	6	15	19
15	40	5	10	7	9	9
16	40	7	1	8	10	14
17	40	5	2	10	12	11
18	40	8	4	8	13	7
19	40	19	6	5	7	3
20	40	9	7	8	1	15

### 3.4.1. Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik

Di sini penulis menetapkan derajat keanggotaan untuk kelima karakteristik kualitas masing-masing: 1; 0,75; 0,5; 0,25; 0. Dengan kata lain,  $M_j = \{(reject, 1), (kualitas\ jelek, 0,75), (kualitas\ cukup, 0,5), (kualitas\ baik, 0,25), (kualitas\ sempurna, 0)\}$ .

Tabel 3.2 Data Produksi Kertas, dengan 20 Pengamatan dan 40 Sampel

Sampel	Size	Reject	Jelek	Cukup	Baik	Sempurna	$M_j$
1	40	12	5	10	11	2	0,5875
2	40	21	7	4	8	0	0,7563
3	40	6	8	6	12	8	0,4500
4	40	12	4	7	8	9	0,5125
5	40	3	7	6	6	18	0,2688
6	40	12	5	3	6	14	0,4688
7	40	11	2	5	15	7	0,4688
8	40	10	3	6	8	13	0,4313
9	40	25	7	4	2	2	0,8188
10	40	13	5	4	3	15	0,4875
11	40	15	4	7	9	5	0,5938
12	40	9	4	7	10	10	0,4500
13	40	8	2	10	12	8	0,4375
14	40	0	0	6	15	19	0,1688
15	40	5	10	7	9	9	0,4563
16	40	7	1	8	10	14	0,3563
17	40	5	2	10	12	11	0,3625
18	40	8	4	8	13	7	0,4563
19	40	17	6	5	7	5	0,6938
20	40	9	7	8	1	15	0,4625

Nilai  $M_j$  dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$M_j = \frac{k_{1j}r_1 + k_{2j}r_2 + \dots + k_{lj}r_l}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m k_{ij} r_i}{n}$$

dengan  $i=1,2,\dots,l$  dan  $j=1,2,\dots,m$  diperoleh:

$$M_1 = \frac{((12 \times 1) + (5 \times 0,75) + (10 \times 0,5) + (11 \times 0,25) + (2 \times 0))}{40} = 0,5875$$

$$M_2 = \frac{((21 \times 1) + (7 \times 0,75) + (4 \times 0,5) + (8 \times 0,25) + (0 \times 0))}{40} = 0,7563$$

$$M_3 = \frac{((6 \times 1) + (8 \times 0,75) + (6 \times 0,5) + (12 \times 0,25) + (8 \times 0))}{40} = 0,4500$$

$$M_4 = \frac{((12 \times 1) + (4 \times 0,75) + (7 \times 0,5) + (8 \times 0,25) + (9 \times 0))}{40} = 0,5125$$

dan seterusnya sampai  $M_{20}$ .

Batas kendali untuk Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik diperoleh

dari:

$$\begin{aligned} \bar{M}_j &= \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_m}{m} \\ &= \frac{9,6875}{20} = 0,4844 \end{aligned}$$

$$SD_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^l k_{ij} (r_i - M_j)^2}$$

dengan  $i=1,2,\dots,l$  dan  $j=1,2,\dots,m$  diperoleh:

$$\begin{aligned} SD_1 &= \sqrt{\frac{1}{40-1} (12(1-0,5875) + 5(0,75-0,5875) + 10(0,5-0,5875) + 11(0,25-0,5875) + 2(0-0,5875))} \\ &= \sqrt{\frac{1}{39} (2,0419 + 0,8508 + 1,7016 + 1,8717 + 0,3403)} = 0,3279 \end{aligned}$$

$$SD_2 = \sqrt{\frac{1}{40-1}(21(1-0,7563)+7(0,75-0,7563)+4(0,5-0,7563)+8(0,25-0,7563)+0(0-0,7563))}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{39}(1,2477+0,4159+0,2377+0,4753+0,0000)} = 0,3022$$

$$SD_3 = \sqrt{\frac{1}{40-1}(6(1-0,4500)+8(0,75-0,4500)+6(0,5-0,4500)+12(0,25-0,4500)+8(0-0,4500))}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{39}(1,8150+2,4200+1,8150+3,6300+2,4200)} = 0,3453$$

$$SD_4 = \sqrt{\frac{1}{40-1}(12(1-0,5125)+4(0,75-0,5125)+7(0,5-0,5125)+8(0,25-0,5125)+9(0-0,5125))}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{39}(2,8519+0,9506+1,6636+1,9013+2,1389)} = 0,3920$$

dan seterusnya sampai  $SD_{20}$ , sehingga diperoleh:

$$MSD = \frac{\sum_{j=1}^m SD_j}{m} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m SD_j$$

$$= \frac{7,0342}{20} = 0,3517$$

Batas kendali atas dan batas kendali bawah serta garis tengah pada Grafik

Pengendali Fuzzy Linguistik ditampilkan pada Tabel 3.3 berikut:

Tabel 3.3 Batas-Batas Kendali Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik pada Data Produksi Kertas

Sampel	Reject	Jelek	Cukup	Baik	Sempurna	$M_j$	CL	UCL	LCL
1	12	5	10	11	2	0,5875	0,4844	0,7236	0,2452
2	21	7	4	8	0	0,7563	0,4844	0,7236	0,2452
3	6	8	6	12	8	0,4500	0,4844	0,7236	0,2452
4	12	4	7	8	9	0,5125	0,4844	0,7236	0,2452
5	1	7	6	6	20	0,2688	0,4844	0,7236	0,2452
6	12	5	3	6	14	0,4688	0,4844	0,7236	0,2452
7	11	2	5	15	7	0,4688	0,4844	0,7236	0,2452
8	10	3	6	8	13	0,4313	0,4844	0,7236	0,2452
9	25	7	4	2	2	0,8188	0,4844	0,7236	0,2452
10	13	5	4	3	15	0,4875	0,4844	0,7236	0,2452
11	15	4	7	9	5	0,5938	0,4844	0,7236	0,2452
12	9	4	7	10	10	0,4500	0,4844	0,7236	0,2452
13	8	2	10	12	8	0,4375	0,4844	0,7236	0,2452
14	0	0	6	15	19	0,1688	0,4844	0,7236	0,2452
15	5	10	7	9	9	0,4563	0,4844	0,7236	0,2452
16	7	1	8	10	14	0,3563	0,4844	0,7236	0,2452
17	5	2	10	12	11	0,3625	0,4844	0,7236	0,2452
18	8	4	8	13	7	0,4563	0,4844	0,7236	0,2452
19	19	6	5	7	3	0,6938	0,4844	0,7236	0,2452
20	9	7	8	1	15	0,4625	0,4844	0,7236	0,2452

$$UCL = \bar{M}_j + A_3MSD$$

$$= 0,4844 + 0,680(0,3517) = 0,7236$$

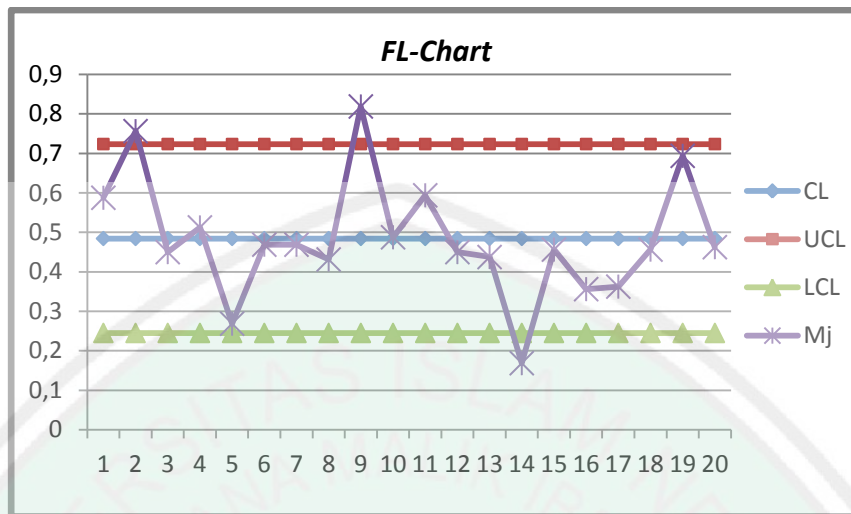
$$CL = \bar{M}_j$$

$$= 0,4844$$

$$LCL = \bar{M}_j - A_3MSD$$

$$= 0,4844 - 0,680(0,3517) = 0,2452$$

Setelah diketahui nilai  $M_j$  serta batas-batas kendalinya, kemudian nilai  $M_j$  serta nilai batas-batas kendalinya diplotkan sehingga muncul Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik seperti pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik

Pada Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik di atas nampak beberapa titik yang keluar dari batas kendali atau yang disebut dengan *out of control*. Yaitu pada sampel ke-2 dengan nilai rata-ran representatif sama dengan 0,7563, sampel ke-9 dengan nilai rata-ran representatif sama dengan 0,8188, dan sampel ke-14 dengan nilai rata-ran representatif sama dengan 0,1688.

### 3.4.2. Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial

Sebagaimana pada Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik, penulis menetapkan derajat keanggotaan untuk ke lima karakteristik kualitas masing-masing: 1; 0,75; 0,5; 0,25; 0. Dengan kata lain,  $\tilde{L}_j = \{(reject, 1), (kualitas\ jelek, 0,75), (kualitas\ cukup, 0,5), (kualitas\ baik, 0,25), (kualitas\ sempurna, 0)\}$ .



Tabel 3.4 Data Produksi Kertas dengan 20 Pengamatan dan 40 Sampel

Sampel	Size	Reject	Jelek	Cukup	Baik	Sempurna	$\tilde{L}_j$
1	40	12	5	10	11	2	0,5875
2	40	21	7	4	8	0	0,7563
3	40	6	8	6	12	8	0,4500
4	40	12	4	7	8	9	0,5125
5	40	1	7	6	6	20	0,2688
6	40	12	5	3	6	14	0,4688
7	40	11	2	5	15	7	0,4688
8	40	10	3	6	8	13	0,4313
9	40	25	7	4	2	2	0,8188
10	40	13	5	4	3	15	0,4875
11	40	15	4	7	9	5	0,5938
12	40	9	4	7	10	10	0,4500
13	40	8	2	10	12	8	0,4375
14	40	0	0	6	15	19	0,1688
15	40	5	10	7	9	9	0,4563
16	40	7	1	8	10	14	0,3563
17	40	5	2	10	12	11	0,3625
18	40	8	4	8	13	7	0,4563
19	40	19	6	5	7	3	0,6938
20	40	9	7	8	1	15	0,4625

Nilai  $\tilde{L}_j$  dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$L_j = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m k_{ij} r_i}{n}$$

untuk  $i=1,2,\dots,l$  dan  $j=1,2,\dots,m$  diperoleh:

$$L_1 = \frac{((12 \times 1) + (5 \times 0,75) + (10 \times 0,5) + (11 \times 0,25) + (2 \times 0))}{40} = 0,5875$$

$$L_2 = \frac{((21 \times 1) + (7 \times 0,75) + (4 \times 0,5) + (8 \times 0,25) + (0 \times 0))}{40} = 0,7563$$

$$L_3 = \frac{((6 \times 1) + (8 \times 0,75) + (6 \times 0,5) + (12 \times 0,25) + (8 \times 0))}{40} = 0,4500$$

$$L_4 = \frac{((12 \times 1) + (4 \times 0,75) + (7 \times 0,5) + (8 \times 0,25) + (9 \times 0))}{40} = 0,5125$$

Batas kendali untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial diperoleh dari:

$$UCL = E[L] + k\sqrt{\text{Var}(L)}$$

$$= 0,4844 + 3\sqrt{0,0617}$$

$$= 0,6697$$

$$CL = E[L]$$

$$= 0,4844$$

$$LCL = E[L] - k\sqrt{\text{Var}(L)}$$

$$= 0,4844 - 3\sqrt{0,0617}$$

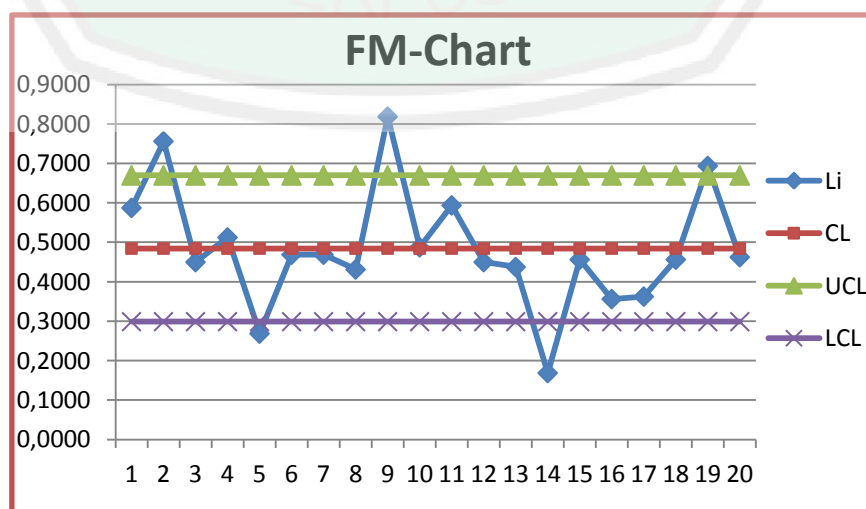
$$= 0,2990$$

Untuk seluruhnya dapat dilihat pada Tabel 3.5 berikut.

Tabel 3.5 Batas-Batas Kendali Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial pada Data Produksi Kertas

Sampel	Reject	Jelek	Cukup	Baik	Sempurna	$\tilde{L}_j$	CL	UCL	LCL
1	12	5	10	11	2	0,5875	0,4844	0,6697	0,2990
2	21	7	4	8	0	0,7563	0,4844	0,6697	0,2990
3	6	8	6	12	8	0,4500	0,4844	0,6697	0,2990
4	12	4	7	8	9	0,5125	0,4844	0,6697	0,2990
5	1	7	6	6	20	0,2688	0,4844	0,6697	0,2990
6	12	5	3	6	14	0,4688	0,4844	0,6697	0,2990
7	11	2	5	15	7	0,4688	0,4844	0,6697	0,2990
8	10	3	6	8	13	0,4313	0,4844	0,6697	0,2990
9	25	7	4	2	2	0,8188	0,4844	0,6697	0,2990
10	13	5	4	3	15	0,4875	0,4844	0,6697	0,2990
11	15	4	7	9	5	0,5938	0,4844	0,6697	0,2990
12	9	4	7	10	10	0,4500	0,4844	0,6697	0,2990
13	8	2	10	12	8	0,4375	0,4844	0,6697	0,2990
14	0	0	6	15	19	0,1688	0,4844	0,6697	0,2990
15	5	10	7	9	9	0,4563	0,4844	0,6697	0,2990
16	7	1	8	10	14	0,3563	0,4844	0,6697	0,2990
17	5	2	10	12	11	0,3625	0,4844	0,6697	0,2990
18	8	4	8	13	7	0,4563	0,4844	0,6697	0,2990
19	19	6	5	7	3	0,6938	0,4844	0,6697	0,2990
20	9	7	8	1	15	0,4625	0,4844	0,6697	0,2990

Setelah diketahui nilai  $\tilde{L}_j$  serta batas-batas kendalnya, kemudian nilai  $\tilde{L}_j$  serta nilai batas-batas kendali diplotkan sehingga muncul Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial seperti pada Gambar 3.3. berikut



Gambar 3.3 Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial

Pada gambar Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial di atas nampak beberapa titik yang keluar dari batas kendali atau yang disebut dengan *out of control*. Yaitu pada sampel ke-2 dengan nilai rata-ran representatif sama dengan 0,7563, sampel ke-5 dengan nilai rata-ran representatif sama dengan 0,2688, sampel ke-9 dengan nilai rata-ran representatif sama dengan 0,8188, sampel ke-14 dengan nilai rata-ran representatif sama dengan 0,1688, dan sampel ke-19 dengan nilai rata-ran representatif sama dengan 0,6938.

### **3.5 Hasil Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dengan Aplikasi Data**

Perbandingan antara hasil pengontrolan kualitas dengan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dilakukan untuk mengetahui grafik pengendali mana yang menghasilkan keputusan lebih teliti. Perbandingan hasil dari kedua metode pengontrolan kualitas disajikan pada Tabel 3.6. Berdasarkan Tabel 3.6 diketahui bahwa pada kasus ini, pengontrolan produksi dengan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik menghasilkan tiga titik pengamatan yang *out of control*, sedangkan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial menghasilkan lima titik pengamatan yang *out of control*. Hasil pengontrolan kualitas untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial lebih teliti dibandingkan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik, karena pada Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial setiap pengamatan memiliki nilai batas kendali yang lebih sempit, selain itu Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial juga mendeteksi titik *out of control* lebih banyak dibandingkan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik.

Tabel 3.6 Hasil Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial dengan Aplikasi Data

<b>Sampel</b>	<b>Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik</b>	<b>Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial</b>
1	<i>In control</i>	<i>In control</i>
2	<i>Out of control</i>	<i>Out of control</i>
3	<i>In control</i>	<i>In control</i>
4	<i>In control</i>	<i>In control</i>
5	<i>In control</i>	<i>Out of control</i>
6	<i>In control</i>	<i>In control</i>
7	<i>In control</i>	<i>In control</i>
8	<i>In control</i>	<i>In control</i>
9	<i>Out of control</i>	<i>Out of control</i>
10	<i>In control</i>	<i>In control</i>
11	<i>In control</i>	<i>In control</i>
12	<i>In control</i>	<i>In control</i>
13	<i>In control</i>	<i>In control</i>
14	<i>Out of control</i>	<i>Out of control</i>
15	<i>In control</i>	<i>In control</i>
16	<i>In control</i>	<i>In control</i>
17	<i>In control</i>	<i>In control</i>
18	<i>In control</i>	<i>In control</i>
19	<i>In control</i>	<i>Out of control</i>
20	<i>In control</i>	<i>In control</i>

Dengan membandingkan kedua grafik pengendali, hasil aplikasi menunjukkan bahwa grafik pengendali yang dapat mendeteksi data-data yang keluar dari batas kendali terbanyak merupakan grafik pengendali yang berkualitas. Dalam hal ini, grafik pengendali yang berkualitas adalah Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial, hal tersebut menunjukkan bahwa semakin sempit batas kendali semakin dapat menghasilkan hasil yang layak untuk dipasarkan, karena pada dasarnya Allah SWT berfirman dalam al-Qur'an surat an-Naml ayat 88:

وَتَرَى الْجِبَالَ تَحْسِبُهَا جَامِدَةً وَهِيَ تَمُرُّ مَرَّ السَّحَابِ ۗ صُنِعَ اللَّهُ الَّذِي الَّذِي أَتَقَنَ كُلَّ شَيْءٍ إِنَّهُ خَيْرٌ بِمَا تَفْعَلُونَ ﴿٨٨﴾

*Artinya: "Dan kamu lihat gunung-gunung itu, kamu sangka dia tetap di tempatnya, Padahal ia berjalan sebagai jalannya awan. (Begitulah) perbuatan Allah yang membuat dengan kokoh tiap-tiap sesuatu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan." (QS. an-Naml: 88)*

Ayat tersebut menunjukkan bahwa Allah SWT menciptakan sesuatu dengan sempurna (profesional), dalam ayat ini diibaratkan sebuah gunung yang diciptakan dengan kokoh (sempurna) seperti halnya manusia diciptakan Allah SWT dengan sempurna karena memiliki akal pikiran yang dapat menunjukkan sifat profesional yang berarti memiliki potensi dan kualitas yang baik.

## **BAB IV**

### **PENUTUP**

#### **4.1 Kesimpulan**

Berdasarkan penjelasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa secara teori pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik untuk menaksir standar deviasi dari statistik adalah grafik pengendali variabel untuk target, dinyatakan dengan  $\sigma_M$  dan pendekatan yang digunakan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial untuk menaksir standar deviasi dari statistik didasarkan pada distribusi multinomial, dinyatakan dengan  $\sigma_L$ . Sedangkan dengan aplikasi data 20 pengamatan dan 40 sampel, diketahui bahwa hasil pengontrolan kualitas untuk Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial lebih sensitif dalam mendeteksi titik *out of control* dibandingkan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik, karena pada Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial setiap pengamatan memiliki nilai batas kendali yang lebih sempit, selain itu Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial juga mendeteksi titik *out of control* lebih banyak dibandingkan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik.

#### **4.2 Saran**

Penelitian ini, masih dapat dikembangkan sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya agar menggunakan ukuran sampel yang berbeda-beda dan lebih dari 20 pengamatan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Adiningsih, Sri. 2009. *Statistik*. Edisi Pertama. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.
- Amirzadeh, V. dkk. 2008. *Construction of Control Charts Using Fuzzy Multinomial Quality*. Journal of Mathematics and Statistics 4 (1): 26-31. <http://thescipub.com/pdf/10.3844/jmssp.2008.26.31> (diakses pada 04 Desember 2011).
- Ariani, Dorothea Wahyu. 2004. *Pengendalian Kualitas Statistik*. Yogyakarta: Andi.
- Ath-Thabari, Muhammad bin Jarir. 2008. *Jami' Al Bayan an Ta'win Ayi Al Qur'an*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Dudewicz, Edward J dan Mishra, Satya N. 1995. *Statistik Matematika Modern*. Bandung: ITB
- Gaspersz, Vincent. 1998. *Statistical Proses Control Penerapan Teknik-Teknik Statistikal dalam Manajemen Bisnis Total*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.
- Harini, Sri dan Kusumawati, Ririen. 2007. *Metode Statistika*. Malang: Prestasi Pustaka Publisher
- Hidayat, Akik. 2006. *Pengendalian Proses Produksi Menggunakan Peta Kendali Variabel Fuzzy Linguistik*.  
[http://repository.unpad.ac.id/bitstream/handle/123456789/2034/pengendalian\\_proses\\_produksi\\_menggunakan\\_peta\\_kendali\\_variabel\\_fuzzy\\_linguistik.ps](http://repository.unpad.ac.id/bitstream/handle/123456789/2034/pengendalian_proses_produksi_menggunakan_peta_kendali_variabel_fuzzy_linguistik.ps) (diakses pada 29 Februari 2012).
- Kusumadewi, Sri dan P., Hari 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Montgomery, Douglas C. 1990. *Pengantar Pengendalian Kualitas Statistik*. Terjemahan Zanzawi Soejoeti. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.
- Montgomery, Douglas C. 1991. *Introduction to Statistical Quality Control*. Singapore: John Wiley dan Sons.
- Shihab, M. Quraish. 2005. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Sudjana. 2005. *Metoda Statistika*. Edisi Keenam. Bandung: Tarsito.
- Sugihartanti, Ikalia. 2012. *Pengontrolan Kualitas Produksi Botol Sting 240 ml di Pt.Iglas dengan Menggunakan Diagram Kontrol Fuzzy Dan Direct*



*Fuzzy Approach (DFA). Tugas Akhir* Tidak Diterbitkan. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya.

<http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-18019-pengontrolan-kualitas-produksi-botol-sting-240ml-di-ptiglas-dengan-menggunakan-diagram-kontrol-fuzzy.pdf> (diakses pada tanggal 9 Maret 2012).

Turmudzi dan Harini, Sri. 2008. *Metode Statistika Pendekatan Teoritis dan Aplikatif*. Malang: UIN Malang Press.

Walpole, Ronald E. 1995. *Pengantar Statistik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Walpole, Ronald E. dan Myers, Raymond H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan Edisi Keempat*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.





**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 558933 Fax. (0341) 558933

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mukhlis Zulfa  
NIM : 08610008  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Perbandingan Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik dan Grafik Pengendali Fuzzy Multinomial  
Pembimbing I : Fachrur Rozi, M.Si  
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	04 Juni 2012	Konsultasi Bab I	1.
2	22 Juni 2012	ACC Bab I	2.
3	05 Juli 2012	Konsultasi Bab II	3.
4	30 Juli 2012	Konsultasi Kajian Agama	4.
5	06 Agustus 2012	Konsultasi Bab III	5.
6	07 Agustus 2012	Konsultasi Kajian Agama	6.
7	14 Agustus 2012	Revisi Bab II dan Bab III	7.
8	08 September 2012	Revisi Bab III	8.
9	15 September 2012	ACC Bab II dan Bab III	9.
10	25 September 2012	Konsultasi Kajian Agama	10.
11	22 September 2012	Konsultasi Bab IV	11.
12	27 September 2012	ACC Bab IV	12.
13	29 September 2012	ACC Kajian Agama	13.
14	29 September 2012	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 29 September 2012

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## LAMPIRAN

**Lampiran 1. Faktor-Faktor untuk Menentukan Garis Tengah dan Batas Pengendali  $3\sigma$**

Observasi Sampel, $n$	Grafik Rata-rata, $\bar{X}$			Grafik Standar Deviasi, $S$						Grafik Rentang, $R$						
	Faktor untuk Batas Pengendali			Faktor untuk Garis Tengah		Faktor untuk Batas Pengendali				Faktor untuk Garis Tengah		Faktor untuk Batas Pengendali				
	$A$	$A_2$	$A_3$	$c_4$	$1/c_4$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$d_2$	$1/d_2$	$d_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
2	2,121	1,880	2,659	0,7979	1,253	0	3,267	0	2,606	1,128	0,8865	0,853	0	3,686	0	3,267
3	1,732	1,023	2,954	0,8862	1,128	0	2,568	0	2,276	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,574
4	1,500	0,729	1,628	0,9213	1,085	0	2,266	0	2,088	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,282
5	1,342	0,577	1,427	0,9400	1,064	0	2,089	0	1,964	2,326	0,4299	0,864	0	4,918	0	2,114
6	1,225	0,483	1,287	0,9515	1,051	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,042	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,3698	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099	0,9650	1,036	0,185	1,815	0,179	1,751	2,847	0,3512	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	0,337	1,032	0,9693	1,023	0,239	1,761	0,232	1,707	2,970	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,028	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927	0,9754	1,025	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,3152	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,266	0,866	0,9776	1,023	0,354	1,646	0,346	1,610	3,258	0,3069	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850	0,9794	1,021	0,382	1,618	0,374	1,585	3,336	0,2998	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817	0,9810	1,019	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,223	0,789	0,9823	1,018	0,428	1,572	0,421	1,544	3,472	0,2880	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,212	0,763	0,9835	1,017	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,016	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,194	0,718	0,9854	1,015	0,482	1,518	0,475	1,496	3,640	0,2747	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,187	0,698	0,9862	1,014	0,497	1,503	0,490	1,483	3,689	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597

20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,013	0,510	1,490	0,504	1,470	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,013	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,647	0,9882	1,012	0,534	1,466	0,528	1,448	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,011	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,011	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,010	0,565	1,435	0,559	1,420	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

Sumber: Montgomery, 1990

Untuk  $n > 25$ :

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}}, \quad A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}, \quad c_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}, \quad B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

**Lampiran 2. Batas Kendali Grafik Pengendali Fuzzy Linguistik**

Sampel	Size	<i>reject</i>	jelek	cukup	baik	sempurna	$M_j$	<i>SD</i>	<i>MSD</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>
1	40	12	5	10	11	2	0,5875	0,3279	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
2	40	21	7	4	8	0	0,7563	0,3022	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
3	40	6	8	6	12	8	0,4500	0,3453	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
4	40	12	4	7	8	9	0,5125	0,3920	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
5	40	1	7	6	6	20	0,2688	0,3172	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
6	40	12	5	3	6	14	0,4688	0,4281	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
7	40	11	2	5	15	7	0,4688	0,3763	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
8	40	10	3	6	8	13	0,4313	0,4003	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
9	40	25	7	4	2	2	0,8188	0,2886	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
10	40	13	5	4	3	15	0,4875	0,4383	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
11	40	15	4	7	9	5	0,5938	0,3742	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
12	40	9	4	7	10	10	0,4500	0,3764	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
13	40	8	2	10	12	8	0,4375	0,3478	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
14	40	0	0	6	15	19	0,1688	0,1825	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
15	40	5	10	7	9	9	0,4563	0,3438	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
16	40	7	1	8	10	14	0,3563	0,3620	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
17	40	5	2	10	12	11	0,3625	0,3250	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
18	40	8	4	8	13	7	0,4563	0,3485	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
19	40	19	6	5	7	3	0,6938	0,3512	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452
20	40	9	7	8	1	15	0,4625	0,4065	0,3517	0,4844	0,7236	0,2452